Matyáš Lerch

O čarách a plochách, jež se vytvořují při kotálení kruhu po čáře rovinné, jakož i o některých jiných plochách kruhových: Část první. Plochy kotálnic kruhových a inversní plochy válců a kuželů

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 26 (1917), 1–157

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501606

O čarách a plochách, jež se vytvořují při kotálení kruhu po čáře rovinné, jakož i o některých jiných plochách kruhových.

Podává M. LERCH v Brně.

Část první.

Plochy kotálnic kruhových a inversní plochy válců i kuželů.

S 18 obrazci v textu.

Předloženo dne 27. června 1916.

1.

V rovině Oxy buď dána čára Am, po které nechť se kotálí (valí) kruh poloměru a, jehož rovina má stálý sklon α k rovině pevné čáry Am; určitý bod P v rovině valeného kruhu opisuje při tom čáru, prostorovou kotálnici (P).

Je-li C střed valeného kruhu, veďme jeho poloměr CPM obsahující bod opisující P. Koncový bod M zaujímal na počátku kotálení polohu A, po jisté době zaujme hybný kruh polohu v rovině vedené tečnou řídící čáry Am v bodě m, a bude se tento kruh tečny této sám v bodě m dotýkati; délka odvaleného oblouku Am na čáře pevné bude rovna délce odvaleného oblouku Mm na kruhu hybném.

Znamenejme s_0 délku oblouku Am, $x_0 y_0$ pravoúhlé souřadnice bodu m, a buď τ úhel, který svírá tečna pevné čáry vzatá ve směru pohybu s kladným směrem osy Ox, takže $\cos\tau = \frac{dx_0}{ds_0}$, $\sin\tau = \frac{dy_0}{ds_0}$. Vzdálenost opisujícího bodu P od středu hybného kruhu t. j. délku CP znamenejme g, dále buď $\varphi = mCM$ „odvalený úhel" na hybném kruhu, α pak úhel jeho roviny s rovinou Oxy, tak měřený, že polourovina $\alpha = 0$ leží po pravé straně kladného směru pohybu, a jest α kladné pro případ, že kruh leží na straně $z > 0$ roviny Oxy.

Délka kolmice PQ spuštěné z bodu P na tečnu $m\tau$ má hodnotu

$$PQ = a - g\cos\varphi,$$

dále jest

$$m\,Q = g \sin \varphi.$$

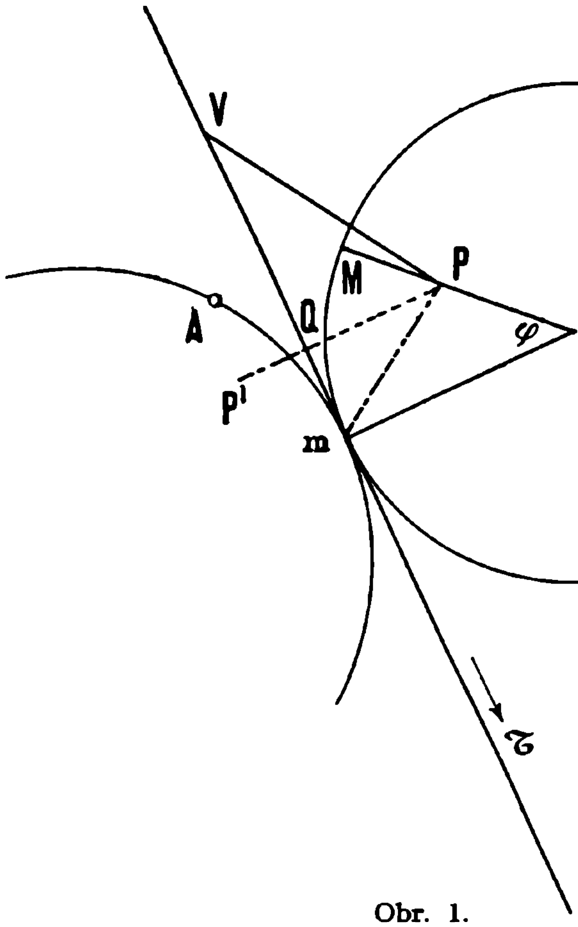
Úhel přímky QP s rovinou Oxy jest α, a tedy jest délka pravoúhlého průmětu její do této roviny

$$Q\,P' = Q\,P.\cos\alpha = (a - g\cos\varphi)\cos\alpha,$$

kdežto výška $P'P = z$ bodu P jest

$$z = (a - g\cos\varphi)\sin\alpha,$$

při čemž P' značí pravoúhlý průmět bodu P do Oxy (půdorysny).



Obr. 1.

Souřadnice x a y bodu P jsou zároveň souřadnice bodu P', a určíme je promítajíce lomenou čáru $O\,m\,Q\,P'$ do os. Obdržíme tak pro stanovení polohy bodu P souřadnice

$$\begin{aligned} x &= x_0 - g\sin\varphi\cos\tau - (a - g\cos\varphi)\cos\alpha\sin\tau \\ y &= y_0 - g\sin\varphi\sin\tau + (a - g\cos\varphi)\cos\alpha\cos\tau \\ z &= (a - g\cos\varphi)\sin\alpha, \end{aligned} \tag{1}$$

při čemž poloha bodu $m\,(x_0, y_0)$ na pevné čáře stanovena podmínkou

$$a\,\varphi = s_0. \tag{1°}$$

2.

Ve zvláštním případě, kdy základní (pevná) čára je kruh poloměru c, volme přímku OA za osu Ox, kladouce počátek do středu kruhu, načež bude $s_0 = c\psi$, jeli ψ *„odvalený úhel"* na kruhu pevném, a pak očividně $\tau = \frac{\pi}{2} + \psi$, dále jest

$$(m) \qquad x_0 = c \cos\psi, \quad y_0 = c \sin\psi,$$

a tedy bude poloha bodu P v tomto případě dána rovnicemi

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= [c - (a - g\cos\varphi)\cos\alpha]\cos\psi + g\sin\varphi\sin\psi \\ y &= [c - (a - g\cos\varphi)\cos\alpha]\sin\psi - g\sin\varphi\cos\psi \\ z &= (a - g\cos\varphi)\sin\alpha; \quad a\varphi = c\psi, \end{aligned}$$

které vyjadřují souřadnice jeho jako funkce parametru φ, resp. ψ.

Tato čára vytvořená bodem P sluje *sférickou kotálnicí* (sf. epicykloida), a to obyčejnou při $g = a$, kdy tedy bod opisující P splývá s určujícím M, dále prodlouženou neb zkrácenou, dle toho jak $g > a$ neb $g < a$.[1])

Čáry tyto leží totiž na kouli; neboť z rovnic (2) vypočteme postupně

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= g^2\sin^2\varphi + [c - (a - g\cos\varphi)\cos\alpha]^2 + (a - g\cos\varphi)^2\sin^2\alpha \\ &= c^2 - 2c(a - g\cos\varphi)\cos\alpha + (a - g\cos\varphi)^2 + g^2\sin^2\varphi \\ &= a^2 + g^2 + c^2 - 2ag\cos\varphi - 2c(a - g\cos\varphi)\cos\alpha \\ &= g^2 + c^2 - a^2 + 2(a - c\cos\alpha)(a - g\cos\varphi), \end{aligned}$$

t. j.

$$(3) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2\,\frac{a - c\cos\alpha}{\sin\alpha}\,z + c^2 - a^2 + g^2.$$

Tato koule obsahující naši kotálnici (P) má střed

$$x = 0 = y, \quad z = \frac{a - c\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

a jest mimo to určena svým bodem na kotálnici příslušným k hodnotě $\varphi = 0$:

$$x = c - (a - g)\cos\alpha, \quad y = 0, \quad z = (a - g)\sin\alpha.$$

Veďme dále kouli o středu m $(c\cos\psi, c\sin\psi, 0)$, procházející bodem P na kotálnici. Její rovnice

$$(X - c\cos\psi)^2 + (Y - c\sin\psi)^2 + Z^2 = (x - c\cos\psi)^2 + (y - c\sin\psi)^2 + z^2$$

se postupně zjednodušuje takto (na základě rovnic (2)):

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2cX\cos\psi - 2cY\sin\psi + c^2 = (a - g\cos\varphi)^2 + g^2\sin^2\varphi,$$

t. j.

$$(4) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 - 2cX\cos\psi - 2cY\sin\psi = a^2 + g^2 - c^2 - 2ag\cos\varphi.$$

---

[1]) Pro literaturu a první vlastnosti viz F. Gomes Teixeira, Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches. Coïmbre 1909; dílu II. str. 348—353. Srov. též F. Reuleaux, Lehrbuch der Kinematik.

Tato řada koulí obaluje určitou plochu; charakteristika hoví rovnici vzniklé derivováním

$$(4') \qquad X \sin\psi - Y \cos\psi = g \sin\varphi,$$

t.j. obalová plocha je souhrn kruhů Γ, v nichž roviny (4′) protínají příslušné koule (4).

Rovina (4′) obsahuje bod kotálnice (2), jak to dosazení hodnot souřadnic bezprostředně potvrzuje; tedy charakteristický kruh obalové plochy prochází bodem (φ, ψ) na kotálnici, a protíná kolmo rovinu $O\,x\,y$. Střed kruhu Γ je průmět středu koule m do roviny kruhu, tedy průsek přímek

$$x \sin\psi - y \cos\psi = g \sin\varphi$$
$$x \cos\psi + y \sin\psi = c, \quad z = 0;$$

jeho souřadnice jsou

$$(\text{stř.}) \qquad \begin{aligned} x &= c \cos\psi + g \sin\varphi \sin\psi, \\ y &= c \sin\psi - g \sin\varphi \cos\psi, \end{aligned}$$

t. j. střed splývá s průmětem bodu (φ, ψ) na kotálnici $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Ani koule (4), ani rovina (4′) nezávisí na úhlu α; kruh Γ příslušný k témuž (φ, ψ) protíná tedy veškery kotálnice, jež vzniknou pro různé sklony α při kotálení téhož kruhu (a) po společném pevném kruhu (c).

„Obalová plocha koulí (4) splývá s plochou vytvořenou kotálnicemi příslušnými k různým hodnotám sklonu α. Na této ploše kotálnic vznikají tak kruhy Γ v rovinách (4′) kolmých na rovinu pevného kruhu ležících, jichž stopy mají směr ψ ($\parallel O\,m$) a vzdálenost od bodu O rovnu $g\,sing\,\varphi$; střed kruhu Γ je v průseku tečny $m\,\tau$ pevného kruhu se stopou jeho roviny, a jeho poloměr má hodnotu $a - g \cos\varphi$.

Na této ploše máme tak dvě řady čar; čáry $\varphi = konst.$ jsou naše kruhy Γ, a čáry $\alpha = konst.$ jsou kotálnice.

Rovnice (2) podávají vyjádření souřadnic bodu na ploše jako funkcí parametrů α a φ.

Na ploše (2) leží čáry $\alpha = 0$ a $\alpha = \pi$, jež vzniknou kotálením téhož kruhu (a) v rovině $x\,y$ po témž pevném kruhu (c). Čára $\alpha = 0$ jest hypocykloida,[1]) a vyjadřuje se v komplexním tvaru rovnicí

$$x + i\,y = (c - a + g\,e^{-i\varphi})\,e^{i\psi}, \quad a\,\varphi = c\,\psi,$$

kdežto čára $\alpha = \pi$ jest epicykloida

$$x + i\,y = (c + a - g\,e^{i\varphi})\,e^{i\psi}.$$

---

[1]) Název podržíme i v případě $a > c$, kdy čára je vlastně epicykloidou. Srov. Teixeira, l. c.

Pro differenciály oklouků s_0 a s_π na těchto čarách nalezneme

$$ds_0 = \frac{|c - a|}{c} \sqrt{a^2 + g^2 - 2\,a\,g\cos\varphi}\,d\varphi,$$

$$ds_\pi = \frac{c + a}{c} \sqrt{a^2 + g^2 - 2\,ag\cos\varphi}\,d\varphi,$$

takže v přiřaděných bodech poměr

$$ds_\pi : ds_0 = \frac{c + a}{c - a}$$

je stálý, a *oblouky čar* $\alpha = 0$ a $\alpha = \pi$ *měřené od úvratníku* $\varphi = 0$ *jsou ve stálém poměru.*

Pro libovolný bod (x, y, z) na ploše kotálnic je tečná rovina plochy zároveň tečnou rovinou koule (4), a má tedy rovnici

$$X\,x + Y\,y + Z\,z - c\cos\psi\,(X + x) - c\sin\psi\,(Y + y) \\ = a^2 + g^2 - c^2 - 2\,a\,g\cos\varphi.$$

Píšeme-li rovnici tečné roviny ve tvaru

$$A\,X + B\,Y + C\,Z + D = 0,$$

máme

$$(5)\quad \begin{cases} A = -x + c\cos\psi = (a - g\cos\varphi)\cos\alpha\cos\psi - g\sin\varphi\sin\psi \\ B = -y + c\sin\psi = (a - g\cos\varphi)\cos\alpha\sin\psi + g\sin\varphi\cos\psi \\ C = -z = -(a - g\cos\varphi)\sin\alpha, \end{cases}$$

$$D = c\,x\cos\psi + c\,y\sin\psi + a^2 + g^2 - c^2 - 2\,ag\cos\varphi \\ = g^2 - a^2 + (2\,a - c\cos\alpha)\,(a - g\cos\varphi).$$

Průsek roviny tečné s osou $O\,z$ má souřadnici

$$z_0 = -\frac{D}{C} = \frac{g^2 - a^2}{(a - g\cos\varphi)\sin\alpha} + \frac{2\,a - c\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

V případě $g = a$ je to nezávislé na φ, a tu veškery tečné roviny plochy kotálnic v bodech téže kotálnice (α) procházejí společným bodem osy $O\,z$; též naopak.

„Kužel opsaný o plochu obyčejných kotálnic ($g = a$) z vrcholu na ose Oz ležícího dotýká se plochy podél kotálnice."

Vlastně existují takové kužely dva; příslušné úhly jsou určeny rovnicí

$$z_0 \sin\alpha + c\cos\alpha = 2\,a,$$

graficky přesně řešitelnou (vede na průseč kruhu a přímky).

Tečna kotálnice v nějakém bodě plochy a strana uvažovaného kužele tvoří tedy pár sdružených směrů na ploše.

Tečná rovina prochází průsekem rovin

$$(6)\quad \begin{gathered} z = 0,\ x\cos\psi + y\sin\psi - c = 0, \\ x\sin\psi - y\cos\psi = \frac{a^2 + g^2 - 2\,ag\cos\varphi}{g\sin\varphi}, \end{gathered}$$

jež nezávisejí na a. Pro veškery body téhož kruhu Γ mají tečné roviny společný bod V v rovině Oxy, ležící na tečně $m\tau$ základního kruhu v bodě m; tato tečna je však osou kruhu Γ, a tedy tečné roviny plochy kotálnic v bodech téhož kruhu Γ obalují rotační kužel s vrcholem V, který se plochy podél kruhu Γ dotýká.

Souřadnice bodu V jsou

$$
(6^*)\qquad
\begin{aligned}
x &= c \cos\psi + \frac{a^2 + g^2 - 2\,ag\cos\varphi}{g\sin\varphi}\sin\psi,\\
y &= c \sin\psi - \frac{a^2 + g^2 - 2\,ag\cos\varphi}{g\sin\varphi}\cos\psi.
\end{aligned}
$$

Patrně jest

$$a^2 + g^2 - 2\,ag\cos\varphi = \overline{mP}^2,\quad g\sin\varphi = mQ,$$

délka mV má hodnotu

$$\frac{a^2 + g^2 - 2\,ag\cos\varphi}{g\sin\varphi} = \frac{\overline{mP}^2}{mQ} = \frac{mP}{\cos VmP},$$

a tedy bude $\sphericalangle\, mPV = 90^0$, což jasno a priori. Neboť přímka mP je normála plochy kotálnic (jsouc poloměrem tečné koule) a tečná rovina opsaného kužele, t. j. rovina tečná plochy kotálnic, je na tuto normálu kolma.

Vrcholy V příslušné k různým kruhům Γ naplňují čáru v rovině Oxy, kterou jsem nazval *vrcholnicí.*[1])

* * *

Ve zvl. případě, kdy se kotálí kruh po kruhu shodném, tedy $c = a$, $\psi = \varphi$, znějí rovnice (6*)

$$x = \frac{a^2 + g^2 - ag\cos\varphi}{g},\quad y = a\,\frac{1 + \cos^2\varphi}{\sin\varphi} - \frac{a^2 + g^2}{g}\cot g\,\varphi.$$

V případě plochy kotálnic obyčejných ($g = a$) se tyto zovnice zjednoduší na

$$\frac{x - a}{a} = 1 - \cos\varphi,\quad \frac{y}{a} = \frac{(1 - \cos\varphi)^2}{\sin\varphi} = (1 - \cos\varphi)\,tg\,\frac{\varphi}{2}.$$

Průvodič z pólu A svírá s osou Ax úhel $\omega = \frac{\varphi}{2}$, jeho délka jest dána rovnicí

$$\frac{r}{a} = (1 - \cos\varphi)\sqrt{1 + tg^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}} = 2\left(\sec\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{\varphi}{2}\right),$$

t. j. polární rovnice (pól A, osa Ax) vrcholnice v našem případě zní

$$r = 2\,a\,(\sec\omega - \cos\omega);$$

---

1) Názvu toho užíval jsem již r. 1912 za svých rozhovorů s p. koll. Pelíškem.

čára je patrně cissoida Diokletova, jejíž základní kruh má poloměr a, střed $x = 2a$, $y = 0$, a základní přímka jest $x = 3a$.

Pro plochu kotálnic prodloužených neb zkrácených nám hořejší výrazy pro polohu vrcholu dávají

$$(7) \qquad x = b - a \cos\varphi, \quad y = \frac{a + a\cos^2\varphi - b\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

při čemž

$$b = \frac{a^2 + g^2}{g}.$$

Vyloučením φ vychází

$$(7^0) \qquad [a^2 - (x-b)^2]\, y^2 = [(x-b)^2 + b(x-b) + a^2]^2 = (x-g)^2 \left(x - \frac{a^2}{g}\right)^2.$$

Body $x = g$ a $x = \frac{a^2}{g}$ na Ox jsou patrně dvojné, třetí dvojný bod jest úběžný bod osy Oy. Dvojné body na Ox odpovídají parametrům φ, pro něž

$$\cos\varphi = \frac{a}{g}, \text{ resp. } \cos\varphi = \frac{g}{a}.$$

Jeden je tedy isolovaný, jeden má realné tečny (jež splývají v případě $g = a$); úběžný bod dvojný přísluší k parametrům $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$, asymptoty jsou

$$x = b - a \text{ a } x = b + a.\text{*)}$$

Znamenáme-li $u = x^2 + y^2$ zavádějíce souřadnice kruhové, obdržíme jako rovnici vrcholnice

$$u\,[(x-b)^2 - a^2] + a^2 (3x^2 - 2bx + a^2) = 0;$$

ta ukazuje, že bod O je singulárním ohniskem čáry, mimo to z ní vychází, že průměty hybných průseků s různými kruhy soustřednými s bodem O tvoří kvadratickou involuci. Pro její střed nám dává volba $u = -3a^2$ souřadnici $x = e$, kde

$$e = \frac{3}{4} b - \frac{a^2}{b};$$

mimo to hodnota $u = -a^2$ dává dvojici $x^2 = \frac{b^2}{2} - a^2 = \frac{a^4 + g^4}{2g^2}$, takže rovnice involuce bude

$$x_1 x_2 - e(x_1 + x_2) + \frac{a^4 + g^4}{2g^2} = 0;$$

jeden její pár je také dán stopama asymptot.

Přímky vedené dvojným bodem G sekou vrcholnici ještě ve dvou bodech, pro jichž průměty nalezneme vztah

---

[1]) Výjimku by činil případ zde vyloučený $b = 2a$, jenž by vyžadoval $g^2 + a^2 = 2ag$, t. j. $g = a$.

$$x_1 x_2 = \frac{a^2 - g^2}{2g}(x_1 + x_2) \quad \text{(počátek souřadnic } G, \, OG = g).$$

Involuce ta má jeden bod dvojný G, tedy obě větve mají v tomto bodě obrat; tečny snadno se určí a sice mají rovnice

$$\frac{y}{x} = \pm \frac{\sqrt{g^2 - a^2}}{a},$$

v souřadnicích s počátkem G.

Přímky vedené druhým bodem dvojným

$$\frac{y}{x - \frac{a^2}{g}} = m \quad \text{(počátek souřadnic } O)$$

stanoví na čáře involuci kvadratickou, jejíž průmět

$$m^2 [(x - b)^2 - a^2] + (x - g)^2 = 0$$

je rovněž involucí. Pro tuto máme střed ($m^2 = -1$)

$$x = \frac{b}{2},$$

a dvojné body $x = g$ a $x = b - g = \frac{a^2}{g}$ v obou dvojných bodech čáry; tedy také obě větve v tomto dvojném bodě mají obrat; jich tečny jsou

$$\frac{y}{x - \frac{a^2}{g}} = \pm \frac{\sqrt{a^2 - g^2}}{g}.$$

Involuce má rovnici

$$x_1 x_2 - \frac{b}{2}(x_1 + x_2) + a^2 = 0.$$

Znamenejme ω úhel XGV (polární úhel bodu V pro pól G). Naše výrazy pro souřadnice bodu V dávají

$$x - g = \frac{a}{g}(a - g \cos \varphi), \quad y = \frac{(a - g \cos \varphi)(g - a \cos \varphi)}{g \sin \varphi},$$

tudíž

$$(\alpha) \qquad tg\, \omega = \frac{g - a \cos \varphi}{a \sin \varphi}, \quad \cos^2 \omega = \frac{a^2 \sin^2 \varphi}{a^2 + g^2 - 2ag \cos \varphi},$$

což ostatně vychází přímo z trojúhelníka OmG. Z téhož trojúhelníka vychází dle sinusové věty

$$(\beta) \qquad a \cos(\varphi - \omega) = g \cos \omega.$$

Kolmice On spuštěná ze středu kruhu základního na přímku Gm svírá s Ox úhel ω, s přímkou Om pak úhel $\varphi - \omega$; tedy bude

$$On = g \cos \omega,$$

a průmět K bodu n do poloměru $O\,m$ má za průvodič

$$O\,K = g \cos\omega \cos(\varphi - \omega) = \frac{g^2}{a} \cos^2\omega$$

t. j.

$$(K) \qquad O\,K = \frac{a\,g^2 \sin^2\varphi}{a^2 + g^2 - 2\,ag\cos\varphi} = \frac{a\,g\sin^2\varphi}{b - 2\,a\cos\varphi}$$

Znamenáme-li souřadnice bodu K literami ξ a η, obdržíme — ježto $O\,K$ svírá s $O\,x$ úhel φ —

$$\xi - g = -\frac{g^2\,(b - 3\,a\cos\varphi + a\cos^3\varphi)}{a^2 + g^2 - 2\,ag\cos\varphi},$$

$$\eta = \frac{a\,g^2\sin^3\varphi}{a^2 + g^2 - 2\,ag\cos\varphi}.$$

Diferencováním rovnic (7) dále vychází

$$\frac{d\,x}{d\,\varphi} = a\sin\varphi, \frac{d\,y}{d\,\varphi} = \frac{b - 3\,a\cos\varphi + a\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi};$$

tudíž

$$(\xi - g)\frac{d\,x}{d\,\varphi} + \eta\,\frac{d\,y}{d\,\varphi} = 0,$$

t. j. *normála vrcholnice má směr $G\,K$.*

Přímka $G\,K$ obsahuje také střed křivosti S stopní kotálnice $\alpha = \pi$ a kuželosečka mající ohniska G, S, procházející bodem m, oskuluje v něm základní kružnici (a).

Tento výsledek je zvláštní případ věty značně obecnější.

Tečna vrcholnice je dále chordálou oskulačního kruhu Pascalovy závitnice ($\alpha = \pi$) a bodu G (považovaného za nullový kruh).

Bod (K) opisuje křivku 6. stupně

$$b^2\,(x^2 + y^2)^3 = a^2\,[2\,x\,(x^2 + y^2) + g\,y^2]^2.$$

Polární rovnici možno přepsati na tvar

$$r = \frac{a^2 + g^2}{4\,a} + \frac{g}{2}\cos\varphi - \frac{(a^2 - g^2)^2}{4\,a\,b\,g\left(1 - \frac{2\,a}{b}\cos\varphi\right)},$$

takže se jeví čára (K) jako cissoidála dvou kruhů a ellipsy s ohniskem O, osou $O\,x$.

* * *

V jiném případě, kdy se kotálí kruh (a) po kruhu dvakráte tak velkého poloměru ($c = 2\,a$, $\varphi = 2\,\psi$), podají nám rovnice (6*) pro bod vrcholnice

$$(8) \qquad x = \frac{(a + g)^2}{2\,g\cos\psi}, \quad y = -\frac{(a - g)^2}{2\,g\sin\psi};$$

vrcholnice má pak rovnici

$$(8') \qquad \frac{(a+g)^4}{x^2} + \frac{(a-g)^4}{y^2} = 4\,g^2,$$

a je to tedy ***čára křížová.***[1])

Ve zvláštním případě $g = a$ splývá vrcholnice s osou $O\,x$.

* * *

Rovnice (6*) zjednoduší se poněkud pro $g = a$:

$$x = c\cos\psi + 2\,a\,tg\frac{\varphi}{2}\sin\psi\,,$$

$$y = c\sin\psi - 2\,a\,tg\frac{\varphi}{2}\cos\psi\,;\; a\,\varphi = c\,\psi\,.$$

Diferencováním vychází

$$\frac{d\,x}{d\,\varphi} = a\,tg\frac{\varphi}{2}\left(tg\frac{\varphi}{2}\sin\psi + 2\,\frac{a}{c}\cos\psi\right),$$

$$\frac{d\,y}{d\,\varphi} = a\,tg\frac{\varphi}{2}\left(-\,tg\frac{\varphi}{2}\cos\psi + 2\,\frac{a}{c}\sin\psi\right).$$

Normála této vrcholnice má tedy rovnici

$$a\,(X\cos\psi + Y\sin\psi) + \frac{1}{2}\,c\,tg\frac{\varphi}{2}\,(X\sin\psi - Y\cos\psi) = a\,c\,sec^2\frac{\varphi}{2}\,,$$

a prochází bodem

$$X\cos\psi + Y\sin\psi = 0\,,$$

$$X\sin\psi - Y\cos\psi = \frac{4\,a}{\sin\varphi}\,,$$

t. j. bodem

$$(N) \qquad x = \frac{4\,a\sin\psi}{\sin\varphi}\,,\quad y = -\,\frac{4\,a\cos\psi}{\sin\varphi}\,;\quad a\,\varphi = c\,\psi\,.$$

Tím je dána jednoduchá konstrukce tečny vrcholnice v případě $g = a$.

Vrcholnice v případě $g = a$ splývá s čarou stop loukotí příslušnou k pohybu $(c, 2\,a)$, o níž bude jednáuo v čl. 11.

Znamenejme

$$P = X\cos\psi + Y\sin\psi,\quad Q = -\,X\sin\psi + Y\cos\psi\,,$$

$$Q = \frac{\partial P}{\partial\psi}\,,\quad P = -\,\frac{\partial Q}{\partial\psi}\,;$$

rovnice normály vrcholnice zní

$$(n) \qquad a\,P - \frac{1}{2}\,c\,tg\frac{\varphi}{2}\,Q = ac\,sec^2\frac{\varphi}{2}\,.$$

---

[1]) Kreuzkurve, cruciforme. Viz F. Gomes Teixeira, Traité des courbes, díl I., str. 277.

Střed křivosti leží na přímce, jejíž rovnice se obdrží derivováním:

$$(n') \qquad \frac{4\,a^2 - c^2\,sec^2\frac{\varphi}{2}}{4\,a}\,Q + \frac{c}{2}\,tg\frac{\varphi}{2}\,P = c^2\,tg\frac{\varphi}{2}\,sec^2\frac{\varphi}{2}.$$

Souřadnice středu křivosti vrcholnice hoví tedy rovnicím

$$Q = \frac{2\,a\,c^2}{4\,a^2 - c^2}\,tg\frac{\varphi}{2}\,sec^2\frac{\varphi}{2}\,,\quad P = c\,sec^2\frac{\varphi}{2}\,\frac{4\,a^2 - c^2 + c^2\,tg^2\frac{\varphi}{2}}{4\,a^2 - c^2}\,;$$

veličiny P a Q jsou rovněž pravoúhlé souřadnice v soustavě otočené o úhel ψ:

$$P + i\,Q = (X + i\,Y)\,e^{-i\psi},$$

a určují v ní polohu středu křivosti. Konstrukce lépe se provede sestrojením přímky (n'), která spojuje body

$$\left(Q = 0, P = 2\,c\,sec^2\frac{\varphi}{2}\right) \text{ a } \left(Q = -4\,a\,tg\frac{\varphi}{2}\,,\ P = \frac{8\,a^2}{c}\right),$$

a seče normálu ve středu křivosti.

Půdorysná stopa $\mathfrak{S}^1$ tečné roviny plochy kotálnic prochází vrcholem V tečného kužele rotačního, a stopou tečny kruhu Γ, kterou sestrojíme pomocí sklopení kruhu do průmětny.

3.

Z výrazů (5) pro koeficienty A, B, C v rovnici roviny tečné vypočteme

$$A^2 + B^2 + C^2 = a^2 + g^2 - 2\,ag\,cos\,\varphi\,;$$

aby tečná rovina plochy se dotýkala zároveň úběžného kruhu, musí tento výraz vymizeti; takové roviny obalují *Darbouxovu rozvinutelnou plochu fokální*, a ta se v našem případě dotýká plochy kotálnic podél pomyslných kruhů $\varphi =$ konst.

$$cos\,\varphi = \frac{a^2 + g^2}{2\,ag}\,.$$

Fokální plochy jsou tu patrně kužely rotační, ježto se dotýkají plochy podél kruhu Γ.

V případě $g = a$ se tyto kruhy redukují na singulární body kotálnic, které jsou konickými body plochy, takže tu fokální plochy se redukují na nullové koule s konickými body plochy jakožto středy.

Omezme se na zvláštní případ $c = a$, tedy $\varphi = \psi$. Rovnice kruhu Γ (4) a (4') pro naši zvláštní hodnotu φ znějí

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - 2\,a\,x\,cos\,\varphi - 2\,a\,y\,sin\,\varphi = 0$$
$$x\,sin\,\varphi - y\,cos\,\varphi = g\,sin\,\varphi\,;$$

násobme druhou rovnici $2\,a\,tg\,\varphi$ a odečtěme ji od první; vyjde rovnice koule, která rovněž obsahuje kruh Γ,

$$x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - \frac{2a}{\cos\varphi}\,x + 2ag\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} = 0\,,$$

$$\sin^2\varphi = -\frac{(a^2-g^2)^2}{4a^2g^2}\,,\quad \cos\varphi = \frac{a^2+g^2}{2ag}\,,$$

tedy rovnice koule zní:

$$\text{(f)}\qquad x^2 + y^2 + z^2 - \frac{4a^2gx}{a^2+g^2} + \frac{(3a^2-g^2)g^2}{a^2+g^2} = 0\,,$$

a tato koule obsahuje oba dotykové kruhy fokálních ploch; její poloměr jest reálný

$$\pm\frac{a^2-g^2}{a^2+g^2}\,g\,.$$

Souřadnice vrcholu opsaného kužele se dle hořejších vzorců vypočtou

$$x = 0,\ \ y = a\sin\varphi,$$

příslušná základna je průseč koule (f) s rovinou

$$(x-g)\sin\varphi = \frac{a^2+g^2}{2ag}\,y;\quad \sin\varphi = \pm\frac{i\,(a^2-g^2)}{2ag}\,.$$

Určíme raději tento kužel přímo jako obalovou plochu; rovnice (5) dávají v tomto případě

$$A = \frac{a^4-g^4}{4a^2g}\cos\alpha + \frac{(a^2-g^2)^2}{4a^2g}\,,\quad \frac{B}{\sin\varphi} = \frac{a^2-g^2}{2a}\cos\alpha + \frac{a^2+g^2}{2a}$$

$$C = -\frac{a^2-g^2}{2a}\sin\alpha,\quad D = -\frac{a^2-g^2}{2}\cos\alpha.$$

Povrchová přímka kužele hoví rovnicím

$$Ax + By + Cz + D = 0,\ A'x + B'y + Cz' + D' = 0,$$

kde B, B' jsou ryze pomyslné, ostatní reálné veličiny. Pro reálný bod musí tedy $y = 0$, t. j. reálné body na fokální ploše tvoří obalovou čáru přímek v rovině Oxz

$$Ax + Cz + D = 0,$$

t. j.

$$[(a^2+g^2)\cos\alpha + a^2 - g^2]\,x - 2ag\sin\alpha\,z - 2a^2g\cos\alpha = 0.$$

Pomocí parametru $\lambda = e^{i\alpha}$ se tato rovnice přepíše na

$$\lambda^2[(a^2+g^2)x - 2a^2g + 2iagz] + 2\lambda(a^2-g^2)x$$
$$+ [(a^2+g^2)x - 2a^2g - 2iagz] = 0,$$

a odtud vychází rovnice obalové čáry:

$$[(a^2+g^2)x - 2a^2g]^2 + 4a^2g^2z^2 = (a^2-g^2)^2x^2,$$

jež po krátké redukci obdrží tvar

$$(\Phi)\qquad x^2 + z^2 - \frac{a^2+g^2}{g}\,x + a^2 = 0, y = 0.$$

Tedy obě rozvinutelné plochy fokální v našem případě se sekou *v realném kruhu fokálním* (Φ) na $O x z$, jehož poloměr jest

$$\frac{a^2 - g^2}{2 g}.$$

Kruh obsahuje patrně bod $x = g$, $z = 0$, a protíná kolmo kruh $x^2 + z^2 = a^2$.

4.

Vyšetříme nyní čáry na ploše kotálnic, v jichž bodech jsou tečné roviny kolmé na některou ze tří průměten, a které svými průměty určují t. z. obrysy plochy. K tomu slouží vzorce (5) pro koefficienty rovnice roviny tečné

$$\begin{aligned} A &= (a - g \cos\varphi) \cos\alpha \cos\psi - g \sin\varphi \sin\psi \\ B &= (a - g \cos\varphi) \cos\alpha \sin\psi + g \sin\varphi \cos\psi \\ C &= - (a - g \cos\varphi) \sin\alpha = - z \\ D &= g^2 - a^2 + (2 a - c \cos\alpha) (a - g \cos\varphi). \end{aligned}$$

Roviny tečné kolmé na Oxy: $C = 0 = z$.

Rovnici $C = 0$ hoví $\sin\alpha = 0$, t. j. epicykloida $\alpha = \pi$ v rovině $x y$ a hypocykloida $\alpha = 0$. Druhé řešení $a - g \cos\varphi = 0$ je reálné pro $g > a$; podává $\varphi =$ konst., tedy kruh, který se musí redukovati na bod, ježto tečné roviny v bodech téhož kruhu Γ obalují rotační kužel; poloměr kruhu Γ je skutečně $Q P = a - g \cos\varphi$ t. j. v našem případě $= 0$.

Rovina tečná má tu rovnici

$$- g \sin\varphi \sin\psi . x + g \sin\varphi \cos\psi . y + g^2 - a^2 = 0,$$

a nezávisí na α. Body uvažované mají souřadnice

$$\begin{aligned} x &= c \cos\psi + g \sin\varphi \sin\psi \\ y &= c \sin\psi - g \sin\varphi \cos\psi \\ z &= 0 ; \ \cos\varphi = \frac{a}{g} . \end{aligned}$$

Roviny tečné kolmé na $O x z$. Rovnice $B = 0$ podává

(9) $$(a - g \cos\varphi) \cos\alpha = - g \sin\varphi \operatorname{cotg}\psi .$$

Vložíme-li to do rovnic (2) pro souřadnice bodu na ploše, vyjde $y = c \sin\psi$,

$$x = c \cos\psi + g \sin\varphi \operatorname{cotg}\psi \cos\psi + g \sin\varphi \sin\psi$$

t. j.

(9*) $$\left| \begin{aligned} x &= c \cos\psi + \frac{g \sin\varphi}{\sin\psi}, \\ y &= c \sin\psi . \end{aligned} \right.$$

Tyto rovnice definují čáru na ploše kotálnic, která se promítá v její obrys nárysný.

VII.

Máme

$$\cos\alpha = -\frac{g \sin\varphi}{a - g\cos\varphi}\cotg\psi,\ \sin^2\alpha = -\frac{a^2 - 2\,ag\cos\varphi + g^2 - \left(\frac{g\sin\varphi}{\sin\psi}\right)^2}{(a - g\cos\varphi)^2}$$

tedy

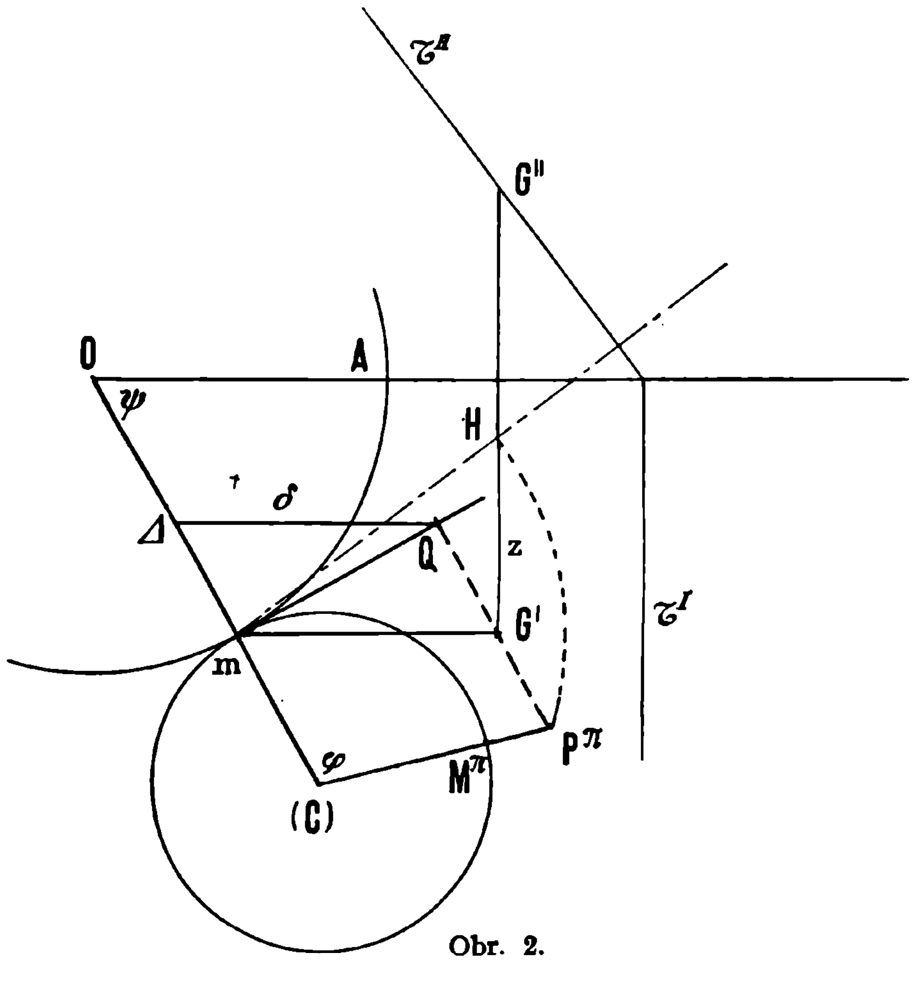
$$z^2 = a^2 - 2\,ag\cos\varphi + g^2 - \left(\frac{g\sin\varphi}{\sin\psi}\right)^2.$$

Dosadíme-li sem hodnoty (obr. 1.)

$$a^2 - 2\,ag\cos\varphi + g^2 = \overline{mP}^2,\quad g\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \delta,$$

máme úplnější vyjádření čáry příslušné k obrysu nárysnému

(9°) $$x = c\cos\psi + \delta,\ y = c\sin\psi,\ z = \pm\sqrt{\overline{mP}^2 - \delta^2}.$$



Obr. 2.

Délku $g\sin\varphi$ (obr. 2.) máme v obrazci při konstrukci bodu P^{π} na epicykloidě $\alpha = \varkappa$ a sice $g\sin\varphi = mQ$. Vedeme pak $Q\Delta \parallel OA$, nažež bude

$$\Delta Q = \frac{mQ}{\sin\psi} = \frac{g\sin\varphi}{\sin\psi} = \delta.$$

Hledaný průmět G' bodu G na čáře příslušné k nárysovému obrysu (příslušného ke zvolenému ψ, resp. m) obdržíme tedy vedouce $m G' \parallel O A$, $m G' = \vartheta$. T. j. protneme přímky $P'' Q \parallel O m$ a $m G' \parallel O A$.

Výšku z pak stanovíme průsekem H pořadnice $G' G''$ s kruhem opsaným ze středu m poloměrem $m P''$; t. j. $z = G' H$.

Koefficienty A a C mají tu hodnoty

$$A = -\vartheta, \; C = -z,$$

a podobně nalezneme

$$D = a^2 - 2\, ag \cos\varphi + g^2 + c\, g \sin\varphi \operatorname{cotg}\psi$$

t. j.

$$D = \overline{m P}^2 + c\,\vartheta \cos\psi = \overline{m P}^2 + c\,.\,\overline{\varDelta m}\,,$$

načež tečna nárysového obrysu má rovnici

$$(\mathfrak{T}^{II}) \qquad \vartheta X + z Z = D.$$

Směrnice tečny této jest

$$-\frac{\vartheta}{z} = -\operatorname{cotg} G'\widehat{m} H,$$

a tedy je *tečna obrysu kolmá na přímku* $m H$.

Konstrukce jednotlivých bodů obrysu jak zřejmo neposkytuje obtíží, ani konstrukce jeho tečen; nicméně křivka je povahy složité, pokud poměr $c : a$ zůstává libovolným. Ve zvláštních případech zjednoduší se tyto výsledky podstatně.

Uvažujme nejprvé případ $a = c$, t. j. $\varphi = \psi$. Zde rovnice (9^*) budou

$$(10^1) \qquad x = a \cos\varphi + g,\; y = a \sin\varphi,$$

a je dále $\vartheta = g$, tedy

$$z = \pm\sqrt{a^2 - 2\, ag \cos\varphi} = \pm\sqrt{a^2 + 2\, g^2 - 2\, g\, x},$$

$$(10^2) \qquad z^2 = -2\, g \left(x - \frac{a^2 + 2\, g^2}{2\, g}\right):$$

„Obrys plochy kotálnic v případě $a = c$ v rovině Oxz je parabola s vrcholem $x = g + \frac{a^2}{2\, g}$ na $O x$, parametrem $-g$ a ohniskem $x = \frac{1}{2} g + \frac{a^2}{2\, g}$.

Parabola ta je průmětem čáry 4. stupně, jejíž půdorys je kruh poloměru a, jehož střed $x = g$ leží na $O x$.

Čára prostorová leží na kouli $x^2 + y^2 + z^2 = 2\, a^2 + g^2$.

* * *

VII.

Dále uvažujme plochu $c = 2\,a$, tedy $\varphi = 2\,\psi$. Tu bude

$$\delta = 2\,g\cos\psi,$$

tedy průmět čáry dotykové s opsaným válcem směru $O\,y$

(11[1]) $$x = 2\,(a + g)\cos\psi,\ y = 2\,a\sin\psi$$

jest ellipsa; pro výšku z vyjde

$$z^2 = (a + g)^2 - 4\,g\,(a + g)\cos^2\psi = (a + g)^2 - \frac{g}{a + g}\,x^2,$$

takže obrys nárysný jest ellipsa

(11[2]) $$\frac{g}{a + g}\,x^2 + z^2 = (a + g)^2.$$

* * *

Tečné roviny kolmé na Oyz. Rovnice $A = 0$ dává

$$(a - g\cos\varphi)\cos\alpha = g\sin\varphi\,tg\,\psi,$$

načež

$$B = \frac{g\sin\varphi}{\cos\psi},\ C = -z,$$

(12) $$x = c\cos\psi,\ y = c\sin\psi - \frac{g\sin\varphi}{\cos\psi} = c\sin\psi - B,$$
$$z^2 = a^2 - 2\,ag\cos\varphi + g^2 - \left(\frac{g\sin\varphi}{\cos\psi}\right)^2 = \overline{mP}^2 - B^2,$$

při čemž veličina

$$B = \delta\,tg\,\psi$$

je stejně přístupna pohodlné konstrukci jako δ.

Ve zvláštním případě $a = c$ máme jako průmět dotykové čáry

$$x = c\cos\varphi,\ y = c\sin\varphi - g\,tg\,\varphi,$$

což lze psáti

$$x - g = (c - g\sec\varphi)\cos\varphi,\ y = (c - g\sec\varphi)\sin\varphi;$$

zvolíme-li za počátek polárních souřadnic bod $x = g,\ y = 0$, bude polární úhel φ a rovnice čáry

$$r = c - g\sec\varphi.$$

Tato je pak konchoida Nikomedova s řídící přímkou $O\,y$.[1])

Příslušná jí dotyková čára na ploše jest 8. stupně.

Pro plochu kotálnic $c = 2\,a$, $\varphi = 2\,\psi$, podávají rovnice (12)

$$x = 2\,a\cos\psi,\ y = 2\,(a - g)\sin\psi,$$

takže průmět dotykové čáry s válcem směru $O\,x$ jest obecně ellipsa, v případě plochy obyčejných kotálnic ($g = a$) jest $y = 0$, a dotyková čára

---

[1]) Ryze geometrické odvození pro obecnější plochy viz kap. 16.

leží v rovině Oxz; to zní absurdně, a je možné jen tím, že osa Ox je dvojnou přímkou plochy; skutečně nám tu výraz pro z^2 dává

$$z^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos 2\psi - 4a^2 \sin^2\psi = 0.$$

5.

Na ploše kotálnic známe jednu řadu křivoznačných čar; jsou to kruhy Γ, poněvadž jejich roviny protínají plochu pod stálým úhlem. Druhá řada křivoznaček sestává z pravoúhlých trajektorií kruhů Γ; jsou to křivky charakterisované podmínkou, aby jejich tečna v každém bodě P splývala s přímkou PV, která prochází vrcholem V příslušného opsaného rotačního kužele.

Pro diferenciály dx, dy na této čáře tedy platí

$$\frac{dx}{x - x_0} = \frac{dy}{y - y_0} = du, \tag{13}$$

kde $x_0 y_0$ jsou souřadnice bodu V, a u značí pomocnou proměnnou, která se svým differenciálem zavádí.

Dle rovnic (2) a (6) máme

$$\tag{14} \left\{ \begin{aligned} & x\cos\psi + y\sin\psi = c - (a - g\cos\varphi)\cos\alpha \\ & x\sin\psi - y\cos\psi = g\sin\varphi \\ & x_0\cos\psi + y_0\sin\psi = c \\ & x_0\sin\psi - y_0\cos\psi = \frac{a^2 + g^2 - 2ag\cos\varphi}{g\sin\varphi}, \end{aligned} \right.$$

$$c\,d\psi = a\,d\varphi.$$

Differencujme první dvě rovnice (14); obdržíme

$$\begin{aligned} dx\cos\psi + dy\sin\psi &= -(a - g\cos\varphi)\,d\cos\alpha - g\cos\alpha\sin\varphi\,d\varphi \\ &\quad + (x\sin\psi - y\cos\psi)\,d\psi \\ &= \left(\frac{a}{c} - \cos\alpha\right) g\sin\varphi\,d\varphi - (a - g\cos\varphi)\,d\cos\alpha, \\ dx\sin\psi - dy\cos\psi &= g\cos\varphi\,d\varphi - (x\cos\psi + y\sin\psi)\,d\psi \\ &= (a - g\cos\varphi)\left(\frac{a}{c}\cos\alpha - 1\right) d\varphi. \end{aligned}$$

Do těchto rovnic vložme za dx, dy hodnoty plynoucí z (13)

$$dx = (x - x_0)\,du, \quad dy = (y - y_0)\,du,$$

a užijme druhých rovnic (14).

Obdržíme

$$\begin{aligned} &-(a - g\cos\varphi)\cos\alpha\,du = \\ &= \left(\frac{a}{c} - \cos\alpha\right) g\sin\varphi\,d\varphi - (a - g\cos\varphi)\,d\cos\alpha, \end{aligned}$$

$$\left[g\sin\varphi - \frac{a^2 + g^2 - 2ag\cos\varphi}{g\sin\varphi}\right] du = \left(\frac{a}{c}\cos\alpha - 1\right)(a - g\cos\varphi)\,d\varphi.$$

Levá strana zní

$$-\frac{(a-g\cos\varphi)^2}{g\sin\varphi}\,du,$$

tedy se druhá rovnice může psáti

$$(a-g\cos\varphi)\,du=\left(1-\frac{a}{c}\cos\alpha\right)g\sin\varphi\,d\varphi;$$

dosadíme-li tuto hodnotu do první diferenciální rovnice, obdržíme po substituci

$$a-g\cos\varphi=\xi$$

$$\frac{a}{c}\,\frac{d\xi}{\xi}=\frac{d\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha},\quad\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=K\xi^{\frac{2a}{c}};$$

tudíž křivoznačné čáry jsou definovány vztahem

$$\cos\alpha=\frac{K(a-g\cos\varphi)^{\frac{2a}{c}}-1}{K(a-g\cos\varphi)^{\frac{2a}{c}}+1},$$

kde K je libovolná konstanta; první forma podává výsledek elegantnější

(15)
$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}=K_0\left(1-\frac{g}{a}\cos\varphi\right)^{\frac{a}{c}}.$$

Pokud $g\leqq a$, podává pravá strana při zvoleném K_0 vždy určitý reálný úhel, a tedy křivoznačka protíná veškery kruhy Γ. Je-li však $g>a$, existují na ploše nullové kruhy $a-g\cos\varphi=0$, a u těch křivoznačky končí; kruhům $\Gamma\varphi$, pro něž $g\cos\varphi>a$, odpovídají opět realné křivoznačky je protínající, a sice tu pravá strana (15) se přepíše na

$$K_1\left(\frac{g}{a}\cos\varphi-1\right)^{\frac{a}{c}}.$$

Z rovnice (15) vychází bezprostředně, že křivoznačky vytínají na kruzích řady vespolek prométné.

K podrobnostem o křivoznačkách se vrátíme, až probéřeme otázku plochy středů.

Tečny obou křivoznaček v libovolném bodě plochy tvoří pár sdružených směrů. Na plochách kotálnic $g=a$ známe sdružených směrů páry dva: tečny křivoznaček, t. j. tečnu kruhu Γ a přímku PV jako jeden pár, druhý pár tvoří tečna kotálnice procházející bodem P a strana kužele opsaného či lépe přímka, která leží v rovině tečné a protíná osu Oz.

Jde-li sestrojení meze vlastního stínu při libovolném osvětlení, můžeme nyní sestrojiti tečny této meze, jakmile známe její body; neboť tečna meze vlastního stínu tvoří s paprskem světla pár involuce sdružených směrů, pro kteroužto involuci známe dva páry.

VII.

6.

Plocha kotálnic jest obalovou plochou koulí (4)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,c\,x\cos\psi - 2\,c\,y\sin\psi = a^2 + g^2 - c^2 - 2\,ag\cos\varphi;$$

charakteristiky jsou kruhy Γ na rovinách (4')

$$(\Gamma) \qquad x\sin\psi - y\cos\psi = g\sin\varphi.$$

Pro obalovou čáru kruhů Γ platí ještě rovnice třetí, vznikající derivováním dle ψ:

$$(\Gamma') \qquad x\cos\psi + y\sin\psi = \frac{g\,c}{a}\cos\varphi.$$

Z těchto tří rovnic určíme souřadnice charakteristického bodu, v němž se kruh Γ dotýká čáry obalové; obdržíme nejprve

$$(\alpha) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{c\,g}{a}\cos\varphi\cos\psi + g\sin\varphi\sin\psi,\\ y &= \frac{c\,g}{a}\cos\varphi\sin\psi - g\sin\varphi\cos\psi.\end{aligned}\right.$$

Rovnice tyto jsou tvaru (2) odpovídajícího zvláštnímu případu

$$c = a\cos\alpha;$$

tu odpadnou ve (2) stálé členy v hranatých závorkách, a mimo to jest

$$g\cos\alpha = \frac{c\,g}{a};$$

takže půdorys čáry obalové splývá s průmětem sférické kotálnice příslušné k uvažované hodnotě úhlu α ($a\cos\alpha = c$), ležící na naší ploše. Rovnice tato určuje úhly dva $\pm\alpha$, a také danému průmětu odpovídají jen dva body na ploše. Tedy se uvažovaná čára obalová kryje s naší sf. epicykloidou. Ta jest ovšem reálná pouze v případě $c < a$, a v případě $c = a$, $\alpha = 0$, splyne s bodem ($x = g, y = 0 = z$) singulárním plochy. — Z rovnice $a\cos\alpha = c$ plyne, že střed hybného kruhu C zaujímá pevnou polohu $(0, 0, a\sin\alpha)$ na Oz. Při kotálení obaluje rovina hybného kruhu rotační kužel, jehož vrchol splývá se středem C.

Ve zvláštním případě kotálnic obyčejných ($g = a$) znějí rovnice obalové čáry kruhů

$$\begin{aligned} x &= a\cos\alpha\cos\varphi\cos\psi + a\sin\varphi\sin\psi\\ y &= a\cos\alpha\cos\varphi\sin\psi - a\sin\varphi\cos\psi\\ z &= a\,(1 - \cos\varphi)\sin\alpha;\ a\,\varphi = c\,\psi,\ a\cos\alpha = c.\end{aligned}$$

Rovnice (α) při $g \gtrless a$ mají podobnou stavbu jako první dvě z těchto rovnic, třetí souřadnici lze psáti

$$(\alpha') \qquad z - (a - g)\sin\alpha = g\,(1 - \cos\varphi)\sin\alpha,$$

a podmínku vládnoucí mezi úhly lze psáti

$$g\,\varphi = g\cos\alpha \,.\, \psi;$$

rovnice (α), (α') definují sférickou kotálnici, kterou vytvoří bod hybného kruhu poloměru g při jeho kotálení po kruhu pevném poloměru $g \cos \alpha$ v rovině rovnoběžné s původní základnou

$$z = (a - g) \sin \alpha ;$$

střed hybného kruhu (g) zaujímá stálou polohu $x = 0 = y$,

$$z - (a - g) \sin \alpha = g \sin \alpha ,$$

t. j. tutéž polohu $(0, 0, a \sin \alpha)$ jako bod C. Při novém vytvoření kotálnice zůstal opěrný kužel nezměněn, změnila se toliko základní rovina (do rovnoběžné polohy), a s ní též rozměr valeného kruhu.

Obalovou čáru kruhů Γ, kterou jsme právě stanovili, nazýváme *hřbetní čarou* plochy kotálnic; sestává ze dvou zvláštních kotálnic ($\pm \alpha$), známých pode jménem *sférické šroubovice* (hélice sphérique).

