Matyáš Lerch

Sur un théorème relatif à la théorie des fonctions elliptiques

Jornal des sciencias mathematicas e astronomicas, Coimbra, 8 (1887), 3–10

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501634

SUR UN THÉORÈME RELATIF A LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

(Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

M. LERCH

(à Prague)

Je prends la liberté de vous communiquer une démonstration d'une propriété de la fonction elliptique

$$\Theta(\tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\nu^2 \tau \pi i},$$

où le coefficient de i dans la quantité complexe τ est supposé positif.

Dans les *Monatsberichte* de Berlin de 1880 Mr. Weierstrass dit que cette fonction n'existe que pour les valeurs de τ dont la partie imaginaire est positive, c'est-à-dire pour lesquelles le module de la quantité $q = e^{\tau \pi i}$ est inférieur à l'unité.

Il en a donné une démonstration dans son excellent livre *Abhandlungen aus der functionenlehre* (1886). Dans le tome cité des *Monatsberichte* se trouve aussi un article de Mr. Kronecker (Ueber den vierten Gauss'schen Beweis etc.) contenant un grand nombre des remarques méthodiques relatives à la théorie des fonctions elliptiques. L'étude de ce mémoire m'a inspiré une autre démonstration de la dicte propriété de la fonction $\Theta(\tau)$ que j'ai faite avant la lecture du livre cité de Mr. Weierstrass et qui est bien différente de celle qui a été donné par l'éminent géomètre de Berlin.

Soit α une quantité réelle positive et prenons

$$\tau = \frac{2m}{n} + \alpha i, \quad \alpha > 0$$

m, n étant deux nombres entiers; nous aurons évidemment

$$\Theta\left(\frac{2m}{n} + \alpha i\right) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2m\nu^2}{n}\pi i} e^{-\alpha\pi\nu^2};$$

posant alors

$$\nu = r + \mu n, \quad (r = 0, 1, \ldots, n-1)$$

il vient

$$(1) \qquad \Theta\left(\frac{2m}{n} + \alpha i\right) = \sum_{r=0}^{n-1} e^{\frac{2mr^2}{n}\pi i} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\pi(r+\mu n)^2}.$$

Il s'agit ici de la manière dont se comporte la fonction

$$\Theta\left(\frac{2m}{n} + \alpha i\right)$$

pour les valeurs infiniment petites de α, ce qui sera connu quand on reconnaîtra le caractère correspondant de la série

$$(2) \qquad S_r = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\pi(r+\mu n)^2}.$$

C'est pourquoi je me borne à l'étude des séries

$$S'_r = \sum_{\mu=0}^{\infty} e^{-\alpha\pi(r+\mu n)^2}, \quad S''_r = \sum_{\mu=1}^{\infty} e^{-\alpha\pi(-r+\mu n)^2}$$

dont la somme est évidemment égale à S_r.

La fonction $e^{-\alpha\pi(r+zn)^2}$ de la variable réelle z décroissant quand

z croît dépuis zéro jusqu'à l'infini nous avons d'après un théorème élémentaire

$$e^{-\alpha\pi(r+\mu n)^2} > \int_{\mu}^{\mu+1} e^{-\alpha\pi(r+zn)^2}\,dz > e^{-\alpha\pi(r+\mu n+n)^2}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$ne^{-\alpha\pi(r+\mu n)^2} > \int_{r+\mu n}^{r+(\mu+1)n} e^{-\alpha\pi x^2}\,dx > e^{-\alpha\pi(r+\mu n+n)^2}.$$

En y posant successivement $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ et en faisant la somme des résultats nous aurons

$$n\sum_{\mu=0}^{\infty} e^{-\alpha\pi(r+\mu n)^2} > \int_{r}^{\infty} e^{-\alpha\pi x^2}\,dx > n\sum_{\mu=1}^{\infty} e^{-\alpha\pi(r+\mu n)^2}$$

d'ou l'on conclut l'égalité

$$nS'_r = \int_{r}^{\infty} e^{-\alpha\pi x^2}\,dx + n\varepsilon e^{-\alpha\pi r^2}, \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

