Matyáš Lerch

Über einige Punkte der Theorie der Eulerschen Integrale. [I.]

Monatsch. Math. Phys. 17 (1906), 3-18

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501581

Über einige Punkte der Theorie der Eulerschen Integrale.

Von M. Lerch in Freiburg (Schweiz).

Es sei

$$c_0, c_1, c_2, \ldots$$

eine unendliche Reihe irgend welcher Größen, und es werden in üblicher Weise mit $\Delta c_\nu = c_{\nu+1} - c_\nu$, $\Delta^2 c_\nu = \Delta c_{\nu+1} - \Delta c_\nu, \ldots$ $\Delta^n c_\nu = \Delta^{n-1} c_{\nu+1} - \Delta^{n-1} c_\nu$ die sukzessiven Differenzen bezeichnet, so daß bekanntlich z. B.

$$\Delta^n c_0 = \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^\mu \binom{n}{\mu} c_{n-\mu}. \tag{1}$$

Sind die c_ν so beschaffen, daß die unendliche Reihe

$$\sum_0^\infty \frac{c_\nu}{\nu!} x^\nu$$

konvergiert, so besteht die Identität

$$e^{-x} \sum_{\nu=0}^\infty \frac{c_\nu}{\nu!} x^\nu = \sum_{n=0}^\infty \frac{\Delta^n c_0}{n!} x^n, \tag{2}$$

von welcher namentlich Hermite einige Anwendungen publizierte. Der Beweis von (2) ergibt sich unmittelbar, wenn man in (2) die Exponentialreihe

$$e^{-x} = \sum_0^\infty (-1)^\mu \frac{x^\mu}{\mu!}$$

anwendet und bemerkt, daß der Koeffizient von x^n im Produkt links den Wert

$$\sum_{\mu+\nu=n} (-1)^\mu \frac{c_\nu}{\mu!\,\nu!} = \frac{1}{n!} \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^\mu \binom{n}{\mu} c_{n-\mu} = \frac{\Delta^n c_0}{n!}$$

hat.

Als eine der einfachsten Anwendungen der Relation (2) betrachten wir den Fall

$$c_\nu = \frac{1}{a+\nu};$$

hier ist

$$\Delta^n c_0 = \Delta^n \frac{1}{a} = \frac{(-1)^n n!}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)},$$

und wir erhalten

$$(3)\quad \sum_0^\infty \frac{x^\nu}{\nu!\,(a+\nu)} = e^x \left[\frac{1}{a} - \frac{x}{a(a+1)} + \frac{x^2}{a(a+1)(a+2)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^3}{a(a+1)(a+2)(a+3)} + \ldots\right]$$

Setzt man hier $x = -\omega$, so entsteht die wohlbekannte mehrfach wiedergefundene Eulersche Beziehung

$$(3')\quad \sum_{\nu=0}^\infty \frac{(-1)^\nu \omega^\nu}{\nu!\,(a+\nu)} = e^{-\omega}\left[\frac{1}{a} + \frac{\omega}{a(a+1)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\omega^2}{a(a+1)(a+2)} + \ldots + \frac{\omega^n}{a(a+1)\ldots(a+n)} + \ldots\right]$$

Dieselbe liefert für unendlich kleine a diejenige Entwicklung des Integrallogarithmus, welche von Schendel besonders erwähnt und neulich von Herrn Nielsen wieder bewiesen wurde.

Um dies zu zeigen, beachten wir, daß in der Entwicklung nach steigenden Potenzen von a das konstante Glied links in (3′) lautet

$$\sum_{\nu=1}^\infty \frac{(-1)^\nu \omega^\nu}{\nu!\,\nu},$$

während das konstante Glied in der Entwicklung von

$$\frac{e^{-\omega}\omega^n}{a(a+1)\ldots(a+n)} \text{durch} -\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\frac{e^{-\omega}\omega^n}{n!}$$

gegeben ist. Also ergibt sich

$$\sum_{\nu=1}^\infty \frac{(-1)^\nu \omega^\nu}{\nu!\,\nu} = -e^{-\omega}\left[\omega + \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\omega^2}{1.2} + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{\omega^3}{1.2.3} + \ldots\right.$$
$$(4)\quad \left. + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\frac{\omega^n}{n!} + \ldots\right].$$