Rovnice průmětu (α) našich čar lze psáti

$$x + i y = \frac{g}{a}\left(\frac{a + c}{2} - \frac{a - c}{2} e^{2 i \varphi}\right) e^{i(\psi - \varphi)} ;$$

porovnáme-li to s výrazem pro epicykloidu obyčejnou

$$x + i y = (R + r - r e^{i\beta}) e^{i\alpha}, \quad R \alpha = r \beta ,$$

(R a r jsou poloměry kruhů pevného a hybného, α a β odvalené úhly), obdržíme

$$R = \frac{g}{a}\left(\frac{a + c}{2} - \frac{a - c}{2}\right) = \frac{c g}{a}, \quad r = g \frac{a - c}{2 a} ;$$

$$R \alpha = \frac{c g}{a} (\psi - \varphi) = g \left(\varphi - \frac{c}{a} \varphi\right) = g \frac{a - c}{2 a} . 2 \varphi = r \beta .$$

„Průmět čáry hřbetní je obyčejná epicykloida, kterou opíše bod kruhu poloměru $g \frac{a - c}{2 a}$ při jeho kotálení po pevném kruhu poloměru $\frac{c g}{a}$, jehož střed jest O; kotálení ($\varphi = 0, \psi = 0$) začíná v bodě

$$x = \frac{c g}{a}, \quad y = 0.$$

Odvalený úhel na kruhu pevném obnáší $\psi - \varphi$, a na kruhu hybném 2φ."

Rovnice (α) podávají obalovou plochu rovin kružních (Γ), a ta existuje i když hřbetní čára jest imaginární, t. j. kdy $a < c$. Tu nám identita

$$x + i y = \frac{g}{a} \left(\frac{c - a}{2} + \frac{c + a}{2} e^{-2 i \varphi}\right) e^{i(\psi + \varphi)}$$

ukazuje, že

„roviny kruhů Γ obalují válcovou plochu směru $O z$, jejíž řídící čára jest obyčejná hypocykloida v rovině $O x y$, kterou opíše bod kruhu poloměru $g \dfrac{c+a}{2a}$ při jeho kotálení po vnitřní straně pevného kruhu poloměru $\dfrac{cg}{a}$ a středu O.

Kotálení začne na konci poloměru ležícího v Ox, a úhly odvalené na kruhu pevném a hybném jsou resp. $\psi + \varphi$, 2φ."

Po případě kotálíme kruh $r = g \dfrac{c-a}{2a}$ po kruhu $R = g \dfrac{c}{a}$.

V případě $a = c$, $\varphi = \psi$ redukuje se poslední rovnice na

$$x + iy = g,$$

t. j. obalový válec je přímka rovnoběžná s Oz, kolem které se rovina kruhu otáčí.

* * *

Uvažovanou právě hypocykloidu nazveme hypocykloidou řídící; její tečna má rovnici

$$(\Delta) \qquad x \sin\psi - y \cos\psi = g \sin\varphi.$$

Z vyjádření epicykloidy $\alpha = \pi$

$$x + iy = (c + a)\, e^{i\psi} - g\, e^{i(\varphi + \psi)}$$

vychází, že v případě, kdy $\dfrac{c}{a} = m$ je číslo celistvé, obdržíme na epicykloidě ∞ pravidelných $(m+1)$ úhelníků, klademe-li za ψ hodnoty

$$\psi_\nu = \psi + \frac{2\nu\pi}{m+1};$$

neboť tu na pravé straně

$$(M_\nu) \qquad x_\nu + i y_\nu = (c + a)\, e^{i\psi_\nu} - g\, e^{(m+1)i\psi_\nu}$$

druhý člen nezávisí na ν, a polygon vznikne z pravidelného mnohoúhelníka vepsaného kruhu $c + a$ pošinutím o vektor $-g\, e^{(m+1)i\psi}$.

Tečny řídící hypocykloidy (Δ), které těmito body M_ν procházejí, obsahují společný bod

$$(H) \qquad x = g \cos\omega,\ y = g \sin\omega,\ \omega = \pi + (m+1)\psi,$$

ležící na kruhu (g) poloměru g a středu O, v úhlové poloze $\pi + (m+1)\psi$.

Druhý průsek tečny (Δ) s kruhem (g) má úhel $\omega' = -(m-1)\psi$.

Z rovnice (Δ) tečny řídící hypocykloidy vychází při označení

$e^{i\psi} = u$, a za stálého předpokladu $c = ma$,

rovnice

$$(\Delta^*) \qquad g\,(u^{2m} - 1) - (x - iy)\, u^{m+1} + (x + iy)\, u^{m-1} = 0,$$

která vyjadřuje podmínku, aby tečna parametru ψ procházela daným bodem (x, y); řídící hypocykloida je tedy čára $2m$-té třídy. Parametry komplexní všech 2 m tečen[1]) hoví podmínkám v obvyklém označení symetrických úkonů

$$\mathfrak{f}_{m-1} = (-1)^m \frac{x - i\,y}{g}\,,\quad \mathfrak{f}_{m+1} = (-1)^{m+1} \frac{x + i\,y}{g}\,,\quad \mathfrak{f}_{2m} = -1\,,$$

kdežto všecka ostatní $\mathfrak{f}_\nu = 0$.

Daná tečna řídící hypocykloidy určuje jednoznačně paramétr ψ, takže lze rozlišiti oba její průseky s kruhem (g) a stanoviti onen, jejž značili jsme H; můžeme ihned stanoviti dalších m tečen řídící hypocykloidy jakožto přímky $\varDelta$ příslušné k parametrům

$$\psi_\nu = \psi + \frac{2\,\nu\,\pi}{m+1}\,,$$

kteréžto přímky procházejí týmž bodem H. Zbývá ještě určiti zbývajících $m - 1$ tečen hypocykloidy, jdoucích bodem H.

Pro tento bod jest

$$x + i\,y = -g\,e^{(m+1)\,i\,\psi} = -g\,u_0^{m+1},$$

$$x - i\,y = -\frac{g}{u_0^{m+1}}\,;\quad u_0 = e^{i\,\psi}\,;$$

rovnice $(\varDelta^*)$ v tomto případě se zjednoduší na

$$\left(u^{m-1} + \frac{1}{u_0^{m+1}}\right)\left(u^{m+1} - u_0^{m+1}\right) = 0.$$

Druhá závorka mizí na určených místech ψ_ν a zbývá tedy řešiti rovnici

$$u^{m-1} = \frac{-1}{u_0^{m+1}} = e^{-i\,[\pi + (m+1)\,\psi]} = e^{-i\,\omega},$$

jejíž řešení jsou

$$(N_\mu)\qquad \psi'_\mu = \frac{2\,\mu\,\pi - \omega}{m - 1}\,,\quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots\, m - 2),$$

při čemž ω je parametr bodu H na kruhu (g). Stanovení tečen řídící hypocykloidy vycházejících z daného bodu H kruhu (g) převádí se takto na dva problémy: Rozdělit daný úhel ω na $m + 1$ a na $m - 1$ stejných dílů.

V případě $m = 2$ vychází tak řešení úlohy trisekce úhlu a sice pomocí tečen z bodu H k astroidě, které se převádí na průseky přímky Ox s konchoidou Nikomédovou; řešení to jen zdánlivě se liší od klassického řešení

[1]) Je-li m liché, sníží se stupeň rovnice na polovičku m, o neznámé u^2. Pak jde každým bodem pouze m tečen řídící hypocykloidy, ale každá z nich obsahuje dva body na každé z kotálnic, jež přísluší opěrným bodům diametrálně protilehlým $(\psi,\ \psi + \pi)$.

Poněvadž tu $m \pm 1$ jsou čísla sudá, ruší se v rozdílu komplexních hodnot (M_ν) těmto úhlům příslušných druhé členy a vidíme, že tu tečna řídící hypocykloidy vytíná na obou kotálnicích $\alpha = 0$ a $\alpha = \pi$ po dvou bodech o stálé vzdálenosti $2\,(c \pm a)$, jich střední bod pak leží na kruhu (g).

Nikomédova, které se nám zachovalo prostřednictvím Pappusovým (IV. kniha, prop. 32 jeho Collectiones).[1])

Při tom se nám objeví vztahy nefroidy i plochy kotálnic $c = 2a$ ke známým Steinerovým trojúhelníkům vepsaným ellipse.

V případě $m = 3$ problém tečen k řídící hypocykloidě (Steinerově) z bodu na kruhu (g) jest elementárně řešitelný, an se převádí na dělení úhlu v čtyři stejné části.

Body N_μ na epicykloidě $\alpha = \pi$ netvoří obecně pravidelný mnohoúhelník, stane se tak jen v případě $m = 3$, kdy tyto dva body N_0, N_1 jsou konce délky stálé velikosti. *Avšak body* N'_μ, jež těmto parametrům ψ'_μ odpovídají na hypocykloidě $\alpha = 0$

$$x + iy = (c - a + g\,e^{-i\varphi})\,e^{i\psi}$$

t. j. v našem případě

$$x + iy = (c - a)\,e^{i\psi} + g\,e^{-(m-1)i\psi},$$

tvoří pravidelný mnohoúhelník o $(m - 1)$ stranách.
V případě $m = 3$ tak máme na modifikované hypocykloidě

$$x + iy = 2a\,e^{i\psi} + g\,e^{-2i\psi}$$

řadu dvojic $N_0'\,N_1'$ stálé vzdálenosti, přímka spojivá tvoří s Ox úhel ψ a (splývajíc s přímkou Δ) obaluje hypocykloidu řídící (t. j. Steinerovu)

$$x + iy = g\,(2\,e^{-2i\psi} + e^{4i\psi}).$$

Z výrazu pro řídící hypocykloidu

$$x + iy = \frac{g}{a}\left(\frac{c-a}{2}\,e^{(m+1)i\psi} + \frac{c+a}{2}\,e^{-(m-1)i\psi}\right)$$

vychází, že dotykové body M_ν a N_μ' obou soustav tečen tvoří pravidelné polygony o $m + 1$ a $m - 1$ stranách, je-li m sudé; pro m liché se počet stran redukuje na polovici.

Pro polygony ψ je tu střed opsaného kruhu v bodě

$$g\,\frac{c-a}{2a}\,e^{(m+1)i\psi};\ \text{poloměr} = g\,\frac{c+a}{2a}\,.$$

Pro polygony ψ_ν' má kruh opsaný

$$\text{střed}\ g\,\frac{c+a}{2a}\,e^{-(m-1)i\psi},\ \text{poloměr}\ g\,\frac{c-a}{2a}\,.$$

* * *

Normála epicykloidy

$$x + iy = (c + a - g\,e^{i\varphi})\,e^{i\psi}$$

má rovnici

$$-X\,[a \sin\psi - g \sin(\varphi + \psi)] + Y\,[a \cos\psi - g \cos(\varphi + \psi)] = gc \sin\varphi;$$

[1]) Srov. Teixeira, Traité des courbes, sv. I., str. 265—7.

pro $c = m\,a$, $\varphi = m\,\psi$, a vzhledem k tomu, že $(m+1)\,\psi_\nu = \vartheta$ se navzájem liší pouze o násobky periody $2\,\pi$, shledáváme, že

„normály epicykloidy ($\alpha = \pi$) v bodech pravidelného $(m+1)$ úhelníka $M_0\,M_1 \ldots M_m$ se protínají ve společném bodě

$$x = m\,g\cos(m+1)\,\psi,\; y = m\,g\sin(m+1)\,\psi.$$

$(c = m\,a,\ \psi + \dfrac{2\,\nu\,\pi}{m+1}$ odvalené úhly na kruhu pevném).

Rovnice normály hypocykloidy $x + i\,y = (c - a + g\,e^{-i\varphi})\,e^{i\psi}$ zní

$$X\,[a\sin\psi + g\sin(\varphi - \psi)] - Y\,[a\cos\psi - g\cos(\varphi - \psi)] = c\,g\sin\varphi,$$

tedy v případě našem $c = m\,a$

$$X\,[a\sin\psi + g\sin(m-1)\,\psi] - Y\,[a\cos\psi - g\cos(m-1)\,\psi] = m\,a\,g\sin m\,\psi.$$

Pro bod normály v bodě ψ'

$$X = r\cos\vartheta,\; Y = r\sin\vartheta$$

musí tedy býti

$$a\,r\sin(\psi' - \vartheta) + g\,r\sin(\overline{m-1}\,\psi' + \vartheta) = m\,a\,g\sin m\,\psi'.$$

Klademe-li tu

$$\psi' = \frac{m+1}{m-1}\,\psi_\nu,\; \vartheta = -(m+1)\,\psi_\nu,$$

kde ψ_ν má týž význam $\psi + \dfrac{2\,\nu\,\pi}{m+1}$ jako výše, bude

$$\psi' - \vartheta = \frac{m+1}{m-1}\,m\,\psi_\nu = m\,\psi';$$

bod uvažovaný (r, ϑ) leží tedy na normále bodu ψ', volíme-li

$$r = m\,g,\; \vartheta = -(m+1)\,\psi_\nu \equiv -(m+1)\,\psi$$

Tímto bodem procházejí tedy normály hypocykloidy (c, a, g) vztýčené v bodech

$$\psi_\nu' = \frac{m+1}{m-1}\,\psi_\nu.$$

Tyto okolnosti nepřekvapují, poněvadž různé oblouky čáry jsou opsány body pohyblivého obrazce stálého tvaru a velikosti. V případě $m = 2$ však také normály hypocykloidy — která je tu ellipsa o poloosách $a \pm g$ — příslušné k vrcholům pravidelných trojúhelníků na kruhu (c) a na epicykloidě, sbíhají ve společném bodě. Tento zjev ukáže se pro ellipsu speciálním, pro $m > 2$ normály hypocykloidy v bodech příslušných k vrcholům pravidelného $(m+1)$ úhelníka (na kruhu pevném (c)) neprocházejí obecně společným bodem.

VII.

Paty normál k hypocykloidě $(c - a + g\, e^{-i\varphi})\, e^{i\psi}$ vycházejících z bodu (x, y) hoví v komplexním parametru $u = e^{i\psi}$ rovnici $(c = ma)$

$$m\, a\, g\, (u^{2m} - 1) - g\, (x + i\, y)\, u^{2m-1} - a\, (x - i\, y)\, u^{m+1} + a\, (x + i\, y)\, u^{m-1} + g\, (x - i\, y)\, u = 0,$$

která vychází bezprostředně z rovnice normály. V případě $m = 3$ tu mezi symetrickými úkony $\mathfrak{f}_1\, \mathfrak{f}_2 \dots$ všech šesti parametrů nacházíme čtyři vztahy

$$a\, \mathfrak{f}_1 = g\, \mathfrak{f}_4,\ a\, \mathfrak{f}_5 = g\, \mathfrak{f}_2,\ \mathfrak{f}_6 = -1,\ \mathfrak{f}_3 = 0.$$

Aby čtyři těchto pat příslušely k bodům ψ na pevném kruhu, jež jsou vrcholy čtverce, musí se rovnice rozpadnouti tímto způsobem

$$(u^4 - u_0^4)\, (u^2 - \sigma_1\, u + \sigma_2) = 0,$$

takže symetrické úkony jsou

$$\mathfrak{f}_1 = \sigma_1,\ \mathfrak{f}_2 = \sigma_2,\ \mathfrak{f}_3 = 0,\ \mathfrak{f}_4 = -u_0^4,\ \mathfrak{f}_5 = -u_0^4\, \sigma_1,\ \mathfrak{f}_6 = -u_0^4\, \sigma_2;$$

hořejší podmínky pak dávají podmínku

$$u_0^{12} = 1,$$

jež stanoví tři čtveřiny hledané vlastnosti:

$$\psi = 30^0,\ 60^0,\ 90^0,$$

tedy pouze polygony ojedinělé.

Víme, že normály hypocykloidy (c, a, g) v $(m - 1)$ bodech

$$\psi_\nu' = \frac{\omega + 2\,\nu\,\pi}{m - 1}\quad (\nu = 0, 1, \dots m - 2)$$

sbíhají se v bodě

$$x + i\, y = m\, g\, e^{-i\omega} = m\, g\, u_0^{-(m-1)}.$$

Veškery normály z tohoto bodu mají paty, pro něž poslední rovnice zní

$$a\, (u^{2m} - 1) - g\, \frac{u^{2m-1}}{u_0^{m-1}} + a\, \frac{u^{m-1}}{u_0^{m-1}} - a\, u_0^{m-1}\, u^{m+1} + g\, u_0^{m-1}\, u = 0;$$

tuto rovnici lze psáti

$$(u^{m-1} - u_0^{m-1})\, (a\, u^{m+1} - g\, u_0^{1-m}\, u^m - g\, u + a\, u_0^{1-m}) = 0,$$

čímž nacházíme rovnici stupně $m + 1$ pro komplexní parametry dalších $m + 1$ normál.

Tuto druhou rovnici lze psáti

$$(a\, u^m - g)\, u\, u_0^{m-1} - (g\, u^m - a) = 0;$$

skupiny bodů, jež tato rovnice definuje, tvoří na čáře (rovněž na kruhu) involuci stupně $m + 1$.

V případě $g = a$ má tato ve svých skupinách m prvků stálých $(u^m = 1)$ a pouze jeden prvek proměnný:

$$u = \frac{1}{u_0^{m-1}}.$$

VII.

Hypocykloida obyčejná $g = a$, $c = m\,a$ je tedy čára třídy pouze m-té; skutečně v hořejší rovnici pro paty normál z bodu (x, y) vedených odštěpí se v tomto případě činitel $u^m - 1$ a zbývá

$$[m\,a\,(u^m + 1) - (x + i\,y)\,u^{m-1} - (x - i\,y)\,u = 0.$$

Předešlý výsledek lze vzhledem k okolnosti $m\,g = ma = c$ vyjádřiti takto:

„Obyčejné hypocykloidě vytvořené kotálením kruhu po vnitřní straně pevného kruhu m-krát většího poloměru lze vepsati nekonečně mnoho $(m - 1)$ úhelníků pravidelných; normály v jejich vrcholech se protínají na kruhu pevném.

Jsou-li vrcholy polygonu příslušné k úhlům $\psi + \frac{2\,\nu\,\pi}{m - 1}$, je průsek normál v bodě $x = c\cos(m - 1)\,\psi$, $y = c\sin(m - 1)\,\psi$ a zbývající normála odpovídá odvalenému úhlu $-(m - 1)\,\psi$, t. j. bodu opěrnému, jenž s průsekem normál je symetrický vůči ose $O\,x$.

* * *

Předchozí vlastnosti řídící hypocykloidy mají své applikace u ploch kotálnic. Předpokládejme na př. $\frac{c}{a} = m$ jako číslo liché; pak na každé tečně řídící hypocykloidy leží pár bodů, jichž parametry ψ se liší o π; příslušné jim kruhy Γ leží na stejné rovině a tedy se protínají. Geometrické místo průseků těchto kruhů je pak dvojná čára plochy kotálnic. Podle rovnic (4) a (4′) pro kouli a rovinu $\overline{\Gamma}$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,c\,x\cos\psi - 2\,c\,y\sin\psi = a^2 + g^2 - c^2 - 2\,a\,g\cos\varphi,$$
$$x\sin\psi - y\cos\psi = g\sin\varphi$$

nacházíme pro průsečíky ještě rovnici

$$x\cos\psi + y\sin\psi = \frac{a\,g}{c}\cos\varphi.$$

Dvojná čára tato leží tedy na kouli

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + g^2 - c^2,$$

a na hypocykloidním válci

$$x + i\,y = \frac{g}{c}\left(\frac{c + a}{2} - \frac{c - a}{2}e^{2\,i\,\varphi}\right)e^{-i(\varphi - \psi)},\ (a\,\varphi = c\,\psi),$$

jehož základnu vytvoří kotálení kruhu poloměru $r = g\,\frac{c - a}{2\,c}$ po kruhu pevném poloměru g, při čemž opisující bod je diametrální s bodem řídícím pohyb (t. j. rámě má hodnotu $-r$).

Hypocykloida tato je podobna ($m$krát zmenšena) hypocykloidě řídící a otočena tak, aby bod $\left(\frac{g}{m}, 0\right)$ byl její vrcholem.

VII.

Tak na př. má plocha kotálnic $c = 3\,a$ dvojnou čáru, jež leží na kouli

$$x^2 + y^2 + z^2 = g^2 - 8\,a^2$$

a na válci

$$x + i\,y = \frac{1}{3}\,g\,(2 - e^{6\,i\,\psi})\,e^{-2\,i\,\psi},$$

jehož řídící čarou je Steinerova hypocykloida s hrotem $x = -g,\ y = 0$.

Obecně máme pro bod na dvojné čáře

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2\,g^2}{c^2}\,cos^2\,\varphi + g^2\,sin^2\,\varphi\,,$$

tedy z rovnice koule plyne

$$z^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2}\,(c^2 - g^2\,cos^2\,\varphi)\,;$$

aby dvojná čára tato byla realnou, musí býti $g > c$.

* * *

Dále můžeme stanoviti elementárně body na průsečnici plochy kotálnic s válcem (g)

$$x^2 + y^2 = g^2,$$

ponèvadž umíme strojiti tečny řídící hypocykloidy vycházející z bodů kruhu (g). Jednotlivé tyto tečny jsou průměty kruhů Γ, jež protínají zvolenou stranu válce a které tedy dovedeme sestrojiti. Plocha kotálnic je stupně $4\,m$.

U plochy kotálnic $c = 2\,a$ $(m = 2)$ osmého stupně existují z bodu $\omega = \pi + 3\,\psi$ na kruhu (g) tři tečny řídící astroidy $\psi,\ \psi \pm 120^0$, jež vespolek svírají úhly 120^0, čtvrtá tečna odpovídá úhlu $-\omega$. Průsečíky koule (4) s přímkou na válci

$$x = g\,cos\,\omega,\ y = g\,sin\,\omega$$

jsou pak dány rovnicí

$$z^2 = -3\,a\,(a + 2\,g\,cos\,2\,\psi'),$$

kde třeba klásti postupně $\psi' = \psi,\ \psi \pm 120^0,\ \pi - 3\,\psi$.

Pro $g \leqq \frac{a}{2}$ tedy uvažovaná průseč není realná; pro $g > \frac{a}{2}$ existuj partie s jednou realnou dvojicí.

Z veličin $a + 2\,g\,cos\,2\,\psi_\nu,\ \psi_\nu = \psi + \frac{2\,\nu\,\pi}{3}$, aspoň jedna je kladná, ježto součet jich je $3\,a > 0$; tedy ze čtyř dvojic průseků aspoň jedna je pomyslna.

Součin uvažovaných veličin

$$a^3 + 2\,g^3\,cos\,6\,\psi$$

bude záporný, je-li veličina $a + 2\,g\,cos\,6\,\psi$ záporná a při tom $a > g$. Pak z uvažovaných veličin jsou dvě kladné, a výraz z^2 bude kladným pro jeden z úhlů ψ, a pro úhel $\pi - 3\psi$, takže tu plocha má dva páry listů realných a dva páry pomyslných.

7.

Tažme se, v jakém vztahu musí býti parametry ψ, ψ_1 dvou kruhů Γ a Γ_1, aby se tyto kruhy protínaly.

Radikální rovina koulí z obalové řady příslušných k našim parametrům jest

$$x(\cos\psi - \cos\psi_1) + y(\sin\psi - \sin\psi_1) = \frac{a\,g}{c}(\cos\varphi - \cos\varphi_1),$$

a roviny kruhů obou jsou

$$(16)\qquad \begin{aligned} x\sin\psi - y\cos\psi &= g\sin\varphi \\ x\sin\psi_1 - y\cos\psi_1 &= g\sin\varphi_1. \end{aligned}$$

Vyloučením x, y z těchto tří rovnic obdržíme hledanou podmínku, a sice ve tvaru

$$\begin{vmatrix} \cos\psi - \cos\psi_1 & \sin\psi - \sin\psi_1 & \frac{a}{c}(\cos\varphi - \cos\varphi_1) \\ \sin\psi_1 & -\cos\psi_1 & \sin\varphi_1 \\ \sin\psi & -\cos\psi & \sin\varphi \end{vmatrix} = 0.$$

Odečtěme třetí řádek od druhého, a v novém determinantu dělme první dva řádky na $2\sin\frac{\psi - \psi_1}{2}$:

$$\begin{vmatrix} -\sin\frac{\psi+\psi_1}{2}, & \cos\frac{\psi+\psi_1}{2}, & -\frac{a}{c}\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2}\frac{\sin\delta}{\sin\Delta} \\ \cos\frac{\psi+\psi_1}{2}, & \sin\frac{\psi+\psi_1}{2}, & \cos\frac{\varphi+\varphi_1}{2}\frac{\sin\delta}{\sin\Delta} \\ \sin\psi & -\cos\psi & \sin\varphi \end{vmatrix} = 0,$$

$$\delta = \frac{\varphi - \varphi_1}{2},\quad \Delta = \frac{\psi - \psi_1}{2}.$$

Podmínka je mimo to splněna při $\sin\Delta = 0$.

Rozvineme-li determinant podle prvků posledního sloupce, vyjde

$$\sin\varphi = \frac{\sin\delta}{\sin\Delta}\left(\frac{a}{c}\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2}\cos\frac{\psi-\psi_1}{2} + \cos\frac{\varphi+\varphi_1}{2}\sin\frac{\psi-\psi_1}{2}\right);$$

podmínka ta je splněna pro $\sin\delta = 0$ pouze když $\sin\varphi = 0$.

Předpokládejme $\sin\varphi \gtrless 0$, a položme

$$\frac{\varphi+\varphi_1}{2} = \omega,\ \text{tedy}\ \varphi = \omega + \delta,$$

$$\frac{\sin(\omega+\delta)}{\sin\delta} = \sin\omega\cot g\,\delta + \cos\omega,$$

a podmínka bude zníti

$$\sin \omega \, \mathrm{cotg}\, \delta = \frac{a}{c} \sin \omega \, \mathrm{cotg}\, \Delta,$$

což vyžaduje buď $\sin \omega = 0$ aneb

$$\mathrm{cotg}\, \delta = \frac{a}{c} \mathrm{cotg}\, \Delta .$$

Dva kruhy Γ, Γ_1 se tedy protínají, je-li splněna jedna z těchto podmínek:

1. Rozdíl $\psi - \psi_1$ je celistvý násobek úhlu 2π;

2. φ a φ_1 jsou celistvé násobky úhlu π, stejné parity; tato podmínka se k obecné poloze kruhu nevztahuje.

3. $\sin \dfrac{\varphi + \varphi_1}{2} = 0,$

4. $\mathrm{cotg} \dfrac{\varphi_1 - \varphi}{2} = \dfrac{a}{c} \mathrm{cotg} \dfrac{\psi_1 - \psi}{2}$.

Poslední případ vyjádříme přehledněji, kladouce

$$\frac{\psi_1 - \psi}{2} = \vartheta, \quad \frac{c}{a} = k,$$

tedy

$$\frac{\varphi_1 - \varphi}{2} = k\vartheta,$$

takže 4. zní

$$* \qquad \mathrm{tg}\, k\vartheta = k \,\mathrm{tg}\, \vartheta.$$

Určí-li se veškera řešení této rovnice, obdržíme pak veškery kruhy, jež dle 4. protínají kruh $\Gamma(\psi)$, kladouce

$$\psi_1 = \psi + 2\vartheta.$$

Příklady. Na ploše kotálnic pro $a = c$ dotýkají se veškery kruhy; zde podmínka 1. nepodává kruh Γ_1 různý od Γ, stejně podmínka 2.; podmínka 3. dává kruhy φ a $-\varphi$, podmínka 4. v tomto případě je splněna pro každé ϑ.

U plochy kotálnic $c = 2a$ ($\varphi = 2\psi$) rovnice * zní

$$\mathrm{tg}\, 2\vartheta = 2\,\mathrm{tg}\, \vartheta$$

a nemá řešení; podmínka 1. nedává nový kruh, podmínka 3. pak dává $\psi + \psi_1 = \pi, 2\pi$.

Rovina kruhu Γ má rovnici

$$x \sin \psi - y \cos \psi = g \sin 2\psi,$$

pro $\psi_1 = 2\pi - \psi$ zní tato

$$x \sin \psi + y \cos \psi = g \sin 2\psi,$$

průsečnice jest přímka I

$$y = 0, \ x = 2 g \cos \psi,$$

protínající oba kruhy ve společných bodech.

Pro $\psi_1 = \pi - \psi$ zní rovnice druhé roviny

$$x \sin \psi + y \cos \psi = - g \sin 2 \psi;$$

průsečnice je $x = 0, y = -2 g \sin \psi$ (II).

Pro body I zní koefficienty v rovnici roviny tečné

$$A = (c - 2 g) \cos \psi, \ B = \sin \psi, C = - z;$$

pro obě roviny tečné příslušné k hodnotám ψ a $2 \pi - \psi$ liší se vespolek pouze koefficienty B; tentýž bod má dva různé paramétry ψ (ψ a $2 \pi - \psi$), společný paramétr α:

$$\cos \alpha = \frac{2 a - g - g \cos \varphi}{a - g \cos \varphi},$$

a dvě různé roviny tečné. Tyto body naplňují dvojnou čáru plochy, která leží na rovině $O x z$:

$$x = 2 g \cos \psi, \ z^2 = (a - g \cos 2 \psi)^2 \sin^2 \alpha,$$

t. j. po dosazení za $\cos^2 \alpha$:

$$z^2 = (a - g \cos 2 \psi)^2 - (a - g + a - g \cos 2 \psi)^2,$$

$$(\alpha) \qquad z^2 = (g - a) (3 a + g - 4 g \cos^2 \psi),$$

$$(\alpha') \qquad z^2 = (g - a) \left(3 a + g - \frac{x^2}{g}\right);$$

rovnice této dvojné čáry zní

$$(\beta) \qquad \frac{x^2}{g} + \frac{z^2}{g - a} = 3 a + g,$$

takže je to ellipsa neb hyperbola, jak $g > a$ či $g < a$.

Ježto dle (α)

$$z^2 = (g - a) [3 (a - g) + 4 g \sin^2 \psi]$$

je záporné při reálném ψ, jakmile $g < a$, je zřejmo, že *„dvojná hyperbola tvoří isolovanou čáru plochy zkrácených kotálnic"*, příslušejíc k pomyslným hodnotám ψ. Naproti tomu jest ellipsa $(g > a)$ obyčejnou dvojnou čarou.

Body na přímce II mají pro koefficienty v rovnici tečné roviny

$$A = c \cos \psi, \ B = (c + 2 g) \sin \psi,$$

takže roviny jsou různy pro parametry ψ a $\pi - \psi$; máme tak druhou dvojnou čáru na ploše kotálnic, ležící na rovině $O y z$. Pro paramétr α nalezneme

$$\cos \alpha = \frac{2 a + 2 g \sin^2 \psi}{a - g \cos 2 \psi} = \frac{2 a + g - g \cos 2 \psi}{a - g \cos 2 \psi}$$

tedy

$$z^2 = -(a+g)(3a - g + 4g\sin^2\psi)$$

čili

$$\frac{y^2}{g} + \frac{z^2}{a+g} = g - 3a.$$

Plocha tato má tedy za dvojnou čáru ellipsu v rovině Oyz, která jest realnou pro $g > 3a$, a sice je tu

$$z^2 = (a+g)[3(g-a) + 4g\cos^2\psi]$$

kladné pro realná ψ, takže čára jest skutečně dvojnou.

K těmto dvěma kuželosečkám druží se ellipsa $\alpha = 0$ na rovině základní

$$x = (a+g)\cos\psi,\; y = (a-g)\sin\psi,$$

která ovšem není singulární čarou plochy.

Ustanovme ještě tečnou rovinu σ v bodě na dvojné kuželosečce $y = 0$. V její rovnici

$$AX + BY + CZ + D = 0$$

nám pro stálý člen

$$D = g^2 - a^2 + 2(a - a\cos\alpha)(a - g\cos 2\psi)$$

hodnota

$$(a - g\cos 2\psi)\cos\alpha = 2(a - g\cos^2\psi)$$

dává

$$D = g^2 - a^2 + 2a(a - g\cos 2\psi) + 4a(g\cos^2\psi - a)$$

t. j.

$$D = (g+a)^2 - 4a^2.$$

Rovnice tečné roviny v uvažovaných bodech tedy zní

$$(\sigma)\qquad (a-g)X\cos\psi + aY\sin\psi - \frac{1}{2}Zz + \frac{(a+g)^2 - 4a^2}{2} = 0;$$

její stopa půdorysná $Z = 0$ obaluje ellipsu

$$x = \mu\cos\psi,\qquad y = \nu\sin\psi,$$

$$\mu = \frac{4a^2 - (a+g)^2}{2(a-g)},\quad \nu = \frac{4a^2 - (a+g)^2}{2a}.$$

Bokorysná stopa $X = 0$ roviny tečné obsahuje ve své rovnici [značíme $n = (a+g)^2 - 4a^2 = (g-a)(g+3a)$]

$$2aY\sin\psi + n = Zz$$

člen z, pro nějž známe čtverec v jednoduchém tvaru

$$z^2 = (g-a)(3a + g - 4g\cos^2\psi).$$

Povyšíme tedy obě strany rovnice na druhou mocnost a u výsledku položíme $\sin\psi = u$; vznikne tak rovnice

$$[a^2Y^2 + g(a-g)Z^2]u^2 + anYu + \frac{3}{4}(a-g)^2Z^2 + \frac{n^2}{4} = 0,$$

z níž obdržíme rovnici obalové čáry bokorysných stop anulováním diskriminantu.

Výsledek zní po redukci

$$a^2 (a-g)^2 Y^2 + g(a-g)^3 Z^2 + n^2 g(a-g) = 0.$$

Je přirozeno, že kuželosečka tato je realná pouze pro $g > a$, kdy tečné roviny jsou realné.

Tečné roviny plochy kotálnic $c = 2a$ v bodech dvojné ellipsy $y = 0$ sestrojené obalují rozvinutelnou plochu 4. třídy, jejíž stopa bokorysná $X = 0$ jest hyperbola

$$\frac{Y^2}{\mu^2} - \frac{Z^2}{\nu^2} = 1\,; \quad \mu = \frac{n}{a}\sqrt{\frac{g}{g-a}}\,, \quad \nu = \frac{n}{g-a}\,;$$

její stopa nárysná a půdorysná jsou ellipsy, i zbývá určiti ještě čtvrtou kuželosečku na této rozvinutelné ploše ležící; tato jest úběžná kuložečka plochy kuželové

$$\frac{X^2}{3} + \frac{Z^2}{4} = \frac{a^2 Y^2}{n}\,.$$

Abychom k rovnici té dospěli, určíme obalový kužel rovin vedených počátkem O rovnoběžně s rovinami tečnými; v rovnici takové uvedeme člen Zz na pravou stranu a utvoříme čtverce. Výsledek

$$[(a-g)X\cos\psi + aY\sin\psi]^2 = \frac{1}{4}Z^2z^2 = \frac{1}{4}Z^2(g-a)(3a+g-4g\cos^2\psi)$$

dává kvadratickou rovnici o neznámé

$$u = e^{2i\psi},$$

a sice:

$$\begin{aligned}&[(a-g)^2X^2 - a^2Y^2 + g(g-a)Z^2 - 2ia(a-g)XY]\,u^2\\ &+ 2\left[(a-g)^2X^2 + a^2Y^2 + \frac{1}{2}(g-a)(g-3a)Z^2\right]u\\ &+ (a-g)^2X^2 - a^2Y^2 + g(g-a)Z^2 + 2ia(a-g)XY = 0.\end{aligned}$$

Položí-li se její diskriminant na roveň nulle, vyjde hledaná rovnice plochy kuželové ve tvaru

$$3a^2Y^2 - (g-a)(g+3a)X^2 = \frac{3}{4}(g-a)(g+3a)Z^2,$$

která je totožna s rovnicí shora uvedenou.

Normály plochy kotálnic ($c = 2a$, $g > a$) v bodech její dvojné ellipsy v nárysně $y = 0$ tvoří sborcenou plochu, pro niž známe dvě kuželosečky: ellipsu v nárysně a kruh (c) v půdorysně.

Rovnice normály můžeme psáti

$$\frac{X - 2a\cos\psi}{x - 2a\cos\psi} = \frac{Y - 2a\sin\psi}{y - 2a\sin\psi} = \frac{Z}{z} = v,$$

kde v je pomocný paramétr; dosadíme-li hodnoty

$$y = 0,\ x = 2\,g\cos\psi,$$

obdržíme parametrické vyjádření plochy normál

$$(n)\qquad \begin{cases} X = 2\,[a + v\,(g - a)]\cos\psi, \\ Y = 2\,a\,(1 - v)\sin\psi, \\ Z = v\,z;\ z^2 = (g - a)\,(3\,a + g - 4\,g\cos^2\psi). \end{cases}$$

Hodnota

$$v = \frac{a}{a - g}$$

dává pro bokorysnou stopu plochy normál

$$Y = -2\,g\,v\sin\psi,\ Z^2 = v^2\,(g - a)\,(3\,a + g - 4\,g\cos^2\psi),$$

z čehož vyloučením ψ vychází

$$(g - a)\,Y^2 - g\,Z^2 = 3\,a^2\,g$$

jakožto rovnice hyperboly, v níž rovina $X = 0$ seče uvažovanou plochu normál.

Půdorys normály

$$a\,X\sin\psi + (g - a)\,Y\cos\psi = 2\,a\,g\sin\psi\cos\psi$$

obaluje čáru 4. třídy příbuznou s astroidou; je to obrysová čára plochy normál, která je stupně osmého.

Čáry $v =$ konst. na této ploše jsou 4. stupně a jeví se jako průseč elliptických válců

$$\frac{x^2}{[a + v\,(g - a)]^2} + \frac{y^2}{a^2\,(1 - v)^2} = 4,$$

$$\frac{x^2}{[a + v\,(g - a)]^2} + \frac{z^2}{g\,(g - a)\,v^2} = \frac{g + 3\,a}{g}.$$

Směrný kužel plochy normál jakožto doplňkový hořejšího má rovnici

$$3\,x^2 + 4\,z^2 = \frac{n}{a^2}\,y^2.$$

Rovnici plochy kotálnic $c = 2\,a$ poskytne nám její vytvoření jako obalové plochy koulí (4)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4\,a\,x\cos\psi - 4\,a\,y\sin\psi + 3\,a^2 - g^2 + 2\,ag\cos 2\,\psi = 0.$$

Zavedeme-li komplexní parametr $u = e^{i\psi}$, a znamenáme-li

$$K \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 3\,a^2 - g^2,$$

obdržíme tuto rovnici ve tvaru

$$a\,g\,(u^4 + 1) - 2\,a\,(x - iy)\,u^3 - 2\,a\,(x + i\,y)\,u + K\,u^2 = 0;$$

diskriminant její je dán výrazem

$$\varDelta = S^3 - 27\,T^2,$$

rovnice plochy $\Delta = 0$. Tato plocha kotálnic má tedy dvojnou čáru na ploše $S = 0$; pro výraz S vypočteme

$$12\, S \equiv K^2 - 12\, a^2\, (x^2 + y^2 - g^2).$$

Plocha $S = 0$ rozpadá se ve dvě pomyslné koule

$$K = 6\, a^2 \pm 2\, i\, az \sqrt{3} \text{ čili } x^2 + y^2 + z^2 = 3\, a^2 + g^2 \pm 2i\, az \sqrt{3};$$

ty vytínají na ploše kotálnic dvě dvojné čáry; rovnice (3) dává pro ně $1 - 2 \cos\alpha = \pm\, i\sqrt{3} \sin\alpha$. Jsou to patrně obě složky hřbetní čáry, jež jsou tu dvě pomyslné kotálnice ($\cos\alpha = 2$). Plocha jest 8. stupně, má 3 dvojné kuželosečky (udané výše a kruh úběžný) a dvě dvojné čáry stupně 6. Rovinné řezy její mají tedy aspoň 18 bodů dvojných. Sférické čáry této plochy leží na plochách stupně 6.

* * *

Jako třetí příklad uvažujme případ $c = 4\, a$; zde $k = 4$, rovnice *

$$tg\, 4\, \vartheta = 4\, tg\, \vartheta$$

se při označení $tg\, \vartheta = t$, ježto

$$tg\, 4\, \vartheta = \frac{4\, t\, (1 - t^2)}{(1 - t^2)^2 - 4\, t^2},$$

přepíše na

$$1 - t^2 = (1 - t^2)^2 - 4\, t^2$$

a pro $\xi = 1 - t^2$ zní

$$\xi^2 + 3\, \xi - 4 = 0; \quad \xi_1 = -4,\ \xi_2 = 1.$$

Hodnota $\xi = 1$ podává nepotřebný výsledek $t = 0$, a zbývající $\xi = -4$ dává

$$tg\, \vartheta = \pm \sqrt{5}.$$

Kruhy ψ a $\psi + 2\, \vartheta$ se protínají v páru proměnných bodů, jež dávají dvojnou čáru na ploše kotálnic. Její průmět je dán rovnicemi (16) čili při $\psi_1 = \psi + 2\, \vartheta$:

$$x = \frac{g}{\sin 2\, \vartheta} (\sin 4\, \psi_1 \cos \psi - \cos \psi_1 \sin 4\, \psi),$$

$$y = \frac{g}{\sin 2\, \vartheta} (\sin 4\, \psi_1 \sin \psi - \sin \psi_1 \sin 4\, \psi).$$

Odtud vypočteme

$$x + i\, y = \frac{-g}{\sin 2\, \vartheta} (\sin 3\, \vartheta\, e^{5 i \omega} + \sin 5\, \vartheta\, e^{-3 i \omega}),\ \omega = \psi + \vartheta + \pi,$$

čili

$$x + i\, y = \frac{-g}{\sin 2\, \vartheta} (\sin 3\, \vartheta + \sin 5\, \vartheta\, e^{-8 i \omega})\, e^{5 i \omega}.$$

Porovnáme-li to s rovnicí modifikované hypocykloidy

$$x + i y = (R - r + h\, e^{-i\beta})\, e^{i\alpha},\ R\,\alpha = r\,\beta$$

(R poloměr kruhu pevného, r poloměr kruhu hybného, α odvalený úhel na kruhu pevném, β na kruhu hybném, h rámě), a uvážíme-li, že v našem případě $tg\,\vartheta = \sqrt{5}$ jest $\sin 2\,\vartheta$ kladné, $\sin 3\,\vartheta$ a $\sin 5\,\vartheta$ však záporné, nacházíme, že uvažovaná čára jest hypocykloida s hodnotami

$$R - r = -g' \sin 3\,\vartheta,\ h = -g' \sin 5\,\vartheta,\ \frac{\beta}{\alpha} = \frac{8}{5} = \frac{R}{r},\ g' = \frac{g}{\sin 2\,\vartheta}.$$

Tedy

$$\frac{R - r}{r} = \frac{3}{5},\ r = -\frac{5}{3} g' \sin 3\,\vartheta,\ R = -\frac{8}{3} g' \sin 3\,\vartheta.$$

Půdorys uvažované dvojné čáry na ploše kotálnic $c = 4\,a$ ($\varphi = 4\,\psi$) je tedy hypocykloida, jež vznikne kotálením kruhu poloměru

$$r = -\frac{5}{3} g \frac{\sin 3\,\vartheta}{\sin 2\,\vartheta} = \frac{5\,g}{3\sqrt{6}}$$

po kruhu pevném poloměru

$$R = -\frac{8}{3} g \frac{\sin 3\,\vartheta}{\sin 2\,\vartheta} = \frac{8\,g}{3\sqrt{6}},$$

neboť opisující bod má od středu hybného kruhu stálou vzdálenost (rámě)

$$h = -g \frac{\sin 5\,\vartheta}{\sin 2\,\vartheta} = \frac{5\,g}{3\sqrt{6}} = r,$$

a odvalený úhel na kruhu pevném počítaný od kladné osy $O\,x$ jest

$$\alpha = 5\,(\psi + \vartheta) + \pi.$$

V obecném případě, pro libovolné $k = \frac{c}{a}$, obdržíme pro dvojné body zcela stejným postupem

$$x + i\,y = \frac{g}{\sin 2\,\vartheta}[\sin (k - 1)\,\vartheta + \sin (k + 1)\,\vartheta\, e^{-2ik\omega}]\, e^{i(1+k)\omega}$$

$$= \frac{g}{\sin 2\,\vartheta}[\sin (1 + k)\,\vartheta - \sin (1 - k)\,\vartheta\, e^{2ik\omega}]\, e^{i(1-k)\omega},$$

kde položeno $\omega = \psi + \vartheta$.

„Má-li rovnice

$$tg\,k\,\vartheta = k\,tg\,\vartheta,\ tg\,\vartheta > 0,$$

řešení, protínají se kruhy příslušné k parametrům ψ a $\psi + 2\,\vartheta$ na ploše kotálnic $c = k\,a$ v bodech dvojné čáry, jejíž průmět do roviny pevného kruhu (c) jest prodloužená či zkrácená hypocykloida při $k > 1$, epicykloida při $k < 1$. Základní kruh těchto čar má střed v bodě O, a jeho poloměr jest

$$R' = \pm \frac{2k}{k-1} g \frac{\sin (k-1)\vartheta}{\sin 2\vartheta}, \quad k > 1 \text{ (hypocykloida)},$$

$$R' = \pm \frac{2k}{1+k} g \frac{\sin (1+k)\vartheta}{\sin 2\vartheta}, \quad k < 1 \text{ (epicykloida)},$$

poloměr hybného kruhu r' jest

$$\frac{1+k}{2k} R', \text{ resp. } \frac{1-k}{2k} R',$$

a rámě (vzdálenost opisujícího bodu od středu hybného kruhu) má hodnotu

$$\pm g \frac{\sin (1+k)\vartheta}{\sin 2\vartheta}, \text{ resp. } \pm g \frac{\sin (1-k)\vartheta}{\sin 2\vartheta}.$$

Výpočet předchozí operuje pouze rovnicemi (16), které odpovídají tečnám libovolné epicykloidy neb hypocykloidy, prostorový živel zastoupen toliko zvláštní hodnotou úhlu ϑ. Ponecháme-li v předchozích výpočtech ϑ libovolné, bude se bod (x, y) jeviti jako průsek dvou tečen epicykloidy svírajících stálý úhel. Znamenejme R, r základní poloměry kruhů u epicykloidy, a předpokládejme $g = a$. Máme pak

$$R = c, \; r = \frac{a-c}{2}, \quad c = ka.$$

Odvalený úhel na pevném kruhu jest $\mu = \psi - \varphi = (1-k)\psi$, přírůstku ϑ úhlu ψ odpovídá přírůstek $\delta = (1-k)\vartheta$ úhlu μ.

Konstanta k určí se z rovnice

$$\frac{R}{r} = \frac{2k}{1-k},$$

načež eliminací a z výrazů pro R', r', a rámě h' obdržíme pro novou epicykloidu poloměry R', r'

$$(17) \quad \begin{cases} \dfrac{R'}{r'} = \dfrac{2k}{1-k} = \dfrac{R}{r}, \\[2ex] R' = \dfrac{2R}{1+k} \dfrac{\sin\left(\dfrac{1+k}{1-k}\delta\right)}{\sin \dfrac{2\delta}{1-k}}, \quad h' = \dfrac{R}{k} \dfrac{\sin\delta}{\sin\dfrac{2\delta}{1-k}}. \end{cases}$$

Tečny epicykloidy, jichž průseky uvažujeme, svírají úhel

$$2\vartheta = \frac{2\delta}{1-k},$$

kdežto opěrné body (okamžité středy otáčení) na kruhu pevném R mají úhlovou vzdálenost 2δ; průsek tečen odpovídá úhlu $\psi + \vartheta$, tedy polární úhel jeho bodu opěrného (μ') jest $\mu' = \mu + \delta$.

„Pohybuje-li se úhel stálé velikosti 2ϑ tak, aby se jeho ramena dotýkala epicykloidy (R, r), opisuje jeho vrchol epicykloidu prodlouženou či zkrácenou, příslušnou k epicykloidě homothetické a soustředné. Opěrné body dotykových bodů ramen mají stálou angulární vzdálenost

$$2\delta = 2(1 - k)\vartheta,$$

a opěrný bod vrcholu leží na průvodiči $O\mu'$, jenž půlí úhel průvodičů bodů opěrných dotykových bodů; základní prvky nové epicykloidy jsou stanoveny rovnicemi (17)."

Volíme-li na př. kardioidu $R = r$, máme $k = \frac{1}{3}$, načež opěrné body dotykových bodů ramen hybného úhlu mají vzdálenost úhelnou 2δ, úhel tečen je 3δ, a epicykloida vytvořená vrcholem úhlu přísluší k pevnému kruhu poloměru

$$R' = \frac{3}{2} R \frac{\sin 2\delta}{\sin 3\delta},$$

a má rámě

$$h' = 3R \frac{\sin \delta}{\sin 3\delta} = R' \sec \delta .$$

Ponecháváme čtenáři odvoditi analogickou větu o hypocykloidě.

8.

Předpokládejme určitou kotálnici, takže v rovnicích (2) jsou veličiny a, c, α stálé. Při stálém ψ, φ $(a\varphi = c\psi)$ a proměnném g probíhá bod *loukot*, t. j. poloměr CM hybného kruhu. Souhrn všech poloh loukotě tvoří sborcenou *plochu loukotí*, příslušnou k uvažované kotálnici. Její parametrické vyjádření v neodvislých parametrech ψ a g podávají rovnice (2)

$$\begin{aligned} x &= (c - a\cos\alpha)\cos\psi + g(\cos\alpha\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) \\ y &= (c - a\cos\alpha)\sin\psi + g(\cos\alpha\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi) \\ z &= a\sin\alpha - g\sin\alpha\cos\varphi;\ a\varphi = c\psi. \end{aligned} \tag{18}$$

Řídící čára $g = 0$ této plochy jest kruh, souhrn poloh středu C hybného kruhu, ležící v rovině $z = a\sin\alpha$, jeho střed leží na Oz, a poloměr jest $c - a\cos\alpha$.

Směrný kužel, jehož vrchol $V(0, 0, a\sin\alpha)$ splývá se středem řídícího kruhu (C), má rovnice

$$\begin{aligned} x &= g(\cos\alpha\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) \\ y &= g(\cos\alpha\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi) \\ z &= a\sin\alpha - g\sin\alpha\cos\varphi,\ a\varphi = c\psi; \end{aligned} \tag{19}$$

první dvě rovnice lze shrnouti ve tvar pomyslný

$$(19') \qquad x + i\,y = g\,cos^2\frac{\alpha}{2}\,e^{i(\psi-\varphi)} - g\,sin^2\frac{\alpha}{2}\,e^{i(\psi+\varphi)}.$$

Koule $g =$ konst. seče tento kužel (19) v čáře, jejíž průmět (19′) je prodloužená či zkrácená epicykloida neb hypocykloida, i nalezneme pro poloměr pevného kruhu R, hybného r

$$R = \frac{2\,c}{a+c}\,g\,cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad r = \frac{a-c}{a+c}\,g\,cos^2\frac{\alpha}{2}$$

a pro rámě

$$h = g\,sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Epicykloidou je čára pro $a > c$, hypocykloidou pro $a < c$, a je to kruh v případě $a = c$. V tomto posledním případě ukazuje rovnice (19′)

$$x + i\,y = g\,cos^2\frac{\alpha}{2} - g\,sin^2\frac{\alpha}{2}\,e^{2i\varphi},$$

že poloměr kruhu $= g\,sin^2\frac{\alpha}{2}$, a střed leží na ose Ox, $x = g\,cos^2\frac{\alpha}{2}$. Směrný kužel plochy loukotí pro $c = a$ obsahuje tedy hyppopédu.

Úhlům $\alpha = \pm\,90^0$ odpovídají plochy loukotí zvlášť jednoduchého vyjádření analytického

$$\begin{aligned} x &= c\,cos\,\psi + g\,sin\,\varphi\,sin\,\psi \\ y &= c\,sin\,\psi - g\,sin\,\varphi\,cos\,\psi \\ z &= \pm\,(a - g\,cos\,\varphi)\,; \end{aligned}$$

směrný kužel z vrcholu V má za půdorysnou stopu čáru, jejíž polární souřadnice r a ω mají hodnoty

$$r = a\,tg\,\varphi, \quad \omega = \psi - \frac{\pi}{2}; \quad \varphi = \frac{c\,\psi}{a} = \frac{c}{a}\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right).$$

* * *

Ve zvláštním případě $a = c\;(\varphi = \psi)$ obdrží rovnice pro loukoť tvar

$$\begin{aligned} x &= a\,(1 - cos\,\alpha)\,cos\,\varphi + g\,(cos\,\alpha\,cos^2\varphi + sin^2\varphi) \\ y &= (1 - cos\,\alpha)\,(a - g\,cos\,\varphi)\,sin\,\varphi \\ z &= (a - g\,cos\,\varphi)\,sin\,\alpha. \end{aligned}$$

Odtud eliminací g vycházejí rovnice loukotě

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{y}{z} = tg\,\frac{\alpha}{2}\,sin\,\varphi, \\ &x\,sin\,\alpha\,cos\,\varphi + z\,(sin^2\varphi + cos\,\alpha\,cos^2\varphi) = a\,sin\,\alpha. \end{aligned} \right.$$

Torsální přímky na ploše loukotí (jež se protínají s nekonečně blízkou), hoví tedy jedné z rovnic $sin\,\varphi = 0$, $cos\,\varphi = 0$.

VII.

Pro $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$ máme přímky torsální

$$y = 0, \quad \pm x \sin\alpha + z \cos\alpha = a \sin\alpha,$$

dále pro $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$

$$y = \pm z \, tg \frac{\alpha}{2}, \quad z = a \sin\alpha,$$

t. j.

$$y = \pm 2 a \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad z = a \sin\alpha,$$

torsální přímky na rovině kruhu (C).

Eliminací φ z rovnic (20) vychází jakožto *rovnice plochy loukotí* $(a = c)$

$$x^2 \left(z^2 - y^2 \cot g^2 \frac{\alpha}{2}\right) = \left(y^2 \cot g \frac{\alpha}{2} + z^2 \cot g\,\alpha - az\right)^2, \tag{21}$$

která je tedy 4. stupně.

Válec směru $O\,x$

$$y^2 \cot g \frac{\alpha}{2} + z^2 \cot g\,\alpha - az = 0$$

či

$$y^2 \cot g \frac{\alpha}{2} + \cot g\,\alpha \left(z - \frac{a}{2}\, tg\,\alpha\right)^2 = \frac{a^2}{4}\, tg\,\alpha$$

stanoví na $O\,y\,z$ kuželosečku, která je dvojnou čarou plochy; mimo to jest osa $O\,x$ její dvojnou přímkou. Týž válec vytíná na rovinách $y = \pm z\, tg \frac{\alpha}{2}$ dvě přímky, podél nichž se plocha těchto rovin dotýká; jsou to výše uvedené torsální přímky na rovině řídícího kruhu (C). Rovina $O\,x\,y$ seče plochu vedle dvojné přímky ještě v přímkách isotropních $y \pm i\,x = 0$.

Na ploše loukotí známe tak kruh, dvojnou kuželosečku a dvojnou přímku, kterýmižto elementy jest geometricky určena.