Posant $z = x\sqrt{\alpha}$ il vient

$$\int_{r}^{\infty} e^{-\alpha\pi x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{r\sqrt{\alpha}}^{\infty} e^{-\pi z^2}\,dz$$

et par conséquent

$$n\sqrt{\alpha}\,S'_r = \int_{r\sqrt{\alpha}}^{\infty} e^{-\pi z^2}\,dz + n\varepsilon\sqrt{\alpha}\,e^{-\alpha\pi r^2}$$

d'où on tire la formule

$$n\lim_{\alpha=0}\sqrt{\alpha}\,S'_r = \int_{0}^{\infty} e^{-\pi z^2}\,dz = \frac{1}{2}.$$

On trouve de la même manière

$$n \lim_{\alpha=0} \sqrt{\alpha}\, S''_r = \frac{1}{2},$$

de sorte qu'on aura

$$(3) \qquad n \lim_{\alpha=0} \sqrt{\alpha}\, S_r = 1.$$

Donc nous aurons d'après l'équation (1)

$$(4) \qquad \lim_{\alpha=0} \Theta\left(\frac{2m}{n} + \alpha i\right)\sqrt{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{\tau=0}^{n-1} e^{\frac{2m\tau^2}{n}\pi i} = \Phi\left(\frac{2m}{n}\right).$$

Supposons donc qu'il existe pour une certaine valeur réelle τ_0 une série de la forme

$$c_0 + c_1(\tau - \tau_0) + c_2(\tau - \tau_0)^2 + \ldots + c_\nu(\tau - \tau_0)^\nu + \ldots$$

convergente dans un certain entourage du point τ_0, et que, pour les valeurs de τ de cet entourage ayant la partie imaginaire positive, cette série soit égale à la fonction $\Theta(\tau)$. Cette supposition exige, pour chaque valeur rationnelle $\frac{2m}{n}$ contenue dans l'intervalle $(\tau_0 - \rho \ldots \tau_0 + \rho)$, que la limite $\lim_{\alpha=0} \Theta\left(\frac{2m}{n} + \alpha i\right)$ soit finie, de sorte qu'on ait, d'après (4), $\Phi\left(\frac{2m}{n}\right) = 0$. Mais c'est impossible puisqu'on sait depuis Gauss et Dirichlet que chaque intervalle contient une infinité des nombres rationnels $\frac{2m}{n}$ tels que $\Phi\left(\frac{2m}{n}\right)$ est différent de zéro. Donc la fonction $\Theta(\tau)$ n'existe point pour les valeurs réelles de τ de sorte que l'axe réel est une *ligne singulière* de la fonction $\Theta(\tau)$ ce qui est le théorème en question.

Vous voyez, Monsieur, que la démonstration de la formule (3) que je viens de développer est au fond la même qui a été donnée par Poisson et Cauchy, mais elle est exacte tandis que celles-ci ne le *sont pas*. A *la manière dont j'ai obtenu la formule* (3) peut être substituée avec succès la suivante qui repose sur le théorème de Poisson exprimé par la formule

$$\theta_3(u \mid \tau) = \left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right) e^{-\frac{\pi i}{\tau} u^2} \theta_3\left(\frac{u}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right),$$

où

$$\theta_3(u \mid \tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (\nu^2 \tau + 2\nu u)}$$

et où $\left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right)$ désigne, d'après Mr. Kronecker, celle des deux valeurs de la racine $\sqrt{\frac{i}{\tau}}$ dont la partie réelle est positive.

En effet on voit d'après l'équation (2) que

$$S_r = e^{-\alpha \pi r^2} \theta_3(n\alpha i \mid n^2 \alpha i);$$

en y appliquant la formule de Poisson on trouve

$$\theta_3(n\alpha i \mid n^2 \alpha i) = \sqrt{\frac{1}{n^2 \alpha}}\, e^{\alpha \pi} \theta_3\left(\frac{1}{n} \middle| \frac{i}{n^2 \alpha}\right)$$

d'où on tire

$$\lim_{\alpha=0} n \sqrt{\alpha}\, \theta_3(n\alpha i \mid n^2 \alpha i) = \lim_{\alpha=0} \theta_3\left(\frac{1}{n} \middle| \frac{i}{n^2 \alpha}\right) = 1$$

d'où l'on a la relation cherchée (3).