Interessantere Beziehungen ergeben sich, wenn man in der bekannten Formel der Differenzenrechnung

$$f(a+\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta^n f(a)\binom{\xi}{n}, \qquad (\Delta a=1),$$

für ξ die Größe $-s$ setzt und dann auf beiden Seiten mit $\Gamma(s)$ multipliziert. Da offenbar

$$\binom{-s}{n}\Gamma(s)=(-1)^n\frac{\Gamma(s+n)}{n!}$$

ist, so kommt

$$\text{(a)} \qquad \Gamma(s)f(a-s)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Delta^n f(a)}{n!}\Gamma(s+n).$$

Wird hier von der Integraldarstellung

$$\Gamma(s+n)=\int_0^{\infty}x^{s+n-1}e^{-x}\,dx$$

Gebrauch gemacht, so ergibt sich

$$\Gamma(s)f(a-s)=\int_0^{\infty}dx\;x^{s-1}e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Delta^n f(a)}{n!}x^n;$$

Die unter dem Integralzeichen vorkommende unendliche Reihe läßt sich mit Hilfe der Identität (2) umformen, und zwar hat man darin x durch $-x$ zu ersetzen und

$$c_\nu=f(a+\nu)$$

zu wählen. So wird

$$\sum_0^{\infty}(-1)^n\frac{\Delta^n f(a)}{n!}x^n=e^x\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{f(a+\nu)}{\nu!}x^\nu,$$

und wir erhalten die Formel

$$\text{(5)} \qquad \Gamma(s)f(a-s)=\int_0^{\infty}x^{s-1}\,dx\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{f(a+\nu)}{\nu!}x^\nu.$$

Dieselbe wird durch die vorliegenden Ausführungen keineswegs begründet, da z. B. die Reihe (*a*) in den meisten Fällen divergiert; dies kann das Interesse an der Formel jedoch keineswegs beeinträchtigen, nur muß in jedem speziellen Falle ein strenger Beweis geführt werden.

Wählen wir z. B.

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(x)},$$

so folgt aus (5)

$$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(a-s)}=\int_0^\infty x^{s-1}\,dx\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu x^\nu}{\nu!\,\Gamma(a+\nu)},$$

oder wenn man a in $a+1$ verwandelt und von der Zerlegung

$$\Gamma(a+\nu+1)=\Gamma(a).a(a+1)\ldots(a+\nu)$$

Gebrauch macht,

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(s)}{\Gamma(a+1-s)}=\int_0^\infty x^{s-1}\,dx\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu x^\nu}{\nu!\ a(a+1)(a+2)\ldots(a+\nu)}. \tag{6}$$

Wählt man insbesondere $a=s$, so kommt

$$\Gamma(s)^2=\int_0^\infty x^{s-1}\,dx\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu x^\nu}{\nu!\ s(s+1)(s+2)\ldots(s+\nu)}. \tag{7}$$

Indem wir nun zur Formel (5) zurückkehren, betrachten wir darin die rechte Seite als den Grenzwert von

$$\int_0^\omega x^{s-1}\,dx\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{f(a+\nu)\,x^\nu}{\nu!}=\sum_0^{\infty}(-1)^\nu\frac{f(a+\nu)\,\omega^{s+\nu}}{\nu!\ (s+\nu)}.$$

Wir haben daher das neue Problem, die Grenzformel

$$\lim_{\omega=\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{f(a+n)\,\omega^{s+n}}{n!\ (s+n)}=\Gamma(s)f(a-s) \tag{5*}$$

unter möglichst allgemeinen Voraussetzungen zu begründen.

Die aus der Theorie der Gammafunktion bekannte Grenzformel

$$\lim_{\omega=\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\omega^{s+n}}{n!\,(s+n)}=\Gamma(s)$$

genügt, um die Formel (5*) für

$$f(x)=u^x,\ x^k,\ \frac{1}{(x-c)^k},\quad (k=1,2,3,\ldots)$$

zu verifizieren. Es wird also speziell (5*) richtig sein für sämtliche rationalen Funktionen $f(x)$, sobald der reelle Teil von $a-s$ denjenigen der sämtlichen Unendlichkeitsstellen von $f(x)$ übertrifft; ist letztere Bedingung nicht erfüllt, so wird der Grenzausdruck unendlich.