Plochy druhého stupně procházející dvojnou přímkou a dvojnou kuželosečkou plochy loukotí protínají plochu tuto v čáře 2. stupně, jež se rozpadá v přímky. Rovnice těchto ploch má tvar

$$\lambda \left(y^2 \cot g \frac{\alpha}{2} + z^2 \cot g\,\alpha - az\right) + x\,(m\,y + n\,z) = 0, \tag{22}$$

kde λ, m, n jsou libovolné konstanty. Pro $\lambda = 0$ se plocha redukuje na rovinu obsahující dvojnou přímku $O\,x$ a na bokorysnu, pro ostatní můžeme předpokládati $\lambda = 1$. Průseč ploch (21) a (22) pak hoví rovnici

$$(my + n\,z)^2 = z^2 - y^2 \cot g^2 \frac{\alpha}{2},$$

vynecháme-li nezajímavý faktor x^2; rovnice tato odpovídá dvěma

rovinám svazku $O\,x$, takže naše plochy stanoví na ploše loukotí soustavu dvou přímek. Avšak také roviny svazku $O\,x$ protínají plochu pouze v přímkách, jak to ukazuje substituce $z = k\,y$, jež vede k rovnici

$$\pm\, x\sqrt{k^2 - cotg^2\frac{\alpha}{2}} = y\left(cotg\frac{\alpha}{2} + k^2 cotg\,\alpha\right) - ka.$$

Znamenejme dále

$$\Phi = y^2 cotg\frac{\alpha}{2} + z^2 cotg\,\alpha - az,$$

takže

$$y^2 cotg^2\frac{\alpha}{2} - z^2 = \Phi\, cotg\frac{\alpha}{2} - \frac{z^2}{2\,sin^2\frac{\alpha}{2}} + a\,z\,cotg\frac{\alpha}{2},$$

a rovnice (21) bude

$$\Phi^2 + x^2\Phi\, cotg\frac{\alpha}{2} - x^2\left(\frac{z^2}{2\,sin^2\frac{\alpha}{2}} - az\,cotg\frac{\alpha}{2}\right) = 0,$$

z čehož řešením vychází

$$\Phi = -\frac{1}{2}x^2 cotg\frac{\alpha}{2} \pm x\sqrt{\frac{1}{4}x^2 cotg^2\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{sin^2\frac{\alpha}{2}} - 2\,az\,cotg\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Zvolíme-li

$$x = \varepsilon\sqrt{2}\,a\,sin\frac{\alpha}{2},\quad \varepsilon = \pm 1,$$

stane se výraz pod odmocnítkem úplným čtvercem, a vyjde

$$\Phi = -\frac{1}{2}x^2 cotg\frac{\alpha}{2} \pm \frac{x}{\sqrt{2}}\,\frac{z - a\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}}$$

t. j.

$$y^2 cotg\frac{\alpha}{2} + z^2 cotg\,\alpha - az = -a^2 sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \pm \varepsilon\left(az - a^2 sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Pro případ $\pm\,\varepsilon = 1$ a -1 zní tato rovnice

$$y^2 cotg\frac{\alpha}{2} + z^2 cotg\,\alpha - 2\,a\,z + a^2 sin\,\alpha = 0,$$

resp.

$$y^2 cotg\frac{\alpha}{2} + z^2 cotg\,\alpha = 0,$$

tedy:

„Roviny kolmé na dvojnou přímku v bodech $x = \pm\sqrt{2}\,a\,sin\frac{\alpha}{2}$ protínají plochu loukotí ($a = c$) v kuželosečce a dvojici přímek, rovnoběžných s asymptotama dvojné kuželosečky."

VII.

Průmět loukotě do roviny $O\,x\,z$ má rovnici

(23) $$x \sin\alpha \cos\varphi - z\,(1 - \cos\alpha)\cos^2\varphi + z - a\sin\alpha = 0,$$

v níž přichází $\cos\varphi$ ve druhém stupni; obalová čára má rovnici anulující diskriminant, t. j.

$$x^2 \sin^2\alpha + 4\,(1 - \cos\alpha)\,z\,(z - a\sin\alpha) = 0,$$

čili

(23^a) $$x^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\left(z - \frac{a}{2}\sin\alpha\right)^2 = \frac{1}{2}\,a^2\sin^2\alpha.$$

„Nárysný obrys plochy loukotí ($a = c$) jest ellipsa mající vrcholy O, V; druhá polouosa jest $\sqrt{2}\,a\sin\frac{\alpha}{2}$."

Abychom určili půdorys dotykové čáry plochy loukotí s opsaným válcem směru $O\,y$, uvažme, že přímka (23) dotýká se svojí obálky v bodě, jenž hoví rovnici

(23^b) $$x = 2\,z\,tg\frac{\alpha}{2}\cos\varphi,$$

a připojíme-li z rovnice loukotě

$$y = z\,tg\frac{\alpha}{2}\sin\varphi,$$

shledáváme

$$x^2 + 4\,y^2 = 4\,z^2\,tg^2\frac{\alpha}{2},$$

což jest rovnice kužele 2. stupně, kterým se dotyková čára ze středu O promítá.

Nalezneme pak z (23) a (23_b) pro dotykový bod

$$z = \frac{a\sin\alpha}{1 + (1 - \cos\alpha)\cos^2\varphi},$$

takže půdorys čáry dotykové je racionální křivka 4. stupně:

$$x = 4\,a\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\frac{\cos\varphi}{1 + (1 - \cos\alpha)\cos^2\varphi},$$

$$y = 2\,a\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\frac{\sin\varphi}{1 + (1 - \cos\alpha)\cos^2\varphi},$$

$$4\,x^2y^2 + (2 - \cos\alpha)\,x^4 = 16\,a^4\sin^4\frac{\alpha}{2}.$$

Pro obrys půdorysný není výsledek tak jednoduchý; poznamenáme toliko, že dotykový bod obrysu s průmětem loukotě leží na přímce

$$x\cos 2\varphi + y\sin 2\varphi = a\cos\varphi,$$

čímž jest konstruktivně určen.

VII.

V případě $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ jest obrys plochy v půdorysu základní kruh $x^2 + y^2 = a^2$.

Dvě loukotě (φ) a (φ_1) se protínají pouze za podmínky buď 1) $\sin\varphi = \sin\varphi_1$ aneb 2) $\cos\varphi = \cos\varphi_1$.

A sice nalezneme, že *rovina přímek* (φ) a $(\pi - \varphi)$ *obsahuje přímku dvojnou*; dále jsou přímky (φ) a $(-\varphi)$ na společné rovině

$$x \sin\alpha \cos\varphi + z (\sin^2\varphi + \cos\alpha \cos^2\varphi) = a \sin\alpha. \tag{23}$$

Veškery tyto roviny protínají plochu loukotí v kuželosečkách. Dvě z nich jsou kolmy na $O\,x$, a sice jsou to roviny výše uvažované

$$x = \pm a \sqrt{2} \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Roviny (23) obalují válec elliptický, jehož základna jest obrysová čára plochy.

Daným bodem M plochy loukotí veďme obě tečné roviny opsaného válce elliptického směru Oy; ty sekou každá plochu ve dvou přímkách a v kuželosečce, a musí pro jednu tuto rovinu bod M ležeti na jedné z obou přímek, kdežto u druhé roviny leží bod M na kuželosečce; každým bodem plochy prochází jedna přímka a jedna kuželosečka, ležící v rovině kolmé na nárysnu.

V obr. 3. vycházíme z daných bodů O, A (tedy pevného kruhu kotálnice) a úhlu α. Přímky a'', a''_1 procházející body A, A_1 průsečnými kruhu základního (m) s osou $O\,x$, a nakloněné k této pod úhlem α jsou nárysy torsálních přímek a, a_1, které mají rovnice

$$\pm\frac{x}{a} + \frac{z}{a \operatorname{tg}\alpha} = 1,$$

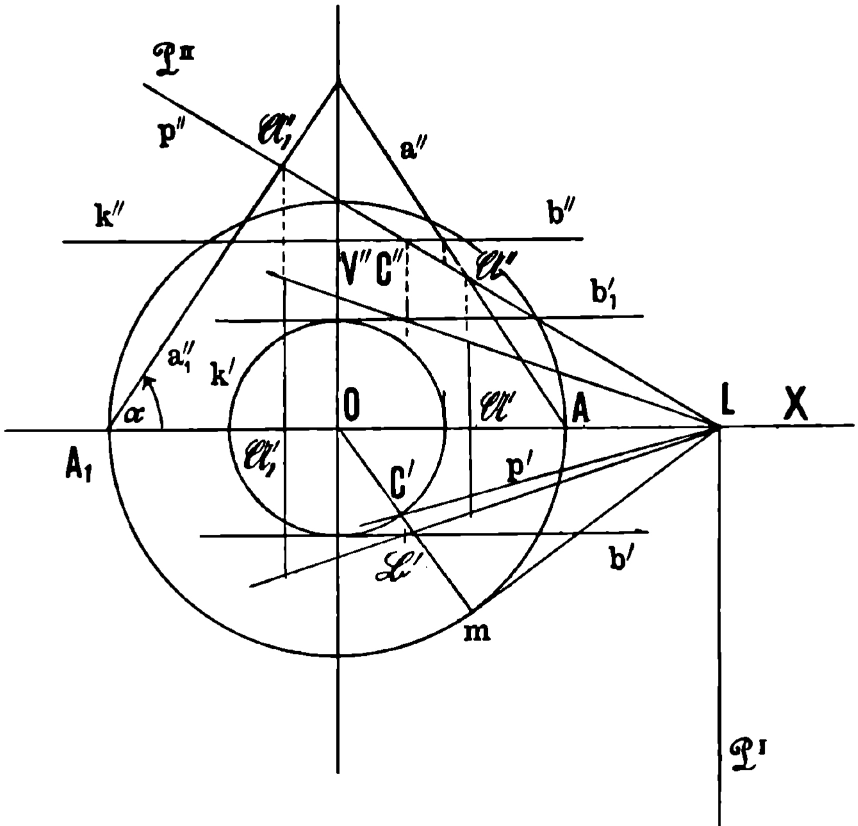
půdorysy jsou v ose $O\,x$. Na a'' nanášíme od A délku a, a promítáme koncový bod do $O\,x$ a do $O\,z$, čímž určen poloměr kruhu řídícího k (poloměr $= a - a\cos\alpha$), a nárysná stopa jeho roviny, současně nárys kruhu k''; její průsek s $O\,z$ je nárys V'' středu kruhu k. S přímkou k'' splývá nárys b'' obou přímek torsálních b, b_1 rovnoběžných s $O\,x$, jichž půdorysy b', b_1' jsou tečny kruhu k'.

Je-li dán bod m na pevném kruhu ($X\,O\,m = \varphi$), protíná tečna jeho $m\,L$ osu $O\,x$ ve stopě loukotě L, poloměr $O\,m$ stanoví na k' bod C', který je průmět středu C valeného kruhu, nárys C'' leží na k''. Přímka $C\,L$ je loukoť p, její průměty p', p'' jsou tedy $L\,C'$, $L\,C''$.

Rovina $\mathfrak{P}$ vedená přímkou p kolmo na nárysnu protíná plochu loukotí v kuželosečce a ve dvou přímkách, z nichž jedna jest p, druhá s ní souměrná vůči nárysně. Tyto přímky protínají kruh k, tedy průseky kruhu tohoto s rovinou $\mathfrak{P}$ neleží na průsečné kuželosečce.

Rovina kolmá na nárysnu vedená přímkou torsální a či a_1 dotýká se plochy loukotí podél celé této přímky; roviny tečné podél přímek torsálních b a b_1 procházejí osou $O\,x$.

Rovina $\mathfrak{T}$ protíná přímky a, a_1 v bodech $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ na hledané kuželosečce a její tečny v těchto bodech jsou kolmé na nárysnu; tím získány vrcholy



Obr. 3.

$\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}'_1$ pro půdorys kuželosečky, s tečnami kolmými na $O\,x$. Průseky $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ (v obrazci psán pouze první) přímek torsálních b, b_1 s rovinou $\mathfrak{T}$ náležejí rovněž hledanému řezu, a jeho tečny v nich procházejí bodem L. Tak máme pro půdorys našeho řezu další pár bodů, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}'_1$ s tečnami $L\,\mathfrak{B}'$, $L\,\mathfrak{B}'_1$. Pro půdorys kuželosečky známe tedy čtyři tečny s body dotykovými, čímž její konstrukce redukována na otázku planimetrickou.

Pro obalovou ellipsu v nárysu známe vrcholy O, V'', a dvě tečny a'', a''_1, pro něž není nesnadno sestrojiti body dotykové.

9.

Pokud se týče konstrukce roviny tečné plochy loukotí, podávají dosavadní výsledky methody dvě, jedna spočívá v běžné methodě tečných hyperboloidů plochy sborcené, druhá v znalosti kuželoseček plochy. Třetí konstrukci nám podá konstrukce tečny čáry $g =$ konst., která je sférická kotálnice.

Rovnice kotálnice $g =$ konst. se mohou psáti

$$(24)\qquad \begin{aligned} x - g &= (1 - \cos\alpha)(a - g\cos\varphi)\cos\varphi, \\ y &= (1 - \cos\alpha)(a - g\cos\varphi)\sin\varphi, \\ z &= (a - g\cos\varphi)\sin\alpha, \end{aligned}$$

takže v polárních souřadnicích pro pól G ($x = g$, $y = 0$) a osu $O\,x$ má půdorys kotálnice $g =$ konst. rovnici

$$(24^a)\qquad r = (1 - \cos\alpha)(a - g\cos\varphi), \quad r = \pm\sqrt{(x-g)^2 + y^2},$$

při čemž φ jest polární úhel; výška bodu na ploše jest pak

$$z = r \cot g \frac{\alpha}{2}.$$

Znamenáme-li na okamžik

$$a' = a(1 - \cos\alpha), \quad g' = g(1 - \cos\alpha),$$

píše se polární rovnice přehledněji

$$(24^b)\qquad r = a' - g'\cos\varphi,$$

a je zřejmo, že *půdorys prodloužené či zkrácené sférické kotálnice* ($c = a$) *jest Pascalova závitnice*, jakožto konchoida kruhu

$$r_1 = -g'\cos\varphi$$

s prodlužovací konstantou a' ($r = r_1 + a'$), a kterou možno též bráti jako cissoidu kruhů $r = a'$ a $r = g'\cos\varphi$.

Mimo to máme dle (24) a (24ᵃ)

$$x - g + i\,y = r\,e^{i\varphi} = (a' - g'\cos\varphi)\,e^{i\varphi},$$

t. j. — ježto $g - \frac{g'}{2} = \frac{1}{2} g (1 + \cos\alpha)$ —

$$(25)\qquad x + i\,y - \frac{1}{2} g(1 + \cos\alpha) = \left(a' - \frac{1}{2} g' e^{i\varphi}\right) e^{i\varphi},$$

dle čehož jest půdorys modifikovaná (prodloužená či zkrácená) kotálnice kardioidní, která vznikne kotálením kruhu poloměru*) $\frac{1}{2} a' = a \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ po kruhu stejně velkém, jehož střed leží na $O\,x$ u vzdálenosti $x = \frac{1}{2} g (1 + \cos\alpha)$, při čemž délka ramene obnáší $\frac{1}{2} g' = g \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

Z rovnice (25)

$$x + i\,y = a' e^{i\varphi} - \frac{1}{2} g' e^{2i\varphi} + \frac{1}{2} g (1 + \cos\alpha)$$

*) Kruh pevný a hybný mají tedy poloviční rozměry kruhu k na ploše loukotí. Kruh pevný je soustředný s kruhem Pascalovy závitnice $r_1 = -g'\cos\varphi$ (pól G).

plyne derivováním

$$\frac{dx}{d\varphi} + i\,\frac{dy}{d\varphi} = i\,(a'\,e^{i\varphi} - g'\,e^{2i\varphi}),$$

tedy

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a'\sin\varphi + g'\sin 2\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = a'\cos\varphi - g'\cos 2\varphi,$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = g'\sin\varphi\,\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2},$$

a rovnice tečny kotálnice $g =$ konst. budou

$$\frac{X - x}{-a'\sin\varphi + g'\sin 2\varphi} = \frac{Y - y}{a'\cos\varphi - g'\cos 2\varphi} = \frac{Z - z}{g'\sin\varphi\,\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2}}\,; \tag{26}$$

pro půdorysnou stopu tečny X_0, Y_0 obdržíme odtud, ježto platí

$$\frac{z}{g'\sin\varphi\,\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{g'\sin\varphi},$$

$$x - g = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$$

patrně

$$X_0 - g = r\left(\cos\varphi - \frac{-a'\sin\varphi + g'\sin 2\varphi}{g'\sin\varphi}\right)$$

$$Y_0 = r\left(\sin\varphi - \frac{a'\cos\varphi - g'\cos 2\varphi}{g'\sin\varphi}\right),$$

což se zjednoduší na

$$X_0 = g + \frac{r^2}{g'\sin\varphi}\sin\varphi,\ Y_0 = -\frac{r^2}{g'\sin\varphi}\cos\varphi,\ r = a' - g'\cos\varphi. \tag{26^1}$$

V polárních souřadnicích s pólem G $(x = g,\ y = 0)$ a osou $G\,x$ má tedy stopa tečny kotálnice $g =$ konst. průvodič

$$R = \frac{(a' - g'\cos\varphi)^2}{g'\sin\varphi} = \frac{r^2}{g'\sin\varphi} \tag{26^2}$$

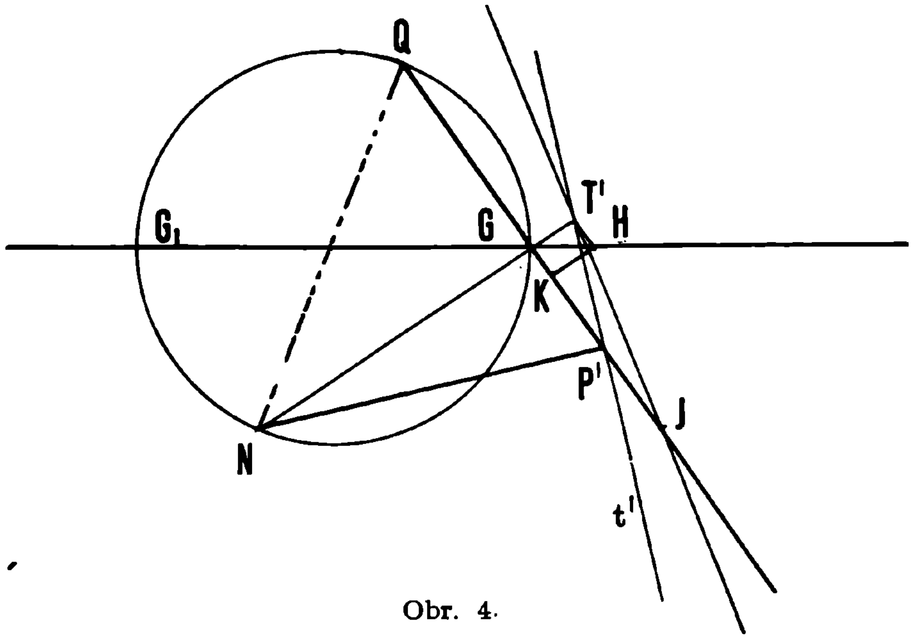
a úhel

$$\Theta = \varphi - \frac{\pi}{2}\,. \tag{26^3}$$

Poslední rovnice vyjadřuje, že *stopa tečny kotálnice* $g =$ konst. *leží na rovnoběžce $G\,T$ s přímkou $L\,m$ ($\perp O\,m$).*

Budiž (obr. 4.) $G_1\,G = g'$ průměr kruhu, jehož polární rovnici jsme výše uvažovali, $r = -g'\cos\varphi$; bod P' na průmětu kotálnice příslušný k úhlu φ sestrojíme tím, že vedeme tětivu kruhu $Q\,G$ směru φ, na niž pak nanášíme stálou délku $Q\,P' = a'$.

Subnormála kruhu je GN na kolmici $GN \perp GP'$, a bod N leží na kruhu. Je pak subnormála konchoidy rovna subnormále kruhu, takže bod N leží na normále průmětu kotálnice (P'); t. j.: $P'N$ je normála a $P'T'$ tečna t' průmětu kotálnice; průsečný bod T' přímky GN s přímkou t' je půdorysná stopa tečny t kotálnice g = konst.



Obr. 4.

Obrazec verifikuje vztah (26²), ježto

$$NG = g' \sin \varphi, \; r = GP', \; \sphericalangle NP'T' = 90^0.$$

Jakmile řídící kruh k plochy loukotí je malých rozměrů, bude za normálních hodnot g také g' velmi malé, a methody tyto podávají pro polohu tečny výsledky nespolehlivé pro nepatrný rozsah obrazce; avšak pro stopu tečny jsou methody dostatečně přesné Přímka LT je stopou tečné roviny plochy loukotí, která takto určena velmi jednoduše.

Bod L má souřadnice $x_1 = \frac{a}{\cos \varphi}$, $y_1 = 0$, kdežto souřadnice bodu T jsou X_0, Y_0; poněvadž

$$g - \frac{a}{\cos \varphi} = -\frac{g\, r}{g' \cos \varphi},$$

obdržíme

$$X_0 - x_1 = \frac{r}{g'} (r - {}_b \sec \varphi), \quad Y_0 - y_1 = -\frac{r^2}{g'} \operatorname{cotg} \varphi,$$

a rovnice stopy $\mathfrak{T}^1$ tečné roviny zní

$$(\mathfrak{T}^1) \qquad \frac{X - a \sec \varphi}{r - g \sec \varphi} = \frac{Y}{-r \operatorname{cotg} \varphi}, \; r = a' - g' \cos \varphi.$$

Úsek na ose Oy má tedy hodnotu

$$\frac{a\,r}{(r - g\sec\varphi)\sin\varphi},$$

směrnice přímky $\mathfrak{S}^{\mathrm{I}}$ jest

$$\frac{r\cot g\,\varphi}{g\sec\varphi - r}.$$

Tedy *půdorysná stopa tečné roviny plochy loukotí v bodě* (φ, g) jest *určena bodem* L (stopou loukotě) *a svojí směrnicí*

$$\frac{r\cot g\,\varphi}{g\sec\varphi - r}, \quad r = (1 - \cos\alpha)(a - g\cos\varphi),$$

při čemž výrazy r, $g\sec\varphi - r$ a $r\cot g\,\varphi$ jsou obrazcem snadno určitelny.

Stopa roviny tečné plochy loukotí má rovnici $(\mathfrak{S}^1)$, kterou lze psáti

$$(X - a\sec\varphi)(a - g\cos\varphi) + Y\left(a - g\cos\varphi - \frac{g\sec\varphi}{1-\cos\alpha}\right)tg\,\varphi = 0,$$

tedy $(\mathfrak{S}^{\mathrm{I}})$ prochází průsekem přímek

$$X\cos\varphi + Y\sin\varphi = 0, \quad Y = -\frac{a\,r}{g}\cot g\,\varphi.$$

Pro $g = 0$ zní $(\mathfrak{S}^1)$

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = a,$$

t. j. tečná rovina plochy loukotí v bodech jejího kruhu k je tečnou kruhu základního, takže je to poloha roviny hybné příslušná k uvažovanému bodu.

Stopa roviny asymptotické ($g = \infty$) u plochy loukotí je

$$(X - a\sec\varphi)\cos\varphi + Y\left(\sin\varphi + \frac{\sec\varphi\,tg\,\varphi}{1-\cos\alpha}\right) = 0,$$

a obsahuje průsek přímek

$$X\cos\varphi + Y\sin\varphi = 0, \quad Y = a'\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}.$$

Rovnici asymptotické roviny obdržíme, vyjádříme-li, že obsahuje loukoť, t. j. přímku směru

$$\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha};$$

vyjde ve tvaru

$$(\mathfrak{S}_\infty)\quad X - a\sec\varphi + Y\left(tg\,\varphi + \frac{\sec^2\varphi\,tg\,\varphi}{1-\cos\alpha}\right) + Z\,\frac{\cos\alpha - \sec^2\varphi}{\sin\alpha}\sec\varphi = 0.$$

Nárysná stopa při označení $\sec\varphi = t$ má rovnici

$$Z(t^3 - t\cos\alpha) + (a\,t - X)\sin\alpha = 0;$$

podmínka, aby kubická rovnice

$$t^3 + p\,t + q = 0$$

měla dvojný kořen, zní

$$4p^3 + 27q^2 = 0;$$

v našem případě

$$p = \frac{a \sin \alpha - Z \cos \alpha}{Z},$$

$$q = -\frac{X \sin \alpha}{Z},$$

takže rovnice čáry obalové nárysných stop asymptotických rovin bude

$$(27) \qquad 4\,(Z - a \operatorname{tg} \alpha)^3 = 27 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^3 \alpha} X^2 Z.$$

Tato křivka třetího stupně a třetí třídy je nárysnou stopou rozvinutelné plochy, asymptotické ku ploše loukotí.

10.

Vraťme se ještě ke stopě tečny sférické kotálnice, t. j. k rovnicím (26^2) a (26^3), jež dávají

$$(26^4) \qquad R = \frac{(a' + g' \sin \Theta)^2}{g' \cos \Theta};$$

odtud pro $X_0 - g = \xi$, $Y_0 = \eta$ vychází

$$g'\xi\,(\xi^2 + \eta^2) = (a'R + g'\eta)^2, \text{ t. j.}$$

$$(28) \qquad [(g'\xi - a'^2)(\xi^2 + \eta^2) - g'^2\eta^2]^2 = 4a'^2 g'^2 \eta^2 (\xi^2 + \eta^2),$$

jakožto rovnice geometrického místa stop tečen, t. j. rovnice stopy plochy tečen kotálnice sférické g = konst. ($a = c$), v souřadnicích s počátkem G.

Křivka má čtyřnásobný bod G ($\xi = 0 = \eta$), dvojný bod

$$\xi = \frac{a'^2}{g'} = \frac{a^2(1 - \cos \alpha)}{g}, \quad \eta = 0,$$

dvojné body v kruhových bodech úběžných, a v úběžném bodě osy Oy; což dává právě tolik dvojných bodů, jako má racionální čára stupně 6:

$$\frac{5.4}{2} = 6 + 1 + 2 + 1.$$

Bod G jest obyčejné ohnisko čáry (28).

Při označení

$$e^{i\Theta} = u$$

zní výraz pro průvodič

$$R = -g' \frac{\left(u^2 - 1 + 2i\frac{a}{g}u\right)^2}{2u(u^2 + 1)},$$

a redukuje se na lomenou funkci stupně 3. v případě $g = \pm a$; v tom případě čitatel zní

$$(u \pm i)^4$$

a jeden činitel $u \pm i$ odštěpí se zároveň ve jmenovateli;

$$R_0 = -g' \frac{(u \pm i)^3}{2u(u \mp i)}.$$

Výrazy pro souřadnice

$$x = R\frac{u^2+1}{2u}, \quad y = R\frac{u^2-1}{2iu}$$

jsou pak v obecném případě racionální funkce stupně šestého, a jen v případech $g = \pm a$ klesnou na stupeň pátý.

Je-li $g'^2 = a'^2$ jest rovnice (28) skutečně splněna hodnotou $\xi = 0$ identicky, takže se odštěpí činitel ξ a zbývá rovnice stupně 5.

Kruhy mající společný střed v bodě G protínají čáru (28) ve skupinách po osmi prvcích (čára má dvojné body v kruhových bodech úběžných), které se rozpadají ve dvě řady stupně 4, ležící na dvou parabolách (dva průseky v každé skupině jsou pomyslné)

$$k^2\left(\xi - \frac{a'^2}{g'}\right) - g'\eta^2 = \pm 2a'k\eta,$$

při čemž k je poloměr kruhu vytínajícího.

Rovnice těchto parabol se přepíší na

$$\left(\eta \pm \frac{a'k}{g'}\right)^2 = \frac{k^2}{g'}\xi, \tag{29}$$

z čehož zřejmo, že mají společnou tečnu vrcholovou a směr osy; jejich ohniska probíhají parabolu

$$\eta_0^2 = \frac{4a'^2}{g'}\xi_0;$$

poloměr k kruhu souvisí s polohou ohniska vztahem

$$k = \mp \frac{g'}{a'}\eta_0.$$

Rovnici (26^4) pišme

$$R = \frac{r^2}{g'\cos\Theta}, \quad r = a' + g'\sin\Theta;$$

ježto

$$\frac{dr}{d\Theta} = g'\cos\Theta,$$

máme

$$\frac{dR}{d\Theta} = 2r + \frac{r^2\sin\Theta}{g'\cos^2\Theta} = 2r + R\,tg\,\Theta.$$

V obr. 4. jest $\sphericalangle X\,G\,T' = \Theta$, $G\,T' = R$, $T'\,H \parallel G\,P'$, $H\,K \parallel G\,T'$, tedy $K\,P' = r + R\,tg\,\Theta$, ježto $G\,K = T'\,H = -R\,tg\,\Theta$ (v obrazci je Θ záporné); přeneseme-li délku $K\,P'$ na druhou stranu bodu P' do $P'\,J$, bude

$$G\,J = 2\,r + R\,tg\,\Theta$$

délka subnormály polární a *přímka* $J\,T'$ *je normála stopy rozvinutelné plochy tečen sférické kotálnice* ($a = c$, $g =$ konst.), t. j. stojí kolmo na stopě oskulační roviny této křivky.

Polární rovnice čáry (pól G)

$$R = \frac{(a' + g'\,sin\,\Theta)^2}{g'\,cos\,\Theta}$$

ukazuje, že $g'\,\xi = (a' + g'\,sin\,\Theta)^2 \geqq 0$, a že v případě $|\,g'\,| > a'$ existují dva paprsky svazku G, určené úhly Θ z rovnice

$$a' + g'\,sin\,\Theta = 0, \;\; (\Theta = \vartheta_1, \vartheta_2),$$

jichž směrem se čára řídí v okolí bodu G. Blíží-li se bod po čáře bodu G, blíží se Θ úhlu ϑ_1, a přejde-li Θ tuto mez, vzdaluje se bod od polohy G, aniž při tom průvodič R mění znamení, t. j. čára má v G *úvrat*, s tečnou ϑ_1. Podobně jest ϑ_2 tečnou druhého úvratu v bodě G, takže tento čtvernásobný bod vzniká splynutím dvou bodů úvratních.

V parametru

$$tg\,\frac{\Theta}{2} = t$$

se rovnice přepíše na

$$R = \frac{a'^2}{g'} \cdot \frac{(t+m)^2\,(t+n)^2}{1 - t^4}\,,\;\; (t+m)\,(t+n) = t^2 + 2\,\frac{g'}{a'}\,t + 1\,.$$

V okolí hodnoty ϑ_1 jest t blízké $-m$, $t + m = \tau$ je malé, veličiny m, n jsou vespolek a od 0 i ± 1 různy, takže obdržíme rozvoje tvaru

$$\xi = \gamma\,\tau^2 + \gamma'\,\tau^3 + \ldots,\;\; \eta = \delta\,\tau^2 + \delta'\,\tau^3 + \ldots,\;\; |\,\gamma\,.\,\delta\,| > 0,$$

a odtud eliminací τ

$$\eta = c_1\,\xi + c_2\,\xi\sqrt{\xi} + c_3\,\xi^2 + c_4\,\xi^2\sqrt{\xi} + \ldots,$$

takže křivka se rozkládá (podle toho jaké má znamení $\sqrt{\xi}$) po opačných stranách tečny ϑ_1; podobně se to má v okolí bodu G vůči tečně ϑ_2, příslušné ke kořeni $t = -n$.

V případě křivky stupně 5. t. j. kdy $g = \pm a$ — omezme se na vrchní znamení — zní výraz pro R

$$R = \frac{a'^2}{g'}\,\frac{(t+1)^4}{1 - t^4}$$

a po substituci $t + 1 = \tau$ obdrží tvar

$$R = \frac{a'^2}{g'}\,\frac{\tau^3}{4 - 6\,\tau + 4\,\tau^2 - \tau^3}\,,$$

VII.

a současně mizí pro $\tau = 0$ funkce $\cos\Theta$, takže vyjdou rozvoje tvaru

$$\xi = \gamma\,\tau^4 + \gamma_1\tau^5 + \ldots, \quad \eta = -\gamma\,\tau^3 + \gamma'_1\tau^4 + \ldots.,$$

kde

$$\gamma = \frac{a'^2}{4g'}.$$

Eliminace τ podá rozvoj

$$(*)\qquad \xi = \gamma^{-\frac{1}{3}}\eta^{\frac{4}{3}} + \vartheta\,\eta^{\frac{5}{3}} + \ldots,$$

z čehož soudíme, že křivka procházejíc bodem G dotýká se kolmice $x = g = a$, nejevíc svým zevním průběhem žádné nápadné singularity; bod $G \equiv A$ je bod trojnásobný, v němž splývá realná větev se dvěma pomyslnýma, vřechny tři se vespolek dotýkají. Pro poloměr křivosti nalezneme

$$-\frac{\left[1 + \left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\xi}{d\eta^2}} = -\frac{9}{4}\gamma^{\frac{1}{3}}\eta^{\frac{2}{3}} + \ldots,$$

takže týž je v okolí bodu G nekonečně malý.

Následkem odštěpení se přímky $\xi = 0$ v případě $g = a$ ztrácí křivka stupně 5. dvojný bod na této přímce v nekonečnu, takže má tato křivka trojnásobný bod A, dvojný bod $\xi = a'$ na Ox a dvojné body v úběžných bodech kruhových, což representuje celkem $3 + 1 + 2 = 6$ obyčejných bodů dvojných, jak to u racionální čáry stupně 5. musí býti. —

V případě $|g| < a$ má křivka v bodě G dva úvraty s pomyslnými tečnami, takže pro realné body průvodič R nemizí.

Uvažujme nyní kuželosečku s ohniskem G

$$r = \frac{a}{1 + \varepsilon\cos\varphi};$$

polární stopa normály má souřadnice

$$\omega = \varphi + \frac{\pi}{2}, \quad r_0 = \frac{dr}{d\varphi} = \frac{a\,\varepsilon\sin\varphi}{(1 + \varepsilon\cos\varphi)^2},$$

čára vytvořená stopami normál má rovnici

$$r_0 = -\frac{a\,\varepsilon\cos\omega}{(1 + \varepsilon\sin\omega)^2};$$

inversí

$$R\,r_0 = -a^2$$

přejde tato čára v křivku

$$R = \frac{a}{\varepsilon}\,\frac{(1 + \varepsilon\sin\omega)^2}{\cos\omega},$$

která pro $\varepsilon = \frac{g}{a}$ se od naší křivky (28) liší jen označením konstant (a, g místo a', g').

„Stopa rozvinutelné plochy tečen sférické kotálnice $a = c$ přechází kruhovou inversí v čáru 4. stupně, která je místem polárních stop normál určité kuželosečky, mající ohnisko v pólu a středu inverse G.

Výstřednost kuželosečky $\varepsilon = \frac{g}{a}$, paramétr $= a'$, inverse $R\, r_0 = -a'^2$.

Z polární rovnice

$$R = \frac{(a' + g' \sin \Theta)^2}{g' \cos \Theta}$$

vychází bezprostředně poloha asymptot:

$$\cos \Theta = 0, \quad \xi = R \cos \Theta = \frac{(a' + g' \sin \Theta)^2}{g'},$$

tedy asymptoty jsou

$$\xi = \frac{(a' \pm g')^2}{g'} = \frac{a'^2}{g'} + g' \pm 2\, a'.$$

V případě $g = a$ odpadá řešení $\Theta = -\frac{\pi}{2}$, a zbývá jen jedna asymptota

$$\xi = 4\, a'.$$

Pro poloměr křivosti ϱ stopy rozvinutelné plochy tečen nám obecný vzorec

$$\varrho = \frac{(R^2 + R'^2)^{\frac{3}{2}}}{R^2 + 2\, R'^2 - R\, R''}, \quad R' = \frac{d\, R}{d\, \Theta}, \quad R'' = \frac{d^2\, R}{d\, \Theta^2}$$

podá

$$\varrho = \frac{(R^2 + R'^2)^{\frac{3}{2}}}{6\, r\, (R' - r)}, \tag{30}$$

a lze jej konstruktivně využiti, any délky

$$(R^2 + R'^2)^{\frac{1}{2}}, \quad R' - r$$

se v obrazci vyskytují.

11.

Souřadnice půdorysné stopy loukotě v okamžiku pohybu příslušném k parametrům φ, ψ obdržíme z rovnic (2) pro $a - g \cos \varphi = 0$; znějí

$$\begin{aligned} x &= c \cos \psi + a \operatorname{tg} \varphi \sin \psi \\ y &= c \sin \psi - a \operatorname{tg} \varphi \cos \psi, \quad a\, \varphi = c\, \psi; \end{aligned} \tag{31}$$

tyto body vytvořují čáru stop loukotí, která má zajímavé vlastnosti a vyskytuje se také v jiných problémech geometrie.

VII.

Máme patrně

$$x + i y = (c - i a \, tg \, \varphi) \, e^{i\psi} ,$$
$$x - i y = (c + i a \, tg \, \varphi) \, e^{-i\psi} ;$$

pro kruhové směry jest jeden z těchto výrazů 0, druhý ∞; to nenastane pro konečné $e^{i\psi}$ od nully různé.

Pro $e^{i\psi} \sim 0$ máme vzhledem k podmínce $\varphi = \frac{c}{a} \psi$

$$- i \, tg \, \varphi \sim - 1 ,$$

tedy pro $a \gtrless c$ obě závorky od nully různé a konečné.

Čára tedy obsahuje kruhové body úběžné.[1])

Differencováním vychází

$$d(x + i y) = (c - i a \, tg \, \varphi) \, i \, e^{i\psi} \, d \psi - i a \sec^2 \varphi \, e^{i\psi} \, d \varphi$$

t. j.

(32) $$dx + i \, dy = (a - i c \, tg \, \varphi) \, tg \, \varphi \, e^{i\psi} \, d \psi .$$

Odtud obdržíme differenciál oblouku

(32^1) $$ds = \frac{a}{c} \sqrt{a^2 + c^2 tg^2 \varphi} \, . \, tg \, \varphi \, d \varphi .$$

Píše-li se ve tvaru

$$ds = - \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - (c^2 - a^2) \cos^2 \varphi} \frac{d \cos \varphi}{\cos^2 \varphi} ,$$

vnucuje se substituce — ovšem jen v případě $c > a$ —

(32^2) $$\sqrt{c^2 - a^2} \cos \varphi = c \cos \Theta ,$$

takže vyjde

$$ds = \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - a^2} \frac{\sin^2 \Theta}{\cos^2 \Theta} d \Theta$$

a oblouk na čáře stop loukotí tedy se vyjádří vzorcem[2])

(32^3) $$s = \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - a^2} (tg \, \Theta - \Theta)$$

$$= \frac{a}{c} \sqrt{a^2 + c^2 tg^2 \varphi} - \frac{a}{c} \sqrt{c^2 - a^2} \, arctg \sqrt{\frac{a^2 + c^2 tg^2 \varphi}{c^2 - a^2}} .$$

---

[1]) V případě $c = 2a$ má čára tato jednoduché vyjádření

$$x = 2a \frac{\cos^3 \psi}{\cos 2\psi} , \quad y = - 2a \frac{\sin^3 \psi}{\cos 2\psi} .$$

[2]) V případě $a > c$ klademe $\sqrt{a^2 - c^2} \cos \varphi = c \, tg \, \omega$, načež se oblouk vyjádří vzorcem

$$s = \frac{a}{c} \sqrt{a^2 - c^2} \left[\frac{1}{\sin \omega} - \log tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right) \right] .$$

VII.

Úhel, jejž tečna této čáry svírá s osou $O\,x$, má hodnotu

(33) $$\tau = \psi - arctg\left(\frac{c}{a}\,tg\,\varphi\right) = \frac{a\,\varphi}{c} - arctg\left(\frac{c}{a}\,tg\,\varphi\right).$$

Patrně
$$\frac{d\,\tau}{d\,\varphi} = \frac{a}{c} - \frac{a\,c}{(a^2 - c^2)\cos^2\varphi + c^2} = \frac{a}{c} - \frac{a}{c\,\sin^2\Theta}$$
t. j.

(33') $$d\,\tau = -\frac{a}{c}\,cotg^2\,\Theta\,d\,\varphi\,.$$

Avšak
$$ds = a\sin\Theta\,\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\,\varphi = a\,\frac{c^2 - a^2}{c^2}\,\frac{\sin\Theta\,\sin\varphi}{\cos^2\Theta}\,d\,\varphi\,,$$
tedy poloměr křivosti naší čáry bude
$$R = \frac{ds}{d\tau} = -\frac{c^2 - a^2}{c}\,\frac{\sin\varphi}{\cos\Theta}\,tg^3\,\Theta\,,$$
aneb konečně

(34) $$R = -\sqrt{c^2 - a^2}\,tg\,\varphi\,tg^3\,\Theta = \frac{(a^2 + c^2\,tg^2\,\varphi)^{\frac{3}{2}}}{a^2 - c^2}\,tg\,\varphi,$$
jelikož
$$tg\,\Theta = \frac{\sqrt{a^2 + c^2\,tg^2\,\varphi}}{\sqrt{c^2 - a^2}}\,;$$
druhý tvar výrazu R je nezávislý na podmínce $c > a$.

Čára má úvratníky ($R = 0$) v bodech $\varphi = 0, \pm\,\pi, \pm\,2\,\pi, \ldots$ jež jsou zároveň úvratníky epicykloidy ($\alpha = \pi$, $g = a$), a jichž souřadnice jsou
$$x = c\cos\psi,\ y = c\sin\psi\,;\ \psi = \frac{a\,\nu\,\pi}{c}\,,\ (\nu = 0, \pm\,1, \pm\,2, \ldots)$$

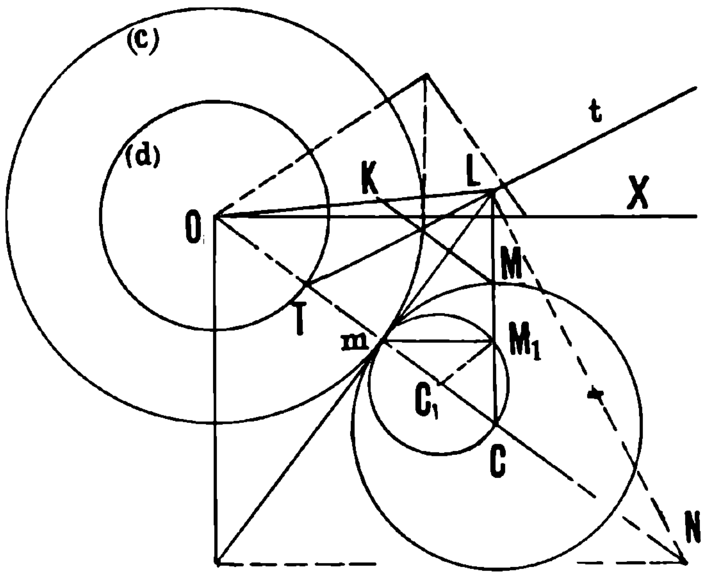
Pro $tg\,\varphi = \infty$ je bod čáry v nekonečnu, a tedy čára nemá bodů obratných ($R = \infty$).

Poloměr křivosti mimo okolí úvratníků má brzy značné hodnoty, takže křivka až na sousedství těchto bodů mívá průběh takměř přímočarý.

Poněvadž
$$x + i\,y = (c - i\,a\,tg\,\varphi)\,e^{i\,\psi} = sec\,\varphi\left(\frac{c+a}{2} + \frac{c-a}{2}\,e^{2\,i\,\varphi}\right)e^{i\,(\psi - \varphi)}\,,$$
máme
$$x + i\,y = (x_0 + i\,y_0)\,sec\,\varphi,$$
značí-li (x_0, y_0) bod K na epicykloidě, která je průmětem hřbetní čáry na ploše kotálnic ($g = a$), aneb (při $a < c$) na hypocykloidě, která je stopou obalového válce kruhů Γ. Tento bod leží se stopou loukotě L na společném paprsku svazku O.

Planimetrický smysl výsledku je ten, že přímka KM vedená z bodu obyčejné epicykloidy kolmo na tečnu kruhu mL obaluje epicykloidu neb hypocykloidu, a dotykový bod její K s přímkou KM leží na přímce OL, čímž dáno pohodlné jeho určení.

Kotálíme-li kruh poloměru $\frac{a}{2}$ po témž kruhu pevném (c), přísluší poloze m opěrného bodu odvalený úhel mC_1M_1 (obr. 5) $= 2\varphi$, loukoť našeho



Obr. 5.

pohybu (c, a) t. j. přímka CM svírá s mC úhel poloviční φ a prochází bodem M_1, i jest kolmá na mM_1, t. j. stopa loukotě*) L je bod na vrcholnici obyčejného pohybu $\left(c, \frac{a}{2}\right)$.

To vychází ostatně přímo z rovnic (6*) pro $g = a$, jež dávají

$$x + iy = \left(c - 2\,i\,a\,tg\,\frac{\varphi}{2}\right)e^{i\psi},$$

ano zde $2a \,.\, \frac{\varphi}{2} = c\psi$.

Rovnice tečny v bodě x, y zní

$$(Y - y) = tg\,\tau\,(X - x),$$

s hodnotami (31) a (33). Poněvadž tu

$$tg\,\tau = \frac{tg\,\psi - \frac{c}{a}\,tg\,\varphi}{1 + \frac{c}{a}\,tg\,\varphi\,tg\,\psi},$$

[1]) Loukoť pohybu (c, a) splývá se stranou opsaného kužele rotačního pro pohyb $\left(c, \frac{a}{2}\right)$.

obdrží rovnice tečny tvar

(35) $X\,(c\,tg\,\varphi\cos\psi - a\sin\psi) + Y\,(c\,tg\,\varphi\sin\psi + a\cos\psi) = (c^2 - a^2)\,tg\,\varphi.$

Tečna k čáře stop loukotí tedy obsahuje bod průsečný přímek

$$(T)\qquad \begin{aligned} x\cos\psi + y\sin\psi &= \frac{c^2 - a^2}{c}, \\ x\sin\psi - y\cos\psi &= 0, \end{aligned}$$

z nichž druhá je přímka $O\,m$, a první je přímka na ni kolmá, mající od počátku O vzdálenost

$$d = c - \frac{a^2}{c};$$

tento bod T leží tedy na $O\,m$ u vzdálenosti $O\,T = d$, která se měří ve směru $O\,m$ jako kladná, v opačném směru jako záporná. Bod T probíhá tedy kruh (d) poloměru d.

Tečnu obdržíme, spojíme-li průsek T kruhu (d) a přímky $O\,m$ s bodem L na čáře.

Je zřejmo, jak obdržíme asymptoty, které odpovídají hodnotám $tg\,\varphi = \infty$; jsou patrně tečnami kruhu (d).

Rovnice normály čáry stop loukotí zní

(36) $X\,(a\cos\psi + c\,tg\,\varphi\sin\psi) + Y\,(a\sin\psi - c\,tg\,\varphi\cos\psi) = a\,c\sec^2\varphi;$

prochází patrně průsekem přímek

$$(N')\qquad \begin{aligned} x\sin\psi - y\cos\psi &= 0, \\ x\cos\psi + y\sin\psi &= c\sec^2\varphi. \end{aligned}$$

První z nich je přímka $O\,m$, druhá je polára kruhu

$$x^2 + y^2 = (c\sec\varphi)^2$$

pro bod $m\,(c\cos\psi, c\sin\psi)$.

Souřadnice bodu (N') znějí

$$(N')\qquad x = \frac{c}{\cos^2\varphi}\cos\psi,\quad y = \frac{c}{\cos^2\varphi}\sin\psi,$$

a polární rovnice geometrického místa bodu N' pro pól O a osu $O\,x$ zní:

$$r = \frac{c}{\cos^2\dfrac{c\,\psi}{a}}.$$

Inverse $r\,r_0 = c^2$ podá

$$r_0 = c\cos^2\varphi = \frac{c}{2} + \frac{c}{2}\cos 2\varphi,$$

takže iversní čára (N) jest konchoida růžice. V případě $a = 2\,c$, t. j. $\psi = 2\,\varphi$ obdržíme

$$r_0\,e^{i\psi} = \frac{c}{4} + \left(\frac{c}{2} + \frac{c}{4}\,e^{2i\varphi}\right)e^{2i\varphi},$$

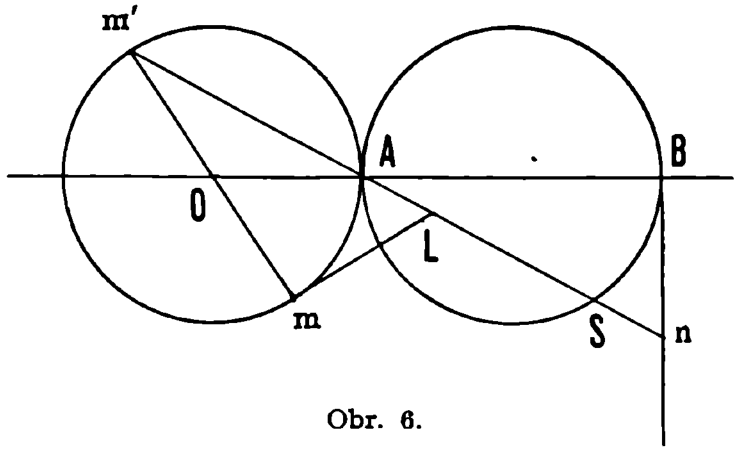
VII.

t. j. bod N v tomto případě opisuje kardioidu se středem pevného kruhu $x = \frac{c}{4}$, $y = 0$; poloměry kruhů pevného a hybného jsou $\frac{c}{4}$, rámě $g = -\frac{c}{4}$.

Čára stop loukotí v případě $a = 2c$ jest cissoida Diokletova, okolnost, kterou možno dokázati elementárně planimetrickou cestou.

Buď (obr. 6) $OA = c = \frac{a}{2}$, $AB = 2c = a$. Úhel m' v trojúhelníku $Om'A$ jest jako obvodový úhel příslušný ku středovému úhlu $\psi = 2\varphi$ roven φ, a poněvadž $mm' = a$, seče přímka $m'A$ tečnu mL v bodě L, stopě loukotě.

Trojúhelníky pravoúhlé Lmm' a ABn jsou shodny, majíce stejnou odvěsnu $mm' = AB$ a přilehající úhly m' a A; tedy $m'L = An$.



Obr. 6.

Odečteme-li od těchto délek stejné délky $m'A$, AS, obdržíme tedy stejné zbytky $AL = Sn$, t. j. bod L opisuje Diokletovu cissoidu.

V případě $a > c$, kdy čára hřbetní je realná, jeví se čára stop loukotí jako centrální průmět této sférické šroubovice ze středu $(0, 0, \sqrt{a^2 - c^2})$.

Jak bylo výše poznamenáno (obr. 5.), splývají loukotě (CL) pohybu (c, a) s povrchovými přímkami (CM_1) rotačních kuželů opsaných o plochu kotálnic $\left(c, \frac{a}{2}\right)$, v níž poloměr hybného kruhu má hodnotu poloviční.

Totéž platí v případě obecném, kdy kotálení se děje po jakékoli křivce.

Tudíž

„loukotě pohybu (c, a) jsou tečnami plochy kotálnic $\left(c, \frac{a}{2}\right)$, které protínají její vrcholnici."

Loukotě řadí se v rotační kužele s vrcholy na této poslední čáře, která je pro kongruenci loukotí čarou ohnisek (fokálou).

VII.

Uvažujme křivoznačnou čáru (nikoli kruhovou) na ploše kotálnic $\left(c, \frac{a}{2}, g = \frac{a}{2}\right)$; jakožto orthogonální trajektorie kruhů Γ této plochy dotýká se čára ta jedné strany opsaného kužele, t. j. tečny křivoznačné čáry na ploše $\left(c, \frac{a}{2}\right)$ protínají její vrcholnici a jsou tedy loukotěmi pohybu (c, a). Následovně

„rozvinutelné plochy tvořené loukotěmi pohybu (c, a) jsou jednak rotační kužele opsané o plochu kotálnic obyčejných $\left(c, \frac{a}{2}\right)$, a jednak jsou to plochy tvořené tečnami křivoznačných čar na této ploše".

Fokální útvary kongruence loukotí pohybu (c, a) jsou jednak čára stop loukotí a jednak plocha kotálnic obyčejných $\left(c, \frac{a}{2}\right)$.

Mimo to existují ještě plochy kuželové tvořené loukotěmi příslušnými k úhlům α, pro něž $a \cos \alpha = c$, t. j. plochy kuželové, kterými se promítají sférické čáry šroubové ze svých středů.

12.

Vraťme se k rovnicím pro body na ploše kotálnic

$$
(2) \qquad \begin{aligned}
x &= [c - (a - g \cos \varphi) \cos \alpha] \cos \psi + g \sin \varphi \sin \psi \\
y &= [c - (a - g \cos \varphi) \cos \alpha] \sin \psi - g \sin \varphi \cos \psi \\
z &= (a - g \cos \varphi) \sin \alpha; \quad a\, \varphi = c\, \psi.
\end{aligned}
$$

Normála plochy kotálnic v bodě x, y, z má pak rovnice

$$\frac{X - p}{x - p} = \frac{Y - q}{y - q} = \frac{Z}{z},$$

kde

$$p = c \cos \psi, \; q = c \sin \psi$$

jsou souřadnice opěrného bodu m.

