Matyáš Lerch

Démonstration élémentaire d'une formule de Raabe

Batt. G. 26 (1888), 39–40

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501637

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE
D'UNE FORMULE DE RAABE

PAR

M. LERCH
Docent à l'École Polytechnique tchèque de Prague.

Considérons l'intégrale

$$\int_0^1 \lg \Gamma(x+u)\, dx = F(u)$$

et supposons que u soit réel et positif.

Posant $x+u=z$ cette intégrale se change en

$$F(u) = \int_u^{u+1} \log \Gamma(z)\, dz$$

d'où il suit la formule

$$\frac{d}{du} F(u) = \lg \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(u)} = \lg u$$

dont on conclut

$$F(u) = C + u \log u - u\,, \tag{1}$$

C désignant la constante d'intégration.

On a évidemment

$$C = \int_0^1 \lg \Gamma(x)\, dx\,;$$

la formule

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

nous donnera

$$\int_0^1 \lg \Gamma(x)\, dx = \lg \pi - \int_0^1 \lg \operatorname{sen} \pi x\, dx - \int_0^1 \lg \Gamma(1-x)\, dx$$

et puisqu'on a

$$\int_0^1 \lg \Gamma(1-x)\, dx = \int_0^1 \lg \Gamma(x)\, dx$$

il s'en suit

$$2\int_0^1 \lg \Gamma(x)\, dx = \lg \pi - \int_0^1 \lg \sin \pi x\, dx = \lg 2\pi$$

de sorte qu'on aura enfin

$$C = \frac{1}{2} \lg 2\pi.$$

En substituant cette valeur dans la formule (1) il vient

$$(2) \qquad \int_0^1 \lg \Gamma(x+u)\, dx = u \lg u - u + \frac{1}{2} \lg 2\pi.$$

Cette formule a été donnée par *Raabe* et démontrée de plusieurs manières moins simples que la précédente.