Vous avez reçu sans doute ma petite note «*Contributions à la théorie des fonctions*» (insérée dans la Société Roy. des Sciences de Bohême en 1886) où j'ai développé une démonstration de ce que la fonction $\theta_3(u \mid \tau)$ a l'axe réel dans le plan des τ pour *ligne singulière* quelle que soit la valeur de u (à l'exception du cas où cette fonction s'annulle pour chaque valeur de τ), et cette démonstration a été extremement facile pour les valeurs complexes de u. Dans le même mémoire j'ai démontré que la fonction

$$\Phi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{2^\nu}$$

n'existe que pour les valeurs de z dont le module est moindre que l'unité. Voici une autre démonstration de ce fait.

Posons $z = e^{\pi i x}$ en supposant positive la partie imaginaire de x. En écrivant

$$\Phi\left(e^{\pi i x}\right) = f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{2^\nu \pi i x}$$

nous aurons

$$(a) \qquad f\left(\frac{m}{2^{n-1}} + \alpha i\right) = \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{2^{\nu-n+1} m\pi i - \alpha\pi 2^\nu} + \sum_{\nu=n}^{\infty} e^{-\alpha\pi 2^\nu},$$

m, n étant deux nombres entiers, le premier quelconque, le second positif, et α désignant une quantité réelle et positive.

Considérons la fonction

$$\varphi(\alpha) = \sum_{\nu=n}^{\infty} e^{-\alpha\pi 2^\nu}$$

qui figure dans le second membre de l'équation (a).

L'inégalité évidente

$$e^{-\alpha\pi 2^\nu} > \int_\nu^{\nu+1} e^{-\alpha\pi 2^z} dz > e^{-\alpha\pi 2^{\nu+1}}$$

nous offre la suivante

$$\varphi(\alpha) > \int_n^{\infty} e^{-\alpha\pi 2^z} dz > -e^{-\alpha\pi 2^n} + \varphi(\alpha)$$

d'où nous aurons

$$(b) \qquad \varphi(\alpha) = \int_n^{\infty} e^{-\alpha\pi 2^z} dz + \varepsilon e^{-\alpha\pi 2^n}, \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

Posant maintenant $\alpha 2^z = t$ il vient

$$\int_n^{+\infty} e^{-\alpha\pi 2^z}\, dz = c\int_{\alpha 2^n}^{+\infty} e^{-\pi t}\,\frac{dt}{t}, \quad c = \frac{1}{\lg 2}.$$

Or cette intégrale est une fonction de la forme $c \lg \alpha + \psi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ étant inférieur à une certaine limite finie indépendante de la valeur positive de la quantité suffisemment petite α, de sorte que l'on a suivant l'équation (b)

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\varphi(\alpha)}{\lg \alpha} = \frac{1}{\lg 2}$$

et, par conséquent, la formule

$$\lim_{\alpha=0} \frac{f\left(\frac{m}{2^n} + \alpha i\right)}{\lg \alpha} = \frac{1}{\lg 2}$$

d'où l'on conclut facilement le théorème dont il s'agit.

J'ai déjà remarqué que la méthode appliquée par Poisson et Cauchy pour la démonstration de la formule (3) est inexacte. Elle consiste dans le changement d'une série en une intégrale définie, changement tout à fait analogue à celui dont je vais affirmer l'illégitimité. Pour démontrer la formule

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

on s'est servi du raisonnement suivant: «Soit δ une quantité positive moindre que π, et considérons la formule

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu\delta}{\nu\delta}\,\delta = \frac{\pi - \delta}{2};$$

en posant $\dfrac{\sin x}{x} = \psi(x)$ elle devient

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \psi(\nu\delta)\,\delta = \frac{\pi - \delta}{2}.$$

Or pour les valeurs infiniment petites de δ le premier membre s'échange en

$$\int_0^{\infty} \psi(x)\, dx, \quad \text{etc.»}$$

Vous voyer, Monsieur, que ce passage de la somme $\Sigma\psi(\nu\delta)\,\delta$ à l'intégrale $\int_0^{\infty} \psi(x)\, dx$ est inadmissible et il pourrait conduire aux résultats inexactes; il est donc lui même à rejeter si on ne le peut modifier d'une telle manière comme je l'ait montré plus haut dans deux cas très-simples.