Na křivoznačné čáře jest pro

$$\xi = a - g \cos \varphi$$

platna differenciální rovnice

$$\frac{a}{c} \frac{d\xi}{\xi} = - \frac{d\alpha}{\sin \alpha},$$

t. j. platí

$$
(a) \qquad \frac{d\alpha}{d\varphi} = - \frac{a g}{c} \frac{\sin \alpha \sin \varphi}{a - g \cos \varphi} = - \frac{a g}{c} \frac{\sin \alpha \sin \varphi}{\xi}.
$$

Rovnice normály pišme

$$X = p + Z \frac{x - p}{z}, \; Y = q + Z \frac{y - q}{z};$$

v sousedním bodu na křivoznačce normála plochy „protíná" tuto přímku a platí tedy rovnice

$$d\,p + Z\,d\,\frac{x-p}{z} = 0,\; d\,q + Z\,d\,\frac{y-q}{z} = 0;$$

násobme je $\frac{x-p}{z}$, $\frac{y-q}{z}$ a sečtěme výsledky; vyjde

$$\left(-\frac{x-p}{z}\sin\psi + \frac{y-q}{z}\cos\psi\right) c\,d\,\psi + \frac{1}{2} Z\,d\,\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{z^2} = 0$$

a po dosazení hodnot patrně

$$(b)\qquad \frac{1}{2} Z\,d\,\frac{\xi^2\cos^2\alpha + g^2\sin^2\varphi}{\xi^2\sin^2\alpha} = \frac{a\,g\sin\varphi}{\xi\sin\alpha}\,d\,\varphi\,.$$

Je pak

$$d\,\frac{\xi^2\cos^2\alpha + g^2\sin^2\varphi}{\xi^2\sin^2\alpha} = -2\,cotg\,\alpha\,\frac{d\,\alpha}{\sin^2\alpha}$$
$$+\,2\,\frac{g^2\sin^2\varphi}{\xi^2\sin^2\alpha}\left[cotg\,\varphi\,d\,\varphi - \frac{g\sin\varphi}{\xi}\,d\,\varphi - cotg\,\alpha\,d\,\alpha\right].$$

Po dosazení hodnoty (a) za $d\,\alpha$ hranatá závorka obdrží tvar

$$\frac{c\,(a\cos\varphi - g) + ag\cos\alpha\sin^2\varphi}{c\,\xi\sin\varphi}\,d\,\varphi,$$

rovnice (b) tedy zní

$$Z\left\{\frac{ag}{c}\,\frac{\sin\varphi\cos\alpha}{\xi\sin^2\alpha} + \frac{g^2\sin\varphi}{c\,\xi^3\sin^2\alpha}\cdot[\,c\,(a\cos\varphi - g) + ag\cos\alpha\sin^2\varphi]\right\}$$
$$= \frac{ag\sin\varphi}{\xi\sin\alpha},$$

čili po redukci

$$Z = \frac{a\,c\,\xi^2\sin\alpha}{c\,g\,(a\cos\varphi - g) + a\,(g^2\sin^2\varphi + \xi^2)\cos\alpha}$$

a po dosazení hodnoty za ξ:

$$Z = \frac{a\,c\sin\alpha\,(a - g\cos\varphi)^2}{a\,(a^2 + g^2 - 2\,ag\cos\varphi)\cos\alpha - c\,g\,(g - a\cos\varphi)},$$

jakožto výška hlavního středu křivosti plochy kotálnic.
Znamenejme

$$\frac{Z}{z} = v,$$

takže máme rovnice normály ve tvaru

$$(n)\qquad \frac{X-p}{x-p} = \frac{Y-q}{y-q} = \frac{Z}{z} = v,$$

VII.

a středu hlavní křivosti přísluší paramétr

$$(37) \qquad v = \frac{ac\,(a - g\cos\varphi)}{a\,(a^2 + g^2 - 2\,ag\cos\varphi)\cos\alpha - c\,g\,(g - a\cos\varphi)}\,.$$

Druhý hlavní střed křivosti je bod m, jemuž přísluší poloměr křivosti $R_0 = P\,m$, tedy

$$R_0^2 = (x - p)^2 + (y - q)^2 + z^2 = a^2 + g^2 - 2\,ag\cos\varphi.$$

Abychom určili druhý hlavní poloměr křivosti R plochy kotálnic, přepíšeme rovnice (n) na tvar

$$\frac{X - x}{x - p} = \frac{Y - y}{y - q} = \frac{Z - z}{z} = v - 1\,,$$

a bude

$$R^2 = (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = (v - 1)^2 R_0^2$$

t. j.

$$(38) \qquad R = (1 - v)\,R_0, \; R_0 = \sqrt{a^2 + g^2 - 2\,ag\cos\varphi}.$$

Pro bod na hřbetní čáře máme $a\cos\alpha = c$, a tu rovnice (37) podá $v = 1$, t. j.

„na hřbetní čáře plochy kotálnic jest jeden hlavní poloměr křivosti roven nulle.“

Z (37) vypočteme

$$v - 1 = (c - a\cos\alpha)\,\frac{a^2 + g^2 - 2\,ag\cos\varphi}{a\,(a^2 + g^2 - 2\,ag\cos\varphi)\cos\alpha - cg\,(g - a\cos\varphi)}\,.$$

Poměr ten bude nezávislý na φ pouze pro plochu kotálnic obyčejných ($g = \pm a$) a sice je tu

$$(39) \qquad v = \frac{c}{2\,a\cos\alpha - c}\,, \quad 1 - v = 2\,\frac{c - a\cos\alpha}{c - 2\,a\cos\alpha}\,:$$

„Na ploše kotálnic obyčejných ($g = \pm a$) jest v bodech téže kotálnice poměr hlavních křivostí stálý“.

Na bodech epicykloidy $\alpha = \pi$ jest $1 - v > 0$; body ty jsou zřejmě elliptické, a tedy platí rovnice (38) i co do znamení.

V bodech elliptických jest $1 - v > 0$, u hyperbolických jest $1 - v < 0$.

V případě $a \leqq c$ tedy pro elliptické body jest

$$2\,a\cos\alpha < c;$$

body elliptické jsou od hyperbolických odděleny čarami bodů parabolických

$$\cos\alpha = \frac{c}{2\,a}\,,$$

t. j. *dvěma kotálnicema*, položenýma souměrně vůči základní rovině.

V případě $a > c$ mění $1 - v$ znamení mimo na kotálnicích bodů parabolických $2\,a\cos\alpha = c$ ještě na čáře hřbetní $a\cos\alpha = c$; veškery tyto čáry dělí plochu v oblasti bodů elliptických a hyperbolických. —

VII.

Udělíme-li parametru v v rovnicích normály

$$X = p + v(x - p),\ Y = q + v(y - q),\ Z = v z,$$
$$p = c \cos\psi,\ q = c \sin\psi,\ a\varphi = c\psi,$$

hodnotu závislou pouze na α, obdržíme při proměnných φ, α jakožto souhrn bodů určitou plochu; její parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} X &= [c - v \cos\alpha\,(a - g\cos\varphi)]\ \cos\psi + g\,v \sin\varphi \sin\psi, \\ Y &= [c - v \cos\alpha\,(a - g\cos\varphi)]\ \sin\psi - g\,v \sin\varphi \cos\psi, \\ Z &= (a - g\cos\varphi)\, v \sin\alpha \end{aligned} \tag{40}$$

ukazuje svým tvarem, že čáry α = konst. na této ploše jsou sférické epicykloidy; základní veličiny jejich rovnic c', a', g', α' jsou skutečně

$$\alpha' = \alpha,\ g' = g\,v,$$

a první dvě se určí z rovnic

$$c' - a' \cos\alpha = c - a\,v \cos\alpha,\ \frac{a'}{c'} = \frac{a}{c},$$

jež dávají

$$a' = a\,\frac{c - a\,v\,vos\,\alpha}{c - a\cos\alpha},\ c' = c\,\frac{c - a\,v\cos\alpha}{c - a\cos\alpha}, \tag{40a}$$

a poloha základní roviny (pevného kruhu) pro tuto kotálnici jest

$$Z = \frac{a\,c\,(v - 1)\sin\alpha}{c - a\cos\alpha}. \tag{40b}$$

Výjimečný jest případ $c = a\cos\alpha$, který odpovídá čáře hřbetní na ploše kotálnic, a jemuž příslušná čára (40) není kotálnicí, ana tu podmínka $\frac{a'}{c'} = \frac{a}{c}$ se s ostatními nesnáší, pokud $v \gtrless 1$. Máme tu

$$c' - a' \cos\alpha = a\,(1 - v)\cos\alpha$$

od nully různé (jediný možný ještě předpoklad $\cos\alpha = 0$ by dal $c' = 0$), takže podmínka kotálení $a'\varphi = c'\psi$ tu splnitelna není.

Při té příležitosti vnucuje se otázka po významu rovnic (2) v případě, že by jedna neb obě veličiny a, c byly záporné; rovnice

$$x + i\,y = [c - (a - g\cos\varphi)\cos\alpha - i\,g\sin\varphi]\,e^{i\psi}$$

tu ukazuje, že

1°. při $c < 0$, $a < 0$ rovnici čáry lze psáti

$$x + i\,y = -[c_0 - (a_0 + g\cos\varphi)\cos\alpha + i\,g\sin\varphi]\,e^{i\psi},$$

kde $a_0 = -a$, $c_0 = -c$ jsou kladné, a platí podmínka $a_0\varphi = c_0\psi$; třetí souřadnice jest

$$z = -(a_0 + g\cos\varphi)\sin\alpha,$$

a tak jest čára kotálnicí o konstantách c_0, a_0, $-g$, $-\alpha$, otočenou o 180° kolem Oz.

2°. Jeli $c > 0, a = -a_0 < 0$, položíme $\varphi = -\varphi_0$, takže opět $a_0 \varphi_0 = c\psi$, načež výrazy

$$x + iy = [c + (a_0 + g \cos \varphi_0) \cos \alpha + i g \sin \varphi_0]\, e^{i\psi},$$
$$z = -(a_0 + g \cos \varphi_0) \sin \alpha$$

ukazují, že čára je sférická kotálnice s konstantami $c, a_0, -g, \alpha + \pi$.

3°. Při $c = -c_0 < 0, a > 0$ klademe $\varphi = -\varphi_0$, načež

$$x + iy = -[c_0 + (a - g \cos \varphi_0) \cos \alpha - i g \sin \varphi_0]\, e^{i\psi},$$
$$z = (a - g \cos \varphi_0) \sin \alpha, \quad a \varphi_0 = c\psi;$$

čára je kotálnice s konstantami $c_0, a, g, \pi - \alpha$, otočená o 180° kolem Oz.

Plocha středů křivosti (pl. centrální) naší plochy kotálnic sestává z kružnice základní (c) a z plochy, jejíž vyjádření podávají rovnice (40) s hodnotou parametru v (37).

Ve zvláštním případě plochy kotálnic obyčejných $g = a$ (a též $g = -a$) je tento paramétr závislý toliko na α (39), plocha středů pak obsahuje jakožto čáry $\alpha =$ konst. sférické kotálnice.

„Hlavní středy křivosti plochy obyčejných kotálnic sférických na normálách vycházejících z bodů téže kotálnice tvoří opět sférickou kotálnici."

Odpovídá parametrům c', a', g', α, určeným vzorci (39) a (40*); tu jest nejprvé

$$\frac{c - a v \cos \alpha}{c - a \cos \alpha} = \frac{c}{c - 2 a \cos \alpha} = -v,$$

tedy

$$g' = a v = -a', \; a' = -a v, \; c' = -c v, \; v = \frac{c}{2 a \cos \alpha - c},$$

a rovina pevného kruhu sloužícího k vytvoření této kotálnice má rovnici

$$z = \frac{2 a c \sin \alpha}{2 a \cos \alpha - c} = 2 a v \sin \alpha.$$

Vložíme-li sem za α paramétr *čáry hřbetní* $a \cos \alpha = c$, obdržíme

$$c' = -c, \; a' = -a, \; g' = a,$$

což by dalo kotálnici pocházející od kotálení kruhu (a) po kruhu (c) v rovině

$$z = 2 a \sin \alpha,$$

při čemž kotálení počalo o 180° později, a úhel sklonu jest $-\alpha$. Tato křivka splývá s čarou hřbetní; vzdor tomu, že substituce užitá není dovolena, je tato část výsledku správna.

Ježto konstanty kotálnice na ploše centrální (a', c', g', α) znějí buď $(-a v, -c v, a v, \alpha)$, aneb po otočení o 180° $(a v, c v, -a v, -\alpha)$, není bod $\varphi = 0$, počátek kotálení, bodem úvratním, epicykloida $\alpha = \pi$ má v něm dokonce svůj vrchol. Úvratník odpovídá poloze $\varphi = \pi$ při této kotálnici, a tedy na ploše středů má sférická kotálnice úvratníky $\varphi = \nu\pi$, $\nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$ a odpovídají jim jako geometrická místa čáry

$$x = c \cos\left(\frac{a}{c}\nu\pi\right) + a c \frac{2 \cos\alpha \cos\left(\frac{a}{c}\nu\pi\right)}{c - 2 a \cos\alpha},$$

$$y = c \sin\left(\frac{a}{c}\nu\pi\right) + a c \frac{2 \cos\alpha \sin\left(\frac{a}{c}\nu\pi\right)}{c - 2 a \cos\alpha},$$

$$z = -\frac{2 a c \sin\alpha}{c - 2 a \cos\alpha}, \quad (\nu = \pm 1, \pm 3, + 5, \ldots),$$

což vzhledem k následujícím výsledkům lze vyjádřiti takto:

„Úvratníky kotálnic na ploše centrální příslušné ku ploše obyčejných kotálnic $g = a$ naplňují kuželosečky v rovinách kolmých na rovinu základní, které mají své vrcholy ve středech křivosti vrcholů základní epicykloidy a hypocykloidy." Středy křivosti úvratníků na ploše jsou body obyčejné.

Vložíme-li do rovnic (40) pro případ $g = a$ hodnotu (39)

$$v = -\frac{c}{c - 2 a \cos\alpha},$$

obdržíme parametrické vyjádření plochy centrální

$$(41) \qquad \begin{aligned} x &= c \cos\psi + a c \frac{(1 - \cos\varphi) \cos\alpha \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi}{c - 2 a \cos\alpha} \\ y &= c \sin\psi + a c \frac{(1 - \cos\varphi) \cos\alpha \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi}{c - 2 a \cos\alpha} \\ z &= - a c \frac{(1 - \cos\varphi) \sin\alpha}{c - 2 a \cos\alpha}. \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic vylučme $\cos\alpha$ a položme na okamžik

$$\begin{aligned} x - c \cos\psi + a \sin\varphi \sin\psi &= \xi, \\ y - c \sin\psi - a \sin\varphi \cos\psi &= \eta, \end{aligned}$$

i vyjde

$$[c(1 - \cos\varphi) \cos\psi - 2 a \sin\varphi \sin\psi]\, \eta = [c(1 - \cos\varphi) \sin\psi + 2 a \sin\varphi \cos\psi]\, \xi,$$

čili v původních souřadnicích

$$(42) \qquad \begin{aligned} &[c(1 - \cos\varphi) \sin\psi + 2 a \sin\varphi \cos\psi]\, x \\ &- [c(1 - \cos\varphi) \cos\psi - 2 a \sin\varphi \sin\psi]\, y = a c \sin\varphi (1 + \cos\varphi). \end{aligned}$$

Je to rovnice roviny kolmé na rovinu základní Oxy; tato rovina seče rotační kužel normál s vrcholem m v kuželosečce Γ_0 na ploše centrální, geometrickém to místě středů hlavní křivosti příslušných k bodům kruhu Γ.

V případě $a = c$ zní rovnice (42)

$$(x - a) \sin\varphi (1 + \cos\varphi) + y (1 - \cos\varphi)(1 + 2 \cos\varphi) = 0,$$

takže

„u plochy kotálnic 4. stupně $a = c = g$ procházejí roviny kuželoseček na ploše centrální stálou přímkou $A\,x$.

Dále v případě $c = 2\,a$ se zjednoduší (42) na

$$x = a\cos\psi\,(1 + \cos\varphi) = c\cos^3\psi,$$

takže

„u plochy kotálnic $c = 2\,a$, $g = a$ jsou roviny kuželoseček centrální plochy kolmy na $O\,x$.

Rovina (42) jest plně určena svojí stopou, a ta jest geometricky určena jako spojivá přímka středů křivosti bodů M_π a M_0 na epicykloidě $\alpha = \pi$ a na hypocykloidě $\alpha = 0$; pro tyto body máme jendoduchou konstrukci; na př. střed křivosti bodu M_π leží na normále $M_\pi\,m$ a je s bodem M_π vůči základní kružnici harmonicky sdružený. Podobně střed křivosti bodu M_0.

Mimo to plyne z hořejších rovnic, že stopa roviny středů (42) obsahuje body

(42ᵃ) $$x + i\,y = (c + i\,a\sin\varphi)\,e^{i\psi},$$

a

(42ᵇ) $$x + i\,y = \frac{c}{2}\,(1 + \cos\varphi)\,e^{i\psi};$$

první z nich ($\xi = 0, \eta = 0$) je průmět středu křivosti bodu $\alpha = \frac{\pi}{2}$, znamenejme jej H'. Leží na tečně $m\,Q$ na opačné straně s bodem Q a ve stejné vzdálenosti, takže m je střed délky $Q\,H'$. Konstrukce bodu (42ᵇ) je z rovnice zřejma; dále dvojice právě uvažované, t. j. středy křivosti bodů $\alpha = 0$ a $\alpha = \pi$, a body (42ᵃ) (42ᵇ) dělí se harmonicky.

Z rovnic (41) vychází, že kuželosečky na ploše centrální příslušné ke ploše kotálnic $g = a$ jsou ellipsy pro $c > 2\,a$, paraboly pro $c = 2\,a$, hyperboly pro $c < 2\,a$, neboť úběžné jich body odpovídají hodnotám α určeným rovnicí

$$c = 2\,a\cos\alpha.$$

Toho lze užiti ke stanovení směru stopy roviny (42).

Dříve však si všimněme, že rovnici (42) lze psáti

(42*) $$\left(2\,a\cos\psi + c\,tg\frac{\varphi}{2}\sin\psi\right)x + \left(2\,a\sin\psi - c\,tg\frac{\varphi}{2}\cos\psi\right)y = 2\,a\,c\cos^2\frac{\varphi}{2};$$

srovnáme-li s rovnicí (36) pro normálu čáry stop loukotí příslušné k pohybu $\left(c, 2\,a; \psi, \frac{\varphi}{2}\right)$, kteréžto čára je vrcholnice naší plochy kotálnic $(c, a = g)$, máme výsledek:

„Stopa roviny kuželosečky na centrální ploše příslušné ku ploše obyčejných kotálnic $(c, a = g)$ jest rovnoběžna s normálou vrcholnice.

Přímka z bodu O kolmo na stopu (42) spuštěná svírá s $O\,x$ úhel

$$\Theta = \psi - arctg\left(\frac{c}{2\,a}\,tg\frac{\varphi}{2}\right),$$

a má délku

$$\delta = c\,cos^2\frac{\varphi}{2}\,cos\,(\psi - \Theta)\,.$$

Limita poměru $\frac{y}{x}$ pro $c = 2\,a\,cos\,\alpha$ jest

$$tg\,(\psi + \omega) = \frac{tg\,\psi + \frac{2\,a}{c}\,cotg\frac{\varphi}{2}}{1 - \frac{2\,a}{c}\,cotg\frac{\varphi}{2}\,tg\,\psi}\,,$$

kde

$$\omega = arctg\left(\frac{2\,a}{c}\,cotg\frac{\varphi}{2}\right)$$

jest úhel mezi přímkou $O\,m$ a stopou roviny centrální (42).

Směr asymptoty leží dále v rovině

$$\frac{z}{x} = -\frac{tg\,\alpha}{1 - tg\,\psi\,tg\,\omega}\,,\quad tg\,\alpha = \pm\frac{\sqrt{4\,a^2 - c^2}}{2\,a}\,.$$

Úběžné body kuželosečky středů křivosti Γ_0 příslušných k bodům kruhu Γ (φ = konst.) leží na normálách plochy kotálnic v bodech epicykloidy bodů parabolických ($c = 2\,a\,cos\,\alpha$); tyto dva body kruhu Γ se určí bezprostředně, a tak dána konstrukce asymptotických směrů přímá.

V obr. 7. dána plocha kotálnic obyčejných pevným kruhem $O\,A$ (c) a poloměrem hybného kruhu $m\,C = a$. Libovolné poloze opěrného bodu m odpovídají body M_0 a M_π na hypocykloidě $\alpha = 0$ (neznačen) a epicykloidě $\alpha = \pi$, na přímce kolmé na tečnu $m\,Q$. Kruh L těmito body určený sklopen do půdorysny (Γ) kol svého průměru.

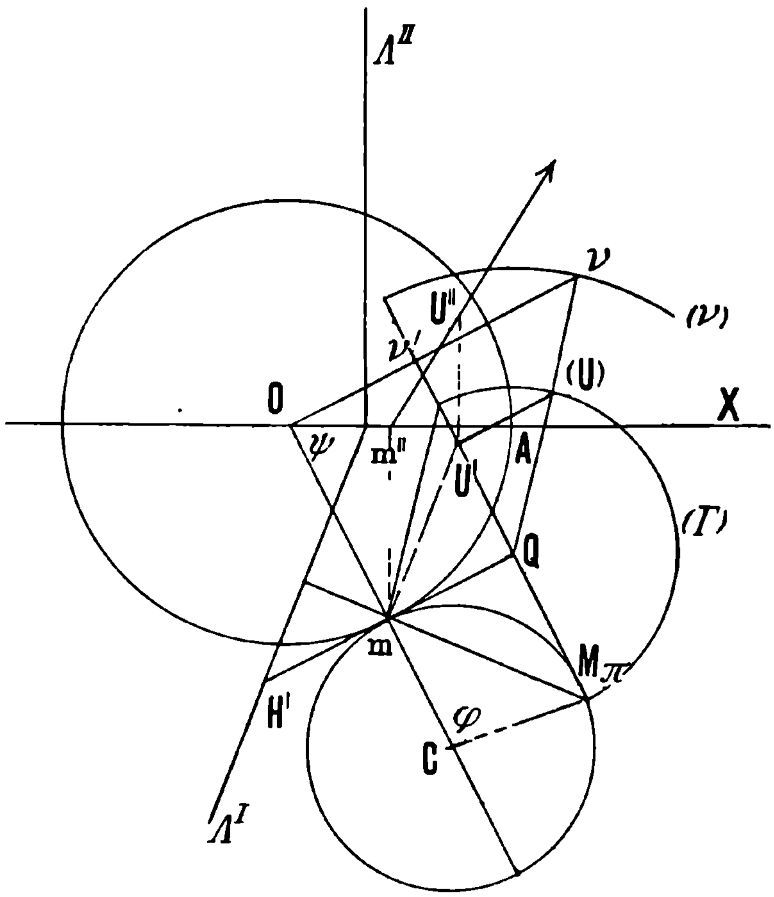
Na (Γ) určen poloměr Q (U), jenž svírá s $Q\,M_0$ úhel α, $\cos\alpha = \frac{c}{2\,a}$; bod U na kruhu Γ určuje normálu $m\,U$, jejíž centrální bod je v nekonečnu. Její půdorys $m\,U'$ je rovnoběžný s rovinou Δ kuželosečky na ploše centrální; potřebujeme sestrojiti pro její stopu Δ^1 pouze jeden bod H', jenž jest dán (42_a)

$$x + i\,y = (c + i\,a\,sin\,\varphi)\,e^{i\,\psi}\,,$$

tedy $Q\,m = m\,H'$.

Uvažovaná kuželosečka je pak řez kužele normál (základna Γ, vrchol m) s rovinou Δ.

Vrcholy kuželosečky realné jsou průseky s přímkama $m\,M_\pi$, $m\,M_0$ (t. j. jsou to středy křivosti bodů M_π a M_0), čímž zároveň dán střed její. Známe tedy oba vrcholy a obě asymptoty kuželosečky. V obrazci se také doporučuje bod $a = \frac{\pi}{2}$ na kruhu Γ, jehož půdorys je Q; normála jím určená $m\,H$ protíná rovinu Λ v bodě H, jehož půdorys je náš bod H' a nárys má výšku $Q\,M_\pi$. Tečná rovina kužele normál podél přímky $m\,H$ má svoji



Obr. 7.

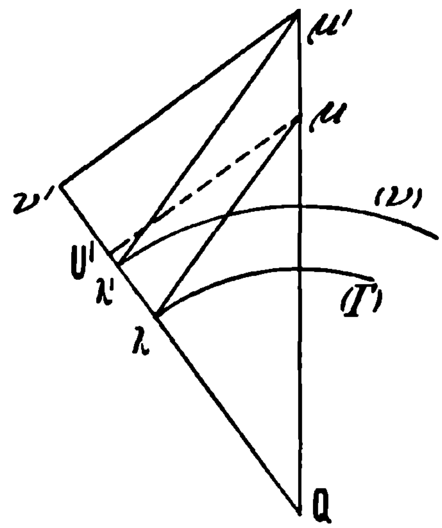
půdorysnou stopu kolmou na $m\,Q$, t. j. splývá s přímkou $O\,m$. Průsek $O\,m$ a Λ^I leží tedy na tečně kuželosečky v bodě H. —

Je-li kuželosečka ellipsou ($c > 2\,a$), jest bod (U) pomyslný a naše konstrukce směru stopy Λ^I se stává illusorní. Ve skutečnosti však není třeba operovati průseky přímek s kruhem, konstrukce přímky $(U)\,U'$ ve sklopeném obrazci jest určena tím, že kruh (ν) s přímkou $\nu\,\nu'$ tvoří obrazec podobný s obrazcem složeným z kruhu (Γ) a přímky $(U)\,U'$, při čemž střed podobnosti jest Q. ($Q\,\nu = 2\,a$, $Q\,\nu' = c$.)

Je-li tedy $2\,a < c$, takže kruh (ν) poloměru $2\,a$ a přímka $\nu'\,\mu' \perp Q\,\nu'$ se neprotínají, vedeme libovolnou příčku $Q\,\mu\,\mu'$ (obr. 8); ta stanoví bod μ' na $\overline{\nu'\,\mu'}$, vedeme pak bodem λ (kruhu Γ) $\lambda\,\mu \parallel \lambda'\,\mu'$, čímž obdržíme bod μ. Přímka $\mu\,U' \parallel \mu'\,\nu'$ pak stanoví hledaný bod U', jenž stanoví přímkou $m\,U'$ směr stopy Λ^I roviny řezu.

Umíme pak sestrojiti pro ellipsu bezprostředně dva vrcholy s tečnami a dva body s tečnami.

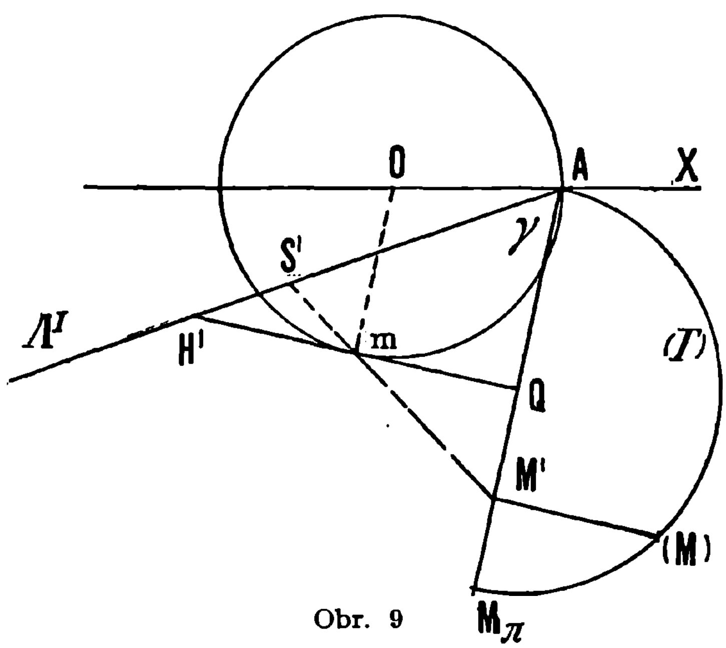
Dále dlužno poznamenati pro případ $a > c$, že rovina centrální hyperboly prochází bodem Δ na čáře hřbetní.



Obr. 8.

V obr. 9. naznačeno stanovení středu hlavní křivosti S plochy kotálnic $a = c = g$, je-li dán libovolný bod M svým bodem opěrným m a půdorysem přímky (normály) $m\ M'$: Vedeme tečnu kruhu $m\,Q$, načež $A\,Q \perp m\,Q$ jest poloměr kruhu Γ, na $A\,Q$ pak leží M'. Naneseme $Q\,m = H'$ na tečně, načež $A\,H' = \Lambda^1$ je půdorys roviny hyperboly středů křivosti, a její průsek S' s přímkou $M'\,m$ je půdorys středu křivosti S bodu M.

Podobně jednoducha je konstrukce středu hlavní křivosti u plochy kotálnic $g = a = \frac{1}{2}c$; buď (obr. 10) $O\,A = c$ poloměr pevného kruhu, m opěrný bod, a buď dán bod plochy průmětem $m\,M'$ přímky $m\,M$.

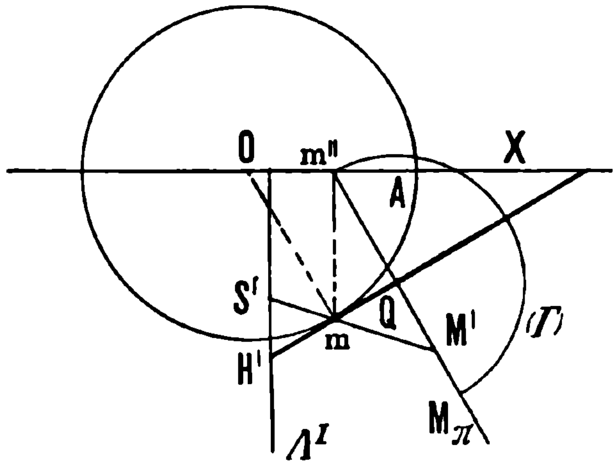


Obr. 9

Vedeme $m\,m'' \perp O\,x$, $m''\,Q \parallel O\,m$, načež jest $Q\,m''$ poloměr kruhu Γ, a M' určen jako bod na přímce $m''\,Q$. Prodloužíme $Q\,m$ do $m\,H'$ o stejnou délku, načež stopa Λ^1 je kolmice na $O\,x$ vedená bodem H'. Její průsek S' s přímkou $m\,M'$ je půdorys středu křivosti S příslušného k bodu M.

Středy křivosti příslušné k bodům kruhu Γ naplňují parabolu mající osu v Λ^{I}; její vrchol je na přímce $m M_\pi$.

Ježto dva vrcholy kuželosečky jsou středy křivosti bodů M_π a M_0 rovinných kotálnic $\alpha = \pi$ a $\alpha = 0$, máme obecnou větu:



Obr. 10.

,,Geometrické místo dvou řad vrcholů kuželoseček na ploše centrální jsou evoluty epicykloidy $\alpha = \pi$ a hypocykloidy $\alpha = 0$.

* * *

Ukážeme nyní, že rovina určená osou $O z$ a hlavním středem křivosti protíná loukoť $C P$ v bodě P_1, který je s bodem P v jednoduchém vztahu, z čehož pak vyplyne přímá konstrukce středu křivosti. Souřadnice středu hlavní křivosti plochy kotálnic obecných znamenejme X_0, Y_0, Z_0, takže

(a) $$X_0 - p = v_0 (x - p), \quad Y_0 - q = v_0 (y - q), \quad Z_0 = v_0 z,$$

kde x, y, z jsou souřadnice bodu P na ploše kotálnic a

(b) $$p = c \cos \psi, \quad q = c \sin \psi$$

značí souřadnice bodu opěrného m.

Střed hybného kruhu C má první dvě souřadnice

(c) $$p_1 = (c - a \cos \alpha) \cos \psi, \quad q_1 = (c - a \cos \alpha) \sin \psi.$$

Paramétr v_0 středu křivosti S má hodnotu

$$v_0 = \frac{a c (a - g \cos \varphi)}{N},$$

$$N = a (a^2 + g^2 - 2 a g \cos \varphi) \cos \alpha - c g (g - a \cos \varphi).$$

Libovolný bod (X, Y, Z) loukotě pak lze vyjádřiti parametrem u ve tvaru

(d) $$X - p_1 = u (x - p_1), \quad Y - q_1 = u (y - q_1),$$

při čemž pomíjíme výraz pro souřadnici třetí. Rovina SOz svazku Oz procházející středem hlavní křivosti S má rovnici

$$X Y_0 - Y X_0 = 0;$$

uvažujme zvlášť její průsek P_1 (X, Y, Z) s loukotí. Paramétr jeho u obdržíme dosazením hodnot (d) do poslední rovnice, t. j. vychází

$$(e) \qquad X_0 q_1 - Y_0 p_1 = u\,[Y_0 (x - p_1) - X_0 (y - q_1)]$$

čili

$$(e^*) \qquad A u = B,$$
$$A = Y_0 (x - p_1) - X_0 (y - q_1),$$
$$B = X_0 q_1 - Y_0 p_1.$$

Pomocí výrazů (b), (c) a rovnic (2), jež dávají

$$\begin{aligned} x - p_1 &= g\,(\cos\alpha \cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi)\,, \\ y - q_1 &= g\,(\cos\alpha \cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi)\,, \\ x - p &= -(a - g\cos\varphi)\cos\alpha\cos\psi + g\sin\varphi\sin\psi\,, \\ y - q &= -(a - g\cos\varphi)\cos\alpha\sin\psi - g\sin\varphi\cos\psi\,, \end{aligned}$$

vypočteme:

$$P \equiv p q_1 - q p_1 + v_0 [q_1 (x - p) - p_1 (y - q)] = v_0 g\,(c - a\cos\alpha)\sin\varphi,$$

dále jest

$$A = q\,(x - p_1) - p\,(y - q_1) + v_0 \begin{vmatrix} x - p_1 & x - p \\ y - q_1 & y - q \end{vmatrix}$$

a determinant

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & x - p \\ y - q_1 & y - q \end{vmatrix} =$$

$$= g \begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\,, & -(a - g\cos\varphi)\cos\alpha\cos\psi + g\sin\varphi\sin\psi \\ \cos\alpha\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\,, & -(a - g\cos\varphi)\cos\alpha\sin\psi - g\sin\varphi\cos\psi \end{vmatrix}$$

se rozkladem sloupců převede na součet determinantů typu

$$(1\,,1) + (1\,,2) + (2\,,1) + (2\,,2),$$

z nichž první a poslední jsou nully, takže vyjde determinant ve tvaru

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x - p_1 & x - p \\ y - q_1 & y - q \end{vmatrix} &= -g^2 \cos\alpha \sin\varphi \cos\varphi - g \sin\varphi\,(a - g\cos\varphi)\cos\alpha \\ &= -a g \sin\varphi \cos\alpha\,; \end{aligned}$$

mimo to máme

$$q\,(x - p_1) - p\,(y - q_1) = g c \sin\varphi,$$

takže vychází

$$A = g \sin\varphi\,(c - a v_0 \cos\alpha).$$

Sem je třeba dosaditi hodnotu v_0 výše udanou; poněvadž přímý výpočet dává

$$c\,N - a^2\,c \cos\alpha\,(a - g\cos\varphi) = -\,c\,g\,(c - a\cos\alpha)\,(g - a\cos\varphi),$$

obdržíme

$$A = -\frac{c\,g^2 \sin\varphi\,(c - a\cos\alpha)\,(g - a\cos\varphi)}{N},$$

a jelikož máme

$$B = v_0\,g\,(c - a\cos\alpha)\sin\varphi = \frac{ac\,g\,(c - a\cos\alpha)\sin\varphi\,(a - g\cos\varphi)}{N},$$

obdržíme dle (e^*)

$$(A)\qquad u = \frac{B}{A} = -\frac{a\,(a - g\cos\varphi)}{g\,(g - a\cos\varphi)}.$$

Tento paramétr bodu P_1 má význam poměru délek algebraicky pojatých $C\,P_1 : C\,P$, takže znamenáme-li je

$$C\,P_1 = g',\quad C\,P = g,$$

máme

$$g' = g\,u,$$

a poslední rovnice dává

$$g' = -\frac{a\,(a - g\cos\varphi)}{g - a\cos\varphi},$$

čili ve tvaru souměrném

$$(A^*)\qquad g\,g' - a\cos\varphi\,(g + g') + a^2 = 0.$$

Tento vztah vládne mezi ramenem kotálnic na uvažované ploše $g = C\,P$ a vzdáleností $g' = C\,P_1$ bodu P_1, ve kterém rovina vedená osou $O\,z$ a středem hlavní křivosti S protíná loukoť $C\,P$.

Uvažujme nyní veškery plochy kotálnic příslušné k různým hodnotám g; ty vytvoří na téže loukoti (φ, ψ, α) řadu bodů P, a mají středy hlavní křivosti S, které se z osy $O\,z$ promítají do loukotě v řadu bodů P_1; tyto dvě řady P, P_1 jsou dle (A^*) involutorní, a sice jest involuce ta závislá toliko na poloze opěrného bodu m, nikoli na sklonu hybné roviny α.

Střed involuce (A^*) má paramétr

$$g = a\cos\varphi,$$

znamenejme jej J; je to patrně pata kolmice $m\,J$ spuštěné z opěrného bodu m na loukoť. Rovnice involuce pak zní

$$J\,P\,.\,J\,P_1 = -\,a^2\sin^2\varphi,$$

a poněvadž $m\,J = a\sin\varphi$, máme

$$\frac{J\,P}{m\,J}\cdot\frac{J\,P_1}{m\,J} = -1 = tg\,\widehat{JmP}\,.\,tg\,\widehat{JmP_1},$$

takže jest $m P \perp m P_1$, t. j.
„involuce bodů P, P_1 na loukoti promítá se z opěrného bodu m v involuci ramen pravých úhlů".

Hlavní střed křivosti S plochy kotálnic (a, c, g) tedy sestrojíme následovně:

„V bodě opěrném m vztýčená kolmice $m P_1$ na normálu $m P$, v rovině hybného kruhu, protne loukoť v bodě P_1, načež rovina $P_1 O z$ stanoví na normále střed hlavní křivosti S."

Ve zvláštním případě $\alpha = 0$ a $\alpha = \pi$, kdy běží o střed křivosti kotálnic rovinných, splývá tato konstrukce s Eulerovou,[1]) která tak nanovo dokázána.

Opisuje-li bod P kruh Γ na ploše kotálnic, opisuje bod P_1 očividně rovněž kruh Γ_1 v rovině rovnoběžné s kruhem Γ, na rotačním kuželi loukotí. Jeho půdorys Γ_1' se strojí bez obtíží; průmět P'_1 bodu P_1 leží pak na spojce $P' L$ se stopou loukotě, načež jest $P'_1 O$ stopou roviny $P_1 O z$, a půdorys středu hlavní křivosti plochy kotálnic v bodě P jest průsek $P'_1 O$ s půdorysem normály $P' m$.

Třeba ještě stanoviti směrný kužel plochy centrální pro plochu obyčejných kotálnic ($g = a$); kužel ten tvoří směry normál podél sférické kotálnice parabolických bodů, jež odpovídá rovnici $c = 2\, a \cos \alpha$. Směrné koefficienty této normály jsou úměrny veličinám

$$x - c \cos \psi = - \frac{c}{2} (1 - \cos \varphi) \cos \psi + a \sin \varphi \sin \psi,$$

$$y - c \sin \psi = - \frac{c}{2} (1 - \cos \varphi) \sin \psi - a \sin \varphi \cos \psi,$$

$$z = a \sin \alpha \, (1 - \cos \varphi),$$

a parametrické vyjádření směrného kužele tedy zní

$$\frac{\xi + i \eta}{\zeta} = - \frac{c + 2\, a\, i \cot g \dfrac{\varphi}{2}}{\sqrt{4 a^2 - c^2}} \, e^{i \psi}.$$

Ustanovíme řez kužele s rovinou

$$\zeta = - \sqrt{4 a^2 - c^2},$$

kde odmocnina může býti kladná neb záporná — existují dva úhly α opačného znamení, jež hoví problému.

Řez kužele s touto rovinou má vyjádření

$$(\alpha) \qquad \xi + i \eta = \left(c + 2\, i\, a \cot g \frac{\varphi}{2}\right) e^{i \psi} ;$$

---

[1]) L. Euler, Novi Comment. Acad. Petrop. 11 (1765), p. 207, Supplementum: De figura dentium rotarum.

Další údaje H. v. Mangoldt, Encyklop. d. Math. Wiss. III D. 1, 2.

položme

$$\varphi = \pi + \varphi_1, \psi = \frac{a\pi}{c} + \psi_1 = \frac{\pi}{2} \sec \alpha + \psi_1,$$

i vyjde

$$(\beta) \qquad \xi + i\eta = e^{\frac{i\pi}{2}\sec\alpha}\left(c - 2\,i\,a\,tg\,\frac{\varphi_1}{2}\right)e^{i\psi_1},\ 2\,a\,\frac{\varphi_1}{2} = c\,\psi_1.$$

„Stopu směrného kužele centrální plochy u plochy kotálnic $g = a$ na rovině $\zeta = -\sqrt{4a^2 - c^2}$, obdržíme pošinutím vrcholnice ve směru osy $O\,\zeta$ do roviny řezu, a její otočením kolem této osy o úhel $\frac{\pi}{2}$ sec. α."

Směrný kužel rozpadá se ve dva různé, jež mají na dvou rovinách rovnoběžných a od základny stejně vzdálených stopy shodné. V případě $a = c$ jsou to cissoidy Diokletovy, takže plocha centrální je tu stupně šestého.

13.

Vraťme se k rovnicím (40), jež při stálých α, φ a proměnném v odpovídají normále plochy kotálnic. Nejprve vyjde — píšeme malé litery pro souřadnice

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 - 2\,c\,v\cos\alpha\,(a - g\cos\varphi) + v^2\,(a^2 + g^2 - 2\,a\,g\cos\varphi).$$

Koule základní, mající pevný kruh za největší,

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2$$

protíná normálu v bodě opěrném m, jemuž odpovídá řešení $v = 0$; pro druhý průsek n normály s touto koulí máme $v = v'$ dáno rovnicí

$$(43) \qquad (a^2 + g^2 - 2\,ag\cos\varphi)\,v' = 2\,c\cos\alpha\,(a - g\cos\varphi).$$

Bod $M\,(x, y, z)$ na ploše kotálnic a $N\,(X, Y, Z)$ na normále souvisí s bodem opěrným $m\,(p, q, 0)$ rovnicemi

$$X - p = v\,(x - p)\,, \ldots$$

t. j.

$$X = (1 - v)\,p + v\,x\,, \ldots$$

a vyjádří se tento vztah *barycentricky* takto

$$(44) \qquad N = (1 - v)\,m + v\,M.$$

Ve zvláštním případě, kdy N je stopa normály n na kouli základní, tedy

$$(43^*) \qquad n = (1 - v')\,m + v'\,M,$$

při čemž v' je řešení rovnice (43); eliminací M vychází vyjádření polohy bodu N na normále, příslušného k parametru v,

$$(45) \qquad v'\,N = (v' - v)\,m + v\,n$$

na základě bodu opěrného m a stopy n na kouli základní.

VII.

Jednoduché vztahy vyskytují se opět v případě ploch kotálnic obyčejných $a = g$, na něž se chceme omeziti. Tu podá rovnice (43) paramétr stopy normály na základní kouli

$$(43^*) \qquad v' = \frac{c}{a} \cos\alpha, \; v' - 1 = \frac{c\cos\alpha - a}{a}$$

nezávislý na φ. Tudíž jsou čáry, jež opisují stopy normál podél kotálnic $\alpha =$ konst. na základní kouli (c), opět sférické kotálnice; a sice přísluší ke konstantám c', a', g', α', pro něž výše nalezeno

$$\alpha' = \alpha, \; g' = a v' = c\cos\alpha, \; a' = a\,\frac{c - a v'\cos\alpha}{c - a\cos\alpha},$$

t. j.

$$(43^b) \qquad a' = \frac{a c \sin^2\alpha}{c - a\cos\alpha}, \; c' = \frac{c^2 \sin^2\alpha}{c - a\cos\alpha}, \; g' = c\cos\alpha, \; \alpha' = \alpha,$$

a poloha roviny pevného kruhu: $z = c\,\frac{c\cos\alpha - a}{c - a\cos\alpha}\sin\alpha$.

Ve zvláštním případě $a = c$ jsou tyto veličiny

$$a' = 2\,a\cos^2\frac{\alpha}{2} = c', \; g' = a\cos\alpha,$$

základní rovina $z = -a\sin\alpha$.

V případě $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ se tato kotálnice redukuje na kruh pevný (a), jak též geometricky zřejmo, any tu normály leží v tečných rovinách přímého válce (a).

Pro $v = 1$ podává barycentrická rovnice (45) bod M na ploše kotálnic; vzhledem k rovnici (43^*) jest

$$(46) \qquad M = \frac{c\cos\alpha - a}{c\cos\alpha}\,m + \frac{a}{c\cos\alpha}\,n,$$

takže

„tětivy základní koule (c) ležící na normálách plochy kotálnic obyčejných $(g = a)$, a sice podél téže kotálnice $\alpha =$ konst., jsou děleny plochou kotálnic ve stálém poměru.

Rovnice (39) určuje paramétr středu hlavní křivosti S, různého od bodu opěrného; po dosazení hodnot

$$v = \frac{c}{2\,a\cos\alpha - c}, \; v' - v = \frac{c\,(a + c\cos\alpha - 2\,a\cos^2\alpha)}{a\,(c - 2\,a\cos\alpha)}$$

do rovnice (45) obdržíme pak barycentrické vyjádření středu hlavní křivosti S

$$(47) \qquad S = \frac{a + c\cos\alpha - 2\,a\cos^2\alpha}{(c - 2\,a\cos\alpha)\cos\alpha}\,m - \frac{a}{(c - 2\,a\cos\alpha)\cos\alpha}\,n.$$

Aby body m, n, M, S ležely harmonicky, nutno, by platila rovnice

$$\frac{c \cos \alpha - a}{a} = \frac{a + c \cos \alpha - 2 a \cos^2 \alpha}{a},$$

t. j. $\cos^2 \alpha = 1$:

„Středy hlavní křivosti plochy kotálnic obyčejných $g = a$ dělí tětivy stanovené normálami na základní kouli v poměru stálém pro tutéž kotálnici α = konst";

avšak harmonickou je čtveřina m, n, M, S pouze u kotálnic rovinných $\alpha = 0$ a $\alpha = \pi$.

Dvojpoměr

$$(m, n, M, S) = \frac{a + c \cos \alpha - 2 a \cos^2 \alpha}{a - c \cos \alpha}$$

se v případě $a = c$ zjednoduší na $1 + 2 \cos \alpha$, a je tu případ $\alpha = 0$ vyloučen z obecného pravidla; hypocykloida $\alpha = 0$ tu skutečně neexistuje.

Dvojpoměr vymizí, když kotálnice na ploše centrální (S) leží na kouli základní. Takové kotálnice jsou čtyři, příslušné ke dvěma hodnotám $\cos \alpha$ z rovnice

$$2 a \cos^2 \alpha - c \cos \alpha - a = 0;$$

pouze v případě $a = c$ se dvě řešení ztrácejí.

Spustíme-li z bodu O na normály plochy kotálnic $(g = a)$ roviny kolmé, sekou je v bodech k, jichž souhrn tvoří plochu, kterou nazveme *úpatnicí normál*; její analytické vyjádření je dáno rovnicemi (40) pro

$$v = \frac{c}{2 a} \cos \alpha .$$

Z geometrického názoru vychází bezprostředně, že bod k leží uprostřed mezi body m a n, takže platí barycentrická rovnice

$$2 k = m + n ;$$

souřadnice bodu k se obdrží z polovičních souřadnic bodu n, přičtou-li se k nim hodnoty

$$\frac{1}{2} c \cos \psi , \quad \frac{1}{2} c \sin \psi , \quad 0 .$$

Na úpatnici normál jsou tedy čáry α = konst. kotálnice, a čáry φ = konst. jsou úpatnice kuželů rotačních (Γ, m); vzniknou též jako průseč s koulí nad průměrem $O m$. Máme tak průseč koule s rotačním kuželem, jehož vrchol leží na kouli a jeho osa se této dotýká; taková čára jest *hyppopéda* Eudoxe Knidského, a leží na rotačním válci rovnoběžném s osou rotačního kužele, v jehož vrcholu se válec dotýká koule. Čáry φ = konst. jsou tedy hyppopédy.

Paty normál n na kouli základní, příslušných k bodům téhož kruhu Γ, leží na témž kuželi s vrcholem m u dvojnásobné vzdálenosti od vrcholu:

„Paty normál — příslušné k témuž kruhu Γ — na základní kouli tvoří hyppopédu Eudoxovu.“

Půdorysy těchto čar v naší poloze rovin jsou paraboly

$$(x \sin \psi - y \cos \psi)^2 + c \cos^2 \frac{\varphi}{2} (x \cos \psi + y \sin \psi - c) = 0,$$

jichž osy jsou $O\,m$, a ohniska opisují čáru s polární rovnicí

$$r = c - \frac{1}{4} c \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = \frac{c}{a} \psi,$$

polární úhel je ψ; je to konchoida růžice, jak to ukazuje výraz

$$r = \frac{7}{8} c - \frac{c}{8} \cos \left(\frac{c}{a} \psi \right).$$

* * *

Normály plochy kotálnic, které protínají danou přímku, tvoří určitou plochu; zvolíme bod m na základním kruhu dle libosti a protneme rotační kužel normál tímto bodem m jdoucích danou přímkou; dvě tak určené povrchové přímky kužele tvoří přímky naší plochy.

Má-li daná přímka rovnice

$$X = m_0 Z + p_0, \quad Y = n_0 Z + q_0,$$

vyjadřuje se její různoběžnost s normálou bodu (x, y, z) na ploše rovnicí

$$\begin{vmatrix} x - m_0 z - p_0 & y - n_0 z - q_0 \\ c \cos \psi - p_0 & c \sin \psi - q_0 \end{vmatrix} = 0, \tag{48}$$

která reprodukuje poslední výsledek, a zároveň podává po dosazení hodnot (2) za souřadnice vztah mezi parametry φ a α. Ve výsledním vztahu nevyskytne se $\sin \alpha$, je-li $m_0 = 0$, $n_0 = 0$, takže rovnice bude

$$q_0 (x - c \cos \psi) - p_0 (y - c \sin \psi) = c (x \sin \psi - y \cos \psi)$$

což po dosazení hodnot (2) zní

$$\left\{ \begin{aligned} &(a - g \cos \varphi) \cos \alpha \, (q_0 \cos \psi - p_0 \sin \psi) - \\ &- g \sin \varphi \, (p_0 \cos \psi + q_0 \sin \psi) + c\, g \sin \varphi = 0. \end{aligned} \right. \tag{48a}$$

Tento vtah se podstatně zjednoduší, předpokládáme-li danou přímku v rovině $O\,x\,z$, takže $q_0 = 0$:

$$\frac{c\,g}{p_0} \sin \varphi = (a - g \cos \varphi) \cos \alpha \sin \psi + g \sin \varphi \cos \psi, \tag{48b}$$

rovnice čáry na ploše kotálnic, podél které vedené normály plochy sekou přímku

$$x = p_0, \; y = 0.$$

VII.

Jednoduchý výsledek dává případ $c = a$. Píšeme-li $h = \frac{a g}{p_0}$, máme

$$\cos\alpha = \frac{h - g\cos\varphi}{a - g\cos\varphi},$$

načež

$$x = (a - h)\cos\varphi + g,\ y = (a - h)\sin\varphi:$$

„Čára na ploše kotálnic $a = c$, určující normály protínající danou přímku roviny $O x z$ kolmou na $O x$, leží na kruhovém válci směru $O z$, jehož osa je v $G z$“,

při čemž G značí bod $(g, 0, 0)$.

Čára leží mimo to na kouli

$$x^2 + y^2 + z^2 = g^2 + 2a^2 - 2 a h.$$

* * *

Jednoduché řešení podává také problém v případě přímky v nárysně procházející počátkem

$$x = m_0 z,\ y = 0,$$

tedy $n_0 = p_0 = q_0 = 0$. Rovnice (48) tu zní

$$(x - m_0 z)\sin\psi - y\cos\psi = 0,$$

t. j.

(48°)
$$z = \frac{g}{m_0}\,\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}.$$

Tedy zvláště pro $a = c$:

„Normály plochy kotálnic $a = c$ vedené podél řezu $z =$ konst. protínají určitou přímku svazku O v rovině $O x z$.“

Přímka ta prochází patrně bodem $x = g$, $z = \frac{g}{m_0}$, t. j. průsekem přímky $G z$ a roviny řezu.

* * *

Parametrické vyjádření plochy kotálnic $a = c$ zní

$$x - g = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = (a - g\cos\varphi)\sin\alpha,$$

kde psáno

$$r = (1 - \cos\alpha)(a - g\cos\varphi),$$

takže je zároveň polární rovnice průmětu kotálnice pro pól G.

Řez plochy s rovinou $z =$ konst odpovídá rovnici

$$(a - g\cos\varphi)\cos\alpha = \sqrt{(a - g\cos\varphi)^2 - z^2},$$

takže jeho polární rovnice zní

(49ᵃ)
$$r = a - g\cos\varphi - \sqrt{(a - g\cos\varphi)^2 - z^2},$$

čili

(49ᵇ)
$$r^2 + z^2 = 2 r (a - g\cos\varphi).$$

VII.

V tom obsažena zároveň eliminace parametrů z rovnic plochy; poslední rovnici lze totiž psáti

$$(x-g)^2 + y^2 + z^2 + 2\,g\,(x-g) = 2\,a\,r,$$

z čehož konečně vychází

$$(49) \qquad (x^2 + y^2 + z^2 - g^2)^2 = 4\,a^2\,[(x-g)^2 + y^2],$$

jakožto rovnice plochy kotálnic $a = c$ v pravoúhlé soustavě souřadnic s počátkem O.[1])

Značí-li r, φ polární souřadnice v rovině základní s pólem G a osou $G\,x$, zní rovnice plochy kotálnic $a = c$ (49[b])

$$r^2 + z^2 + 2\,g\,r\cos\varphi = 2\,a\,r.$$

Differenciální rovnice vrstevnic $z =$ konst. tedy bude

$$(r + g\cos\varphi - a)\,r' = g\,r\sin\varphi\,, \qquad r' = \frac{d\,r}{d\,\varphi}\,;$$

diferenciální rovnice orthogonálních trajektorií soustavy tvořené půdorysy těchto vrstevnic vzniká odtud výměnou r' za

$$-\frac{r^2}{r'}\,,$$

a zní

$$(\alpha) \qquad g r'\sin\varphi + g\,r\cos\varphi + r^2 - a\,r = 0.$$

Tyto trajektorie jsou zároveň půdorysy spádnic, orthogonálních to trajektorií vrstevnic $z =$ konst. na ploše.

Rovnici (α) přepišme na

$$g\,D\,(r\sin\varphi) + r^2 - ar = 0\,,$$

a položme $s = \dfrac{1}{r\sin\varphi}$, takže máme rovnici lineární

$$g\frac{d\,s}{d\,\varphi} + \frac{a\,s}{\sin\varphi} - \frac{1}{\sin^2\varphi} = 0$$

Obvyklá methoda $s = u\,v$,

$$g\,u' + \frac{a\,u}{\sin\varphi} = 0$$

dává při označení

$$(\beta) \qquad k = \frac{a}{g}$$

---

1) Rychlejší odvození rovnice (49) vychází z rovnice opsaných koulí (4) [pro $a = c$, $\varphi = \psi$], zavede-li se paramétr $u = e^{i\varphi}$ a položí diskriminant rovnice na roveň nulle. Sr. Rozpr. 36, roč. XXII. „O dvou plochách stupně čtvrtého“, str. 25—6.

nejprve

$$\log u = -k\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = -k \log tg\frac{\varphi}{2}, \quad u = \left(tg\frac{\varphi}{2}\right)^{-k},$$

$$(\gamma) \quad g v = \frac{1}{2} C + \int \frac{d\varphi}{u \sin^2\varphi} = \frac{1}{2} C + \frac{1}{2}\int (1+t^2)\, t^{k-2} dt, \quad t = tg\frac{\varphi}{2}.$$

Pokud tedy k je různo od 1, bude

$$g v = \frac{1}{2} C + \frac{1}{2}\left(\frac{t^{k-1}}{k-1} + \frac{t^{k+1}}{k+1}\right),$$

a v případě $k = 1$ se smyslu prázdný člen nahradí $\log t$.

Průvodič r je tedy určen rovnicí

$$r = \frac{1}{s \sin\varphi} = \frac{1}{u\, v \sin\varphi}$$

t. j.

$$r = \frac{2 g t^k}{\sin\varphi\left(C + \frac{t^{k-1}}{k-1} + \frac{t^{k+1}}{k+1}\right)}, \quad t = tg\frac{\varphi}{2},$$

čili

$$(\sigma) \quad r = g\, \frac{t^{k-1} + t^{k+1}}{C + \frac{t^{k-1}}{k-1} + \frac{t^{k+1}}{k+1}}, \left(t = tg\frac{\varphi}{2}, \; k = \frac{a}{g}\right),$$

a ve výjimečném případě plochy kotálnic obyčejných ($g = a, k = 1$)

$$r = a\, \frac{1 + t^2}{C + \log t + \frac{1}{2} t^2}.$$

Rovnice (σ) je polární rovnice půdorysu čáry spádové; v pravoúhlých souřadnicích s počátkem G máme její parametrické vyjádření

$$(\sigma^1) \quad x = g\, \frac{t^{k-1}(1 - t^2)}{C + \frac{t^{k-1}}{k-1} + \frac{t^{k+1}}{k+1}}, \quad y = \frac{2 g t^k}{C + \frac{t^{k-1}}{k-1} + \frac{t^{k+1}}{k+1}}.$$

Křivky ty jsou algebraické a racionální v případě, kdy poměr $k = a : g$ je číslo racionální od jednotky různé, jinak transcendentní. Jedna z nich ($C = 0$) je však s výjimkou případu $k = 1$ kuželosečkou s ohniskem G

$$r = g\, \frac{1 + t^2}{\frac{1}{k-1} + \frac{t^2}{k+1}} = \frac{g}{\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}}{k-1} + \frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{k+1}} = \frac{g\,(k^2 - 1)}{k + \cos\varphi}$$

t. j.

$$r = \frac{a\left(1 - \frac{g^2}{a^2}\right)}{1 + \frac{g}{a} \cos \varphi},$$

v pravoúhlých souřadnicích

$$k^2 (x^2 + y^2) = (x - h)^2, \quad h = g (k^2 - 1),$$

čili

$$k^2 y^2 + (k^2 - 1)(x + g)^2 = (k^2 - 1) a^2;$$

střed O, fokální polouosa a, takže vrcholová kružnice splývá se základním kruhem (a).

Na přímkách svazku (G) stanoví čáry $(\mathfrak{C})$ řady perspektivní, poněvadž čára $C = \infty$ se redukuje na bod G; třeba tedy znáti pouze jednu další čáru (pro C od nully různé), aby se další křivky $(\mathfrak{C})$ daly strojiti elementární cestou.

Jednoduché výsledky dává případ $k = 2 \left(g = \frac{1}{2} a\right)$:

$$(\mathfrak{C}^2) \qquad x = 3g \frac{t - t^3}{3C + 3t + t^3}, \; y = 6g \frac{t^2}{3C + 3t + t^3},$$

kdy trajektorie jsou racionální čáry 3. stupně. Abychom určili dvojný bod, uvažujme průseky s přímkou

$$\mathfrak{A} x + \mathfrak{B} y + 3 \mathfrak{C} g = 0;$$

parametry průsečných bodů jsou kořeny rovnice

$$\mathfrak{A} (t - t^3) + 2 \mathfrak{B} t^2 + \mathfrak{C} (3C + 3t + t^3) = 0$$

čili

$$(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) t^3 + 2 \mathfrak{B} t^2 + (3 \mathfrak{C} + \mathfrak{A}) t + 3 C \mathfrak{C} = 0;$$

symetrické úkony základní $\mathfrak{f}_\nu$ parametrů bodů průsečných t, t', t'' hoví charakteristické rovnici

$$1 + \mathfrak{f}_2 + \frac{4 \mathfrak{f}_3}{3C} = 0.$$

Píšeme-li pak $\mathfrak{g}_1 = t' + t''$, $\mathfrak{g}_2 = t' t''$, tedy $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_1 t$, $\mathfrak{f}_3 = \mathfrak{g}_2 t$, přejde tato rovnice na

$$1 + \mathfrak{g}_2 + \left(\mathfrak{g}_1 + \frac{4 \mathfrak{g}_2}{3C}\right) t = 0;$$

jsou-li t', t'' parametry dvojného bodu, zůstává t neurčeno, a musí

$$1 + \mathfrak{g}_2 = 0, \; \mathfrak{g}_1 + \frac{4 \mathfrak{g}_2}{3C} = 0,$$

t. j. t', t'' jsou kořeny rovnice

$$(\delta) \qquad t^2 - \frac{4}{3C} t - 1 = 0,$$

která tedy stanoví polohu bodu dvojného. Pro realná C je diskriminant kladný a tečny v bodě dvojném jsou realné a různé; polární úhel φ dvojného bodu je dán rovnicí

$$tg\,\varphi = -\frac{3}{2}\,C.$$

Rovnici geometrického místa dvojných bodů trajektorií ($\mathfrak{S}^2$) obdržíme dosazením hodnoty C z (ϑ)

$$3\,C = \frac{-4\,t}{1-t^2}$$

do rovnic ($\mathfrak{S}^2$):

$$x = -3\,g\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 = -\frac{3\,g}{2}\,(1 + \cos 2\,\varphi),$$

$$y = -6\,g\,\frac{t\,(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = -\frac{3\,g}{2}\,\sin 2\,\varphi.$$

Dvojné body trajektorií ($\mathfrak{S}^2$) leží tedy na kruhu poloměru $\frac{3}{2}\,g = \frac{3}{4}\,a$, jehož střed má v souřadnicích s počátkem G polohu $x = -\frac{3}{4}\,a,\ y = 0.$

* * *

Píšeme-li rovnici plochy ve tvaru $F = 0$, máme

$$\frac{1}{4}\,\frac{\partial F}{\partial x} = Sx - 2\,a^2\,(x-g)\,,$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{\partial F}{\partial y} = Sy - 2\,a^2\,y,$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{\partial F}{\partial z} = S\,z,\quad S = x^2 + y^2 + z^2 - g^2;$$

rovnice normály znějí tedy

$$\frac{X-x}{S\,x - 2\,a^2\,(x-g)} = \frac{Y-y}{S\,y - 2\,a^2\,y} = \frac{Z-z}{S\,z}\,.$$

Odtud snadno vychází, že plocha normál podél řezu $z =$ konst. jest osmého stupně.

Uvažujme ještě plochu normál kolmých na $O\,y$, tedy v bodech obrysové čáry nárysné; pro čáru tu platí

$$(a - g\cos\varphi)\cos\alpha + g\cos\varphi = 0,$$

a je průsečí koule

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\,a^2 + g^2$$

s válcem

$$(x-g)^2 + y^2 = a^2.$$

Rovnice normály

$$\frac{X - a\cos\varphi}{x - a\cos\varphi} = \frac{Y - a\sin\varphi}{0} = \frac{Z}{z} = v$$

znějí

$$(n) \qquad X = a\cos\varphi + g\,v,\ Y = a\sin\varphi,\ Z = v\sqrt{a^2 - 2\,ag\cos\varphi},$$

což je zároveň vyjádření sborcené plochy normál kolmých na $O\,y$. Vypočteme

$$(X - g\,v)^2 + Y^2 = a^2,\ Z^2 = v^2\,(a^2 - 2\,g\,X) + 2\,g^2\,v^3;$$

tudíž jsou čáry $v =$ konst. průseče kruhových válců směru $O\,z$ (vespolek shodných) s koulemi

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = a^2\,(1 + v^2) + g^2\,v^2\,(2\,v - 1) + 2\,g\,v\,(1 - v)\,X.$$

Obalová plocha těchto koulí je rotační a má za charakteristiky kruhy v rovinách kolmých na $O\,x$

$$g\,(1 - 2\,v)\,X + a^2\,v + g^2\,v\,(3\,v - 1) = 0.$$

Jednodušší útvary se vyskytují v případě $g = \pm\frac{a}{2}$.

Předpokládejme $a = 2\,g$, a znamenejme $\varphi = 2\,\omega$; pak zní parametrické vyjádření plochy sborcené

$$(50) \qquad x = 2\,g\cos 2\,\omega + g\,v,\ y = 2\,g\sin 2\,\omega,\ z = 2\,g\,v\sqrt{2}\sin\omega,$$

takže čáry $v =$ konst. jsou hyppopédy na shodných válcích, a uvažovaná plocha normál má jednoduché konstruktivní vlastnosti. Orthogonální trajektorie povrchových přímek normál plochy kotálnic jsou algebraické čáry — věc přirozená, any leží na plochách algebraických, ježto paralelní plochy zde jsou algebraické — určené parametrem

$$v - 1 = \frac{\text{konst.}}{\sqrt{5 - 4\cos 2\,\omega}}.$$

Rovnici nárysu povrchové přímky možno psáti

$$x\sin\omega = 2\,g\cos 2\,\omega\sin\omega + \frac{z}{2\sqrt{2}};$$

přímka ta obaluje čáru 3. třídy. Derivujíce dle ω, nacházíme pro bod na obálce

$$(\alpha) \qquad x = 2\,g\,(1 - 6\sin^2\omega),$$

načež druhá souřadnice se vypočte vzorcem

$$(\beta) \qquad z = -16\sqrt{2}\,g\sin^3\omega;$$

bod ten je zároveň průmět bodu na strikční čáře plochy uvažovaných normál; tato čára tedy jest dána rovnicemi (α), (β) a rovnicí

$$(\gamma) \qquad y = 2\,g\sin 2\,\omega.$$

Souřadnice bodu na půdorysu strikční čáry lze psáti

$$x + 2a = 3a \cos\varphi, \quad y = a \sin\varphi,$$

a je zřejmo, že

„půdorys strikční čáry plochy sborcené, tvořené normálami plochy kotálnic $a = c = 2g$ rovnoběžnými s nárysnou, jest ellipsa".

Vložíme-li do rovnice roviny $Ax + By + Cz + D = 0$ hodnoty (50), obdržíme po substituci hodnoty v, z této rovnice vycházející, souřadnice bodu na řezu plochy normál s rovinou jakožto funkce parametru φ, a jejich tvar ukazuje, že řezy jsou racionální čáry stupně 6.

Provádějíce eliminaci v a ω z rovnic (50), nacházíme pořadem

$$v = \frac{z}{2\sqrt{2}\sin\omega}, \quad y = a \sin 2\omega, \quad \cos 2\omega = \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}},$$

$$x - \sqrt{a^2 - y^2} = \frac{z}{2\sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}}},$$

z čehož konečně vychází rovnice sborcené plochy ve tvaru

$$(51) \qquad (a^2 - y^2)(x + y + a)^2 (x - y + a)^2 = \left[(2x + a)(y^2 - a^2) + \frac{a}{4} z^2 - a x^2\right]^2.$$

Řez plochy s rovinou základní $z = 0$ sestává z dvojnásob vzatého kruhu základního, který je dvojná čára plochy, a z dvojnásob čítané přímky Ox. Tato je přímka povrchová $\omega = 0$ a $\omega = \pi$, tedy dvojná přímka povrchová.

Z tvaru rovnice vychází bezprostředně, že sborcená plocha dotýká se roviny $y = \pm a$ podél nekonečně vzdálené přímky (která je tedy torsální), takže roviny $y = \pm a$ jsou ku ploše asymptotické.

Směrný kužel sborcené plochy má rovnici

$$y^2 (x^2 + y^2)^2 = 0,$$

a plocha se dotýká úběžné roviny podél úběžných přímek rovin $x \pm iy = 0$.

Z rovnice (51) snadno vychází, že řezy s rovinami $y =$ konst. sestávají ze čtyř přímek a z přímky úběžné, která je dvojnou přímkou plochy.

Asymptotické roviny $y = \pm a$ dotýkají se plochy mimo to ve dvou přímkách torsálních v konečně vzdálenosti $z = 2x$ a $z = -2x$.

Rovina $z = \pm 2x$ seče plochu sborcenou ve dvou přímkách torsálních $y = a$ a $y = -a$, a v čáře stupně 4.

$$(52) \qquad (x + y + a)^2 (x - y + a)^2 + (2x + a)^2 (y^2 - a^2) = 0,$$

jejíž průmět se dotýká úběžné přímky v bodech kruhových.

Plocha (51) má dále dvě dvojné čáry rovinné stupně třetího

$$(53)\qquad \begin{aligned} y &= x + a\,, \quad y^3 - a\,y^2 + \frac{a}{8}\,z^2 = 0\,,\\ -y &= x + a\,, \quad y^3 + ay^2 - \frac{a}{8}\,z^2 = 0\,. \end{aligned}$$

Nárys prvé z těchto čar ($\varDelta_1$) má rovnici

$$(x + a)^3 - a\,(x + a)^2 + \frac{a}{8}\,z^2 = 0$$

a pomocí parametru

$$t = \frac{z}{x + a} = 4\,sin\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right), \quad (2\,\omega = \varphi)\,,$$

se vyjadřuje rovnicemi

$$x = -\frac{1}{8}\,a\,t^2\,, \quad z = \frac{1}{8}\,a\,t\,(8 - t^2)\,.$$

* * *

Aby přímka

$$x = m\,z + p, \; y = q$$

protínala přímku (aneb s ní byla rovnoběžna)

$$x = m_1\,z + p_1, \; y = q_1,$$

musí

$$(q - q_1)\;(m - m_1) = 0.$$

Uvažované normály odpovídají hodnotám

$$m = \frac{1}{2\sqrt{2}\,sin\,\omega}\,, \quad q = a\,sin\,2\,\omega\,, \quad p = a\,cos\,2\,\omega$$

a tedy se dvě přímky ω, ω_1 naší plochy protínají, platí-li jedna z podmínek

$$\omega_1 = \omega + \pi\,, \quad \omega_1 = \frac{\pi}{2} - \omega\,, \quad \frac{3\,\pi}{2} - \omega, \quad \omega_1 = \pi - \omega\,.$$

Přímky ω a $\omega + \pi$ se protínají na dvojném kruhu (a); přímky ω a $\frac{\pi}{2} - \omega$ leží v rovině kolmé na $O\,y$ a vycházejí z různých bodů opěrných, průsek jich má výšku

$$z = -\frac{p - p_1}{m - m_1}$$

t. j. po dosazení

$$z = 4\,a\sqrt{2}\,\frac{cos\,2\,\omega\;sin\,\omega\;cos\,\omega}{sin\,\omega - cos\,\omega}\,;$$

dále jest pro průsek obou přímek

$$2\,x = (m + m_1)\,z + p + p_1,$$

tedy v našem případě $x = \dfrac{\sin\omega + \cos\omega}{\sin\omega\cos\omega} \cdot \dfrac{z}{4\sqrt{2}}$,

$$x = a\cos 2\omega \frac{\sin\omega + \cos\omega}{\sin\omega - \cos\omega},$$

$$x + a = -2a\sin\omega\cos\omega = -y,$$

t. j. přímky ω a $\dfrac{\pi}{2} - \omega$ se protínají na dvojné čáře Δ_2 v rovině $x + y + a = 0$.

Na dvojné čáře Δ_1 v rovině $x + a = y$ se protínají přímky ω a $\dfrac{3\pi}{2} - \omega$, konečně přímky ω a $\pi - \omega$ jsou spolu rovnoběžné, t. j. protínají se na dvojné přímce úběžné.

Otáčí-li se rovina kol povrchové přímky, zůstává z její pěti bodů průsečných s doplňující křivkou stupně 5. čtvero stálých, v nichž ona přímka protíná dvojný kruh, dvojné čáry Δ_1 a Δ_2, a bod úběžný; pouze pátý bod, v němž se pak rovina dotýká plochy sborcené, se mění s polohou roviny.

Těmto čtyřem řadám protínajících se přímek odpovídají čtyři páry přímek torsálních a sice

1. na čáře Δ_2 mají kuspidální bod přímky torsální

$$\omega = \frac{\pi}{4} \text{ a } \omega = 5\frac{\pi}{4} \; (y = a, \quad z = 2x \text{ a } z = -2x);$$

2. na čáře Δ_1 mají kuspidální bod přímky

$$\omega = \frac{3}{4}\pi \text{ a } \frac{7}{4}\pi; \; (y = -a, \; z = \pm 2x);$$

3. na čáře dvojné v nekonečnu mají body kuspidální přímky torsální

$\omega = \dfrac{\pi}{2}$ a $\omega = \dfrac{3\pi}{2}$:

$$y = 0, \quad x + a = \pm\frac{z}{2\sqrt{2}}.$$

4. Na kruhu dvojném (a) jsou kuspidální body přímky torsální $\omega = 0$, jež splývá s přímkou $\omega = \pi$:

$$y = 0, \; z = 0,$$

což jest osa Ox; oba pláště plochy sborcené, jež se podél Ox prostupují, mají tuto přímku za torsální, s kuspidálním bodem A: —

Podmínka, aby rovina $Ax + By + Cz + D = 0$ dotýkala se plochy sborcené, je rovnomocná s podmínkou, aby obsahovala některou její povrchovou přímku. U naší plochy normál (50) podmínka ta spočívá v rovnicích ($2\omega = \varphi$)

$$(54) \qquad A + 2\sqrt{2}C\sin\omega = 0, \quad A\cos 2\omega + B\sin 2\omega + \frac{D}{a} = 0.$$

Vyloučením ω vychází tangenciální rovnice plochy

$$(54^*) \qquad A^2 B^2 (8 C^2 - A^2) = \left(4 A C^2 - A^3 + \frac{4}{a} C^2 D\right)^2.$$

Omezme se na případ $D = 0$; tu se rovnice zjednoduší na

$$(55) \qquad B^2 (8 C^2 - A^2) = (4 C^2 - A^2)^2,$$

což jest tangenciální rovnice kužele opsaného o plochu sborcenou z vrcholu O. Obyčejnou její rovnici obdržíme takto: rovnice (54) dávají pro $D = 0$ hodnoty $\frac{B}{A}$ a $\frac{C}{A}$, a rovnice tečné roviny pak zní

$$(6) \qquad x \sin 2\omega - y \cos 2\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} z \cos \omega;$$

na obalovém kuželi je splněna ještě rovnice charakteristiky

$$x \cos 2\omega + y \sin 2\omega = -\frac{1}{2\sqrt{2}} z \sin \omega,$$

a z obou rovnic vychází řešením

$$x = \frac{z}{2\sqrt{2}} (2 \sin 2\omega \cos \omega - \cos 2\omega \sin \omega)$$

$$y = \frac{-z}{2\sqrt{2}} (2 \cos 2\omega \cos \omega + \sin 2\omega \sin \omega),$$

parametrické vyjádření opsaného kužele.

Rovnice ty lze psáti v imaginárním tvaru

$$(55^*) \qquad x + i y = \frac{-i z}{4\sqrt{2}} (3 + e^{2i\omega}) e^{i\omega},$$

a odtud plyne další vlastnost plochy, že

„řez kužele opsaného z vrcholu O o plochu normál plochy kotálnic $a = c = 2g$ rovnoběžných s rovinou Oxz, vzatý na rovině $z = 2a\sqrt{2}$, jest nefroida Huygensova, čili epicykloida vytvořená kotálením kruhu poloměru $\frac{a}{2}$ po kruhu poloměru a, ale otočená o 90° ve směru záporném, při čemž rámě jest $-\frac{a}{2}$.

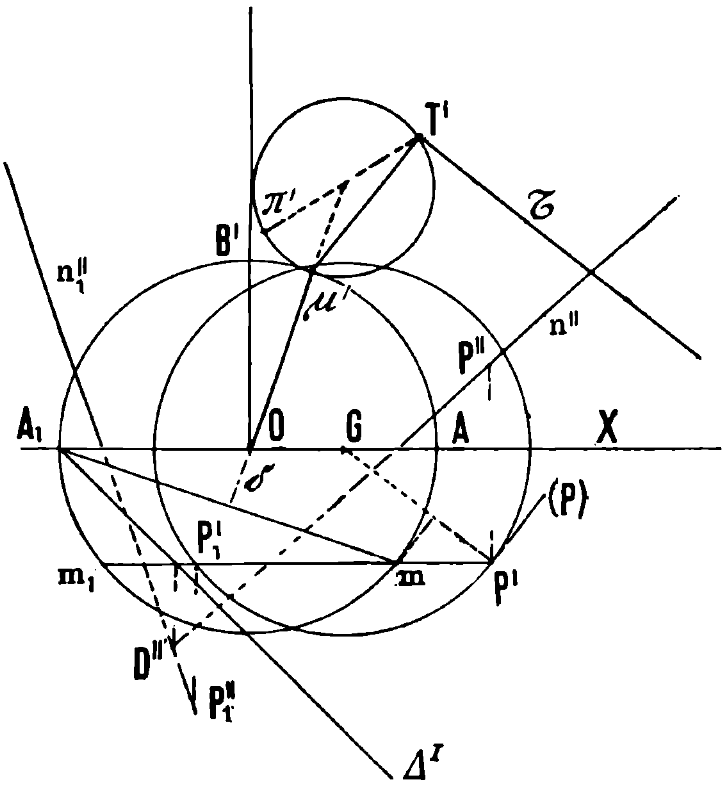
Při tom odvalený úhel na kruhu pevném $= \omega$ jest polovice odvaleného úhlu φ při kotálení v prostoru.

Znamenejme T bod nefroidy, μ jeho bod opěrný na kruhu (a) v rovině řezu, B bod kruhu tohoto, od něhož kotálení počíná, takže obl. $B\mu =$ obl. $\mu\varkappa$, pak je T diametrální protějšek bodu $\varkappa$ na hybném kruhu.

Konstruktivně jsou tyto výsledky málo užitečné pro příliš malé rozměry obrazce. Víme však, že — mluvme výhradně o půdorysu, jenž je shodný s originálem — $\sphericalangle B' O \mu' = \omega = \frac{\varphi}{2}$, takže jest $O \mu' \perp A_1 m$, je-li m opěrný bod příslušný k bodu P na ploše kotálnic, z něhož vychází normála n (obr. 11.) a značí-li A_1 bod $(-a, 0, 0)$.

Mimo to jest dle hořejší rovnice (𝔊) stopa tečné roviny na rovině řezu T 𝔊 (a její půdorys T' 𝔊) rovnoběžna s přímkou $O m \parallel G P'$. Ježto pak $z = 2 a \sqrt{2}$, jest dle (𝔊) vzdálenost přímky T' 𝔊 od počátku O rovna $2 a \cos \omega = A_1 m$.

Vedeme tedy kolmici $O \mu'$ na $A_1 m$, jejím průsekem μ' s kruhem (a) kolmici na $G P'$ $(\parallel O m)$ a protneme ji v bodě T' přímkou na ni kolmou



Obr. 11.

u vzdálenosti $A_1 m$ od O vedenou. Je pak T' půdorys bodu na opsaném kuželi (v rovině $z = 2 a \sqrt{2}$), T' 𝔊 půdorys tečny jeho řezu.

Poněvadž normála n leží v rovině 𝔊, a její půdorys $m P'$ $(\parallel O x)$ je přesně znám, nacházíme tak spolehlivější určení nárysu normály n''; neboť stopa normály n na rovině řezu má půdorys v průseku přímek T' 𝔊 a $m P'$, nárys je v nárysné stopě řezu.

V obrazci 11. znázorněny body P a P_1 na ploše kotálnic $a = c = 2 g$ (jich půdorysy leží na kruhu poloměru a, středu G), které mají normály n, n_1 ve společné rovině kolmé na Oy, a protínají se na rovině Δ $(y = x + a)$, jejíž stopa Δ^I prochází bodem A_1 a svírá s $O x$ úhel 45°. V této rovině leží čára dvojná (Δ_1), jejíž jeden bod D — průsek normál n, n_1 — v obrazci znázorněn.

Také kužely opsané z libovolného vrcholu na přímce Ox jsou čtvrté třídy. Rovina určená vrcholem S_0 $(x_0, 0, 0)$ a přímkou n má rovnici

$$(x - x_0) \sin 2\omega - y\left(\cos 2\omega - \frac{x_0}{a}\right) = \frac{z \cos \omega}{\sqrt{2}},$$

charakteristika — přímka na obalovém kuželi — leží pak na rovině

$$(x - x_0) \cos 2\omega + y \sin 2\omega = -\frac{z \sin \omega}{2\sqrt{2}};$$

její stopa na rovině $z = 2a\sqrt{2}$ má půdorys kolmý na Om, a vzdálenost její od bodu S_0 rovná se vzdálenosti přímky $\mu' T'$ od bodu O, která jest $-a \sin \omega = \delta$, tedy rovna vzdálenosti bodu O od přímky $A_1 m$.

Promítneme tedy přímku n na ploše normál do roviny $z = 2a\sqrt{2}$ ze středu S_0, načež půdorys stopy kužele opsaného obsahuje bod, ve kterém půdorys centrálního průmětu n^s protíná tečnu kruhu (δ) opsaného poloměrem δ ze středu S_0, kolmou na směr Om. Určitěji vyjádřeno, je tato tečna vedena na konci poloměru příslušného k směru $2\omega + \pi = \varphi + \pi$.

* * *

Vraťme se k obecnému případu plochy kotálnic $a = c$, abychom určili normály její procházející daným bodem $(x_0 y_0 z_0)$ v prostoru.

Problém se vyjadřuje rovnicemi

$$\frac{x - p}{x_0 - p} = \frac{y - q}{y_0 - q} = \frac{z}{z_0} = u, \quad p = a \cos \varphi, \ q = a \sin \varphi,$$

čili po dosazení hodnot,

$$-g \cos^2 \varphi - (a - g \cos \varphi) \cos \alpha \cos \varphi = u (x_0 - a \cos \varphi) - g$$
$$-g \sin \varphi \cos \varphi - (a - g \cos \varphi) \cos \alpha \sin \varphi = u (y_0 - a \sin \varphi),$$
$$(a - g \cos \varphi) \sin \alpha = z_0 u,$$

kterýmižto rovnicemi jsou neznámé φ, α, u určeny.

Tu obdržíme z prvních dvou

$$(\alpha) \qquad g \sin \varphi = u (x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi),$$

mimo to dávají první dvě rovnice

$$(a - g \cos \varphi) \cos \alpha = -u (x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - a);$$

sečtou-li se pak čtverce třetí rovnice soustavy a rovnice poslední, vyjde

$$(\beta) \qquad (a - g \cos \varphi)^2 = u^2 [(x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - a)^2 + z_0^2],$$

načež dělením rovnic (α) a (β) vychází rovnice pro neznámou φ:

$$(a - g \cos \varphi)^2 (x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi)^2 = g^2 \sin^2 \varphi [(x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - a)^2 + z_0^2],$$

která má šest řešení, ježto se některé členy ruší.

VII.

Geometrické provedení zdá se nejvýhodnějším takto:

V rovnicích (α) a (β) znamenáme $\frac{g}{u} = r$, považujíce r za průvodič; pak se obdrží hodnoty φ jako úhly příslušné k průsekům čar [1])

I. $r = x_0 - y_0 \, cotg \, \varphi$,

II. $r^2 (a - g \cos \varphi)^2 = g^2 [(x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - a)^2 + z_0^2]$.

Konstrukce první čáry, která je stupně 4., je bezprostřední.[2]) Druhá čára je sice stupně 8., ale její konstrukce neposkytuje obtíží, ježto veličina $a - g \cos \varphi$ jest poloměr kruhu Γ, a veličina $x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi - a$ je vzdálenost bodu $x_0 \, y_0$ od tečny kruhu základního v bodě m (φ). Také tečny obou čar strojí se bez obtíží na základě polárních subnormál.

* * *

Obraťme se nyní k ploše kotálnic 4. stupně obyčejné ($g = a$), abychom stanovili plochu její normál podél libovolné kotálnice $\alpha =$ konst.

Rovnice normály znějí

$$X = a \cos \varphi + Z \frac{x - a \cos \varphi}{z}, \quad Y = a \sin \varphi + Z \frac{y - a \sin \varphi}{z},$$

při čemž souřadnice bodu na ploše x, y, z mají hodnoty

$$x = a + a_1 (1 - \cos \varphi) \cos \varphi$$
$$y = a_1 (1 - \cos \varphi) \sin \varphi,$$
$$z = a_2 (1 - \cos \varphi),$$
$$a_1 = a (1 - \cos \alpha), \quad a_2 = a \sin \alpha,$$

takže bude

$$\frac{x - a \cos \varphi}{z} = \frac{a + a_1 \cos \varphi}{a_2}, \quad \frac{y - a \sin \varphi}{z} = \frac{a_1 - a - a_1 \cos \varphi}{a_2 (1 - \cos \varphi)} \sin \varphi$$

a rovnice normály bude lze psáti

$$X = \left(\frac{a_1}{a_2} Z + a\right) \cos \varphi + \frac{a}{a_2} Z,$$

$$Y = \frac{a \, a_2 + (a_1 - a) Z - (a \, a_2 + a_1 Z) \cos \varphi}{a_2 (1 - \cos \varphi)} \sin \varphi.$$

Eliminací φ vychází odtud rovnice plochy normál; poněvadž

$$\frac{\sin^2 \varphi}{(1 - \cos \varphi)^2} = \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi},$$

---

[1]) Průvodič průsečíku určuje hodnotu $u = \frac{g}{r}$, a pro bod na ploše jest pak $z = \frac{g z_0}{r}$.

[2]) Její rovnice zní $(x^2 + y^2) y^2 = (x_0 y - y_0 x)^2$.

dá se Y^2 vyjádřiti racionálně pomocí $cos\,\varphi$ a tedy též pomocí X:

$$Y^2 = \left[\frac{a\,a_2 + (a_1 - a)\,Z - (a\,a_2 + a_1\,Z)\cos\varphi}{a_2}\right]^2 \frac{1 + \cos\varphi}{1 - \cos\varphi},$$

$$\cos\varphi = \frac{a_2\,X - a\,Z}{a\,a_2 + a_1\,Z},$$

$$Y^2 = \left[\frac{a\,a_2 + (a_1 - a)\,Z + a\,Z - a_2\,X}{a_2}\right]^2 \frac{a_2\,(a + X) + (a_1 - a)\,Z}{a_2\,(a - X) + (a_1 + a)\,Z}$$

t. j. rovnice plochy normál podél kotálnice α zní

$$(56)\qquad \begin{aligned} &a_2^2\,[(a + a_1)\,Z - a_2\,X + a\,a_2]\,Y^2 \\ &= [(a_1 - a)\,Z + a_2\,X + a\,a_2]\,(a_1\,Z - a_2\,X + a\,a_2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Plocha ta má dvojnou přímku

$$(\Delta)\qquad Y = 0,\; Z = \frac{a_2}{a_1}\,(X - a) = (X - a)\,\cot g\,\frac{\alpha}{2};$$

otáčí-li se rovina kolem dvojné přímky Δ, protíná plochu v přímce ležící na rovině obsahující přímku

$$\begin{aligned} (a + a_1)\,Z - a_2\,X + a\,a_2 &= 0, \\ (a_1 - a)\,Z + a_2\,X + a\,a_2 &= 0, \end{aligned}$$

rovnoběžnou s $O\,y$. Ostatně z rovnice nárysu normály

$$X = \left(\frac{a_1}{a_2}Z + a\right)\cos\varphi + \frac{a}{a_2}\,Z$$

vychází bezprostředně, že *nárysy normál tvoří svazek* s vrcholem

$$x_0 = -\frac{a^2}{a_1},\quad z_0 = -\frac{a\,a_2}{a_1}$$

čili

$$(n_0)\qquad x_0 = -\frac{a}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}},\quad z_0 = -a\,\cot g\,\frac{\alpha}{2}.$$

Řídící útvary sborcené plochy normál plochy kotálnic $c = a = g$ podél kotálnice α jsou tedy základní kruh plochy a přímky (Δ), (n_0), z nichž první je dvojná čára plochy.

Různým kotálnicím příslušné přímky (n_0) tvoří válec parabolický

$$z_0^2 + 2\,a\,x_0 + a^2 = 0.$$

V obecném případě libovolné plochy kotálnic má nárys normály rovnici

$$X - c\cos\psi = Z\left[-\cot g\,\alpha\cos\psi + \frac{g\,zin\,\varphi\,\sin\psi}{(a - g\cos\varphi)\sin\alpha}\right],$$

a může tvořiti svazek paprsků jen v případě, kdy

$$\frac{g \sin \varphi \sin \psi}{a - g \cos \varphi}$$

je lineární funkce $\cos \psi$. To nastane při $g = a$, $\varphi = \psi$ a též při $\varphi = 2\psi$, kdy tento výraz má hodnotu $\cos \psi$, tak že zde nárysy normál procházejí bodem

$$X = 0, \quad Z = -c \cot \frac{\alpha}{2},$$

a jeden z řídících útvarů plochy normál jest opět přímka směru $O\,y$.

Řezy $Z =$ konst. plochy normál (56) jsou cirkulární čáry 3. stupně, mající dvojné body na přímce $Z = (X - a) \cot g \frac{\alpha}{2}$ v rovině $Y = 0$, t. j. dvojný bod jest

$$X = a + Z\, tg \frac{\alpha}{2}, \quad Y = 0.$$

Abychom určili tečny dvojného bodu, pišme rovnici (56) ve tvaru

$$A\,Y^2 - B\,H^2 = 0, \quad A = a_2^2\,[(a + a_1)\,Z - a_2 X + a\,a_2]$$
$$B = (a_1 - a)\,Z + a_2 X + a\,a_2, \quad H = a_1 Z - a_2 X + a\,a_2.$$

Rovnice tečen v bodě dvojném pak se ve tvaru differenciálním píše

$$A\,d\,Y^2 - B\,d\,H^2 = 0,$$

kde za A, B se kladou hodnoty těchto výrazů v bodě dvojném:

$$A = a_1 a_2^2 Z, \quad B = (2\,a_1 - a)\,Z + 2\,a\,a_2,$$

a mimo to jest $d\,H = -a_2\,d\,X$; rovnice tečen tedy zní

$$\left(\frac{d\,Y}{d\,X}\right)^2 = \frac{2\,a_1 - a}{a_1} + \frac{2\,a\,a_2}{a_1 Z}.$$

Tečny jsou symetrické vůči nárysně, a svírají úhel závislý na výšce řezu Z; stojí na sobě kolmo, je-li poslední výraz roven $tg\,45^0 = 1$, t. j. pro

$$Z = \frac{2\,a\,a_2}{a - a_1} = 2\,a\,tg\,\alpha,$$

takže

„rovina $Z = 2\,a\,tg\,\alpha$ protíná sborcenou plochu normál podél kotálnice α (56) ve strofoidě“;

její asymptota je rovnoběžna s $O\,y$.

Pro libovolné Z položme

$$\xi = X - \frac{a_1}{a_2} Z - a, \quad \eta = y,$$

t. j. přeložme počátek souřadnic do průmětu dvojného bodu řezu; rovnice řezu $Z =$ konst. se pak objeví ve tvaru

$$a_2\,\xi\,(\xi^2 + \eta^2) + [(2\,a_1 - a)\,Z + 2\,a\,a_2]\,\xi^2 - a\,Z\,\eta^2 = 0.$$

V polárních souřadnicích r, ω

$$\xi = r \cos \omega, \ \eta = r \sin \omega,$$

zní rovnice křivky

(57) $$r = \frac{a Z}{a_2} \sec \omega - 2 \left(\frac{a_1 Z}{a_2} + a \right) \cos \omega,$$

takže se jeví řez Z = konst. jako cissoidála přímky a kruhu, z pólu na tomto ležícího.

Zejména seče rovina

$$Z = \frac{2 a a_2}{a - 2 a_1}$$

plochu normál (56) v cissoidě Diokletově.

Souřadnice úvratníku jsou

$$y = 0, \ x = a + z \, tg \frac{\alpha}{2}, \ z = \frac{2 a \sin \alpha}{2 \cos \alpha - 1},$$

tedy

$$x = a + \frac{4 a \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \alpha - 1},$$

a po redukci

$$x = \frac{a}{2 \cos \alpha - 1}, \ z = \frac{2 a \sin \alpha}{2 \cos \alpha - 1},$$

z čehož eliminací plyne

$$z^2 + (x + a)^2 = 4 x^2, \ y = 0$$

jakožto rovnice geometrického místa úvratníků cissoid Diokletových z = konst. na plochách normál podél různých kotálnic. Čára ta jest hyperbola

$$3 \left(x - \frac{a}{3} \right)^2 - z^2 = \frac{4}{3} a^2.$$

Poněvadž souřadnice dvojného bodu řezu z = konst. jsou

$$y = 0, \ x = a + z \, tg \frac{\alpha}{2},$$

vychází pro cissoidály (57) jakožto geometrické místo středů řídících kruhů přímka v rovině $O x z$

$$x = 2 a + 2 z \, tg \frac{\alpha}{2},$$

a řídící přímky těchto cissoidál mají v rovině $O x z$ stopy na přímce

$$x = a + \frac{a + a_1}{a_2} z.$$

Vraťme se k rovnicím (40); snadno shledáme, že čára α = konst., v = konst. jimi stanovená leží na kouli

$$(S) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2\,v\,\frac{a - c\cos\alpha}{\sin\alpha}\,z + c^2 + v^2\,(g^2 - a^2)\,.$$

Zvláště máme v případě $g = a = c$, a

$$v = \frac{1}{2\cos\alpha - 1}\,,$$

t. j. kdy čára (40) značí kotálnici na ploše centrální, příslušnou ke kotálnici α, rovnici koule

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\,a\,\frac{1 - \cos\alpha}{2\cos\alpha - 1}\,z + a^2;$$

tato prochází patrně základním kruhem. Pronik této koule s plochou normál (56) sestává z tohoto kruhu a z čáry stupně 4., naší kotálnice na ploše centrální.

14.

Vraťme se k ploše kotálnic stupně čtvrtého $a = c$, jejíž rovnice zní

$$(49) \qquad (x^2 + y^2 + z^2 - g^2)^2 = 4\,a^2\,[(x - g)^2 + y^2],$$

a ve vyjádření parametrickém

$$x - g = r\cos\varphi\,,\; y = r\sin\varphi\,,\; z = (a - g\cos\varphi)\sin\alpha$$

při označení

$$r = (1 - \cos\alpha)\,(a - g\cos\varphi).$$

Volme bod G $(g, 0, 0)$ za pól soustavy souřadnic polárních v prostoru ϱ, Θ, ω, kladouce

$$x - g = \varrho\sin\Theta\cos\omega$$
$$y = \varrho\sin\Theta\sin\omega$$
$$z = \varrho\cos\Theta;$$

je pak (49^b)

$$\varrho^2 = r^2 + z^2 = 2\,r\,(a - g\cos\varphi)$$

t. j.

$$\varrho^2 = 2\,(1 - \cos\alpha)\,(a - g\cos\varphi)^2,$$

tedy

$$\varrho = 2\sin\frac{\alpha}{2}\,(a - g\cos\varphi)\,,$$

takže

$$\cos\Theta = \frac{z}{\varrho} = \cos\frac{\alpha}{2}\,,\; r = \varrho\sin\Theta\,,\; \omega = \varphi\,,$$

tedy plocha kotálnic 4. stupně má polární rovnici

$$(58) \qquad \varrho = 2\,(a - g\cos\omega)\sin\Theta\,,$$

při čemž $\Theta = \frac{\alpha}{2}$, $\omega = \varphi$.

Transformací reciprokých průvodičů (inversí) s pólem G, vyjádřenou rovnicí $\varrho \varrho_0 = c^2$, přechází plocha v následující:

(59) $$2 \varrho_0 \sin \Theta (a - g \cos \omega) = c^2,$$

aneb vrátíme-li se k souřadnicím pravoúhlým,

$$2 a \sqrt{(x-g)^2 + y^2} - 2 g (x-g) = c^2;$$

plocha tato je válcová kolmá na základní rovinu $O x y$, a její čára řídící má rovnici

(59*) $$(a^2 - g^2)(x-g)^2 + a^2 y^2 = \frac{1}{4} c^4 + c^2 g (x-g).$$

Naše plocha kotálnic 4. stupně tedy vzniká prostou inversí z plochy válcové 2. stupně, která jest parabolickou v případě $g = \pm a$, elliptickou pro $|g| < a$, hyperbolickou pro $|g| > a$. Poněvadž inversí se čáry křivoznačné převádějí opět v křivoznačky, vycházejí tak zvláštní případy hořejších výsledků; kruhy na ploše kotálnic odpovídají povrchovým přímkám válce, a přímé jeho řezy jsou čáry inversní křivoznaček plochy kotálnic, takže

„křivoznačky plochy kotálnic 4. stupně ($a = c$) jsou na ploše vyťaty koulemi, které se v bodě G dotýkají základní roviny $O x y$."

Koule $(x-g)^2 + y^2 + z^2 = 2 h z$ vytíná na ploše (49) křivoznačku; spojením obou rovnic vychází

(G) $$[g (x-g) + h z]^2 = a^2 [(x-g)^2 + y^2]$$

jako rovnice kužele s vrcholem G, na němž uvažovaná křivoznačka se nachází. Přetvořením pravé strany na základě rovnice koule vychází rovnice elliptického válce

$$[g (x-g) + h z]^2 = a^2 z (2 h - z),$$

zároveň nárysu křivky. Tato ellipsa dotýká se osy $O x$ v bodě G, její průměr tímto bodem procházející má rovnici

$$\frac{x-g}{-h} = \frac{z}{g},$$

a střed má výšku $z = h$, t. j. leží se středem koule na rovnoběžce s $O x$.

Průměr sdružený se směrem $O z$

$$g h (x-g) + (a^2 + h^2) z = a^2 h$$

obsahuje bod $z = 0$, $x = g + \dfrac{a^2}{g}$.

Druhý průsek ellipsy s přímkou $G z$ má souřadnici

$$z = \frac{2 a^2 h}{a^2 + h^2} = a \sin 2 \gamma, \quad h = a \operatorname{tg} \gamma.$$

Ellipsa dotýká se obrysové paraboly plochy kotálnic (10^*) čl. 4.

$$z^2 + 2g\left(x - g - \frac{a^2}{2g}\right) = 0$$

v bodech $z = h \pm \sqrt{h^2 - a^2}$, realných pro $|h| \geqq a$.

Kužel (G) lze považovati za obalovou plochu rovin

$$a\xi \cos\varphi + a y \sin\varphi = g\xi + h z;$$

roviny tečné k úběžnému kruhu odpovídají podmínce

$$\cos\varphi = \frac{a^2 + g^2 + h^2}{2ag}, \quad \sin\varphi = \frac{i\sqrt{(a^2 + g^2 + h^2)^2 - 4a^2g^2}}{2ag},$$

a protínají se v přímce fokální

$$y = 0, \quad (a^2 + h^2 - g^2)\xi = 2ghz; \quad \xi = x - g.$$

Druhá fokála kužele přísluší parametrům $\cos\varphi = \infty$ a splývá s přímkou Gz.

Pro půdorys křivoznačné čáry nalezneme rovnici

$$[(a^2 + g^2 + h^2)\xi^2 + (a^2 + h^2)y^2 + 2gh^2\xi]^2 = 4a^2(\xi^2 + y^2)(g\xi + h^2)^2;$$

přehlednější je však rovnice smíšená ($r^2 = \xi^2 + y^2$)

$$(g\xi + h^2 - ar)^2 + h^2r^2 = h^4.$$

Dvojný bod G křivoznačky je přirozeně dvojným bodem průmětu, a jeho tečny jsou $\frac{y}{\xi} = \pm\frac{\sqrt{g^2 - a^2}}{a}$; druhé dva body dvojné půdorysu mají souřadnice

$$\xi = -\frac{h^2}{g}, \quad y = \pm\frac{h^2}{g}\sqrt{\frac{g^2 - a^2 - h^2}{a^2 + h^2}}.$$

Čára se dotýká kruhu $r^2 = h^2$ v jeho průsecích s kuželosečkou

$$ar = g\xi + h^2.$$

Body, v nichž tečny jsou rovnoběžny s Oy, se určí z podmínky

$$r\frac{dr}{d\xi} = \infty,$$

jež zde dává

$$\left(\frac{h^2}{a^2} + 1\right)r^2 = h^2,$$

čili $r = a \sin\gamma$, načež $\xi = \frac{a^2}{g}\, tg\,\gamma\,(\sec\gamma - tg\,\gamma)$.

Kotálnicím $\alpha =$ konst. příslušejí čáry $\Theta =$ konst., pro něž rovnice (59) dává ve spojení s rovnicí $z = \varrho_0 \cos\Theta$

$$(S_0) \qquad a z\, tg\,\Theta - g(x - g) = \frac{1}{2}c^2,$$

t. j. *inversí kotálnicím odpovídají na válci řezy s rovinami obsahujícími určitou přímku roviny základní*, rovnoběžnou s $O\,y$. Zvolíme-li $c^2 = 2\,g^2$, bude tato přímka splývati s osou $O\,y$.

Kotálnice α leží na kouli (S) $(a = c,\ v = 1)$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\,a\,z\,tg\,\frac{\alpha}{2} + g^2,$$

kterou skutečně naše inverse převádí v rovinu (S_0); tato je rovnoběžna s tečnou rovinou koule v pólu G, a tak podává inverse naše zároveň stereografický průmět kotálnice z pólu G.

Nevážeme-li se na to, aby průmětna tohoto promítání měla ustálenou vzdálenost od středu promítání, obdržíme tak stereografické průměty všech kotálnic plochy, rozloženy po válci 2. stupně jakožto jeho řezy s určitým svazkem rovin.

Uvažujme nyní případ $g < a$, kdy inversní válec (59*) jest elliptický. Rovnici jeho lze psáti

$$(a^2 - g^2)\left(x - g - \frac{1}{2}\,g\,\frac{c^2}{a^2 - g^2}\right)^2 + a^2 y^2 = \frac{c^4}{4}\,\frac{a^2}{a^2 - g^2}\,.$$

Řez tohoto válce s rovinou rovnoběžnou s osou Ox jest ellipsa, jejíž polouosa ve směru Ox má hodnotu

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{2}\,\frac{a\,c^2}{a^2 - g^2}\,,$$

a druhá $\mathfrak{b}$ má hodnotu

$$\mathfrak{b} = \frac{c^2}{2\sqrt{a^2 - g^2}}\,sec\,\gamma\,,$$

je-li γ úhel sevřený touto rovinou a rovinou základní Oxy.

Řez bude kruhový při $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, t. j. je-li úhel γ určen z podmínky

$$a^2 \cos^2\gamma = a^2 - g^2\,,\ a\,sin\,\gamma = g\,.$$

Zpětnou transformací obdržíme na ploše kotálnic dvě řady kruhů, a chceme tyto blíže seznati.

Rovina kruhového řezu na válci buď[1])

$$y\,sin\,\gamma + z\,cos\,\gamma = p,$$

při čemž p je zcela libovolná veličina; střed kruhu, v němž tato rovina seče válec, má souřadnice

$$x - g = \frac{1}{2}\,g\,\frac{c^2}{a^2 - g^2}\,,\quad y = 0,\ z = p\,sec\,\gamma\,,$$

a poloměr kruhu jest

$$\frac{1}{2}\,\frac{a\,c^2}{a^2 - g^2}\,,$$

[1]) V případě $a < g$ jsou tyto kruhy pomyslné; mimo to mají naše plochy ve všech případech $(a \gtreqless g)$ ještě jednu řadu pomyslných kruhů.

takže náš kruh leží na koulích

$$\left(x-g-\frac{1}{2}g\,\frac{c^2}{a^2-g^2}\right)^2+y^2+(z-p\sec\gamma)^2-\frac{c^4}{4}\,\frac{a^2}{(a^2-g^2)^2}$$
$$+\,2\,\lambda\,(p-y\sin\gamma-z\cos\gamma)=0,$$

při libovolném λ.

Tuto konstantu λ určíme tak, aby koule obsahovala bod G; to podá

$$2\,\lambda\,p=\frac{1}{4}\,\frac{c^4}{a^2-g^2}-p^2\sec^2\gamma\,,$$

a rovnici koule lze uspořádati takto:

$$p^2\,(y\sin\gamma-z\cos\gamma)\,\sec^2\gamma+p\left[(x-g)^2+y^2+z^2-g\,\frac{c^2}{a^2-g^2}\,(x-g)\right]$$
$$-\frac{1}{4}\,\frac{c^4}{a^2-g^2}\,(y\sin\gamma+z\cos\gamma)=0\,;$$

inversí vznikne odtud rovina, která protíná plochu kotálnic ve dvou kruzích. Její rovnice

$$p^2\,(y\sin\gamma-z\cos\gamma)\,\sec^2\gamma-\frac{c^2\,p}{a^2-g^2}\,(g\,x-a^2)$$
$$-\frac{1}{4}\,\frac{c^4}{a^2-g^2}\,(y\sin\gamma+z\cos\gamma)=0$$

bude zbavena vlivu pomocné veličiny c, zavede-li se paramétr

$$\mu=\frac{p}{c^2}\,.$$

Roviny sekoucí plochu kotálnic 4. stupně ve dvou kruzích mají tedy rovnice

$$\mu^2\,(y\sin\gamma-z\cos\gamma)-\mu\,\frac{\cos^2\gamma}{a^2-g^2}\,(g\,x-a^2)$$
$$-\frac{1}{4}\,\frac{\cos^2\gamma}{a^2-g^2}\,(y\sin\gamma+z\cos\gamma)=0$$

čili lépe

$$(60)\quad a^2\,\mu^2\,(y\sin\gamma-z\cos\gamma)-g\,\mu\left(x-\frac{a^2}{g}\right)-\frac{1}{4}\,(y\sin\gamma+z\cos\gamma)=0\,,$$

kde úhel γ podroben hořejším rovnicím.

Obalová plocha těchto rovin je rotační kužel

$$(60^*)\qquad\left(x-\frac{a^2}{g}\right)^2+y^2=\frac{a^2-g^2}{g^2}\,z^2,$$

jehož vrchol $H\left(\frac{a^2}{g},\,0,\,0\right)$, osa rovnoběžna s Oz, a jehož strany svírají s osou úhel $\frac{\pi}{2}-\gamma$.

„Tečné roviny kužele (60*) protínají plochu kotálnic 4. stupně ve dvou kruzích".

Hořejší rovina

$$y \sin \gamma + z \cos \gamma = p\,, \quad p = c^2 \mu\,,$$

přechází inversí v kouli

(61) $$y \sin \gamma + z \cos \gamma = \mu S\,, \quad S = (x - g)^2 + y^2 + z^2,$$

kteréžto koule vytíná na rovině (60) jednu z povrchových kružnic uvažovaných. Dosadíme-li hodnotu (61) do rovnice (60), a krátíme-li μ, vyjde rovnice

(61ᵃ) $$S + 4g\left(x - \frac{a^2}{g}\right) = 4a^2 \mu\,(y \sin \gamma - z \cos \gamma)\,.$$

Rovnice (61) a (61ᵃ) odpovídají dvěma koulím, které se protínají v kruhu na ploše kotálnic.

Zároveň vidíme, že tato *plocha je vytvořena jako souhrn kruhů, v nichž se protínají dva promětné svazky koulí* (61) a (61ᵃ).

Výsledek ten se ostatně verifikuje přímo eliminací μ z obou rovnic.

Rovnici druhé koule (61ᵃ) lze psáti přehledněji

(61ᵃ) $$(x + g)^2 + y^2 + z^2 = 4a^2 + 4a^2 \mu\,(y \sin \gamma - z \cos \gamma).$$

Koule (61) znamenejme $\mathfrak{K}$, koule (61ᵃ) pak $\mathfrak{K}_1$, v souhrnu ($\mathfrak{K}$) resp. ($\mathfrak{K}_1$).

Koule $\mathfrak{K}$ tvoří svazek o společném kruhu k v rovině

(k) $$y \sin \gamma + z \cos \gamma = 0,$$

jehož střed jest G a poloměr nulla. Koule $\mathfrak{K}_1$ tvoří svazek o společném kruhu k_1 v rovině

(k_1) $$y \sin \gamma - z \cos \gamma = 0,$$

jehož střed je $G_1\,(-g, 0, 0)$ a poloměr $2a$.

Půdorysy středů $K\,K_1$ těchto koulí leží na rovnoběžkách Gy, resp. $G_1 y$ s osou y, a pořadnice y, y_1 středů přiřaděných koulí hoví rovnici

$$y\,y_1 = g^2.$$

Spojíme-li tedy půdorysy středů promětně si příslušných koulí $\mathfrak{K}$ a $\mathfrak{K}_1$, obalují spojivé přímky kruh

$$x^2 + y^2 = g^2.$$

V prostoru tvoří spojky středů příslušných si koulí rotační hyperboloid s osou $O\,z$, jehož přímky svírají s osou úhel γ. Tato přímka $K\,K_1$ protíná kolmo rovinu kruhu ($\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$) v jeho středu, a ježto roviny ty obsahují stálý bod H — vrchol kužele (60*) — jeví se střed kruhu na ploše kotálnic jako pata kolmice spuštěné z pólu H na povrchovou přímku hyperboloidu.

Parametrické vyjádření přímky na tomto hyperboloidu zní

$$x + i\,y = (g - i\,v \sin \gamma)\,e^{i\,\omega}, \quad z = v \cos \gamma,$$

kde ω jest úhel příslušný k oblouku $G\,\mu$, při čemž μ je dotykový bod přímky $K_1'\,K'$ s kruhem (g), t. j. bod $v = 0$ na přímce. V realném tvaru znějí tyto rovnice

$$
(62)\qquad
\begin{aligned}
x &= g \cos\omega + v \sin\gamma \sin\omega,\\
y &= g \sin\omega - v \sin\gamma \cos\omega,\\
z &= v \cos\gamma;
\end{aligned}
$$

v je délka povrchové přímky mezi bodem hyperboloidu (x, y, z) a kruhem (g) v rovině $x\,y$.

Rovina vedená bodem $H\left(\frac{a^2}{g}, 0, 0\right)$ kolmo na tuto přímku má rovnici

$$
(63)\qquad X \sin\gamma \sin\omega - Y \sin\gamma \cos\omega + Z \cos\gamma = \frac{a^2}{g} \sin\gamma \sin\omega,
$$

a průsek její s přímkou povrchovou odpovídá parametru [1])

$$
v = \frac{a^2}{g} \sin\gamma \sin\omega = a \sin\omega,
$$

což je tedy paramétr středu povrchové kružnice, ležící v rovině kolmé na povrchovou přímku ω na hyperboloidu. Souřadnice středu této kružnice znějí pak

$$
(64)\qquad
\begin{aligned}
x - g &= g\,(1 - \cos\omega) \cos\omega\\
y &= g\,(1 - \cos\omega) \sin\omega\\
z &= \sqrt{a^2 - g^2}\, \sin\omega = a \cos\gamma \sin\omega
\end{aligned}
$$

a vychází tak zejména, že

„středy kružnic na ploše kotálnic 4. stupně naplňují dvě čáry racionální 4. stupně ležící na rotačním hyperboloidu jednoplochém a na válci směru $O\,z$, jehož řídící čarou je kardioida, úpatnice kruhu (g) z pólu G.

Oblouk na základně měřený od bodu G jest

$$
s = 4\,g\left(1 - \cos\frac{\omega}{2}\right) = 4\,g + \sigma;
$$

po rozbalení válce v rovinu přejde čára rovněž v křivku 4. stupně, jejíž rovnice zní

$$
(a^2 - g^2)\,\sigma^2\,(16\,g^2 - \sigma^2) = 64\,g^4 z^2
$$

čili

$$
\frac{\sigma^2}{4\,g^2}\left(4 - \frac{\sigma^2}{4\,g^2}\right) = \frac{4\,z^2}{a^2 - g^2},
$$

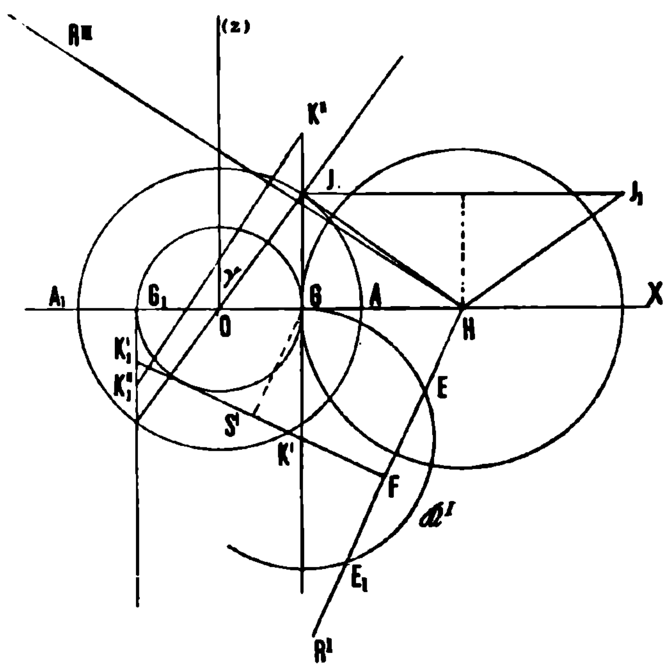
kde σ jest oblouk měřený na kardioidě od vrcholu $\omega = \pi$.

[1]) Rovina tato jest identická s (60), a parametry jsou vázány rovnicí

$$
a\,\mu = \frac{1}{2} \cot g \frac{\omega}{2}.
$$

V obr. 12. dány kruhy (*a*), (*g*) o středu O a poloměrech OA, OG; kolmice GJ na OAX stanoví na kruhu (*a*) bod J, načež OJ svírá s osou Oz úhel γ, a kolmice JH na OJ stanoví na Ox vrchol H kužele rotačního s nárysem (JHJ_1) (60*), jehož se dotýkají roviny R sekoucí plochu kotálnic v kruzích.

Při zvolené rovině takové R vedeme na její půdorysnou stopu R^I kolmou tečnu kruhu (*g*), která pak na přímkách Gy a $G_1 y$ určuje půdorysy K', K'_1 středů koulí $\mathfrak{K}$ a $\mathfrak{K}_1$, a je sama půdorysem povrchové přímky na rotačním hyperboloidu; pro určení nárysu leží prostředky na snadě. Zejména víme, že nárysná stopa koule $\mathfrak{K}$ protíná R^{II} v bodě nárysné stopy plochy



Obr. 12.

kotálnic, která jest kruh středu A_1 a poloměru $A_1 G$. Pro kruh $\mathfrak{K}^{II}$ známe tedy průsek přímky R^{II} s tímto nárysným kruhem plochy, a víme, že se tento kruh $\mathfrak{K}^{II}$ dotýká osy Ox v bodě G; osa symetrice těchto dvou bodů tedy určuje bod K'' na Gz.

Průseky nárysného kruhu s R^{II} jsou ovšem dva, druhý odpovídá kruhům soustavy charakterisované úhlem $\varkappa - \gamma$, a příslušným k druhé řadě přímek na hyperboloidu.

Ostatně je snadno operovati se stopami koulí $\mathfrak{K}$ a $\mathfrak{K}_1$, pro něž známe středy a průseky s osou Ox ($x = g$, resp. $- g \pm 2a$).

Kolmice $GS' \perp K'K'_1$ určuje půdorys středu S kruhového řezu na rovině R. Dále jsou průsečíky E, E_1 stop $\mathfrak{K}^I$ a R^I na epicykloidě $\alpha = \varkappa$, která tvoří stopu plochy kotálnic, a průsek F přímky R^I s tečnou $K'K'_1$ je středem délky EE_1; je bodem na úpatnici kruhu (*g*) z pólu H.

Problém průsečíků epicykloidy $\alpha = \pi$ s přímkami svazku (H) rozpadá se tedy v problémy kvadratické.

Podobně rozpadá se ve dva problémy kvadratické otázka po průsecích plochy kotálnic s přímkami, jež se dotýkají kuželové plochy (60^{a}) $J\,H\,J_1$.

Kruh na ploše je řez roviny (60) a koule (61), t. j. vzhledem k hodnotě

$$a\,\mu = \frac{1}{2}\,cotg\,\frac{\omega}{2}\,,$$

roviny (63) a koule

$$(65)\qquad (x-g)^2 + y^2 + z^2 = 2\,a\,tg\,\frac{\omega}{2}\,(y\,sin\,\gamma + z\,cos\,\gamma)\,.$$

Vzdálenost středu koule od roviny obnáší

$$\delta = \frac{a^2-g^2}{a}\,sin\,\omega + a\,tg\,\frac{\omega}{2}\,sin^2\gamma\,cos\,\omega - a\,tg\,\frac{\omega}{2}\,cos^2\gamma$$

t. j.

$$(65^{a})\qquad \delta = a\,sin\,\omega - a\,tg\,\frac{\omega}{2}\,,$$

poloměr koule má hodnotu

$$(65^{b})\qquad R = a\,tg\,\frac{\omega}{2}\,,$$

takže pak pro hodnotu poloměru kruhu ϱ vypočteme

$$\varrho^2 = R^2 - \delta^2 = 4\,a^2\,sin^4\,\frac{\omega}{2}\,,$$

a tedy jest poloměr kruhu

$$(66)\qquad \varrho = 2\,a\,sin^2\,\frac{\omega}{2}\,,$$

což se rovná délce průvodiče kardioidy, úpatnice kruhu (a) z pólu A, kolmého na tečnu $K'\,K'_1$.

Největší kruh přísluší poloze $\omega = \pi$, kdy rovina prochází osou $O\,x$ majíc rovnici

$$y\,sin\,\gamma + z\,cos\,\gamma = 0\,;$$

tu protíná rovina plochu kotálnic v jednom kruhu poloměru $2\,a$ a v jednom kruhu poloměru nulla.

Rovnice (63) se nezmění, obrátíme-li znamení $cos\,\gamma$ a zvětšíme-li současně úhel ω o π; tak obdržíme druhý kruh společný rovině a ploše kotálnic.[1]) Tedy *poloměry kruhů, v nichž naše roviny sekou plochu kotálnic,*

[1]) Při tom se tedy mění znamení odmocniny $\sqrt{a^2-g^2} = a\,cos\,\gamma$ v rovnici (64).

mají stálý součet $2\,a \left(= 2\,a\,sin^2 \frac{\omega}{2} + 2\,a\,cos^2 \frac{\omega}{2}\right)$, mimo to leží středy obou kruhů na přímce rovnoběžné s $O\,x\,y$.

Odtud plyne, že chordála obou kruhů na rovině R je kolmá na půdorysnou stopu R^I, mimo to obsahuje bod H.

Poslední věc vychází z následující úvahy: Druhý kruh na rovině R hoví rovnici koule $(\omega + \pi, \pi - \gamma)$ (65)

$$(x - g)^2 + y^2 + z^2 = -2\,a\,cotg \frac{\omega}{2}\,(y\,sin\,\gamma - z\,cos\,\gamma)\,;$$

radikální rovina obou koulí má tedy rovnici, jež po krátké transformaci zní

$$y\,sin\,\gamma = z\,cos\,\gamma\,.\,cos\,\omega\,;$$

řez této roviny s rovinou R (63) je chordála našich kruhů; hoví patrně rovnici vzniklé eliminací y

$$x\,sin\,\gamma + z\,cos\,\gamma\,sin\,\omega = a\,;$$

obě rovnice jsou splněny pro $y = z = 0$, $x = \frac{a^2}{g}$, t. j. chordála obsahuje bod H. Z obou posledních rovnic vychází

$$x\,cos\,\omega + y\,sin\,\omega = \frac{a}{sin\,\gamma}\,,$$

což jest rovnice roviny kolmé na R^I a obsahující bod H. Avšak přímka roviny R kolmá na stopu R^I jest právě strana rotačního kužele, podél které se ho rovina ta dotýká:

„Společné body obou kruhů plochy kotálnic na rovině R leží na straně rotačního kužele."

V těchto bodech se rovina R plochy kotálnic dotýká, a dotýká se jí v nich také plocha kuželová; t. j. rotační kužel jest kužel z vrcholu H o plochu kotálnic opsaný, jíž se dotýká podél určité čáry 4. stupně.

Vyšetřme jeho pronik s plochou. Rovnice (60*) dává

$$x^2 + y^2 + z^2 - g^2 = \frac{a^2}{g^2}\left(z^2 + 2\,g\,x - a^2 - g^2 + g^2\,\frac{a^2 - g^2}{a^2}\right),$$

$$(x - g)^2 + y^2 = \frac{a^2 - g^2}{g^2}\,(z^2 + 2\,g\,x - a^2 - g^2)\,,$$

a tedy rovnice plochy kotálnic

$$(x^2 + y^2 + z^2 - g^2)^2 - 4a^2\,[(x - g)^2 + y^2] = 0$$

podá pro průseč s uvažovaným kuželem

$$\left(z^2 + 2\,g\,x - a^2 - g^2 - g^2\,\frac{a^2 - g^2}{a^2}\right)^2 = 0\,,$$

t. j. kužel se dotýká plochy podél čáry ležící na paraboloidu

$$z^2 + 2gx = a^2 + 2g^2 - \frac{g^4}{a^2}. \tag{67}$$

Tato čára je souhrn bodů, v nichž se kruhové řezy na společných rovinách protínají.

Z rovnic (60*) a (67) obdržíme též

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2 - g^2, \tag{68}$$

takže čára naše je průseč kužele (60*) s koulí (68); její půdorys je kruh se středem G

$$(x - g)^2 + y^2 = \left(\frac{a^2 - g^2}{a}\right)^2.$$

* * *

Koule (68) přechází v samu sebe při inversi z pólu H vůči kouli poloměru $HG = \frac{a^2}{g} - g$; tutéž vlastnost musí míti její průsečnice s rotačním kuželem, a tedy jest čára dotyková kužele (H) s plochou *anallagmatická* Také plocha kotálnic jest anallagmatickou vůči pólu H, a téže kouli základní (H, HG), a ovšem to platí též pro $g > a$. Abychom to verifikovali, přepišme rovnici plochy substitucí $x = \xi + \frac{a^2}{g}$, a znamenejme

$$\frac{a^2 - g^2}{g} = c.$$

Rovnice zní

$$\left[\xi^2 + y^2 + z^2 + 2\frac{a^2}{g}\xi + \frac{a^2 + g^2}{g}c\right]^2 = 4a^2[(\xi + c)^2 + y^2];$$

zavedeme-li polární souřadnice r, Θ, ω substitucí

$$\xi = r \sin\Theta \cos\omega, \quad y = r \sin\Theta \sin\omega, \quad z = r\cos\Theta, \tag{69*}$$

obdržíme rovnici plochy ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{r^4}{c^4} + \frac{4a^2}{gc}\frac{r^3}{c^3}\sin\Theta\cos\omega + \left[\frac{4a^2}{g^2c^2}(a^2\cos^2\omega - g^2)\sin^2\Theta + 2\frac{a^2+g^2}{gc}\right]\frac{r^2}{c^2}\\ + \frac{4a^2}{gc}\frac{r}{c}\sin\Theta\cos\omega + 1 = 0.\end{aligned} \tag{69}$$

Poněvadž ta je reciproká, je tím anallagmatická vlastnost plochy pro pól H a kouli poloměru HG dokázána.

Substitucí

$$t = \frac{r}{c} + \frac{c}{r}$$

obdržíme kvadratickou rovnici, jejíž řešení jest

$$t = -\frac{2a^2}{gc} \sin\Theta \cos\omega \pm \frac{2}{c}\sqrt{g^2 - a^2\cos^2\Theta},$$

načež jest

$$r = c\left(\frac{t}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{t^2-4}\right).$$

Kořeny mohou splynouti jen dva a dva, a to nastane pro

$$a^2\cos^2\Theta = g^2,$$

což jest právě rovnice opsaného kužele (60*).

Pro polární rovnici dotykové čáry obdržíme po dosazení hodnoty $a\cos\Theta = g$

$$r^2 + 2\frac{a^2}{g} r \sin\Theta\cos\omega + c^2 = 0,$$

a to při proměnném Θ jest rovnice koule (68).

Kombinací rovnic (60*) a (68) vychází pro dotykovou čáru rovnice

$$(\Delta') \qquad (x-g)^2 + y^2 = \left(\frac{a^2-g^2}{a}\right)^2,$$

t. j. čára leží na kruhovém válci, jehož osa jest Gz, a jehož základna má poloměr $a - \frac{g^2}{a} = GH\sin\gamma$. Půdorys dotykové čáry Δ s opsaným kuželem (*H*) je tedy kruh, který má střed *G* a dotýká se přímky *H J* (sklopené do půdorysu.) Tento kruh vychází inversí z kruhu základního (*a*); i budou se ho dotýkati stopy koulí Σ, které vznikají inversí z poloh roviny hybného kruhu, a sice v bodech m_0 vznikajících inversí z příslušných bodů *m*.

Poněvadž stopa Σ_1^I je kruh procházející bodem *H*, leží jeho střed s_0 na přímce $n s_0 \perp m_0 H$, která půlí vzdálenost $H m_0$ (obr. 13); bod *n* — střed délky $H m_0$ — opisuje kruh (*n*) homothetický s kruhy (*a*), Δ', se středem

$$\frac{G+H}{2},$$

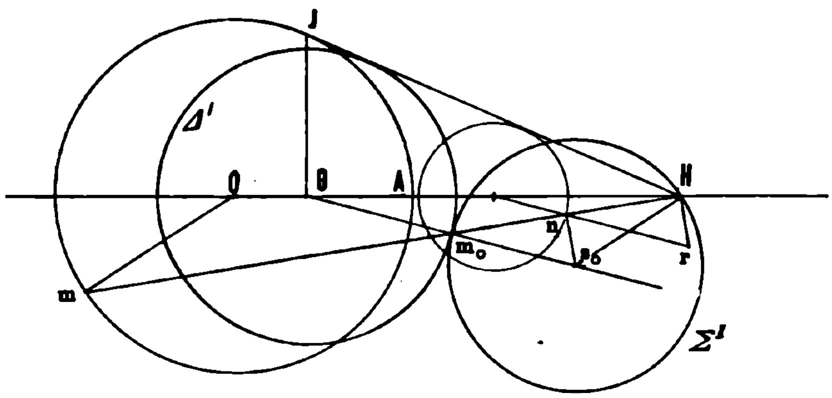
polovičních rozměrů kruhu Δ'.

Přímka $n\, s_0$ obaluje protiúpatnici kruhu (*n*), t. j. je tečnou kuželosečky v bodě s_0, kterou tento bod opisuje, a která má ohniska *G*, *H*; kruh (*n*) jest její vrcholovou kružnicí.

Abychom to dokázali, zvolme *H* za pól, *H G* za osu polárních souřadnic v rovině základní Oxy; protiúpatnice kruhu (*n*) se dotýká přímky $n\, s_0$ v bodě *p*, pro nějž *n p* se rovná polární subnormále kruhu (*n*); tato subnormála *H r* jest určena průsekem *r* přímky $Hr \parallel n\, s_0$ s poloměrem *n r* kruhu (*n*). Trojúhelník mající za vrcholy střed kruhu (*n*) a body *H*, *n* je podobný (a polovičních rozměrů) s trojúhelníkem $G H m_0$, z čehož vychází rovnost úhlů $H m_0 s_0$, $H n r$; v pravoúhlých trojúhelnících $n\, m_0\, s_0$ a $H n r$

jsou dvě strany $H n$, $m_0 n$ a přilehající úhly stejné; tudíž jest $H r = n s_0$, t. j. $s_0 \equiv p$ je hledaný bod protiúpatnice.

Otáčí-li se hybná rovina kolem svojí stopy, tvoří svazek rovin kolmých na kruh Γ plochy kotálnic; inversně jí příslušející koule Σ vytvořují svazek o společné stopě Σ^I, a koule ty protínají orthogonálně kruh Γ_0 na ploše kotálnic, inversně příslušný kruhu Γ; poloměry těchto koulí v bodech na



Obr. 13.

kruhu Γ_0 jsou tudíž tečnami kruhu Γ_0 a mají své půdorysy v jeho průmětu, takže s_0 jako průmět středů leží na průmětu kruhu Γ_0, jinými slovy

„kruh Γ_0 inversní s kruhem Γ leží v rovině ($\perp O x y$) určené stopou $G m_0 s_0$."

Na této stopě leží tedy též bod M_0 příslušný stopě M kruhu Γ, t. j. bodu epicykloidy $\alpha = \varkappa$, a který je stopou kruhu Γ_0.

* * *

Inversí z pólu $H\left(\frac{a^2}{g}, 0, 0\right)$ vůči kouli poloměru HG nemění se plocha kotálnic ani koule vytínající křivoznačku

$$(x - g)^2 + y^2 + z^2 = 2 h z,$$

tudíž jsou sečny této čáry procházející bodem H bisekantami jejími a kužel jimi vytvořený je druhého stupně. Abychom ten blíže seznali, přeložme počátek souřadnic do bodu H

$$x = \xi + \frac{a^2}{g},$$

a zaveďme označení jako výše

$$\frac{a^2 - g^2}{g} = c,$$

jakož i polární souřadnice (69ª); při značení

$$\frac{r}{c} = \varrho$$

zní pak rovnice koule křivoznačky

$$(a) \qquad \varrho + \frac{1}{\varrho} = 2\left(\frac{h}{c}\cos\Theta - \sin\Theta\cos\omega\right),$$

kdežto rovnice plochy kotálnic (69) se přepíše na

$$(b) \qquad \begin{vmatrix} \left(\varrho^2 + \frac{1}{\varrho^2}\right) + \frac{4a^2}{gc}\sin\Theta\cos\omega\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right) \\ + \frac{4a^2}{g^2c^2}(a^2\cos^2\omega - g^2)\sin^2\Theta + 2\frac{a^2+g^2}{gc} = 0. \end{vmatrix}$$

Obě strany rovnice (a) zmocníme dvěma a dosadíme hodnoty do (b); tím vyjde

$$\left(\frac{h}{c}\,sos\,\Theta - \sin\Theta\cos\omega\right)^2 + \frac{2a^2}{gc}\sin\Theta\cos\omega\left(\frac{h}{c}\cos\Theta - \sin\omega\cos\omega\right)$$
$$+ \frac{a^2}{g^2c^2}(a^2\cos^2\omega - g^2)\sin^2\Theta + \frac{g}{c} = 0,$$

polární rovnice hledaného kužele.

Vrátíme-li se k pravoúhlým souřadnicím a provedeme-li redukce, obdrží tato rovnice tvar

$$(A) \qquad g^2y^2 = (a^2 - g^2 + h^2)z^2 + 2gh\xi z;$$

toť rovnice kužele, kterým se křivoznačka plochy kotálnic 4. stupně promítá ze středu anallagmatie H.

Konstruktivní momenty, které nám dávají paraboly na rovinách $z =$ konst. a hyperboly na rovinách $y =$ konst. se vyčtou z rovnice (A) bezprostředně, i přejdeme k určení fokálních přímek tohoto kužele.

Kužel (A) jest obalová plocha kvadratické řady rovin

$$\lambda^2 z - 2\lambda g y + (a^2 - g^2 + h^2)z + 2gh\xi = 0,$$

a sice je význam parametru dán rovnicí

$$\lambda z = g y;$$

roviny této řady, které se zároveň dotýkají úběžného kruhu, se určí z podmínky

$$4g^2h^2 + 4g^2\lambda^2 + (a^2 - g^2 + h^2 + \lambda^2)^2 = 0;$$

ta je kvadratickou rovnicí o neznámé $a^2 - g^2 + h^2 + \lambda^2$ a její řešení

$$\lambda^2 + a^2 - g^2 + h^2 = -2g(g + \varepsilon a), \quad \varepsilon = \pm 1,$$

vede na hodnoty

$$\lambda = \pm i\sqrt{h^2 + (g + \varepsilon a)^2}.$$

Hledané roviny tečné tedy mají rovnice

$$h\xi - (g + \varepsilon a)z = \pm i y\sqrt{h^2 + (g + \varepsilon a)^2},$$

jsou po dvou sdruženy a procházejí reálnými *přímkami fokálními*

$$(B)\qquad h\xi = (g + \varepsilon a)\, z,\quad y = 0,\quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Rovnice (A) zůstává rovnicí promítajícího kužele křivoznačky i v případě dosud vyloučeném $g = a$; v tomto případě plochy kotálnic obyčejných jest jedna přímka fokální kužele (A) stálou $(A\,z)$, druhá $y = 0$, $z = \frac{h}{2a}\xi$ se mění s křivoznačkou.

Řídící roviny, t. j. polární roviny fokál

$$y = 0,\quad \frac{\xi}{g \pm a} = \frac{z}{h}$$

se obdrží ve tvaru

$$(B')\qquad g h \xi + (a^2 + h^2 \pm a g)\, z = 0.$$

Kužele (A) obalují kužel rotační

$$\xi^2 + y^2 = \frac{a^2 - g^2}{g^2}\, z^2,$$

který je reálný při $g < a$.

* * *

Poloha hybné roviny v případě obecné kotálnice sférické má rovnici

$$X \cos\psi + Y \sin\psi + Z \operatorname{cotg}\alpha = c;$$

v našem případě $a = c$, $\varphi = \psi$ lze ji psáti

$$\left(x - \frac{a^2}{g}\right) \cos\varphi + y \sin\varphi + z \operatorname{cotg}\alpha = \frac{a}{g}\,(g - a\cos\varphi),$$

takže její inversní útvar má rovnici

$$(\Sigma)\qquad \left(x - \frac{a^2}{g}\right)^2 + y^2 + z^2 = 2\left(x_0 - \frac{a^2}{g}\right)\left(x - \frac{a^2}{g}\right) + 2\, y_0 y + 2\, z_0 z,$$

$$(s_0)\qquad x_0 - \frac{a^2}{g} = r_0 \cos\varphi,\quad y_0 = r_0 \sin\varphi,\quad r_0 = \frac{(a^2 - g^2)^2}{2\,a g\,(g - a\cos\varphi)}$$

$$z_0 = r_0 \operatorname{cotg}\alpha .$$

Zde x_0, y_0 jsou souřadnice středu s_0 kruhu Σ^1, r a φ jeho polární souřadnice v soustavě (H, Hx), z čehož zejména vychází, že přímky $H\,s_0$ a $O\,m$ jsou rovnoběžny, majíce směr φ.

Kuželosečka středů s_0 kruhů Σ^1 má polární rovnici

$$r = \frac{(a^2 - g^2)^2}{2\,a g^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{g}\cos\varphi},$$

tedy jest hyperbola při $g < a$, ellipsa při $g > a$; vrcholy její $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$ mají souřadnice

$$x - \frac{a^2}{g} = -\frac{a^2 - g^2}{2\,g a}\,(a + g),\quad x - \frac{a^2}{g} = -\frac{a^2 - g^2}{2\,g a}\,(a - g),$$

takže střed

$$x = \frac{a^2}{g} - \frac{a^2 - g^2}{2g} = \frac{a^2}{g} - \frac{c}{2}$$

leží uprostřed mezi G a H, a tedy body G, H jsou ohniska.

Úhel φ_0 příslušný ke kruhu Γ_0 je dán směrem $G\, s_0$, takže

$$tg\, \varphi_0 = \frac{y_0}{x_0 - g};$$

$$x_0 - g = r_0 \cos \varphi + \frac{a^2 - g^2}{g} = \frac{a^2 - g^2}{g} + \frac{(a^2 - g^2)^2 \cos \varphi}{2\, a g\, (g - a \cos \varphi)}$$

t. j.

$$x_0 - g = \frac{a^2 - g^2}{2\, a g} \, \frac{2\, a g - (a^2 + g^2) \cos \varphi}{g - a \cos \varphi};$$

i bude tedy hledaný vztah mezi směry φ a φ_0

$$(\Gamma_0) \qquad tg\, \varphi_0 = \frac{(a^2 - g^2) \sin \varphi}{2\, ag - (a^2 + g^2) \cos \varphi}.$$

* * *

Vraťme se na okamžik k hyperboloidu (62) a rovině (63), která leží kolmo na povrchové jeho přímce a seče ji ve středu kruhu na ploše kotálnic. Poloměr kruhu má hodnotu $\varrho = a\,(1 - \cos \omega)$, a potřebujeme zavésti ještě pravoúhlé souřadnice u, w na zmíněné rovině, abychom obdrželi parametrické vyjádření kružnic a tím zároveň nové parametrické vyjádření plochy kotálnic samotné.

Vektor kolmý na povrchovou přímku hyperboloidu (62) má složky

$$\begin{aligned} \xi &= u \cos \omega - w \cos \gamma \sin \omega \\ \eta &= u \sin \omega + w \cos \gamma \cos \omega \\ \zeta &= w \sin \gamma , \end{aligned}$$

při čemž neodvislé veličiny u, w lze bráti jako pravoúhlé složky téhož vektoru na rovině kruhu. Znamenáme-li $x_0\, y_0\, z_0$ souřadnice středu (64) našeho kruhu, bude libovolný bod roviny kruhu vyjadřitelný tvarem

$$x = x_0 + \xi , \; y = y_0 + \eta , \; z = z_0 + \zeta ,$$

při čemž u, w jsou pravoúhlé souřadnice bodu na rovině kruhu, jichž počátek je střed kruhu.

Zavedením dalšího parametru Θ lze tedy body kruhu vyjádřiti rovnicemi

$$u = \varrho \cos \Theta , \; w = \varrho \sin \Theta , \; \varrho = a\,(1 - \cos \omega);$$

vložením těchto hodnot do našich vzorců vychází

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} x - g &= (1 - \cos \omega)\, [g \cos \omega + a \cos \Theta \cos \omega - a \cos \gamma \sin \Theta \sin \omega] \\ y &= (1 - \cos \omega)\, [g \sin \omega + a \cos \Theta \sin \omega + a \cos \gamma \sin \Theta \cos \omega] \\ z &= a \cos \gamma \sin \omega + a \sin \gamma\, (1 - \cos \omega) \sin \Theta , \; a \sin \gamma = g. \end{aligned} \right.$$

Tyto rovnice při stálém ω, proměnném Θ dávají kruhy v rovinách tečných kužele (H), při neodvislých Θ, ω dávají nové vyjádření parametrické pro body na ploše kotálnic 4. stupně.

Abychom poznali povahu křivek $\Theta =$ konst., přepišme rovnice půdorysu na tvar komplexní

$$x + i\,y - g = (1 - \cos\omega)\,(g + a\cos\Theta + i\,a\cos\gamma\sin\Theta)\,e^{i\omega};$$

odtud vychází, že půdorys čáry $\Theta =$ konst. jest kardioida mající úvratník G a střed

$$x_1 + i\,y_1 = -\,a\cos\Theta - i\,a\cos\gamma\sin\Theta,$$

která jest úpatnicí kruhu, jehož střed je (x_1, y_1) a jehož poloměr má hodnotu

$$\sqrt{(g + a\cos\Theta)^2 + a^2\cos^2\gamma\sin^2\Theta} = a + g\cos\Theta;$$

souhrn středů tvoří ellipsu se středem O.

Kotálnice $\alpha =$ konst. leží na kouli

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,h\,z = g^2\,,\quad h = a\,tg\,\frac{\alpha}{2};$$

inversí vznikne opět koule, jež pak seče plochu kotálnic v inversní čáře; rovnice inversní koule zní

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\,p\,x + 2\,q\,z - Q,$$

$$p = \frac{2\,a^2 g}{a^2 + g^2}\,,\quad q = \frac{a^2 - g^2}{a^2 + g^2}\,h,\quad Q = \frac{3\,a^2 - g^2}{a^2 + g^2}\,g^2,$$

a její průseč s plochou kotálnic leží na kuželi s vrcholem G

$$[2\,a^2 g\,(x - g) + (a^2 - g^2)\,h\,z]^2 = a^2\,(a^2 + g^2)^2\,[(x - g)^2 + y^2],$$

který je sice 2. stupně, ale není rotační, takže transformovaná čára není kotálnicí.

Konstruktivně je tento kužel snadno přístupný, poněvadž jeho řezy s rovinami rovnoběžnými s rovinou

$$\frac{x}{c} + \frac{z}{2\,a\cot g\,\frac{\alpha}{2}} = 0$$

se promítají v kruhy.

15.

Pohybuje-li se bod P plochy kotálnic po křivoznačce (nekruhové), vytváří jeho normála plochu rozvinutelnou: dvě sousední normály protínají základní kruh v sousedních bodech, a tedy obsahuje tečná rovina plochy normál tečnu $m\,t$ základního kruhu, která je tedy její stopou.

Poněvadž touto tečnou prochází také příslušná poloha hybné roviny, vychází věta, že

„tečná rovina rozvinutelné plochy normál u libovolné plochy kotálnic splývá s okamžitou polohou roviny hybného kruhu."

Opisuje-li tedy bod P plochy kotálnic křivoznačku, obalují příslušné polohy hybné roviny ($P\,m\,t$) rozvinutelnou plochu normál.

Máme-li řadu rovin o parametrech φ, α

$$A\,x + B\,y + C\,z + D = 0,$$

procházejících normálou plochy kotálnic, bude obalová jejich plocha obsahovati úvratnici rozvinutelné plochy normál, jakmile mezi α a φ zavedeme vztah platný pro křivoznačky

$$cotg\,\frac{\alpha}{2} = K\left(1 - \frac{g}{a}\cos\varphi\right)^{\frac{a}{c}}.$$

Rovnici roviny lze psáti

$$A\,(x - c\cos\psi) + B\,(y - c\sin\psi) + C\,z = 0;$$

aby obsahovala normálu, musí jí hověti hodnoty (2)

$$(II)\qquad \begin{aligned} &-(a - g\cos\varphi)\cos\alpha\,(A\cos\psi + B\sin\psi)\\ &+ g\sin\varphi\,(A\sin\psi - B\cos\psi) + C\,(a - g\cos\varphi)\sin\alpha = 0; \end{aligned}$$

tím mezi dvěma poměry veličin A, B, C zaveden pouze jeden vztah, a máme na vůli zavésti libovolnou další homogenní podmínku, aby problém se stal určitým. Zvolíme jako příklady dva jednoduché vztahy opět lineární; vložíme hodnoty $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ a $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, a položíme na roveň nulle část nezávislou na α, čímž vzniknou vztahy

$$(a - g\cos\varphi)\,(A\cos\psi + B\sin\psi) \pm g\sin\varphi\,(A\sin\psi - B\cos\psi) = 0.$$

Případ hořejšího znamení podává rovinu procházející bodem na epicykloidě $\alpha = \pi$, který znamenejme M_π, kdežto případ spodního znamení odpovídá rovině obsahující bod M_0 na kotálnici $\alpha = 0$.

Po vyloučení koefficientů A, B, C nacházíme nejprvé rovnice

$$(P\,m\,M_\pi)\quad \begin{vmatrix} x - c\cos\psi & y - c\sin\psi & z \\ -cotg\,\frac{\alpha}{2}\cos\psi & -cotg\,\frac{\alpha}{2}\sin\psi & 1 \\ (a - g\cos\varphi)\cos\psi + g\sin\varphi\sin\psi, & (a - g\cos\varphi)\sin\psi - g\sin\varphi\cos\psi, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(P\,m\,M_0)\quad \begin{vmatrix} x - c\cos\psi & y - c\sin\psi & z \\ \cos\psi & \sin\psi & cotg\,\frac{\alpha}{2} \\ (a - g\cos\varphi)\cos\psi - g\sin\varphi\sin\psi, & (a - g\cos\varphi)\sin\psi + g\sin\varphi\cos\psi, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

čili po rozvinutí determinantů

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} & x\,[(a - g\cos\varphi)\sin\psi - g\sin\varphi\cos\psi] \\ & - y\,[(a - g\cos\varphi)\cos\psi + g\sin\varphi\sin\psi] \\ & - g\,z\cot g\frac{\alpha}{2}\sin\varphi + g\,c\sin\varphi = 0, \end{aligned}$$

$$\text{(II)}\qquad \begin{aligned} & x\,[(a - g\cos\varphi)\sin\psi + g\sin\varphi\cos\psi] \\ & - [y\,(a - g\cos\varphi)\cos\psi - g\sin\varphi\sin\psi] \\ & - g\,z\,tg\frac{\alpha}{2}\sin\varphi - g\,c\sin\varphi = 0. \end{aligned}$$

Jako applikaci volme (II) pro $a = c$, tedy

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{K}{1 - \frac{g}{a}\cos\varphi}:$$

$$(\alpha)\qquad a\,(X - g)\sin\varphi + (g - a\cos\varphi)\,Y - K\frac{g\,a\,Z}{a - g\cos\varphi}\sin\varphi = 0;$$

tato rovina, procházejíc pevným bodem G, obaluje kužel s vrcholem G, pro nějž třeba znáti jen čáru řídící v rovině $z =$ konst. Uvažujme kuželosečku

$$x - g = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad r = \frac{Q}{a - g\cos\varphi};$$

vzorce

$$dx = -\frac{a\,Q\sin\varphi}{(a - g\cos\varphi)^2}\,d\varphi,\quad dy = -\frac{Q\,(g - a\cos\varphi)}{(a - g\cos\varphi)^2}\,d\varphi$$

ukazují, že lze (α) psáti

$$(X - g)\,dx + Y\,dy = -K\,Q\,a\,z\frac{g\sin\varphi\,d\varphi}{(a - g\cos\varphi)^3};$$

pravá strana

$$= \frac{K\,a\,z}{2\,Q}\,d\,\frac{Q^2}{(a - g\cos\varphi)^2} = \frac{K\,a\,z}{2\,Q}\,d\,.\,r^2$$

bude splývati s $r\,dr = (x - g)\,dx + y\,dy$, bylo-li zvoleno

$$Q = K\,a\,z;$$

v tom případě jest (α) rovnice normály kuželosečky v rovině $z =$ konst. Rovina určená normálou a bodem G obaluje kužel, jehož stopa $z =$ konst. jest evoluta naší kuželosečky, a tedy věta:

„Úvratní čára rozvinutelné plochy normál plochy kotálnic $a = c$, podél její křivoznačky

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{K}{1 - \frac{g}{a}\cos\varphi}$$

vedených, se s vrcholu G promítá kuželem 6. stupně a 4. třídy, jehož stopa na rovině $z =$ konst. má za půdorys evolutu kuželosečky s ohniskem G, osou Gx, dané polární rovnicí

$$r = \frac{K a z}{a - g \cos \varphi}.$$

Je-li křivoznačka vyťata koulí

$$(x - g)^2 + y^2 + z^2 = 2 h z,$$

máme pro souřadnice na ploše

$$2 (1 - \cos \alpha) (a - g \cos \varphi) = 2 h \sin \alpha,$$

tedy

$$K = \frac{h}{a},$$

takže rovnice kuželosečky bude

$$r = \frac{h z}{a - g \cos \varphi}.$$

Tento výsledek možno odvoditi též geometricky, a sice jako zvláštní případ obecnější vlastnosti cylindrid, o čemž bude jednáno později.

Obraťme se nyní k rovnici (I) v případě $a = c$, která náleží rovině $(P m M_n)$, a zní pro křivoznačku $\cot g \frac{\alpha}{2} = K'\left(1 - \frac{g}{a} \cos \varphi\right)$

$$(\beta) \quad \begin{aligned} & x\,(a \sin \varphi - g \sin 2\varphi) - y\,(a \cos \varphi - g \cos 2\varphi) \\ & - g K z \left(\sin \varphi - \frac{g}{2a} \sin 2\varphi\right) + a g \sin \varphi = 0; \end{aligned}$$

rovnice ta je splněna hodnotami $x = g, y = 0, z = \frac{2a}{K}$.

V tomto případě konstanta K jest reciproká hodnota posledně touto literou značené veličiny, a poloměr koule křivoznačku stanovící jest $h = \frac{a}{K}$, takže náš poslední pevný bod V je pronik koule křivoznačné čáry s přímkou $GV \parallel Oz$.

Rovina (β) tedy obaluje kužel s vrcholem $V\left(g, 0, \frac{2a}{K}\right)$ a jeho stopa půdorysná jest obalová čára přímek $m M_n$, které jsou normály epicykloidy $\alpha = \pi$.

„Úvratnice rozvinutelné plochy normál plochy kotálnic $a = c$ podél křivoznačky na kouli

$$(x - g)^2 + y^2 + z^2 = 2 h z$$

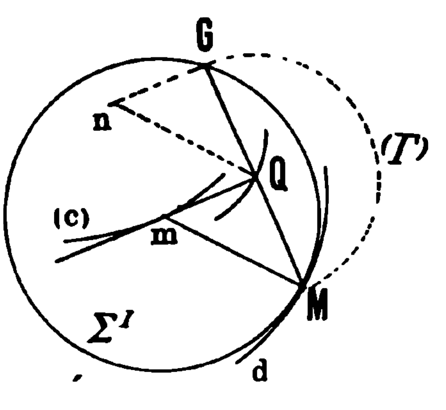
promítá se s vrcholu $V\,(g, 0, 2h)$ kuželem, jehož stopa na rovině $z = 0$ jest evoluta epicykloidy $\alpha = \pi$."

VII.

Pro úvratnici na rozvinutelné ploše normál plochy kotálnic 4. stupně známe tak dva kužely (s vrcholy G a V), čímž jest geometricky stanovena. Ve zvláštním případě $g = a$ jsou tyto výsledky analyticky přehlednější, poněvadž základní čáry těchto kuželů jsou křivky klasické, semikubická parabola jakožto evoluta paraboly, a kardioida jakožto evoluta kardioidy.

* * *

Uvažujme v rovině $G x y$ libovolnou *čáru řídící* d a pevný bod G; průvodiče $G M$ všech bodů čáry řídící volme za průměry kruhů Γ v rovinách kolmých na rovinu základní $G x y$. Souhrn těchto kruhů Γ — které se v daném bodě G dotýkají dané přímky $G z$ a (obr. 14a) protínají danou čáru d — tvoří jistou plochu, již nazveme *cylindridou.*



Obr. 14*a*.

Zvolíme-li G za střed inverse vůči jinak libovolné kouli, tu inversí přecházejí kruhy Γ v přímky Γ_0 kolmé na $G x y$ a protínající určitou čáru roviny základní d_0, vzniklou inversí z čáry d; plocha kruhů Γ přechází tak inversí v plochu válcovou kolmou na rovinu základní, mající křivku d_0 za čáru řídící. Odtud název cylindrida.[1])

Zároveň plyne odtud bezprostředně, že křivoznačné čáry cylindridy jsou jednak kruhy Γ a jednak řezy cylindridy s koulemi majícími své středy na přímce $G z$, jež se dotýkají základní roviny v bodě G; neboť tyto koule přecházejí inversí v roviny rovnoběžné s rovinou základní válce.

Středy Q kruhů Γ naplňují čáru (Q) homothetickou — při středu podobnosti G — s čarou řídící d a polovičních rozměrů.

Kruh Γ je křivoznačkou pro cylindridu i pro svoji rovinu; tyto plochy se tedy protínají pod stálým úhlem, takže normály cylindridy podél kruhu Γ tvoří rotační kužel, jehož vrchol m patrně leží v rovině základní. Souhrn těchto vrcholů tvoří čáru (c) *centrální*, která je zároveň — považována za nekonečně tenkou plochu — částí centrální plochy cylindridy. Jsou tyto body středy jedné z hlavních křivostí plochy uvažované.

Konstrukce (obr. 14a) bodu m leží na snadě; jednak se tento bod nachází na normále čáry d v bodě M, která jest jedna strana kužele normál spadající v rovinu základní, jednak ukazuje rovnost stran kužele $\overline{G m} = \overline{M m}$, že $Q m$ stojí kolmo na $G Q M$. Bod m jest tedy středem kruhu Σ^1, který procházeje bodem G dotýká se čáry řídící v bodě M; je to stopa a hlavní kruh na kouli Σ, která má střed m a poloměr $G m$, a dotýká se cylindridy podél kruhu Γ.

[1]) Tyto plochy uvažoval G. Humbert (Cours d'Analyse, T. II, p. 449).

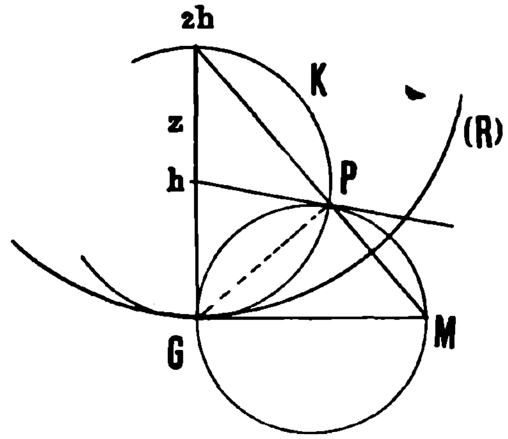
Je snadno nahlédnouti, že přímka $Q\,m$ je tečnou čáry centrální (c). Abychom to elementárně ukázali, hledejme protiúpatnici čáry (Q), t. j. čáru mající za tečny přímky $m\,Q$, takže pak (Q) jest její úpatnice z pólu G. V polárních souřadnicích s pólem G jest $G\,Q = r$ průvodič, a při libovolně zvolené polární ose jest pak pro bod m' na protiúpatnici $Q\,m' = r' = \frac{d\,r}{d\,\varphi}$ rovno polární subnormále $G\,n$ čáry (Q). Následkem homothetie obrazců je však normála $Q\,n$ čáry (Q) rovnoběžna s normálou $M\,m$ čáry d, trojúhelníky $Q\,M\,m$, $G\,Q\,n$ mají rovnoběžné strany, z nichž dvě stejné; jsou shodny a bude $G\,n = Q\,m$, t. j. $Q\,m' = Q\,m$, takže bod m' splývá s bodem m.

Tím jest cylindrida konstruktivně ovládnuta. Je-li dán pól G a řídící čára d, vedeme čáru (Q) polovičních průvodičů $\left(Q\,G = \frac{1}{2}\,G\,M\right)$ a sestrojíme její protiúpatnici (c); normála čáry d ve stopě M kruhu Γ vedená stanoví na (c) bod m, jímž procházejí normály všech bodů ha kruhu Γ. Tím dána konstrukce roviny tečné v libovolném bodě plochy.

* * *

Cylindrida zůstává při každé inversi, jejíž střed leží na přímce $G\,z$ kolmé na rovinu základní, jejíž koule základní prochází bodem G, nezměněna, jest anallagmatickou vůči všem koulím, které se základní roviny v bodě G dotýkají.

Uvažujme takovouto kouli (R) poloměru $R = 2\,h$ (obr. 14^b); ta protíná veškery kruhy Γ jako $G\,P\,M$ orthogonálně a tedy inverse vůči kouli (R) tyto kruhy nemění, nemění tedy také cylindridu.



Obr. 14*b*.

Uvažujme kouli K o středu $z=h$; obsahujíc pól inverse $z = 2\,h$ transformuje se tato koule v rovinu, v našem případě v rovinu základní. Ukazuje to ostatně přímo obrazec 14^b. Koule K vytíná na cylindridě křivoznačku; její bod P promítá se ze středu inverse $2\,h$ do bodu M na čáře řídící, takže

„stereografický průmět křivoznačky na cylindridě (z pólu $2\,h$ na $G\,z$ do roviny $z = 0$) splývá s čarou řídící d."

Buď P bod křivoznačky, dále M, m mějte dosavadní význam pro kruh Γ vedený bodem P; uvažujme rovinu $M\,m\,P$, která obsahuje normálu cylindridy v bodě P. Při pošinutí bodu P do polohy nekonečně blízké P_1 na křivoznačce zaujme tato rovina polohu $M_1\,m_1\,P_1$, průsečnice obou rovin bude obsahovati průsečík nekonečně blízkých normál $P\,m$, $P_1\,m_1$, t. j. bod na úvratnici rozvinutelné plochy normál.

Průsečnice ta je povrchová přímka na rozvinutelné ploše, kterou obalují roviny $M\,m\,P$; poněvadž tyto roviny procházejí pevným bodem $z = 2\,h$, který je pól inverse, je tato plocha kuželem; jeho řídící čára v rovině základní $z = 0$ jest obálkou přímek $M\,m$, t. j. obálkou normál čáry řídící.

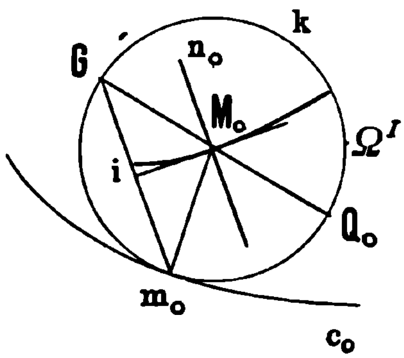
Povrchová přímka q obalové plochy kuželové jest určena středem křivosti čáry řídící d a vrcholem $z = 2\,h$; protíná normálu $P\,m$ v bodě S na úvratnici plochy normál, t. j. ve středu druhé hlavní křivosti na cylindridě. Vyslovíme výsledek ten přehledně větou, že

„Úvratnice na rozvinutelné ploše normál cylindridy leží na ploše kuželové, jejíž řídící čára v rovině základní jest evoluta řídící čáry d cylindridy; vrchol kužele je pronik koule křivoznačky s přímkou $G\,z$."

Plocha kotálnic $a = c$ je zvláštní případ cylindridy, u níž centrální čára je kruh (a). Výše dokázaná věta je v této obsažena jako zvl. případ.

* * *

Vraťme se nyní opět k inversi pro pól G; tou se čára centrální c převádí v křivku c_0 (obr. 14c), její tečna $m\,Q$ transformuje se v kružnici k obsahující bod G, a dotýkající se v m_0 čáry c_0.



Obr. 14c.

Přímka $G\,Q$ přechází opět v přímku GQ_0, jež jsouc kolma na kruh k prochází jeho středem; bod M přechází v M_0, při čemž $G\,M_0 = \frac{1}{2}\,G\,Q_0$, v důsledku reciprokých hodnot průvodičů; tedy M_0 je středem kruhu k. V obrazci máme již pozorovaný zjev, že bod M_0 opisuje protiúpatnici čáry (i) polovičních průvodičů $G\,i = \frac{1}{2}\,G\,m_0$, tak že $i\,M_0$ je tečnou čáry $(M_0) \equiv d_0$, ve kterou přešla inversí čára d:

„Inverse pro pól G převádí cylindridu ve válec, jehož řídící čára d_0 je protiúpatnice čáry (i), homothetické a polovičních rozměrů s inversní křivkou čáry centrální."

Rovina π určená bodem P na křivoznačce cylindridy a tečnou $m\,Q$ centrály (c) obaluje rozvinutelnou plochu normál; tato rovina přechází inversí v kouli Ω určenou kruhem k a bodem P_0 na křivoznačce plochy válcové; kruh $k \equiv \Omega^I$ je půdorysná stopa koule. Bod P_0 leží na rovině Δ rovnoběžné se základnou, a koule Ω, protínajíc orthogonálně povrchovou přímku válce v bodě P_0 (neboť rovina π protíná orthogonálně kruh Γ) dotýká se roviny Δ v bodě P_0. Přejde-li π do nekonečně blízké polohy π_1, přejde koule Ω v nekonečně blízkou kouli Ω_1, obě koule se protínají v kružnici, pro niž známe body G a m_0 (obě koule dotýkají se čáry c_0), mimo to mají společný bod P_0, ježto se dotýkají čáry na rovině Δ. Koule Ω obalují plochu inversní plochy normál, a charakteristika leží na rovině $G\, m_0\, P_0$. Stopa této roviny na rovině Δ je rovnoběžna s půdorysnou její stopou $G\, m_0$ a promítá se v normálu $M_0\, n_0$ čáry d_0, t. j. stopa roviny $G\, m_0\, P_0$ na rovině Δ jest normála $P_0\, n$ řezu válce s rovinou Δ.

Obalová plocha koulí Ω jest souhrn charakteristik, jež jsou kruhy inversní normál. Dvě sousední polohy roviny $G\, m_0\, P_0$ obsahují dva sousední těchto kruhů, a průseč obou rovin obsahuje průsečík sousedních kruhů, jenž jest inversní s průsečíkem sousedních normál, t. j. s bodem na úvratnici plochy normál. Průsečnice sousedních poloh roviny $G\, m_0\, P_0$ obsahuje bod G, a na rovině Δ obsahuje průsek sousedních normál $P_0\, n$ řezu na válci, t. j. uvažovaná přímka spojuje bod G se středem křivosti S_0 řezu Δ v bodě P_0. Průsek C_0 dvou nekonečně blízkých kruhů leží tedy na přímce $G\, S_0$; jeho inversní bod leží na úvratnici plochy normál, a poněvadž leží též na přímce $G\, S_0$, která se inversí převádí v samu sebe, máme větu:

„Úvratnice na rozvinutelné ploše normál cylindridy promítá se z pólu G kuželem, jehož řídící čára jest evoluta křivoznačky na inversní ploše válcové."

V případě plochy kotálnic $a = c$ jest křivoznačka plochy válcové známá kuželosečka, čímž vychází věta výše analyticky verifikovaná.

Je-li jedna z rozvinutelných ploch normál cylindridy kužel neb válec, musí dle toho se redukovati evoluta řezu (Δ) na ploše inversní na bod, t. j. inversní plocha válcová je přímý válec kruhový, načež jsou veškery rozvinutelné plochy normál kuželi, a sice rotačními, poněvadž křivoznačky jsou kruhy. Tyto plochy jsou zvláštní typy Dupinovy cyklidy.

* * *

Chceme nyní výpočtem určiti kužel, kterým se úvratnice rozvinutelné plochy normál plochy kotálnic $a = c$ promítá z vrcholu $H\left(\frac{a^2}{g}, 0, 0\right)$. K tomu cíli uvažujeme rovinu $H\, m\, P$ určenou pólem H a normálou $m\, P$ bodu na křivoznačce; její stopa $H\, m$ má rovnici

$$X\, g \sin\varphi + Y\,(a - g\cos\varphi) = a^2 \sin\varphi$$

a rovnice roviny samé bude tedy

$$X\, g \sin\varphi + Y\,(a - g\cos\varphi) + C\, Z = a^2 \sin\varphi, \tag{a}$$

kde C se určí z podmínky, aby na rovině ležel bod plochy

$$x = g + (1 - \cos\alpha)\,(a - g\cos\varphi)\cos\varphi,$$
$$y = (1 - \cos\alpha)\,(a - g\cos\varphi)\sin\varphi,$$
$$z = (a - g\cos\varphi)\sin\alpha;$$

dosazení hodnot podává

$$C \sin\alpha + a\,(1 - \cos\alpha)\sin\varphi = \frac{a^2 - g^2}{a - g\cos\varphi}\sin\varphi,$$

t. j.

$$(a^0)\qquad C = -a \sin\varphi \, tg\frac{\alpha}{2} + \frac{(a^2-g^2)\sin\varphi}{(a-g\cos\varphi)\sin\alpha}.$$

Podmínka, aby bod P náležel křivoznačce, se vyjadřuje rovnicí

$$cotg\frac{\alpha}{2} = K\left(1-\frac{g}{a}\cos\varphi\right),$$

kde K je konstanta; pomocí této hodnoty máme z (a^0)

$$C = \frac{\sin\varphi}{2\,cotg\frac{\alpha}{2}}\left[-2a + \frac{(a^2-g^2)\left(1+cotg^2\frac{\alpha}{2}\right)}{a-g\cos\varphi}\right],$$

$$(a^1)\qquad C = \frac{a^2-g^2}{2a}K\sin\varphi - \frac{a}{2K}\,\frac{a^2+g^2-2ag\cos\varphi}{(a-g\cos\varphi)^2}\sin\varphi.$$

Rovina (a) obaluje kužel s vrcholem H, a na něm leží úvratnice rozvinutelné plochy normál v důsledku úvahy, jakéž podobné byly v předcházejícím podrobně vyloženy. Dosazením máme pro obalenou rovinu rovnici

$$(b)\quad gX + \frac{a-g\cos\varphi}{\sin\varphi}Y + \left(\frac{a^2-g^2}{2a}K - \frac{a}{2K}\,\frac{a^2+g^2-2ag\cos\varphi}{(a-g\cos\varphi)^2}\right)Z = a^2.$$

Položme

$$\frac{g\sin\varphi}{a-g\cos\varphi} = \lambda,$$

nalezneme

$$\frac{a^2+g^2-2ag\cos\varphi}{(a-g\cos\varphi)^2} = 1+\lambda^2,$$

a rovnice (b) nabude tvaru

$$(b^*)\qquad gX - a^2 + \frac{g}{\lambda}Y + \left(m - \frac{\lambda^2 a}{2K}\right)Z = 0,$$

kde položeno

$$m = \frac{a^2-g^2}{2a}K - \frac{a}{2K}.$$

Derivováním vychází (pro povrchovou přímku kužele)

$$\frac{g}{\lambda^2}Y + \frac{\lambda a}{K}Z = 0,\ \lambda = -\left(\frac{gKY}{aZ}\right)^{\frac{1}{3}},$$

a tedy rovnice kužele, kterým se z bodu H promítá úvratnice rozvinutelné plochy normál, zní

$$(gX - a^2 + mZ)^3 = \frac{27}{8}\,\frac{ag^2}{K}Y^2Z.$$

VII.

Zavedeme-li opět třetí souřadnici h středu koule obsahující křivoznačku, tedy

$$K = \frac{a}{h}, \quad m = \frac{a^2 - g^2 - h^2}{2h},$$

zní rovnice kužele

$$(gX - a^2 + mZ)^3 = \frac{27}{8} g^2 h Y^2 Z. \tag{71}$$

Na tomto kuželi leží úvratnice plochy normál vedených ku ploše kotálnic $a = c$ podél křivoznačky, již na ní vytíná koule

$$(x - g)^2 + y^2 + z^2 = 2hz,$$

při libovolném h.

Řezy Z = konst. na tomto kuželi jsou semikubické paraboly; jeho ostrá (úvratní) hrana je

$$Y = 0, \quad gX - a^2 + mZ = 0.$$

* * *

Určíme ještě křivoznačky na ploše kotálnic obyčejných ($g = a$) v případě $c = 2a$. Obecné rovnice parametrického vyjádření dávají v tomto případě

$$y = 2a(1 - \cos\alpha)\sin^3\psi, \quad z = 2a\sin^2\psi\sin\alpha,$$

křivoznačka je dána rovnicí mezi parametry

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = K\left(\frac{1 - \cos\varphi}{2}\right)^{\frac{a}{c}} = K\sin\psi;$$

poslední výrazy dávají

$$\frac{z}{y} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\psi} = K,$$

t. j. křivoznačka této plochy je rovinný řez

$$z = Ky.$$

Osa Oy je dvojná čára plochy uvažované, a tedy máme výsledek:

„Křivoznačné čáry na ploše kotálnic obyčejných $a = g$, $c = 2a$, jsou řezy s rovinami vedenými dvojnou přímkou plochy,"

kterýžto výsledek vychází také přímo z hořejších výsledků o fokální ploše kongruence loukotí.[1])

---

[1]) Věta jest obsažena v obecnější o plochách obalových koulí, které se dotýkají stálé roviny (xz) podél pevné přímky (Ox): řezy s rovinami touto přímkou vedenými tvoří druhou řadu křivoznaček. Ještě obecnější případ je tento: Řada koulí orthogonálních k dané kouli se dotýká jiné pevné koule podél kruhu; veškery koule tímto kruhem vedené vytínají na obalové ploše řady druhou serii křivoznaček.

Hybná rovina

$$x \cos \psi + y \sin \psi + z \cotg \alpha = c$$

příslušná k bodu křivoznačky $\cotg \frac{\alpha}{2} = K \sin \psi$ má rovnici

$$(c) \qquad x \sin 2\psi + 2y \sin^2 \psi + z\left(K \sin^2 \psi - \frac{1}{K}\right) = 4a \sin \psi,$$

její obalová plocha jest plocha normál; pro její úvratnici máme ještě rovnice, vznikající dvojím derivováním:

$$(c') \qquad x \cos 2\psi + \left(y + \frac{1}{2} K z\right) \sin 2\psi = 2a \cos \psi,$$

$$(c'') \qquad -x \sin 2\psi + \left(y + \frac{1}{2} K z\right) \cos 2\psi = -a \sin \psi.$$

Z posledních dvou rovnic se vypočte

$$(d) \qquad \begin{cases} x = a \cos \psi + a \cos \psi \cos 2\psi = 2a \cos^3 \psi, \\ y + \frac{1}{2} K z = a \sin \psi + a \cos \psi \sin 2\psi = a(1 + 2\cos^2 \psi) \sin \psi, \end{cases}$$

čehož vložením do rovnice (c) vychází

$$(d') \qquad z = -2aK \sin^3 \psi.$$

Tyto rovnice (d), (d') podávají parametrické vyjádření úvratnice na rozvinutelné ploše normál, příslušné ke křivoznačce na rovině $z = K y$.

Nárysy úvratnic

$$x = c \cos^3 \psi, \quad z = -K c \sin^3 \psi$$

příslušných k různým křivoznačkám jsou v affinitě s astroidou, jejíž rovnice vznikají pro $K = 1$; tato astroida sklopená do půdorysny splývá se základnou obalového válce rovin kruhů I; její vyjádření jako kotálnice zní

$$x + iy = \left(\frac{3}{4} c + \frac{1}{4} c e^{4i\psi}\right) e^{-i\psi};$$

je to obalová čára hybné přímky, v níž leží délka stálé velikosti c, jejíž konce se pohybují po osách Ox, Oy.

Dále plyne z rovnic (d), že *úvratnice leží na válci směru*

$$x = 0, \quad y + \frac{1}{2} K z = 0,$$

Jeví-li se některá plocha jako obalová plocha koulí majících své středy na rovině xy a dotýkajících se pevného kruhu (k) v této rovině, leží křivoznačky druhé soustavy na koulích vedených kruhem (k). Kdyby ještě jeden kruh (k') tvořil součást stopy naší plochy, jevily by se křivoznačky druhé soustavy jako průsečnice dvou koulí, t. j. byly by obě řady křivoznaček kruhy a plocha by byla Dupinovou cyklidou.

jehož *základna v rovině* $z = 0$ nezávisí na volbě křivoznačky a má vyjádření

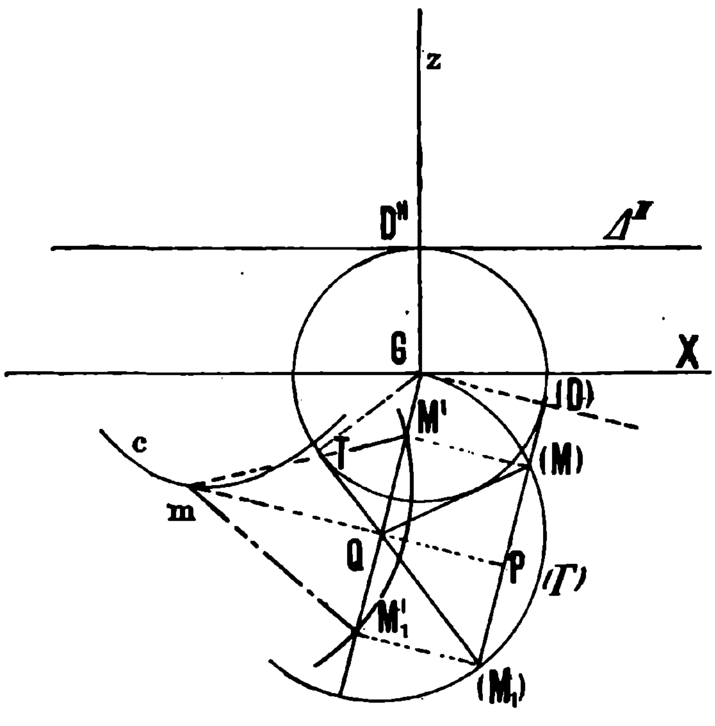
$$x + iy = \left(\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a\,e^{2i\varphi}\right)e^{i\varphi},$$

t. j. je to *nefroida vytvořená kotálením kruhu poloměru* $\frac{a}{2}$ *po kruhu poloměru* a, u níž rámě $= -\frac{a}{2}$, t. j. čára má vrchol v bodě $\varphi = 0$, a úvrat v bodě $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Poněvadž v našem případě křivoznačka je rovinná, svírají normály plochy s rovinou řezu stálý úhel ϑ, pro nějž bychom nalezli $tg\,\vartheta = K$; *úvratnice je čára šroubová* na válci stojícím kolmo na rovině křivoznačky.

16.

Z rovinných řezů cylindridy uvažujme nejprvé řezy s rovinami $z =$ konst. Buď $\varDelta$ rovina rovnoběžná s rovinou základní, c centrální čára cylindridy, $G\,z$ společná tečna její kruhů Γ (obr. 15.). Na tečnu $m\,Q$



Obr. 15.

čáry c (v bodě m) spuštěná kolmice $G\,Q$ dává poloměr kruhu Γ, který po sklopení do půdorysny zaujímá polohu (Γ).

Rovina $\varDelta$ protíná přímku $G\,z$ v bodě D, délka $G\,D$ po sklopení zaujímá polohu $G\,(D) \perp G\,Q$, a jest $G\,(D) = G\,D = z$ výška roviny $\varDelta$.

Opišeme kolem G jako středu kouli (G) poloměru $G D = z$, její stopa je největší kruh $(D) T$.

Stopa roviny Δ na rovině kruhu je přímka $D M M_1 \parallel G Q$, jež po sklopení zaujme polohu $D (M) (M_1)$ a dotýká se kruhu $(D) T D''$. Tečna tohoto kruhu v bodě (D) stanoví tedy na kruhu (Γ) dva body (M) a (M_1), jež jsou sklopené průseky roviny Δ s kruhem Γ a tedy dávají bezprostředně dva body M', M'_1 pro průmět řezu. — Veďme tečnu $Q T$ kruhu $(D) T$, takže $Q T \perp G T$. Z rovnosti poloměrů $Q G$ a $Q (M)$ kruhu (Γ) a z rovnosti délek $G T = G (D) = Q P$ vychází shodnost pravoúhlých trojúhelníků $G T Q$ a $Q P (M)$ a tedy rovnost stran $P (M) = Q T = Q M' = Q M_1'$, takže

„body M', M'_1 jsou průseky přímky $G Q$ s kruhem, který má střed Q a protíná orthogonálně pevný kruh (G, z), jehož střed je G a poloměr $G D = z$ (výška roviny řezu)."

Normály cylindridy $m M$, $m M_1$ jsou prostorové normály řezu a promítají se do roviny řezu jako normály tohoto; tudíž jsou přímky $m M'$ a $m M'_1$ normály průmětu řezu, a kružnice opsaná ze středu m poloměrem $m M' = m M'_1$ dotýká se v bodech M', M'_1 uvažovaného průmětu. Mocnost bodu G pro tento kruh jest $G M' . G M'_1 = \overline{(D) (M)} . \overline{(D) (M_1)} = \overline{G (D)}^2 = z^2$, t. j. také tento kruh protíná orthogonálně pevný kruh (G, z), jehož střed je G a poloměr z.

„Půdorys řezu $z =$ konst. rovnoběžného s rovinou základní na cylindridě, jest obálkou kružnic, které mají své středy na čáře centrální c a protínají orthogonálně pevný kruh (G, z)."

Je to tedy — jakož i čára sama — křivka anallagmatická,[1]) s řídícím kruhem anallagmatie (G,z) a deferentou c.

Dále jsou též shodny trojúhelníky $Q T G$ a $Q P (M_1)$, z čehož plyne, že součet úhlů $(M_1) Q P$ a $G Q T$ jest 90^0, čili že body $T Q (M_1)$ jsou na přímce. Tedy přímka $Q (M_1)$ a symetrická s ní $Q (M)$ jsou tečny kruhu (G, z); přenesen do prostoru, vyjadřuje se tento výsledek větou:

„Poloměry kruhů Γ příslušné k bodům řezu $z =$ konst. na cylindridě dotýkají se pevné koule (G, z)."

* * *

U plochy kotálnic 4. stupně je deferentou kruh (a); čáry s kruhovou deferentou jsou sice známy, ale z methodických důvodů odvodíme jich základní vlastnost zde přímo.

Pro kruhovou deferentu máme souřadnice bodu $p = a \cos \varphi$, $q = a \sin \varphi$, který je středem obaleného kruhu

$$x^2 + y^2 - 2 p x - 2 q y + n = 0.$$

[1]) Pro historii i výklad těchto pojmů viz G. Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, dále též G. Koenigs, Leçons de l'Agrégation classique (1892).

Tento kruh má protínati orthogonálně řídící kruh středu $H\ (h, 0)$ a poloměru c; délka tečny z bodu H k obalenému kruhu má čtverec

$$c^2 = h^2 - 2\,p\,h + n\,,$$

a tedy je soustava obalených kruhů

$$x^2 + y^2 - 2\,p\,(x - h) - 2\,q\,y + c^2 - h^2 = 0\,.$$

Pomocí parametru $u = e^{i\varphi}$ máme vyjádření

$$2\,p = a\,\frac{u^2+1}{u}\,,\quad 2\,q = -\,i\,a\,\frac{u^2-1}{u}\,,$$

a rovnice kruhu se píše

$$(x^2 + y^2 + c^2 - h^2)\,u = a\,(x - h - i\,y)\,u^2 + a\,(x - h + i\,y).$$

Obalová čára kruhů těchto má tedy rovnici

$$\text{(I)}\qquad (x^2 + y^2 + c^2 - h^2)^2 = 4\,a^2\,[(x - h)^2 + y^2]\,,$$

a je zřejmo, že ji obdržíme z rovnice plochy kotálnic pro $h = g$, $z = c$.

Buď nyní r průvodič bodu na čáře z pólu H, a r_1 průvodič téhož bodu z pólu $K\ (k, 0)$, k libovolné;

$$r^2 = (x - h)^2 + y^2,\quad r_1^2 = (x - k)^2 + y^2.$$

Z rovnice (I) plyne

$$x^2 + y^2 = 2\,a\,r + h^2 - c^2,$$

a tak vychází z posledních rovnic

$$r_1^2 = 2\,a\,r + h^2 + k^2 - c^2 - 2\,k\,x,\quad r^2 = 2\,a\,r + 2\,h^2 - c^2 - 2\,h\,x,$$

a vyloučením x plyne odtud

$$h\,r_1^2 = k\,r^2 + 2\,a\,(h - k)\,r + A\,,$$
$$A = (h^2 + k^2 - c^2)\,h - (2\,h^2 - c^2)\,k\,.$$

Veličinu k zvolíme nyní tak, aby se výraz pro r_1^2 dal odmocniti; k tomu máme diskriminant

$$a^2\,(h - k)^2 - A\,k = 0,$$

což dává pro neznámou k rovnici stupně 3.

$$h\,k^3 - (2\,h^2 - c^2)\,k^2 + h\,(h^2 - c^2)\,k - a^2\,(k - h)^2 = 0\,.$$

Rovnici té hoví patrně hodnota $k = h$, a zbývá rovnice stupně 2.

$$\text{(II)}\qquad h\,k^2 - (a^2 + h^2 - c^2)\,k + a^2\,h = 0\,.$$

Zvolíme-li za k kořen této rovnice,[1]) podá nám hořejší vztah mezi r a r_1 po odmocnění

$$\text{(III)} \qquad \sqrt{\frac{h}{k}}\, r_1 = r + a\,\frac{h-k}{k} \quad (r = \pm \overline{HM},\ r_1 = \pm \overline{KM}),$$

kterážto vlastnost charakterisuje Cartesiovy ovály s ohnisky H, K. Bod K zastupuje body dva určené rovnicí (II), a tak nacházíme všecka tři ohniska oválu (I).

Pro $c = 0$ je čára Pascalovou závitnicí, a rovnice (II) má řešení $k = h$, $k = \dfrac{a^2}{h}$, takže dvě ohniska splývají v bodě H.

Název ohniska tu dlužno bráti ve starším smyslu — nikoli Plückerovském — a jsou tyto body vlastně středy řídících kruhů dvou dalších anallagmatií, jež se u těchto křivek vyskytují. Deferenta příslušná ke kruhu řídícímu (K, c_1) je kruh

$$x^2 + y^2 = a^2 + h^2 - c^2 - hk \equiv a^2\frac{h}{k},$$

jak snadno vychází dle známých rovnic,[2]) což ostatně je v souhlase s rovnicí (III).

U plochy kotálnic máme pro řez $z = c$, $h = g$, rovnice (II) zní

$$g k^2 - (a^2 + g^2 - z^2)\, k + a^2 g = 0,$$

deferentní kruhy v rovině $z =$ konst. hoví rovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + g^2 - g k;$$

vyloučíme-li z posledních rovnic literu k, obdržíme při označení

$$S = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - g^2$$

rovnici plochy

$$S^2 + (a^2 + g^2 - z^2)\, S + a^2 g^2 = 0,$$

která je souhrnem deferentních kruhů pro řezy $z =$ konst. na ploše kotálnic, příslušných k anallagmatiím s póly K (různými od pólu základního G). Je to patrně plocha rotační s osou Oz.

[1]) Kořeny k této rovnice určí se jako úsečky x průsečných bodů osy Ox s kruhem

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 + h^2 - c^2}{h}\, x + a^2 = 0,$$

který protíná kolmo kruh deferentní (a), kruh řídící (H, c) a osu Ox.

Nový kruh řídící (K, c_1) je rovněž kolmý na kruh (H, c) — veškery tři kruhy řídící a osa Ox se protínají orthogonálně.

Tudíž je c_1^2 mocnost kruhu (H, c) v bodě $(k, 0)$

$$c_1^2 = (k - h)^2 - c^2.$$

[2]) Na př. G. Koenigs, l. c. str. 154 a násl.

Rovnici její lze zjednodušiti na

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - g^2)(x^2 + y^2) + a^2 g^2 = 0\,,$$

polární rovnice meridianu (pól O, osa $O\,z$) zní

$$\sin \varphi = \frac{a\,g}{r\sqrt{a^2 + g^2 - r^2}}\,.$$

Póly anallagmatií K opisují čáru 3. stupně v nárysně

$$g\,(x^2 + a^2) - (a^2 + g^2 - z^2)\,x = 0,\quad (x = k)\,.$$

Diskriminant rovnice pro k

$$(a^2 + g^2 - z^2)^2 - 4\,a^2 g^2 = [(a + g)^2 - z^2]\,.\,[(a - g)^2 - z^2]$$

vymizí pro $\pm z = a - g$ a pro $\pm z = a + g$, je kladným pouze pro

$$|\,z\,| < |\,a - g\,|\,,$$

řezů realných. Realné řezy $z =$ konst. plochy kotálnic 4. stupně mají tedy všecky tří póly G, K, K' realné pouze v případě

$$|\,z\,| < |\,a - g\,|\,.$$

Pro $z = \pm\,(a - g)$ se rovina řezu plochy dotýká, řezy ty jsou Pascalovy závitnice.[1])

Anallagmatické čáry, jichž deferenta je kuželosečka, jsou t. zv. čáry cyklické (cycliques)[2]). Obecně má cyklika čtvero anallagmatií, jichž vzájemná souvislost je vyjádřena větami:[3])

1° Řídící kruhy různých anallagmatií se protínají orthogonálně.

2° Jejich deferenty jsou kuželosečky o společných ohniscích.

3° Diagonální body čtyřhranu průseků řídícího kruhu s příslušnou deferentou (vrcholy společného autopolárního trojúhelníka) tvoří středy řídících kruhů ostatních tří anallagmatií.

U oválu Cartesiova jeden střed padá do nekonečna, kruh řídící přechází v osu čáry, anallagmatie nahražena souměrností. Svazek kruhů určený kruhem řídícím a deferentním obsahuje dva kruhy nullových poloměrů, jichž středy jsou póly zbývajících dvou anallagmatií (sestrojí se jako průseky s kruhem orthogonálním k oběma kruhům základním).

U řezu $z =$ konst. na ploše kotálnic 4. stupně máme řídící kruh

$$(x - g)^2 + y^2 - z^2 = 0\,,$$

nový kruh řídící má střed $K\,(k, 0)$ a je kolmý k tomuto kruhu; čtverec jeho poloměru rovná se mocností bodu K

$$(k - g)^2 - z^2\,,$$

---

[1]) Vychází tu $k = a$, tedy $k - h = a - g = \pm\,c$, takže skutečně $c_1 = 0$.

[2]) Darboux, l. c.

[3]) Pro výklad srovnej Koenigs, l. c. str. 154.

a rovnice řídícího kruhu se středem K $(k, 0, z)$ jest

$$(x-k)^2 + y^2 = (k-g)^2 - z^2,$$

t. j.

$$x^2 + y^2 + z^2 - g^2 = 2\,k\,(x-g)\,.$$

Vložíme-li hodnotu k odtud vycházející do rovnice pro k, obdržíme

$$g\,(x^2+y^2+z^2-g^2)^2 + 2\,(z^2-a^2-g^2)\,(x^2+y^2+z^2-g^2)\,(x-g) + 4\,a^2\,g\,(x-g)^2 = 0$$

jakožto rovnici plochy, která je souhrnem řídících kruhů (nových) dvou anallagmatií, a která je tedy stupně 5.

* * *

Buď nyní R libovolná rovina různoběžná s přímkou $O\,z$, stanovme její řez s cylindridou určenou centrální čarou c a pólem G; přímka $G\,z$ protíná rovinu R v bodě G_0, ten zvolme za střed koule Σ_0, která se dotýká základní roviny v bodě G. Inverse o řídící kouli Σ_0 nemění plochu, a také nemění rovinu, tedy řez roviny R s cylindridou je čára anallagmatická s pólem G_0, jejíž řídící kruh k_0 je průseč koule Σ_0 s rovinou R.

Buďtež M, M_1 průsečíky roviny R s libovolným kruhem Γ na cylindridě, Q jeho střed a m příslušný bod na čáře centrální; symetrální rovna Π bodů M, M_1 stojí kolmo na rovině kruhu Γ a obsahuje bod Q, prochází tedy přímkou $Q\,m$. Vedeme-li z bodu m přímku n stálého směru kolmého na rovinu R, bude rovina Π totožná s rovinou $Q\,m\,n$; rovina tato však obaluje válec směru n, jehož řídící čarou je čára c, a tento válec protíná rovinu R v čáře, jejíž tečna je průseč rovin $R\,\Pi$; tato průseč je však osou symetrie bodů M, M_1, a tedy je průseč uvažovaného válce s rovinou R deferentou řezu; odtud věta:

„Řez libovolné roviny R s cylindridou (c, G) je čára anallagmatická, která má za deferentu pravoúhlý průmět čáry centrální c do roviny řezu, a za řídící kruh průseč roviny s koulí, která má střed v průseku roviny R s přímkou $G\,z$ a dotýká se základní roviny v bodě G."

Přechodem limitním seznáme, že věta platí také pro roviny obsahující pól G; zde jeden z bodů dvojice splyne s bodem G, takže uvažujeme rovinu souměrnosti Π bodů G, M; výsledek je týž, pokud se týče deferenty. Body čáry průsečné M strojíme pak tím, že na tečny deferenty spouštíme z bodu G kolmice a prodlužujeme je na dvojnásobnou délku. Zvětšíme-li na dvojnásobné rozměry obrazce v rovině řezu, nechávajíce bod G jako střed podobnosti stálým, *jeví se řez jako úpatnice čáry podobné deferentě, a dvojnásobných rozměrů.*

Řezy s rovnoběžnými rovinami mají shodné deferenty, středy G_0 řídících kruhů šinou se po přímce $G\,z$, poloměry jejich $G\,G_0$ rostou úměrně se vzdáleností roviny od bodu G. U plochy kotálnic 4. stupně jsou deferenty rovinných řezů ellipsy, pro póly ležící na $G\,z$, řezy jsou tedy čáry cyklické. Řez s rovinou tečnou má dvojný bod, jenž splývá s jedním z nových pólů (vlastně splývají v něm póly dva) a čára jest úpatnicí ellipsy.

Padne-li střed deferenty do bodu G_0 — středu anallagmatie — je řez plochy kotálnic dvojnásob symetrická cyklika, mající dvojí anallagmatii se středem G_0, opačných mocností, takže je čára tato druhem Perseových spirik.

Uvažovaná okolnost nastane pro roviny R vedené různými body G_0 přímky $G\,z$ kolmo na paprsky $O\,G_0$; roviny ty obalují tedy parabolický válec směru $O\,y$, jehož nárysná stopa jest protiúpatnicí přímky $G\,z$, pro pól O. —

Jako další příklad uvažujme cylindridu, pro niž čára středů (c) jest ellipsa s velkou polouosou $O\,A = a$, malou $O\,B = b$, a pro niž pól G je v ohnisku ellipsy; na $G\,z$ určíme bod G_0, jehož vzdálenost $O\,G_0$ od středu ellipsy $= a$, a vedeme rovinu R kolmou na $O\,G_0$. Do této roviny promítá se ellipsa v kruhu poloměru b o středu G_0, kterýžto kruh je zároveň řez roviny R s koulí $(G_0,\, G_0\,G)$. Pro řez plochy uvažované s rovinou R splyne deferenta s kruhem řídícím a čára se redukuje na kruh řídící dvakrát vzatý: Rovina R dotýká se plochy podél řídícího kruhu anallagmatie $(G_0,\, b)$.

Rovnice plochy zní tu

$$(x^2 + y^2 + z^2 - g^2)^2 = 4\,a^2\,(x - g)^2 + 4\,b^2\,y^2;\quad g^2 = a^2 - b^2.$$

* * *

Cylindridy jsou krajní případ ploch, které sestávají z řady kruhů Γ procházejících dvěma pevnýma body $H,\, H'$, které nazveme póly. Inversí z pólu H převádí se taková plocha v plochu kuželovou, a proto nazveme tyto plochy *konidami*. Povrchové kruhy Γ jsou křivoznačnými čarami konidy; rovina souměrnosti bodů $H,\, H'$ (jdoucí středem G délky $H\,H'$ kolmo na tuto) seče konidu v křivoznačné čáře druhé soustavy, kteroužto čáru d nazveme *čarou řídící*, rovinu samu pak *základní*, berouce ji za rovinu $x\,y$.

Základní rovina obsahuje středy kruhů Γ vesměs na ni kolmých; kruhy Γ ji sekou ve dvou bodech na paprscích svazku G; jsou-li tyto body M a M_1, platí

$$(A)\qquad G\,M.\;G\,M_1 = -c^2,$$

značí-li c délku $G\,H$ (realnou neb ryze pomyslnou).

Je-li dána řídící čára d, bude jí přiřaděna tímto způsobem jako doplněk čára d_1, obsahující druhé stopy kruhů Γ, a obě čáry vespolek souvisí inversí (A), jejíž řídící kruh je realný, jsou-li body $H,\, H'$ pomyslné, a naopak.

Je-li čára d anallagmatická pro pól G a mocnost $-c^2$, pak splývají čáry $d,\, d_1$, a stopa plochy konidy na základní rovině sestává z jediné křivky; v opačném případě se tato stopa rozpadá v křivky různé d a d_1. Normály konidy podél kruhu Γ tvoří rotační kužel, jehož vrchol m leží na rovině základní a je průsekem normál čar d a d_1 v bodech M a M_1; geometrické místo bodů m je *čára centrální* (c). Tečna čáry centrální v bodě m je přímka $m\,Q$, osa symetrie bodů M a M_1, a čáry d, d_1 dohromady se jeví jako obálka kruhů o středech m a poloměrech $mM = = mM_1$; t. j. čára středů (c) je deferenta anallagmatické čáry $d\ d_1$.

Položme počátek souřadnic do bodu G; koule $\mathfrak{K}$, která má střed na $G\,z$ a protíná kouli nad průměrem $H\,H'$

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 = 0$$

orthogonálně, má rovnici

$$(\mathfrak{K}) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2\,k\,z + c^2 = 0;$$

tato koule protíná orthogonálně veškery kruhy Γ a stanoví na ploše konidě *křivoznačku*. Střed koule $\mathfrak{K}$ (0, 0, k) znamenejme K, průseky koule s osou $G\,z$ jsou K_1, K_2

$$z = k \pm \sqrt{k^2 - c^2}, \quad x = y = 0;$$

zvolme jeden z nich na př. K_1 za pól inverse na kouli (R), která protíná orthogonálně kouli nad průměrem $H\,H'$. Touto inversí přechází koule $\mathfrak{K}$ v rovinu, křivoznačka v křivoznačnou čáru rovinnou, t. j. rovina ta je rovina základní, a křivoznačka se transformuje ve stopu plochy $d\,d_1$.

Poloměr koule R skutečně hoví rovnici

$$R^2 = (k + \sqrt{k^2 - c^2})^2 - c^2,$$

a vztah

$$K_1 K_2 .\ K_1 G = R^2$$

zní

$$2\sqrt{k^2 - c^2}\,(k + \sqrt{k^2 - c^2}) = R^2,$$

a jest očividně správným; rovina základní $G\,x\,y$ je tedy skutečně inversně příslušná ke kouli $\mathfrak{K}$.[1])

---

[1]) Předpokládejme body H, H' pomyslné, kdy tedy veličina $c^2 = -a^2$ je záporna; obalené koule budou pak charakterisovány podmínkou, že jejich stopní kruhy protínají orthogonálně řídící kruh anallagmatie (G, a)

$$(\Sigma) \qquad x^2 + y^2 = a^2, \; z = 0.$$

Koule $\mathfrak{K}$ obsahující křivoznačky

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,k\,z - a^2 = 0$$

pak procházejí tímto pevným kruhem Σ.

Okolnost tu lze ještě jinak vysvětliti. Volme na kruhu Σ libovolný bod P a proveďme inversi (s libovolným poloměrem) se středem P; tou přejde kruh Σ v přímku (s), anallagmatie ze změní v souměrnost vůči ose s, kruhy Γ přejdou v kruhy Γ' protínající orthogonálně základní rovinu ve dvou bodech souměrně vůč s ležících, t. j konida přechází naší inversí v plochu rotační (kolem osy s). Její křivo značky (meridiany) leží na rovinách svazku s a ty zpětnou inversí přecházejí v koule vedené řídícím kruhem Σ. Koule svazku Σ tedy vytínají na konidě křivoznačky.

V obecném případě, kdy se stopa konidy $d\, d_1$ rozpadá, rozpadají se tedy také její křivoznačky, neboť se rozpadají kužele, jimiž se tyto čáry z bodů K_1 a K_2 promítají.

Větev křivoznačky, která se z bodu K_1 promítá ve větev d (d_1), promítá se z bodu K_2 ve větev d_1 (d).

Buď nyní P bod na křivoznačce, m vrchol kužele normál podél jeho kruhu Γ, M bod na stopě plochy; pak rovina $M\, m\, P$ obsahuje jeden z pevných bodů K_1, K_2, na př. K_1; rovina ta obsahuje normálu konidy $m\, P$. Šine-li se bod P do polohy nekonečně blízké na křivoznačce, otáčí se přímka $M\, m$ — normála čáry d — kolem její středu křivosti s, tedy rovina $M\, m\, P$ se otáčí kolem přímky $s\, K_1$; na této přímce jako průsečnici nekonečně blízkých poloh roviny $M\, m\, P$ nachází se průsek nekonečně blízkých poloh normály $m\, P$, t. j. střed hlavní křivosti S konidy, bod na úvratnici rozvinutelné plochy normál.

„Rozvinutelná plocha normál podél křivoznačky určené koulí $\mathfrak{K}$ má tedy úvratnici, která se z bodu K_1 (K_2) promítá v evolutu čáry d (d_1) [po případě v opačném pořádku d_1 (d)].

Buďte s, s_1 středy křivosti v libovolném páru $M\, M_1$ sdružených bodů na stopě konidy; body $K_1\, K_2\, s\, s_1$ určují úplný čtyřhran, jehož jeden diagonální bod je G,[1]) a druhé dva diagonální body jsou středy hlavní křivosti v bodech P a P_1 na křivoznačce příslušných k bodům M a M_1.

Podržme kruh Γ určený stopama $M\, M_1$ jako pevný, buď P jeho libovolný bod; jemu pak odpovídá dvojice bodů $K_1\, K_2$ na $G\, z$, jako průsečíky s koulí, na níž leží křivoznačka procházející bodem P.

Přímky $K_1\, s_1$, $K_2\, s$ spojující K_1, K_2 se středy křivosti stopy konidy se protínají ve středu hlavní křivosti S na normále bodu P.

Bod S leží tedy na rovině obsahující přímku $G\, z$ a oba body s, s_1:

„Centrální plocha konidy obsahuje řadu kuželoseček, ve kterých určité roviny svazku $G\, z$ protínají příslušné rotační kužele normál."

Bodům na daném kruhu Γ příslušné normály tvoří rotační kužel, a středy křivosti leží na rovině $G\, z\, s\, s_1$, která je na stranách kužele vytíná.

Uvažujme nyní zvláštní případ:

Jsou-li čáry $d\, d_1$ kruhy (resp. kruh a přímka) — případ *cyklidy Dupinovy* — jsou body s a s_1 stálé jejich středy (resp. bod úběžný na normále přímky), bod m je průsek poloměrů $s\, M$ a $s_1\, M_1$, body S a S_1 jsou stálé, křivoznačka se rozpadá ve dva kruhy na kouli $\mathfrak{K}$ — leží z důvodu symetrie na rovinách kolmých na nárysnu $G\, x\, z$, jakmile s, s_1 leží na $G\, x$, což možno zaříditi — a body S, S_1 jsou vrcholy rotačních kuželů normál

[1]) Středy křivosti čáry původní a čáry inversní leží vždy na přímce procházející pólem inverse.

podél těchto kruhů; jsou to průseky přímek v rovině $G\,x\,z$: $(K_1\,s,\ K_2\,s_1)$, $(K_1\,s_1,\ K_2\,s)$.

Páry $K_1\,K_2$ probíhají involuci sdružených bodů vůči kouli nad průměrem $H\,H'$ $(G\,K_1 \cdot G\,K_2 = c^2)$; involuce ta se promítá ze středů s, s_1, čímž se vytvořuje čára centrální v rovině nárysu.

Centrální čára v půdorysu má tečnu $m\,Q$, která půlí úhly průvodičů $m\,s$, $m\,s_1$; je to kuželosečka s ohnisky s, s_1.

Její vrcholy jsou středy kruhů v rovině $G\,x\,z$ (nárysné stopy plochy). Naopak má centrální čára v nárysu za ohniska středy kruhů nárysných a vrcholy ve středech kruhů půdorysných s, s_1, jak se o tom snadno je přesvědčiti. Obě kuželosečky jsou si navzájem fokálami. —

* * *

Povahu rovinných řezů libovolné konidy možno stejně jednoduše vystihnouti, jako jsme viděli u cylindridy. Průsek G_0 roviny řezu s osou $G\,z$ je středem anallagmatie, jejíž řídící kruh leží na kouli soustředné, protínající orthogonálně kruhy Γ; deferentou (c') řezu je pravoúhlý průmět centrální čáry (c) do jeho roviny.

Prochází-li rovina jedním ze základních bodů (pólů) H, H', jeví se řez jako úpatnice čáry podobné s čarou (c') a dvojnásobných rozměrů.

Středy křivosti rovinných řezů na cylindridě neb konidě možno sestrojiti na základě tečných rovin plochy normál. Průmět plochy normál (obrys) do roviny řezu jest jeho evoluta; rovina vedená povrchovou přímkou plochy normál kolmo na rovinu řezu dotýká se plochy normál v bodě, jehož průmět je střed křivosti řezu.

Na ploše normál známe centrálu (c) a řez roviny s plochou (cylindridou neb konidou), k oběma umíme sestrojiti tečnu; známe-li ještě jednu čáru na ploše normál, k níž dovedeme vésti tečnu, můžeme řešiti předložený problém pomocí tečného hyperboloidu.

V případě řezu $z =$ konst. na ploše kotálnic $a = c$ víme, že normály protínají pevnou přímku $(O\,G_0)$; zde řešení je poměrně jednoduché.

Princip této methody platí také o libovolné ploše kotálnic sférických, poněvadž k její řezům známe konstrukci normál.

* * *

Konida je obalová plocha koulí (počátek souřadnic G)

$$(\Sigma) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2\,x_0\,x - 2\,y_0\,y - c^2 = 0,$$

kde x_0, y_0 je bod na centrále; povrchové kruhy Γ jsou průseče této koule s rovinou

$$(\Gamma) \qquad x\,dx_0 + y\,d\,y_0 = 0,$$

jež zřejmě stojí kolmo na tečně čáry centrální. Obě rovnice (Σ) a (Γ) dohromady dávají tedy eliminací parametru na centrále rovnici konidy (která přechází v cylindridu pro $c = 0$).

VII.

Buď S libovolná koule

(S) $$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,k\,x - 2\,l\,y - 2\,m\,z + n = 0;$$

její pronik s konidou hoví rovnicím

(Π) $$2\,k\,x + 2\,l\,y + 2\,m\,z - n - (2\,x_0\,x + 2\,y_0\,y + c^2) = 0$$

a rovnici (Γ), z čehož vychází, že průsečnice konidy s koulí S leží na rozvinutelné ploše, kterou obaluje rovina Π; přímka této plochy je průsečnice s rovinou Γ, takže protíná osu $G\,z$, a sice ve stálém bodě V

$$z = \frac{c^2 + n}{2\,m}.$$

Rovina Π je patrně radikální (chordální) rovina koulí S a Σ.

Dále protíná radikální rovina koulí S a

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 = 0$$

osu $G\,z$ ve zmíněném právě bodě V.

Tedy můžeme vysloviti větu:

„Průseč koule S s konidou, která jest obálka koulí Σ, leží na ploše kuželové s vrcholem V na $G\,z$; tato plocha kuželová jest obálkou radikálních rovin (S, Σ) koulí S a Σ, a její přímky jsou průsečnice těchto rovin s příslušnými rovinami (Γ).

Pro kouli $S \equiv \mathfrak{K}$ vytínající křivoznačku na konidě

($\mathfrak{K}$) $$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,k\,z + c^2 = 0$$

máme pro souřadnice bodu $V\left(0,\,0,\,\frac{c^2}{k}\right)$, takže v případě cylindridy ($c = 0$) leží vrchol kužele v bodě G.

Roviny radikální (S, Σ) protínají kouli S v kruzích (k), jež naše čára obaluje; sférické středy těchto kruhů leží na průměru koule S, jenž prochází středem m koule Σ, takže

„průseč koule S s konidou je sférická anallagmatika, jejíž deferenta leží na kuželi, kterým se centrála (c) promítá ze středu koule S. Řídící kruh anallagmatie leží na polární rovině bodu V.

U plochy kotálnic 4. stupně (počátek souřadnic O)

$$(x^2 + y^2 + z^2 - g^2)^2 = 4\,a^2\,[(x - g)^2 + y^2]$$

a pro kouli S

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,k\,(x - g) - 2\,l\,y - 2\,m\,z + n = 0$$

zní rovnice kužele

$$\left[k\,(x - g) + l\,y + m\left(z - \frac{n + g^2}{2\,m}\right)\right]^2 = a^2\,[(x - g)^2 + y^2].$$

Řezy z = konst. na tomto kuželi jsou kuželosečky s ohniskem na ose Gz, řídící přímka leží na radikální rovině koulí S a

$$x^2 + y^2 + z^2 = g^2.$$

U konid (a cylindrid) s kruhovou centrálou (c), které tedy jsou zvláštní Darbouxovy cyklidy, budou míti deferentu složenou ze dvou kruhů čáry na koulích S, jichž středy leží se středem kruhu (c) na rovnoběžce s Gz, neboť se tu sférická deferenta jeví jako průsek koule S s kuželem rotačním; sférická čára pak rovněž leží na kuželi rotačním s vrcholem V, kterýžto kužel jest reciproký předešlého.

U plochy kotálnic máme kouli S (počátek O)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2kz + n = 0,$$

a rovnice kužele (V) zní

$$(2kz - n - g^2)^2 = 4a^2[(x-g)^2 + y^2].$$

Leží-li bod G na kouli S, je průseč kotálnicí α = konst.

Buď O střed centrální čáry kruhové (c) v rovině xy; koule mající středy na Oz a procházející jedním z bodů H, H' (g, 0, $\pm c$) sekou konidu v čáře na rotačním kuželi, jehož vrchol leží na kouli; průseč ta je tedy sférická kotálnice 4. stupně.

Na konidě s kruhovou centrálou máme tedy dvě řady sférických kotálnic, jichž dvojné body jsou společny H, resp. H'; u cylindridy tyto dvě řady splývají.

Výjimku v předcházejících úvahách tvoří koule S, jichž středy leží na rovině základní; pro ně jsou radikální roviny (Σ, S) kolmé na rovinu Gxy a obalují válec kolmý na tuto rovinu; zde tedy bod V zapadá do nekonečna.

U plochy kotálnic máme pro kouli S

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2p(x-g) - 2qy + n = 0$$

rovnici válce

$$[2p(x-g) + 2qy - n - g^2]^2 = 4a^2[(x-g)^2 + y^2].$$

Prochází-li koule bodem G, rozpadá se válec ve dvě roviny, řez ve dva kruhy Γ; neboť v tom případě $n + g^2 = 0$. Jinak je základnou válce kuželosečka s ohniskem G, jejíž řídící přímka je stopa radikální roviny koulí

$$S \text{ a } x^2 + y^2 + z^2 = g^2,$$

výstřednost

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{a}.$$

Poněvadž strojíme hned její tečny [stopy radikálních rovin (S, Σ)], obdržíme vrcholovou kružnici jako úpatnici z pólu G.

* * *

VII.

Úvahy tyto lze přenésti na libovolnou plochu kotálnic; tato jest obalová plocha koulí

$$(\Sigma) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2\,c\,x \cos\psi - 2\,c\,y \sin\psi = a^2 + g^2 - c^2 - 2\,a\,g \cos\varphi,$$

její průseč s koulí

$$S) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2\,k\,x - 2\,l\,y - 2\,m\,z + n = 0$$

je pak na obalové ploše rovin

$$2\,k\,x + 2\,l\,y + 2\,m\,z - n - 2\,c\,x \cos\psi - 2\,c\,y \sin\psi$$
$$= a^2 + g^2 - c^2 - 2\,a\,g \cos\varphi,\ (a\,\varphi = c\,\psi),$$

t. j.

„pronik plochy kotálnic (a, c, g) s koulí S leží na rozvinutelné ploše, kterou obalují radikální roviny koulí S a Σ; povrchové přímky leží na rovinách kruhů Γ."

Veškery úvratnice těchto ploch rozvinutelných mají společný půdorys, známou nám obalovou čáru stop rovin kruhů Γ.

Kotálnice $\alpha =$ konst. leží na kouli (3)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\,\frac{a - c\cos\alpha}{\sin\alpha}\,z + c^2 - a^2 + g^2;$$

leží tedy na obalové ploše rovin $(a\,\varphi = c\,\psi)$

$$(\Pi) \qquad \frac{a - c\cos\alpha}{\sin\alpha}\,z - c\,x\cos\psi - c\,y\sin\psi + c^2 - a^2 + a g\cos\varphi = 0.$$

Ta je v případě $c = 2\,a$, $\varphi = 2\,\psi$ třídy 4., tedy útvar poměrně jednoduchý.

Avšak významná vlastnošt všem těmto plochám společná je, že obalené roviny svírají stálý úhel γ s rovinou základní,

$$tg\,\gamma = \frac{c\sin\alpha}{a - c\cos\alpha}.$$

Jejich úvratnice jsou tedy čáry šroubové.

Výjimku tvoří kotálnice, pro něž $a = c\cos\alpha$; pro ty se redukuje rozvinutelná plocha na válec kolmý na rovinu základní. — Rovina Π je kolmá na rovinu kruhu Γ, t. j. rozvinutelná plocha naše protíná orthogonálně roviny kruhů Γ podél svých přímek. Z rovnice (Π) máme derivováním postupně

$$c\,x\sin\psi - c\,y\cos\psi - c\,g\sin\varphi = 0$$
$$c\,x\cos\psi + c\,y\sin\psi - \frac{c^2}{a}\,g\cos\varphi = 0,$$

poslední rovnice spolu s (Π) dává

$$\frac{a - c\cos\alpha}{\sin\alpha}\,z + c^2 - a^2 - \frac{c^2 - a^2}{a}\,g\cos\varphi = 0,$$

t. j. pro bod na úvratnici platí

$$z = -\frac{c^2 - a^2}{a} \frac{\sin\alpha}{a - c\cos\alpha}(a - g\cos\varphi),$$

dále

$$x = \frac{c}{a} g\cos\varphi\cos\psi + g\sin\varphi\sin\psi,$$

$$y = \frac{c}{a} g\cos\varphi\sin\psi - g\sin\varphi\cos\psi.$$

Tato čára šroubová leží na rotační ploše 2. stupně

$$x^2 + y^2 - \frac{h^2}{c^2 - a^2}\left(z + \frac{c^2 - a^2}{h}\right)^2 = g^2,$$

$$h = \frac{a - c\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

která jest pro $c > a$ jednoplochý hyperboloid a pro $c < a$ sploštělý ellipsoid. Hlavní kruhy této plochy leží na válci $x^2 + y^2 = g^2$.[1])

Tedy kotálnice sférická jeví se v případě $c \gtrless a$ jako průseč koule s plochou tečen určité šroubovice na rotační ploše 2. stupně.

Tato šroubovice stane se sférickou pouze v případě

$$h^2 = a^2 - c^2,$$

t. j. pro $c = a\cos\alpha$, kdy také kotálnice sama je šroubovicí, a sice v tomto případě obě čáry splývají.

Průsečnici rovin Π a (Γ) nazveme $\bar{\omega}$; rovnice této přímky jsou tedy

$$(\bar{\omega})\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{a - c\cos\alpha}{\sin\alpha} z = c\,x\cos\psi + c\,y\sin\psi + a^2 - c^2 - a\,g\cos\varphi, \\ x\sin\psi - y\cos\psi = g\sin\varphi,\ a\varphi = c\psi. \end{array}\right.$$

---

1) Výpočet neplatí pro případ $h = 0$ t. j. $a = c\cos\alpha$, kdy rozvinutelná plocha je válcová.

Fokální kruh na rotační ploše příslušné ke kotálnici α leží na rovině

$$z = \frac{a^2 - c^2}{h}$$

a má poloměr

$$r = g\frac{c - a\cos\alpha}{a - c\cos\alpha};$$

veškery fokální kruhy tvoří rotační plochu 2. stupně, jejíž meridian má parametrické vyjádření

$$x = g\frac{c - a\cos\alpha}{a - c\cos\alpha},\quad z = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\alpha}\sin\alpha,$$

a pro niž se nalezne rovnice

$$\frac{x^2 + y^2}{g^2} + \frac{z^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

VII.

Souhrn přímek ϖ příslušných k parametru α = konst. tvoří rozvinutelnou plochu (ϖ_α) protínající plochu kotálnic podél kotálnice α = konst., kterážto rozvinutelná plocha protíná orthogonálně veškery roviny kruhů (Γ) podél svých povrchových přímek.

Různým kotálnicím příslušejí různé plochy (ϖ_α), které však mají společnou stopu f na rovině základní $z = 0$.

Přímky ϖ příslušné k témuž φ tvoří svazek v rovině kruhu Γ_φ, jehož středem je bod na čáře f. Veškery přímky ϖ při neodvislých α a φ tvoří kongruenci; libovolná přímka její seče dvě sousední přímky této kongruence: jedna s ní leží na rovině (Γ_φ), druhá s ní stanoví tečnou rovinu plochy rozvinutelné (ϖ_α); tato rovina a rovina (Γ_φ) jsou fokální roviny kongruence pro přímku ϖ (α, φ); poněvadž zde fokální roviny stojí na sobě kolmo, tvoří přímky ϖ soustavu normál jisté plochy, či vlastně nekonečného množství ploch rovnoběžných (τ).

Máme tak tři soustavy ploch navzájem orthogonálních: roviny (Γ), plochy rozvinutelné (ϖ_α) a plochy (τ).

Řez plochy τ s rovinou (Γ) jest její křivoznačná čára, střed křivosti je bod na čáře f; čára je tedy kružnicí se středem f. Druhou řadu křivoznaček plochy τ tvoří řezy s rozvinutelnými pochami (ϖ); jejich úvratnice dávají plochu centrální plochy τ, t. j. jednu její část. Druhá složka plochy centrální zvrhá se v křivku f, kterou nazveme *centrální čarou* plochy τ.

Aby byla plocha τ určena, stačí znáti na jedné z ploch (ϖ_α) pravoúhlou trajektorii Δ přímek ϖ; plocha je pak souhrn kruhů Φ, které mají své středy na čáře f, leží v rovinách (Γ) normálních na f, a protínají čáru Δ.

Zvolíme-li zvláště α z rovnice

$$a - c \cos\alpha = 0,$$

bude plocha (ϖ_α) válec kolmý na rovinu základní, jehož řídící čarou je křivka centrální f:

$$(f) \quad \begin{cases} x = \left(\dfrac{c^2 - a^2}{c} + \dfrac{a\,g}{c}\cos\varphi\right)\cos\psi + g\sin\varphi\sin\psi \\ y = \left(\dfrac{c^2 - a^2}{c} + \dfrac{a\,g}{c}\cos\varphi\right)\sin\psi - g\sin\varphi\cos\psi \end{cases}$$

aneb ve tvaru imaginárním

$$(f) \qquad x + i\,y = \left(\frac{c^2 - a^2}{c} + \frac{a\,g}{c}\cos\varphi - i\,g\sin\varphi\right)e^{i\psi};$$

čára Δ na válci se základnou f je pak jeho řez s rovinou $z = h$, zvolenou libovolně. Kruhy Φ mají tedy poloměr stálý h, a *plochy* (τ) *jsou rourové plochy o společné centrále* f.

Rovnice přímky ϖ lze psáti

$$(\varpi^*) \quad x + i\,y = \left(\frac{c^2 - a^2}{c} + \frac{a\,g}{c}\cos\varphi + \frac{a - c\cos\alpha}{c\sin\alpha}\,z - i\,g\sin\varphi\right)e^{i\psi},$$

aneb též

$$(\mathbf{8})\qquad \frac{x - x_0}{\cos\psi} = \frac{y - y_0}{\sin\psi} = \frac{z}{tg\,\gamma},$$

kde $x_0\,y_0$ je bod na čáře f, a kde jako výše

$$tg\,\gamma = \frac{c \sin\alpha}{a - c\cos\alpha},$$

takže přímka $\bar{\omega}$ má cosinusy směrné

$$\cos\gamma\cos\psi,\ \cos\gamma\sin\psi,\ \sin\gamma;$$

její úhel s rovinou základní jest právě γ, a je stálý současně s α.

Každé kotálnici na ploše kotálnic odpovídá na ploše rourové určitá čára $\gamma =$ konst.; normály plochy rourové podél této čáry tvoří rozvinutelnou plochu $(\bar{\omega}_a)$, jež obsahuje kotálnici.

Čára f je průmět kotálnice příslušné k podmínce $a = c\cos\alpha$, jak z rovnic (2) bezprostředně vychází; poněvadž je pravoúhlou trajektorií stop rovin (I), jest její evoluta známá hypocykloida, obálka těchto stop.

Délka oblouku čáry f je vyjadřitelná elementárně; máme především

$$dx + i\,dy = i\,e^{i\psi}\left(\frac{c^2 - a^2}{c} - g\,\frac{c^2 - a^2}{a\,c}\cos\varphi\right) d\psi$$

$$= i\,e^{i\psi}\,(a - g\cos\varphi)\,\frac{c^2 - a^2}{c^2}\,d\varphi,$$

tedy pro differenciál oblouku

$$ds = \frac{c^2 - a^2}{c^2}\,|\,a - g\cos\varphi\,|\,d\varphi.$$

Na oblouku, v němž $a - g\cos\varphi$ nemění znamení, je tedy absolutně

$$s = \frac{c^2 - a^2}{c^2}\left[a\,(\varphi - \varphi_0) - g\,(\sin\varphi - \sin\varphi_0)\right].$$

Centrální plocha rourové plochy je souhrn úvratnic ploch $(\bar{\omega}_a)$; pro tyto jsme nalezli výše vyjádření parametrické, jež shrnujeme nyní takto:

$$x + i\,y = \frac{g}{a}\,(c\cos\varphi - i\,a\sin\varphi)\,e^{i\psi},$$

$$z = -\frac{c^2 - a^2}{a\,c}\,tg\,\gamma\,(a - g\cos\varphi);$$

jak bylo již vzpomenuto, leží veškery tyto čáry na válci směru $O\,z$, který obaluje roviny (Γ), a který tedy obsahuje také evolutu čáry f. Tento válec tvoří spolu s čarou f centrální plochu plochy rourové.

Přepišme ještě některé vzorce, aby vynikla v nich role úhlu γ: Rovnice koule obsahující kotálnici jest

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\,c\,cotg\,\gamma\,.\,z + c^2 - a^2 + g^2,$$

rovnice roviny radikální (Σ, S) pak

$$z \operatorname{cotg} \gamma = x \cos \psi + y \sin \psi - \frac{c^2 - a^2 + ag \cos \varphi}{c},$$

a rovnice přímky $\tilde{\omega}$

$$x + i y = \left(\frac{c^2 - a^2}{c} + z \operatorname{cotg} \gamma + \frac{a g}{c} \cos \varphi - i g \sin \varphi\right) e^{i \psi};$$

rotační plocha 2. stupně obsahující úvratnici plochy $(\tilde{\omega}_\alpha)$ má pak rovnici

$$x^2 + y^2 - \frac{c^2 \operatorname{cotg}^2 \gamma}{c^2 - a^2} \left(z + \frac{c^2 - a^2}{c} \operatorname{tg} \gamma\right)^2 = g^2.$$

V případě $c > a$ je to hyperboloid, jehož nejužší kruh leží na rovině

$$z = -\frac{c^2 - a^2}{c} \operatorname{tg} \gamma = \zeta = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cos \alpha} \sin \alpha$$

a má poloměr g, střed na $O z$; přímkový řez $y = g$ má směrnice

$$\pm \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} \operatorname{tg} \gamma = \mp \frac{\zeta}{\sqrt{c^2 - a^2}},$$

takže na hyperboloidu leží přímky

$$y = g, \frac{z}{\zeta} \pm \frac{x}{\sqrt{c^2 - a^2}} = 1,$$

procházející dvěma pevnýma body roviny $O x y$.

Stopa na rovině základní je všem hyperboloidům společná

$$x^2 + y^2 = c^2 - a^2 + g^2,$$

t. j. je to společná stopa koulí obsahujících různé kotálnice dané plochy kotálnic.

Dané hodnotě $\operatorname{cotg} \gamma$ odpovídají dva úhly α, jimž přísluší táž koule a táž rozvinutelná plocha $(\tilde{\omega}_\alpha)$; pronik těchto dvou ploch tedy obsahuje obě tyto kotálnice. Tětivy, jež na přímkách $\tilde{\omega}$ téže rozvinutelné plochy stanoví koule obou kotálnic, jsou štěpeny základní rovinou ve stálém poměru $\sin \alpha_1 : \sin \alpha_2$, kde $\alpha_1\, \alpha_2$ jsou oba úhly α příslušné k úhlu γ. Neboť rovnice přímky $\tilde{\omega}$

$$x = x_0 + z \operatorname{cotg} \gamma \cos \psi, \quad y = y_0 + z \operatorname{cotg} \gamma \sin \psi$$

dávají ve spojení s rovnicí koule rovnici 2. stupně pro neznámou z; její kořeny jsou

$$z_1 = (a - g \cos \varphi) \sin \alpha_1, \quad z_2 = (a - g \cos \gamma) \sin \alpha_2,$$

tedy

$$z_1 : z_2 = \sin \alpha_1 : \sin \alpha_2.$$

Na konec této otázky ještě několik slov o čáře f. Její oblouk obsažený mezi body φ a $\pi - \varphi$ nezávisí na g, pokud $g \leqq a$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi$. V případě

$c = 2a$ má čára f tvar, jenž připomíná ellipsu, pokud $g \leq a$; evoluta je astroida, jež vzniká šinutím stálé délky $2g$ po osách; je-li $g = a$, má čára v bodech $\psi = 0$ (A) a $\psi = \pi$ nekonečnou křivost.

Nazveme střední rovinou rozvinutelné plochy $(\mathfrak{G}_a)$ rovinu hlavního kruhu na rotační ploše 2. stupně, která obsahuje její úvratnici; její rovnice jest

$$z = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\alpha}\sin\alpha = \frac{a^2 - c^2}{c}\,tg\,\gamma.$$

Stopa přímky $\mathfrak{G}$ na této rovině je vyjádřena v komplexním tvaru

$$x + iy = \left(\frac{ag}{c}\cos\varphi - i\,g\sin\varphi\right)e^{i\psi},$$

takže její půdorys nezávisí na α; rovnici tu lze psáti

$$x + iy = \frac{g}{c}\left(\frac{c+a}{2} - \frac{c-a}{2}e^{2i\varphi}\right)e^{i(\psi-\varphi)},$$

a vychází tak věta:

„Řezy rozvinutelných ploch $(\mathfrak{G}_a)$ s jejich středními rovinami leží na společném válci kolmém na základní rovinu, jehož přímý řez je obyčejná kotálnice vzniklá kotálením kruhu poloměru $\pm g\dfrac{c-a}{2c}$ po pevném kruhu (O, g), a sice děje se kotálení po vnitřní straně pevného kruhu, je-li $c > a$, v opačném případě po straně vnější.“

* * *

Uvažujme jako příklad konidy plochu, jejíž centrála je kruh poloměru a, středu O, a jejíž kruhy Γ procházejí dvěma pomyslnýma body osy Gz $(x = g,\ y = 0,\ z = \pm ic)$, takže protínají orthogonálně kouli (c)

$$(x - g)^2 + y^2 + z^2 = c^2.$$

Plocha ta jest obalovou plochou koulí (počátek O)

$$(\Sigma)\qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2a(x - g)\cos\varphi - 2ay\sin\varphi + c^2 - g^2 = 0,$$

které mají své středy m na centrále (a) a protínají orthogonálně kouli (c). Rovnice plochy té zní

$$(P)\qquad (x^2 + y^2 + z^2 + c^2 - g^2)^2 = 4a^2[(x - g)^2 + y^2],$$

a přechází v plochu kotálnic pro $c = 0$; její stopa na rovině základní je Descartesův ovál.[1])

[1]) Rovnici plochy lze psáti ve tvaru

$$S_1 S_2 = 4a^2y^2,$$

načež se obdrží středy dalších dvou anallagmatií jako středy podobnosti koulí $S_1 = 0$, $S_2 = 0$. Kužele opsané ze středů těchto anallagmatií jsou rotační, s osami směru Oz, a tečné roviny kuželů těch sekou plochu v kruzích.

Koule

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\,k\,z - n$$

protíná tuto konidu v čáře na rotačním kuželi

$$(x - g)^2 + y^2 = \frac{k^2}{a^2}\left(z - \frac{n + g^2 - c^2}{2\,k}\right)^2,$$

jehož vrchol leží na $G\,z$, a je vždy mimo kouli, pokud je realná, a pokud $c > 0$.

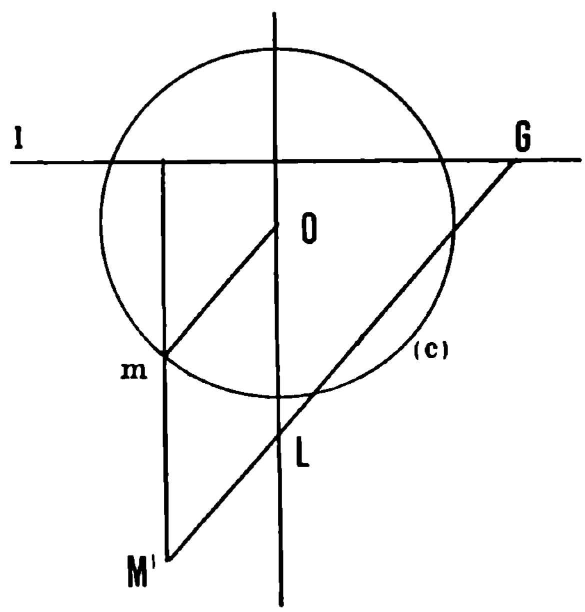
V případě $n = c^2 - g^2$ obsahuje koule body $(g, \pm i\,c, 0)$, takže její stopa protíná orthogonálně stopu koule (c) a má střed O; v tomto případě vrchol kužele je v bodě G. Tyto proniky koulí s rotačními kuželi, s vrcholem G a osou $G\,z$, přecházejí v kotálnice, jakmile $c = 0$.

Plocha uvažovaná je jedním ze zvláštních typů Darbouxových cyklid.

* * *

Buď nyní dána v rovině základní přímka $G\,l$, a hledejme čáru (M) na naší ploše, podél které se tato dotýká opsaného válce směru $G\,l$ (obr. 16.).

Normály plochy v bodech M této čáry jsou kolmé na směr válce $G\,l$, a jejich půdorysy $m\,M'$ (m značí bod na centrále, kterou je zde kruh středu O, poloměru a) budou kolmy na tento směr.



Obr. 16.

Půdorys kruhu Γ příslušného k bodu m je přímka $G\,L\,M'$ rovnoběžná s poloměrem $O\,m$, a protíná přímku $m\,M'$ ($\perp G\,l$) v bodě M', který je půdorys bodu M uvažované vlastnosti.

Veďme přímku $O\,L \perp G\,l$, pak jest obrazec $O\,m\,M'\,L$ rovnoběžník, $L\,M' = Om = a$, a *půdorys* (M') *dotykové čáry je konchoida Nikomedova* s řídící přímkou $O\,L$, konstantou a.

Jde-li o obrys nárysný plochy, je tečný válec rovnoběžný s osou $G\,y$; přímka $O\,L$ tu bude splývati s osou $O\,x$, t. j. obsahuje bod G, délky $G\,L$ vymizejí a půdorys (M') čáry (M) přejde v kruh středu G, poloměru a.

Tedy dotyková čára plochy s opsaným válcem směru $O\,y$ leží na kruhovém válci

$$(x - g)^2 + y^2 = a^2\,.$$

Vložíme-li tuto hodnotu do rovnice plochy, vyjde pro body na dotykové čáře

$$x^2 + y^2 + z^2 + c^2 - g^2 = \pm 2a^2.$$

Spodnímu znamení příslušná koule protíná válec rovněž v čáře na uvažované konidě, ale normály plochy v její bodech nejsou rovnoběžny s nárysnou. O tom lze se přesvědčiti, derivuje-li se rovnice plochy dle y; obdrží se pro dotykovou čáru jednak řešení $y = 0$, jež dává kruhy v nárysně, a, jako druhá část řešení, rovnice:

$$x^2 + y^2 + z^2 + c^2 - g^2 = 2a^2.$$

Uvažovaná čára je pronik této koule s naším kruhovým válcem. obou rovnic vychází rovnice nárysu čáry

$$z^2 + 2g\left(x - g + \frac{c^2 - a^2}{2g}\right) = 0,$$

kterážto parabola je tedy část obrysu plochy v nárysně Gxz.

Obecně, je-li centrála konidy (cylindridy) dána rovnicí $f(x_0, y_0) = 0$, je půdorys dotykové čáry opsaného válce směru Gy dán rovnicemi

$$y = y_0,\quad x + y\frac{dy_0}{dx_0} = 0 \text{ (počátek } G);$$

promítající válec určený touto čarou protíná plochu ve křivce (M), jejíž nárys dává obrys plochy, po případě ve spojení s kruhy Γ v nárysně ležícími.

Je-li na př. centrála parabolou (počátek G)

$$y_0^2 = 2p(x_0 - h),$$

vyjde jako průmět dotykové čáry přímka

$$x = -p.$$

Válec opsaný ve směru Gy dotýká se tedy plochy podél řezu s rovinou kolmou na Gx, což je možné jen tím, že tento řez je přímka, a sice kolmá na rovinu Gxz; roviny tečné kolmé na Gxz tvoří svazek v tomto případě.[1]

Je-li centrála kuželosečka (u cyklid)

$$y_0^2 = n x_0^2 + 2p x_0 + q,$$

bude půdorys dotykové čáry opsaného válce směru Gy dán rovnicemi

$$y = y_0,\quad x = -n x_0 - p,$$

[1]) Rovnice plochy tu zní

$$Sx + py^2 = 0,\quad S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2hx - c^2;$$

rovina $x = -p$ seče plochu ve dvou přímkách v konečnu

$$z^2 = c^2 + h^2 - (p + h)^2.$$

Stopa plochy $(z = 0)$ jest anallagmatická čára stupně 3. $(r_1 r_2 = -c^2)$

$$(x^2 + y^2 - 2hx - c^2)\,x + py^2 = 0,$$

racionální v případě $c = 0$, řez $z = c$ je cissoida kruhu a přímky.

tedy opět kuželosečka

$$n y^2 = (x + p)^2 - 2 p (x + p) + n q.$$

17.

Přistupme nyní k otázkám osvětlení, hlavně pokud se týče plochy kotálnic 4. stupně, a při osvětlní rovnoběžném. Směr světla měj cosinusy směrné úměrné veličinám k, l, m; směrnice normály plochy kotálnic v bodě $M (x, y, z)$ jsou

$$A = x - a \cos \varphi, \quad B = y - a \sin \varphi, \quad C = z;$$

na *mezi vlastního stínu* je normála plochy kolmá na směr světla, tedy

$$A k + B l + C m = 0;$$

po dosazení hodnot vychází odtud

$$k x + l y + m z = a (k \cos \varphi + l \sin \varphi).$$

Je pak

$$tg\, \varphi = \frac{y}{x - g},$$

čehož dosazením do poslední rovnice obdržíme pro mez vlastního stínu podmínku

$$(A) \qquad (k x + l y + m z)^2 [(x - g)^2 + y^2] = a^2 (k x + l y - k g)^2.$$

Je to rovnice plochy 4. stupně, která protíná plochu kotálnic v mezi vlastního stínu při osvětlení ve směru (k, l, m).

Rovnice, psaná v původním tvaru

$$(k x + l y + m z)^2 = a^2 \frac{\left(k + l \dfrac{y}{x - g}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{y}{x - g}\right)^2},$$

ukazuje, že *tato plocha je konoid, jehož přímky* mají rovnice

$$(p) \qquad \frac{y}{x - g} = \lambda, \quad k x + l y + m z = \mu, \quad \mu^2 = a^2 \frac{(k + l \lambda)^2}{1 + \lambda^2},$$

t. j. *protínají přímku $G z$ a jsou rovnoběžny s rovinou řídící*

$$(S) \qquad k x + l y + m z = 0,$$

kolmou na směr světla.

Průseč konoidu s válcem

$$(B_1) \qquad (x - g)^2 + y^2 = a^2$$

rozpadá se ve dvě křivky v rovinách

$$k x + l y + m z = \pm (k x + l y - k g),$$

tedy v kruh na rovině

$$(B_2) \qquad m z + k g = 0$$

a v ellipsu na rovině

$$(B_3) \qquad k x + l y + \frac{1}{2} m z = \frac{1}{2} k g.$$

Plocha sborcená má dvojnou přímku

$$(\Delta) \qquad k x + l y + m z = 0, \quad k(x - g) + l y = 0,$$

která je průsečnice roviny řídící s rovinou obsahující osu Gz, jejíž stopa je rovnoběžná se stopou roviny řídící. Roviny (B_2) a (B_3) obsahují tuto přímku.

Každá rovina procházející dvojnou přímkou seče náš konoid v ellipse, která se promítá v kruh se středem G a naopak. Uvažujme kruhový válec

$$(x - g)^2 + y^2 = h^2;$$

jeho pronik s konoidem hoví rovnicím

$$h(k x + l y + m z) = \pm a (k x + l y - k g)$$

a tedy se skládá ze dvou ellips na kruhovém válci a na rovinách jdoucích dvojnou přímkou.

Je-li dána rovina tohoto svazku, buď x_0 její průsek s osou $O x$; pak bude poloměr kruhu na válci

$$h = a \frac{x_0 - g}{x_0}.$$

Uvažujme nyní libovolnou konidu neb cylindridu, jejíž základní rovina a přímka jsou $G x y$ a $G z$, a centrální čára (c). Rovinu S kolmou na směr světla můžeme vždy předpokládati kolmou na nárysnu $G x z$, jinak bychom otočili soustavu kolem $G z$.

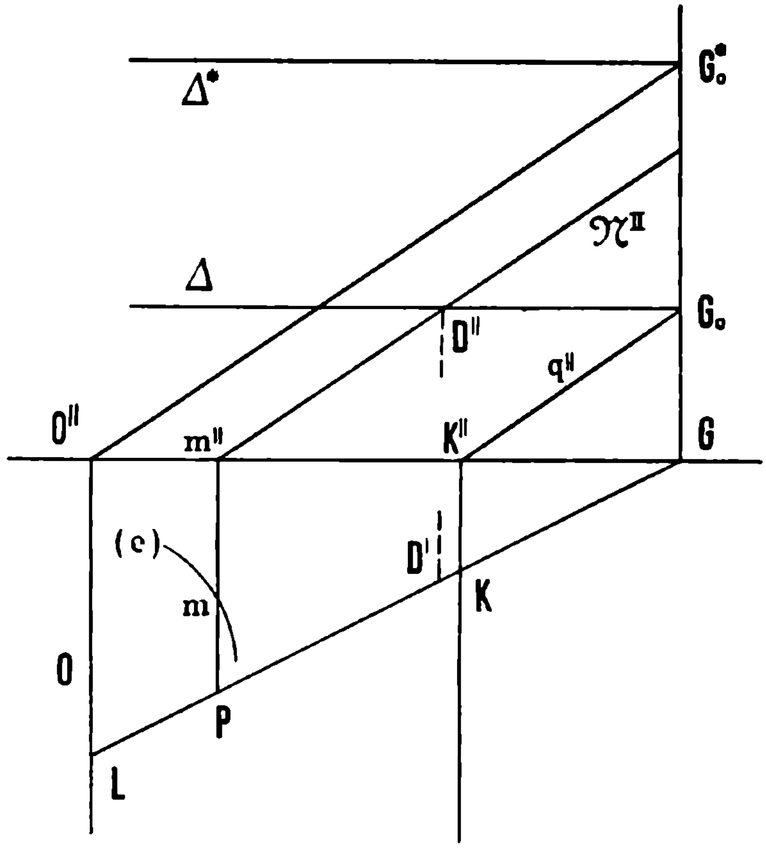
Je třeba vésti normálu n vycházející z daného bodu m na centrále, rovnoběžnou s rovinou S; její pata náleží pak mezi vlastního stínu. Její nárys n'' je přímka vedená bodem m'' rovnoběžně s nárysnou stopou roviny S. Přímkou n veďme rovinu $\mathfrak{N} \parallel S$ (kolmou na směr světla); její nárysná stopa jest $\mathfrak{N}^{II} \equiv n''$. Rovina $\mathfrak{N}$ protne rovinu kruhu Γ v jisté přímce p; její stopa P má průměty P, m''; přímka p protíná kruh Γ v bodě N, v němž normála plochy má stopu m a leží v rovině $\mathfrak{N}$, t. j. je $\parallel S$. T. j. bod N je pata hledané normály n a náleží tedy mezi vlastního stínu. Průměty (obr. 17) přímky p jsou $K P L$ a $\mathfrak{N}^{II}$.

Měníme-li m, obdržíme spojitou řadu přímek p, jež tvoří určitou plochu sborcenou. Přímky ty jsou rovnoběžny s pevnou rovinou S a protínají přímku $G z$; tvoří tedy konoid. Tento protíná konidu v mezi vlastního stínu (aspoň pokud béřeme v úvahu přímky p a kruhy Γ přiřaděné témuž bodu m).

Hledáme ještě jednu čáru na konoidu; veďme za tím účelem rovinu Δ rovnoběžnou se základnou, buď G_0 její průsek s přímkou $G z$. Bodem

G_0 veďme přímky q rovnoběžné s přímkami p; jich souhrn tvoří rovinu $(G_0 K'' K) \parallel S$. Nazveme D průsek přímky p s rovinou Δ; přímka q má stopu K a protíná Δ v bodě G_0. Z rovnoběžníka $P K G_0 D$ plyne $K P = G_0 D = G D'$.

Známe-li čáru (P) vytvořenou bodem P — t. j. stopu plochy (p) — obdržíme čáru (D'), půdorys řezu Δ s plochou (p), nanášením délek



Obr. 17.

$G D' = K P$; poněvadž bod K se pohybuje po pevné přímce $K K''$, *je čára* (D') *cissoidou čáry* (P) *a přímky* (K) *pro pól* G.

Naopak obdržíme čáru (P) jako součtovou cissoidu čáry (D') a přímky (K), ježto $G P = G K + G D'$.

Čáru (P) však známe z problému normál kolmých na přímku $G X$; neboť $m m'' P$ je půdorys takové normály.

„Čára (P) je půdorys čáry na konidě, podél níž normály plochy jsou kolmé na $G x$, půdorys řezu Δ s konoidem (p) je čára (D'), cissoida čáry (P) a přímky (K)."

Je-li centrála (c) kruh středu O a poloměru a, učí nás obr. 17., že $(P L = a)$ čára (P) je konchoidou přímky $O O''$. Veďme $O'' G_0^* \parallel S^{II}$, a přeložme rovinu Δ do polohy Δ^*, aby obsahovala bod G_0^*; pak přímka (K) přejde v $O O''$, a bude $G D'^* = K^* P = L P = a$, t. j. řez roviny Δ^*

s plochou (p) je kruh poloměru a se středem G_0^*, jak bylo výše analyticky zjištěno.

Přeložíme-li bod G_0 do G_0^*, a rovinu základní do roviny Δ — což poslední úvaha připouští — shledáme, že

„řezy konoidu (p) příslušného k ploše kotálnic 4. stupně (aneb k libovolné konidě s centrálním kruhem) na rovinách Δ rovnoběžných s rovinou základní jsou konchoidy Nikomedovy, jichž póly leží na Gz a řídící přímky jsou na rovině vedené středem centrálního kruhu kolmo na směr osvětlení. Stálá délka a je všem řezům společná a rovná se poloměru kruhu centrálního."

Totéž vychází ovšem, pokud se plochy kotálnic týče, z rovnice (A).

* * *

V rovině kruhu Γ leží dva kruhy plochy kotálnic, takže dávají 4 průseky přímky p s plochou; na mezi vlastního stínu však leží jen průseky s kruhem příslušným k témuž opěrnému bodu m jako přímka p.

Spojíme-li rovnici plochy kotálnic

$$(x^2+y^2+z^2-g^2)^2 = 4\,a^2\,[(x-g)^2+y^2]$$

s rovnicí (A), obdržíme po odmocnění

$$(k\,x+l\,y+m\,z)\,(x^2+y^2+z^2-g^2) = \pm\,2\,a^2\,(k\,x+l\,y-k\,g),$$

takže průseč obou ploch se rozpadá ve dvě čáry osmého stupně; z těch pouze jedna tvoří mez vlastního stínu; neboť po dosazení hodnoty

$$x^2+y^2+z^2-g^2 = 2\,a\,(1-\cos\alpha)\,(a-g\cos\varphi)$$

a hodnot za $x-g$, y, přechází poslední rovnice na

$$k\,x+l\,y+m\,z = \pm\,a\,(k\cos\varphi+l\sin\varphi)\,,$$

čehož plyne, že na mezi vlastního stínu plochy kotálnic leží toliko ona čára, jež přísluší vrchnímu znamení, a jež se tedy nachází na ploše stupně 3.

$$(C)\qquad (k\,x+l\,y+m\,z)\,(x^2+y^2+z^2-g^2) = 2\,a^2\,(k\,x+l\,y-k\,g)\,,$$

která je kubickou cyklidou a obsahuje dvojnou přímku našeho konoidu (p) jako přímku jednoduchou; vedle toho obsahuje úběžnou přímku roviny S, která je dvojnou pro plochu (p).

Roviny rovnoběžné s rovinou S

$$k\,x+l\,y+m\,z = \lambda$$

sekou tuto plochu v kruzích, ležících na koulích

$$x^2+y^2+z^2-g^2 = \frac{2\,a^2}{\lambda}\,(k\,x+l\,y-k\,g)\,,$$

jež tvoří svazek promětný s řadou sečných rovin.

VII.

Druhou řadu kruhů na ploše (C) tvoří řezy koulí soustředných

$$x^2 + y^2 + z^2 = g^2 + 2\lambda a^2$$

a rovinami

$$\lambda (k x + l y + m z) = k (x - g) + l y,$$

jež tvoří opět svazek s nimi promčtný. Dva kruhy různých řad lze spojit koulí, která se dotýká plochy ve dvou bodech, symetricky položených vůči rovině vedené směrem světla a přímkou $G z$ a má střed na této rovině.

Středy kruhů první řady naplňují rovnostrannou hyperbolu, u druhé řady kruhů je místem středů patrně kruh.

* * *

Pro konidu 4. stupně výše uvažovanou

I. $$S^2 = 4 a^2 V,\ S = x^2 + y^2 + z^2 + c^2 - g^2,\ V = (x - g)^2 + y^2$$

leží mez vlastního stínu na téže ploše sborcené (p),

II. $$L^2 V = a^2 L_1^2,$$

kde

$$L = k x + l y + m z,\ L_1 = k (x - g) + l y;$$

následkem toho leží uvažovaná čára také na plochách

III. $$L S = 2 a^2 L_1,$$

IV. $$L_1 S = 2 L V;$$

tyto dvě jsou třetího stupně a mají společnou přímku $L = 0$, $L_1 = 0$, i protínají se ještě v čáře 8. stupně, která je mez vlastního stínu.

Povrchové přímky konoidu (p), které procházejí bodem G, odpovídají bodům m na centrále (a), v nichž ji seče přímka vedená bodem G rovnoběžně se stopou roviny S; tato poslední pak seče kruh (G, a) v bodech, jichž poloměry jsou tečnami konchoidy v půdorysu, a sice v její bodě dvojném G.

U plochy kotálnic prochází mez vlastního stínu bodem G; existují dva směry φ_0, jimiž půdorys čáry od bodu G se vzdaluje.

Znamenejme

$$z - g = r \cos \varphi,\ y = r \sin \varphi,$$

pak jsou směry φ_0 řešením rovnice

$$k \cos \varphi_0 + l \sin \varphi_0 = \frac{k g}{a}.$$

V okolí bodu G pak platí pro čáru dva páry rozvojů tvaru

$$\varphi - \varphi_0 = A_1 z + A_2 z^2 + \ldots,\ r = B_2 z^2 + B_3 z^3 + \ldots,$$

příslušné k oběma větvím křivky.

Konstrukci přímky p u konoidu příslušné k danému bodu m na centrále obdržíme ve ***sklopení*** takto: Vedeme libovolnou rovinu S kolmou na směr světla a určíme její průseč q s rovinou kruhu Γ; po sklopení zaujme polohu (q). Vedeme pak $m P \parallel S^1$, a určíme její průsek P na přímce I'; rovnoběžka $P(N)$ s přímkou (q) je přímka (p). Tato pak protne sklopený kruh (Γ) v bodě (N), sklopené poloze bodu na mezi stínu.

Tečnou rovinu konoidu (p) dovedeme sestrojiti, známe-li konstrukci tečny jeho stopy, t. j. známe-li na př. konstrukci tečny půdorysu čáry na konidě, která určuje normály, jichž půdorysy jsou rovnoběžny s přímkou S^1. U ploch s centrální čarou kruhovou jsou řezy $z =$ konst. konchoidy známých přímek a konstrukce stopy tečné roviny konoidu (p) je dosti jednoducha.

Na místě konchoidy $z =$ konst možno užiti ellipsy na kruhovém válci s osou $G z$; její tečna protíná přímku dvojnou Δ a snadno se určí.

* * *

Vlastnosti konoidu našeho studují se pohodlně v soustavě souřadnic, jichž počátkem je bod G_0, v němž dvojná přímka protíná přímku řídící. Pošineme tedy počátek do G_0 a mimo to soustavu souřadnic otočíme kol osy $G_0 z$ tak, aby rovina $G_0 \xi z$ byla kolmá na dvojnou přímku konoidu, takže tato leží v nové ose $G_0 \eta$. Přechod k novým souřadnicím ξ, η, ζ se děje rovnicemi

$$k(x-g)+l y=\xi \sin\gamma \qquad (k^2+l^2=1-m^2=\sin^2\gamma)$$
$$-l(x-g)+k y=\eta \sin\gamma$$
$$z+\frac{k g}{m}=\zeta;$$

rovnice konoidu bude

$$(\xi \sin\gamma+\zeta \cos\gamma)^2(\xi^2+\eta^2)=a^2 \sin^2\gamma . \xi^2.$$

Vyhovíme jí substitucí

$$(p) \qquad \xi=r \cos\varphi, \quad \eta=r \sin\varphi, \quad \zeta=(a-r) \operatorname{tg}\gamma \cos\varphi,$$

což dává parametrické vyjádření plochy. Počátek souřadnic je singulární bod G_0, dvojná přímka je $G_0 \eta$.

Přímky konoidu odpovídají parametrům $\varphi =$ konst., čáry $r =$ konst. jsou ellipsy na rovinách svazku s osou $G_0 \eta$. Rovina ta má rovnici

$$\zeta=\frac{a-r}{r} \operatorname{tg}\gamma . \xi.$$

Směr světla je dán úhly s osami $\frac{\pi}{2}-\gamma$, $\frac{\pi}{2}$, γ.

Rovina s tímto směrem rovnoběžná

$$x \cos\gamma-z \sin\gamma+B y+D=0$$

bude obsahovati přímku p, platí-li

$$r \cos\gamma \cos\varphi-(a-r)\frac{\sin^2\gamma}{\cos\gamma} \cos\varphi+B r \sin\varphi+D=0$$

pro všechna r, t. j. je-li

$$D = a \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma} \cos \varphi, \; B = -\sec \gamma \operatorname{cotg} \varphi .$$

Rovnice roviny, kterou se přímka p do roviny S (bodem G_0 kolmo na směr světla vedené) promítá, zní tedy (píšeme x, y, z místo ξ, η, ζ)

$$(\Pi) \qquad x \cos \gamma - z \sin \gamma - y \sec \gamma \operatorname{cotg} \varphi + a \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma} \cos \varphi = 0 ;$$

tato rovina obaluje válec, jeho dotyková čára s konoidem je *strikční čára* tohoto. Pro charakteristiku (povrchovou přímku válce) platí rovnice vzniklší derivováním dle φ

$$(s_1) \qquad y = a \sin^2 \gamma \sin^3 \varphi ,$$

a dosazením toho vychází

$$(s_2) \qquad x \cos \gamma - z \sin \gamma = - \frac{a \sin^2 \gamma}{\cos \gamma} \cos^3 \varphi .$$

Dosazením hodnoty za $y = \eta = r \sin \varphi$ máme

$$(s_3) \qquad r = a \sin^2 \gamma \sin^2 \varphi$$

jako polární rovnici půdorysu strikční čáry, který tedy jest dvojovála. Nárys této čáry je racionální křivka 3. stupně.

Rovina S má rovnici

$$(S) \qquad x \sin \gamma + z \cos \gamma = 0 ;$$

vložíme-li $z = - x \operatorname{tg} \gamma$ do (s_2), vyjde

$$(s_4) \qquad \begin{aligned} x_0 &= - a \sin^2 \gamma \cos^3 \varphi , \\ y_0 &= a \sin^2 \gamma \sin^3 \varphi , \end{aligned}$$

jako parametrické vyjádření půdorysu čáry, která je řezem válce s rovinou S.

Strikční čára tedy leží na válci rovnoběžném se směrem světla, jehož kolmý řez má za půdorys *astroidu* (s_4).

Součinitelé v rovnici roviny tečné

$$(\mathfrak{T}) \qquad A (X - x) + B (Y - y) + C (Z - z) = 0$$

jsou determinanty ze schematu

$$\left| \begin{array}{ccc} \cos \varphi & \sin \varphi & - \operatorname{tg} \gamma \cos \varphi \\ - r \sin \varphi & r \cos \varphi & - (a - r) \operatorname{tg} \gamma \sin \varphi \end{array} \right|$$

a mají hodnoty

$$(\mathfrak{T}^0) \qquad A = \operatorname{tg} \gamma (r - a \sin^2 \varphi), \; B = a \operatorname{tg} \gamma \sin \varphi \cos \varphi, \; C = r .$$

Poněvadž při neodvislých r, φ

$$\begin{aligned} d^2 x &= - 2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi - r \cos \varphi \, d\varphi^2 \\ d^2 y &= 2 \cos \varphi \, dr \, d\varphi - r \sin \varphi \, d\varphi^2 \\ d^2 z &= 2 \operatorname{tg} \gamma \sin \varphi \, dr \, d\varphi - (a - r) \operatorname{tg} \gamma \cos \varphi \, d\varphi^2 , \end{aligned}$$

bude differenciální rovnice asymptotických čar

$$A\, d^2 x + B\, d^2 y + C\, d^2 z = 0$$

zníti

$$2 \sin\varphi\, dr - r \cos\varphi\, d\varphi = 0;$$

její integrál jest

$$r^2 = K \sin\varphi,$$

kde K jest libovolná stálá. Toť polární rovnice průmětů asymptotických čar našeho konoidu; jsou to patrně čáry homothetické, stupně 6., rovnice jejich v soustavě (G_0, ξ, η) zní

$$(x^2 + y^2)^3 = K^2 y^2.$$

Rovinné řezy konoidu. Vložíme-li hodnoty (p) do rovnice roviny

$$A x + B y + C z + D = 0,$$

obdržíme jako polární rovnici průmětu řezu

$$r = \frac{C\, a\, tg\,\gamma \cos\varphi + D}{(C\, tg\,\gamma - A) \cos\varphi - B \sin\varphi}.$$

Tu můžeme předpokládati

$$C\, tg\,\gamma - A = \cos\varkappa, \quad B = \sin\varkappa,$$

takže znamenáme-li

$$C\, a\, tg\,\gamma = b, \quad D = c, \quad A = \frac{b}{a} - \cos\varkappa,$$

zní rovnice průmětu řezu

$$(\alpha) \qquad r = \frac{b \cos\varphi + c}{\cos(\varphi + \varkappa)},$$

při čemž sekoucí rovina má rovnici

$$(\beta) \qquad \frac{b}{a}(x \sin\gamma + z \cos\gamma) = \sin\gamma\,(x \cos\varkappa - y \sin\varkappa - c).$$

Rovina řezu bude rovnoběžna s dvojnou přímkou $G_0\eta$ při $\sin\varkappa = 0$; průmět řezu s rovinou

$$\frac{b}{a \sin\gamma}(x \sin\gamma + z \cos\gamma) = x - c$$

má rovnici

$$r = b + \frac{c}{\cos\varphi},$$

t. j.

„roviny rovnoběžné s přímkou dvojnou protínají plochu konoidu (p) v čarách, jichž průměty na rovině kruhového řezu jsou konchoidy Nikomédovy s pólem G_0; řídící přímka je průmět průsečnice roviny řezu s rovinou S.“

Pro roviny jdoucí singulárním bodem G_0 je $c = 0$, řez s takovou rovinou má za průmět čáru 4. stupně

$$r = \frac{b \cos \varphi}{\cos (\varphi + \varkappa)},$$

již uvažoval Sluse.[1]) Její konstrukce velmi jednoduchá vyplývá z této rovnice: Kolmice spuštěná ze stálého bodu B ($r = b$, $\varphi = 0$) na průvodič $G_0\,\varphi$ protíná pevnou přímku $\varphi = -\varkappa$ v určitém bodě; délka jeho průvodiče je r a přenáší se do polohy $G_0\,\varphi$.

Podle Sluse vytvoří tuto čáru vrchol hybného úhlu stálé velikosti ($\varkappa$), jehož jedno rameno prochazí pevným bodem (G_0), a při tom určitý bod druhého ramene (vzdálený o délku b od vrcholu) opisuje pevnou přímku jdoucí bodem G_0 (kolmou na $\varphi = -\varkappa$).

S malou modifikací se tato vlastnost přenáší na čáry

$$r = \frac{b \cos (\varphi - \varkappa) + c}{\cos \varphi}.$$

Rameno hybného úhlu prochází bodem G_0, bod druhého ramene (vzdálený o b od vrcholu) opisuje přímku (kolmou na $\varphi = 0$), jejíž vzdálenost od bodu G_0 obnáší c.

Tyto čáry se s našimi průměty rovinných řezů kryjí po otočení o úhel $\varkappa$.

Z rovnice (β) vychází, že

1. čáry (α) lišící se vespolek jenom konstantami c pocházejí od řezů rovnoběžných;
2. čáry (α) o společných c a $\varkappa$ pocházejí od řezů s rovinami svazku, jehož osa leží na rovině S;
3. roviny, jichž řezy mají za průměty čáry (α) o společných b a c, obalují kužel

$$x^2 + y^2 = \frac{b^2}{a^2 \sin^2 \gamma}\left(x \sin \gamma + z \cos \gamma + \frac{a\,c}{b} \sin \gamma\right)^2.$$

* * *

Rovina $A x + B y + C z + D = 0$ bude tečnou rovinou konoidu, obsahuje-li některou jeho přímku; k tomu máme rovnice

$$(\gamma) \qquad (A - C \operatorname{tg} \gamma) \cos \varphi + B \sin \varphi = 0, \quad C a \operatorname{tg} \gamma \cos \varphi + D = 0,$$

čili v našem značení

$$(\gamma') \qquad \cos (\varphi + \varkappa) = 0, \; b \cos \varphi + c = 0.$$

Existuje-li tedy hodnota φ, pro niž se výraz (α) pro průvodič průmětu jeví ve tvaru neurčitém $\frac{0}{0}$, podává (α) rovnici půdorysu řezu plochy s tečnou rovinou, takže tu čára je stupně 3.

[1]) Srov. Teixeira, Traité des courbes, I., str. 276.

Poněvadž tu pak $\varphi = -\varkappa \pm \frac{\pi}{2}$, nastává tato okolnost pro

$$c = \mp b \sin \varkappa;$$

tato rovnice je vlastně tangencialní rovnicí naší plochy; v koefficientech rovnice roviny tečné se přepíše na

$$(\vartheta) \qquad D^2 [B^2 + (A - C\, tg\, \gamma)^2] = B^2 C^2 a^2 tg^2 \gamma .$$

Klademe-li $c = b \sin \varkappa$, má příslušný kubický řez rovnici

$$(x \cos \varkappa - y \sin \varkappa - 2\, b \sin \varkappa)\, (x^2 + y^2) = b^2\, (x \cos \varkappa + y \sin \varkappa);$$

dvojný bod průmětu leží na $G_0\,\eta$

$$x = 0,\ (y + 2\, b)\, y^2 + b^2 y = 0,\ \ y = -b.$$

Přeložíme-li počátek do dvojného bodu ($x = 0$, $y = -b$), přejde rovnice této čáry v

$$(x \cos \varkappa - y \sin \varkappa - b \sin \varkappa)\, (x^2 + y^2) = 2\, b\, y\, (x \cos \varkappa - y \sin \varkappa)$$

a její polární rovnice bude

$$r = \frac{b \sin \varkappa}{\cos (\varphi + \varkappa)} + 2\, b \sin \varphi = b\, \frac{\sin (2\, \varphi + \varkappa)}{\cos (\varphi + \varkappa)} .$$

Čára tato je *strofoida*, jejíž ohnisko jest G_0 a přímka střední je kolmá na směr $\varphi = -\varkappa$.

Rovina sekoucí (β) má vzhledem k hodnotě $c = b \sin \varkappa$ rovnici (počátek G_0)

$$\frac{b}{a \sin \gamma}\, (x \sin \gamma + z \cos \gamma) = x \cos \varkappa - y \sin \varkappa - b \sin \varkappa;$$

při stálém $\varkappa$ a proměnném b probíhá tato rovina svazek, jehož osa

$$x \cos \varkappa - y \sin \varkappa = 0,\ x \sin \gamma + z \cos \gamma + a \sin \gamma \sin \varkappa = 0$$

musí splývati s povrchovou přímkou konoidu; a sice je to přímka (p) příslušná k parametru $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2} - \varkappa$.

„Otáčí-li se rovina kolem přímky φ_0 na konoidu, zaujmou půdorysy jejího řezu s konoidem polohy různých strofoid podobných, o společném sing. ohnisku G_0 a s přímkami středními rovnoběžnými s průmětem přímky φ_0 na konoidu; dvojné body strofoid leží na přímce $G_0\,\eta$."

Každou strofoidu roviny $G_0\,\xi\,\eta$, jejíž sing. ohnisko je G_0, a dvojný bod na $G_0\,\eta$, možno považovati za půdorys rovinného řezu konoidu.

Tečné roviny procházející pevným bodem $(0, -b, 0)$ přímky $G_0\,\eta$ dávají podnět k strofoidám o různých hodnotách úhlu $\varkappa$; obalují kužel druhého stupně (počátek souřadnic G_0)

$$x^2 + (y + b)^2 = \left(\frac{b}{a \sin \gamma}\right)^2 (x \sin \gamma + z \cos \gamma)^2 .$$

VII.

Pro povrchovou přímku kužele platí rovnice

$$x \sin \varkappa + (y + b) \cos \varkappa = 0 ,$$

t. j. povrchové přímky konoidu a kužele mají půdorysy na sobě kolmé. Pro dotykovou čáru kužele a konoidu nalezneme parametrické vyjádření

$$x = -b \sin \varkappa \cos \varkappa , \quad y = -b \cos^2 \varkappa ,$$

t. j. tato čára leží na kruhovém válci

$$x^2 + y^2 + b y = 0 .$$

Při této úvaze vyskytla se také odpověď k otázce, jak se určí dotykový bod plochy s rovinou R proloženou libovolně přímkou p: Rovina R protne dvojnou přímku $\varDelta$ v určitém bodě D; jeho půdorysem D' vedeme přímku $D' M'$ kolmo na půdorys p' přímky p; ta určuje půdorys M' dotykového bodu M roviny R s konoidem.

Lze elementárně planimetricky ukázati, že strofoida náleží ku kategorii křivek vytvořených výše popsaným pohybem úhlu stálé velikosti. Buď $\varDelta$ bod dvojný, G sing. ohnisko strofoidy, $\varDelta N$ její přímka střední; libovolný paprsek $G Q M$ svazku G protne střední přímku v bodě Q, rovnost $Q \varDelta = Q M$ určuje polohu bodu M na strofoidě. Buď N bod přímky střední v prodloužení délky $\varDelta Q$, pro nějž $Q N = Q G$; trojúhelníky $\varDelta G Q$ a $M N Q$ mají rovné strany $Q \varDelta$ a $Q M$, $Q G$ a $Q N$, a sevřené úhly; z jich shodnosti vychází

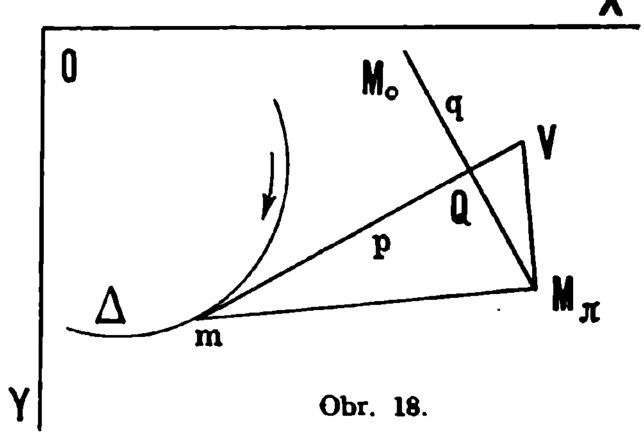
$$\sphericalangle G M N = G \varDelta Q = \text{konst.}, \quad M N = G \varDelta = \text{konst.};$$

tudíž hybný úhel $G M N$ má stálou velikost, jeho rameno $G M$ prochází pevným bodem G a určitý bod N druhého ramene ($M N = b$) opisuje pevnou přímku $\varDelta N$.

Zvláštnost tohoto případu vyznačena tím, že vzdálenost pevného bodu od pevné přímky je dána výrazem $b \sin \varkappa$.

18.

Uvedeme ještě další zobecnění ploch kotálnic, omezíce se při tom na základní vlastnosti. V rovině $O x y$ buď dána čára řídící $\varDelta$ s určitým kladným směrem oběhu. V libovolném jejím bodě m veďme tečnu, a na ni ve směru záporném $m Q$ nanesme délku (obr. 18) $m Q = p$, opišme pak kruh Γ v rovině kolmé na $m Q$, jehož střed je bod Q a jehož poloměr znamenejme q.



Obr. 18.

Jsou-li veličiny p, q známé funkce polohy bodu m, tvoří souhrn kruhů Γ určitou plochu.

Kladný směr tečny čáry Δ nechť svírá s $O x$ úhel τ; znamenáme-li $x_0\, y_0$ souřadnice bodu m na čáře řídící, $d\,\sigma$ prvek jeho oblouku, bude

$$d\,x_0 = d\,\sigma \cos\tau\,,$$
$$d\,y_0 = d\,\sigma \sin\tau\,,$$
$$d\,(x_0 + i\,y_0) = d\,\sigma\, e^{i\tau}.$$

Polohu bodu P na kruhu Γ určujeme pomocí úhlu α mezi rovinou základní a poloměrem $Q\,P$, a sice tak, že jdouce podél tečny $Q\,m$ v kladném směru máme poloviční rovinu $\alpha = 0$ po pravé straně, a kladné ostré úhly α odpovídají bodům nad rovinou základní.

Souřadnice x, y, z bodu P na kruhu Γ budou vyjádřeny rovnicemi

$$(A) \qquad x + i\,y = x_0 + i\,y_0 - (p - i\,q\cos\alpha)\,e^{i\tau},\quad z = q\sin\alpha\,.$$

Stopy kruhu Γ jsou body M_0 a M_π příslušné k hodnotám $\alpha = 0$ a $\alpha = \pi$, a vytvoří na rovině základní dvě čáry (M_0) a (M_π), jež dohromady dávají stopu plochy kruhů Γ.

Funkce p, q omezíme podmínkou, aby normála čáry (M_0) procházela bodem m na čáře řídící.

Vektor $m\,M_0$ odpovídá komplexní veličině

$$(x + i\,y) - (x_0 + i\,y_0) = -(p - i\,q)\,e^{i\tau},$$

směr tečny čáry (M_0) se pak vyjadřuje směrem vektoru

$$d\,(x + i\,y) = d\,\sigma\,e^{i\tau} - e^{i\tau}\,[(p\,i + q)\,d\,\tau + d\,p - i\,d\,q]\,;$$

aby tyto vektory byly na sobě kolmé, musí poměr komplexních veličin býti ryze pomyslný, t. j. bude pro jisté realné λ

$$-d\,\sigma + (i\,p + q)\,d\,\tau + dp - i\,d\,q = \lambda\,i\,(p - i\,q)\,;$$

oddělením částí reálné a pomyslné a vyloučením λ vychází hledaná podmínka

$$\frac{-d\,\sigma + q\,d\,\tau + d\,p}{q} = \frac{p\,d\,\tau - d\,q}{p}$$

čili

$$(B) \qquad p\,d\,\sigma = p\,d\,p + q\,d\,q\,.$$

Za této podmínky procházejí normály obou čar (M_0) a (M_π) bodem m, a procházejí jím také normály plochy (Γ) ve všech bodech téhož kruhu, t. j. normály ty tvoří rotační kužel s vrcholem m. Abychom to dokázali, uvažujme kouli

$$(K) \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 = r^2,\quad r^2 = p^2 + q^2,$$

která má střed m a obsahuje kruh Γ. Tyto koule příslušné k řadě bodů m na čáře Δ obalují určitou plochu; její charakteristika hoví rovnici

$$-x\,d\,x_0 - y\,d\,y_0 + (x_0\,d\,x_0 + y_0\,d\,y_0) = r\,d\,r\,,$$

která se vzhledem k podmínce (B) přepíše na

$$(K') \qquad x \cos \tau + y \sin \tau = -p + x_0 \cos \tau + y_0 \sin \tau ;$$

obalová plocha koulí (K) je souhrn kruhů určených rovnicemi (K), (K'); tyto kruhy jsou však naše kruhy Γ, poněvadž náš kruh Γ příslušný k poloze bodu m $(x_0 y_0)$ leží zřejmě na rovině (K').

Uvažovaná plocha kruhů Γ je tedy obálka koulí K; kruhy Γ jsou její křivoznačné čáry. Druhou řadu křivoznaček určíme bez obtíží jako pravoúhlé trajektorie těchto kruhů.

Tečné roviny plochy podél kruhu Γ tvoří rotační kužel; jeho vrchol V je průsek osy mQ s přímkou $M_n V$ kolmou na $m M_n$, a jeho vzdálenost od bodu m obnáší

$$m V = p + \frac{q^2}{p} = \frac{r^2}{p},$$

takže affix bodu V bude

$$x_1 + i y_1 = x_0 + i y_0 - \frac{r^2}{p} e^{i\tau}.$$

Tečna křivoznačky v její bodě P (x, y) splývá s přímkou VP, její průmět do roviny základní má směr vektoru

$$(x + i y) - (x_1 + i y_1) = (x + i y) - (x_0 + i y_0) + \frac{r^2}{p} e^{i\tau}$$

$$= -\left(p - \frac{r^2}{p} - i q \cos \alpha\right) e^{i\tau} = \frac{q}{p} (q + i p \cos \alpha) e^{i\tau},$$

a je to zároveň tečna průmětu křivoznačky, která má směr vektoru

$$d x + i d y,$$

značí-li x, y běžné souřadnice bodu na křivoznačce.

Tato čára určuje funkcionální vztah mezi parametry bodu na ploše τ a α; pro tento vztah bude poměr tohoto vektoru

$$dx + i dy = d\sigma e^{i\tau} - [(ip + q \cos \alpha) d\tau + dp - i dq . \cos \alpha - i q d \cos \alpha] e^{i\tau}$$

s vektorem předchozím číslo realné, t. j. poměr

$$\frac{- d\sigma + (i p + q \cos \alpha) d\tau + dp - i dq . \cos \alpha - i q d \cos \alpha}{q + i p \cos \alpha}$$

je realný, z čehož vychází

$$\frac{- d\sigma + q \cos \alpha \, d\tau + dp}{q} = \frac{p \, d\tau - dq . \cos \alpha - q \, d \cos \alpha}{p \cos \alpha},$$

čili

$$\left(\frac{dp}{q} + \frac{dq}{p} - \frac{d\sigma}{q}\right) - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} d\tau + \frac{q}{p} \frac{d \cos \alpha}{\cos \alpha} = 0.$$

VII.

Uzávorkovaný výraz mizí následkem podmínky (B), a tak vychází differenciální rovnice křivoznačných čar ve tvaru

$$\frac{d \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{p\, d\tau}{q},$$

t. j. křivoznačné čáry naší plochy kruhů (Γ) jsou dány rovnicí mezi parametry α a τ:

$$(C) \qquad \log \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \int \frac{p\, d\tau}{q}.$$

Rovnice rotačního kužele s osou $m\,Q$, vrcholem m a základnou Γ zní

$$F \equiv (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2 - \frac{r^2}{p^2}\left[(x - \xi)\cos\tau + (y - \eta)\sin\tau\right]^2 = 0,$$

kde nyní ξ, η značí souřadnice bodu m. Toť rovnice kužele normál. Pro průseč s kuželem normál nekonečně blízkým platí pak rovnice $d\,F = 0$, kterou lze psáti

$$(F') \qquad \begin{aligned} & a_{11}(x - \xi)^2 + 2\,a_{12}(x - \xi)(y - \eta) + a_{22}(y - \eta)^2 \\ & + 2\,a_{13}(x - \xi) + 2\,a_{23}(y - \eta) = 0, \end{aligned}$$

$$a_{11} = \frac{p^2\, d\sigma - r^2\, dp}{p^3}\, 2\cos^2\tau - \frac{r^2}{p^2} \sin 2\tau\, d\tau,$$

$$a_{12} = \frac{p^2\, d\sigma - r^2\, dp}{p^3} \sin 2\tau + \frac{r^2}{p^2} \cos 2\tau\, d\tau,$$

$$a_{22} = \frac{p^2\, d\sigma - r^2\, dp}{p^3}\, 2\sin^2\tau + \frac{r^2}{p^2} \sin 2\tau\, d\tau,$$

$$a_{13} = -\frac{q^2}{p^2}\cos\tau\, d\sigma, \quad a_{23} = -\frac{q^2}{p^2}\sin\tau\, d\sigma.$$

Diskriminant $\Sigma \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$ jest roven nulle, funkce F' rozpadá se ve dva lineární činitele, z nichž jeden přísluší jisté rovině jdoucí bodem m a druhý stanoví rovinu (kolmou na rovinu základní), která na přímkách kužele normál stanoví hlavní středy křivosti naší plochy:

„Středy hlavní křivosti na normálách vedených podél téhož kruhu Γ tvoří kuželosečku v rovině kolmé na rovinu základní.“

Poněvadž známe dva body na rovině této kužolesečky — jsou to středy křivosti stopních čar (M_η) a (M_π) — je touto větou otázka po středech křivosti naší plochy plně řešena.

Plocha středů hlavní křivosti obsahuje spojitou řadu kuželoseček, právě určených.

Případ $p = 0$ (plochy potrubní) je tu očividně vyloučen.

Zvláštním případem těchto ploch jsou cylindridy a konidy, rovněž plochy kotálnic vzniklých valením kruhu stálého poloměru po libovolné čáře Δ.

Jako jiný příklad bychom vytkli plochu potrubní $p = 0$, $q =$ konst.

Ta sestává z kruhů shodných, jichž roviny protínají orthogonálně geometrické místo jich středů. Křivoznačky jsou tu kruhy a řezy $z =$ konst.

Druhý zvláštní typ ploch vzniká ze supposice stálého $q > 0$; pak rovnice (B) dává

$$dp = d\sigma,$$

t. j. *střed Q kruhu Γ opisuje evolventu čáry Δ*, půdorysy kruhů Γ se jí v bodech Q dotýkají.

Vrchol V opsaného rotačního kužele (podél kruhu Γ) je dán rovnicí

$$x + i y = x_0 + i y_0 - \frac{r^2}{p} e^{i\tau}, \quad r^2 = p^2 + q^2;$$

pro směr tečny vrcholnice v našem případě $q =$ konst. obdržíme

$$\frac{d(x + i y)}{d\tau} = -e^{i\tau}\left(\frac{q^2}{p^2} R + i\frac{r^2}{p}\right),$$

kde

$$R = \frac{d\sigma}{d\tau}$$

je poloměr křivosti čáry Δ.

Tu je pak

$$\frac{q^2}{p^2} = tg^2(\widehat{V m M_0}), \quad \frac{r^2}{p} = \overline{m V},$$

takže konstrukce vektoru udávajícího směr tečny vrcholnice jest jednoduchá: ve směru $m V$ naneseme délku

$$\overline{m K} = \frac{q^2}{p^2} R,$$

na konci ve směru kladné rotace postavíme na ni kolmici $K L = m V$; přímka $m L$ udává směr tečny vrcholnice.

Můžeme při definici těchto ploch vycházeti z dané čáry (Q); plocha je pak souhrn kruhů shodných Γ, které mají své středy Q na této čáře v rovinách kolmých na rovině čáry (Q), které obsahují její tečnu.

Kruhy Γ jsou křivoznačné čáry, body m jsou středy křivosti čáry (Q), p je poloměr křivosti. Úhel τ se liší od směru tečny čáry (Q) o 90^0, tedy v rovnici (C) máme rovnici křivoznaček naší plochy, při čemž τ značí směr tečny čáry (Q) a

$$p = \frac{d s}{d\tau}$$

její poloměr křivosti; křivoznačky mají zde tedy parametrickou rovnici velmi jednoduchou

$$cotg\,\frac{\alpha}{2} = K e^{\frac{s}{q}},$$

kde s značí oblouk na čáře středů (Q) a K libovolnou stálou.

VII.

Je-li čára (Q) ellipsa

$$x_1 = a \cos \varphi, \quad y_1 = b \sin \varphi,$$

obdržíme parametrické vyjádření bodu na ploše (Γ)

$$x = a \cos \varphi - \frac{a\, v \sin \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}, \quad y = b \sin \varphi + \frac{b\, v \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}},$$

$$v = q \cos \alpha, \quad z = q \sin \alpha.$$

Možno též — rovněž jako v obecném případě — zavésti na místě α proměnnou v, načež $z = \sqrt{q^2 - v^2}$.

Znamenáme-li

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = E,$$

vypočteme z předchozích rovnic přímo

$$E = \frac{v^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi},$$

a máme tedy při označení $a^2 - b^2 = c^2$

$$\cos \varphi = \frac{1}{c} \sqrt{a^2 - \frac{v^2}{E}}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{v^2}{E} - b^2},$$

takže pro rovnici plochy nacházíme

$$\frac{c\, x}{a} = \sqrt{a^2 - \frac{v^2}{E}} - \sqrt{v^2 - b^2 E},$$

a odtud konečně po dosazení $v^2 = q^2 - z^2$:

$$\left[b^2 E^2 + \left(\frac{c^2 x^2}{a^2} - a^2\right) E - (E - 1)\,(q^2 - z^2)\right]^2$$
$$+\, 4\, E\, (a^2 E + z^2 - q^2)\, (b^2 E + z^2 - q^2) = 0.$$

Naše plocha kruhů opřených o elliptický válec je tedy osmého stupně. První člen lze psáti přehledněji

$$[E\, (x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 - q^2) + q^2 - z^2]^2,$$

a je z toho zřejmo, že úběžný kruh je dvojnou čarou, mimo to má plocha v nekonečnu dvě dvojné přímky na rovinách stojících kolmo na rovině ellipsy v jejích asymptotách. Křivka $E = 0$, $z = \pm q$, sestávající ze dvou ellips na válci, je hřbetní čarou. Plocha dotýká se rotačních ellipsoidů

$$x^2 + z^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 = a^2 + q^2,$$

$$y^2 + z^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 = b^2 + q^2$$

podél jich průsečí s příslušnými koulemi

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2 + q^2, \text{ resp. } = a^2 + q^2;$$

oba ellipsoidy procházejí hřbetní čarou; zmíněné průseče sestávají z dvojic kruhů na rovinách $y = \pm b$, resp. $x = \pm a$, jsou to kruhy Γ mající středy ve vrcholech ellipsy. Což se ostatně snadno přímo verifikuje na základě kužele normál.

Souřadnice středu křivosti u ellipsy jsou

$$x_0 = \frac{c^2}{a} \cos^3 \varphi, \; y_0 = -\frac{c^2}{b} \sin^3 \varphi,$$

normála plochy má směrnice úměrné s veličinami

$$x - x_0, \; y - y_0, \; z.$$

Pro normály kolmé na Oy je tedy $y = y_0$, t. j.

$$b\, v \cos \varphi = -\left(b \sin \varphi + \frac{c^2}{b} \sin^3 \varphi\right) \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$$

$$v \cos \varphi = -\frac{\sin \varphi}{b^2} (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}, \quad v^2 + z^2 = q^2,$$

takže

$$x = a \cos \varphi + \frac{a \sin^2 \varphi}{b^2 \cos \varphi} (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) = \frac{a\,(a \sin^2 \varphi + b \cos^2 \varphi)^2}{b^2 \cos \varphi},$$

$$y = -\frac{c^2}{b} \sin^3 \varphi.$$

Tyto dvě rovnice určují půdorys čáry na ploše, jejíž nárys tvoří obrys plochy; půdorys je tedy racionální čára stupně osmého. Její konstrukce plyne však přímo geometricky z její definice.

Zvláštní vztahy k úběžným bodům kruhovým mají řezy s rovinami

$$\frac{y}{b} \pm \frac{z}{c} = \text{konst.}$$

Pro vrcholnici nalezneme vyjádření

$$x = a \cos \varphi + \frac{a\, b\, q^2}{\mathfrak{M}^2}\, b \cos \varphi,$$

$$y = b \sin \varphi + \frac{a\, b\, q^2}{\mathfrak{M}^2}\, a \sin \varphi, \quad \mathfrak{M} = a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi.$$

Druhé členy jsou složky vektoru QV, jenž má směr normály a délku

$$\frac{q^2}{p} = \frac{a\, b\, q^2}{\mathfrak{M}^{\frac{3}{2}}},$$

ježto poloměr křivosti u ellipsy má hodnotu

$$p = \frac{\mathfrak{M}^{\frac{3}{2}}}{a\, b}.$$

Vrcholnice je tedy racionální čára stupně 10.

VII.

Obsah části první.

Strana