Setzen wir

$$f(x) = \frac{\sin x\pi}{x+u},$$

so wird

$$(-1)^n f(a+n) = \frac{\sin a\pi}{a+u+n},$$

und somit wird unser Ausdruck

$$G(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{f(a+n)\ \omega^{s+n}}{n!\ (s+n)}$$

die Gestalt annehmen

$$G(\omega) = \sin a\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{s+n}}{n!\ (s+n)\ (a+u+n)}$$

oder also

(b) $$G(\omega) =$$

$$= \frac{\sin a\pi}{a+u-s}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{s+n}}{n!\ (s+n)} - \omega^{s-a-u} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{a+u+n}}{n!\ (a+u+n)}\right).$$

Ist a eine ganze Zahl, so ist $G(\omega) = 0$, was jedoch von $\Gamma(s)\, f(a-s)$ verschieden ist; in diesem Falle besteht daher die Gleichung (5*) nicht, trotzdem die linke Seite konvergiert.

Ist zweitens a gebrochen oder komplex und werden die reellen Teile von s und $a+u$ positiv angenommen, so lautet der Ausdruck (b)

$$G(\omega) = \frac{\sin a\pi}{a+u-s}\left[\int_0^{\omega} e^x x^{s-1}\, dx - \omega^{s-a-u} \int_0^{\omega} e^x x^{a+u-1}\, dx\right] =$$

$$= \frac{\sin a\pi}{a+u-s}\ \omega^s \int_0^1 e^{\omega x} \left(x^{s-1} - x^{a+u-1}\right) dx,$$

und dieser Ausdruck wird mit ω unendlich groß, wenigstens für reelle s, $a+u$.

Wir können daher für $f(x)$ Funktionen setzen, welche wie hier

$$\frac{\sin x\pi}{x+u}$$

in ihrem ganzen Verlaufe beliebig klein bleiben (für hinreichend große Werte von u), ohne daß der Grenzausdruck (5*) zu konvergieren braucht.

Ist daher

$$f(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x) + \Phi_3(x) + \dots$$

eine unendliche Reihe, für deren sämtliche Glieder die Grenzformel (5*) besteht, so braucht letztere für die Summe $f(x)$ noch nicht zu bestehen.

Die der Funktion $f(x)$ aufzuerlegenden Beschränkungen zu erforschen ist eine Frage, die vorläufig offen bleibt. Ich bemerke nur, daß die Gleichung (6) sich mit Hilfe der in der Theorie der Besselschen Funktionen vorkommenden Integraldarstellungen streng begründen läßt, namentlich wenn der reelle Teil von a größer als $-\frac{1}{2}$ und derjenige von s zwischen Null und $\frac{1}{2}$ enthalten bleibt.

Bei der Anwendung des Mittag-Lefflerschen Satzes auf die Untersuchung von konkreten Transzendenten ist manchmal ein Prinzip von großem Nutzen, das ich auf einigen Beispielen klarlegen will. Ich bin auf dasselbe geführt worden durch die Erwägung, daß sich für die von Herrn Prym eingeführte Funktion

$$Q(s) = \Gamma(s) - P(s), \quad P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(s+n)}, \tag{8}$$

durch Anwendung von lediglich funktionentheoretischen Hilfsmitteln die Fundamentaleigenschaften leicht begründen lassen, dagegen aber die Integraldarstellung

$$Q(s) = \int_1^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx \tag{9}$$

bis jetzt ohne Benützung der Gleichung

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx \tag{10}$$

nicht glückte. Indem ich die Γ-Funktion durch das Eulersche Produkt

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s}{1+\frac{s}{n}}$$

definiere, dagegen aber die Darstellung (10) nicht voraussetze, will ich, ausgehend von der Definition (8), die Formel (9) erschließen.

Zu dem Zwecke zerlege ich die Funktion

$$\omega^{-s} P(s)$$

in ihre beiden Bestandteile nach dem Satze des Herrn Mittag-Leffler; es kommt

$$\omega^{-s} P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^n}{n!\,(s+n)} + \text{ganze Funktion},$$

und infolgedessen, wenn man mit ω^s multipliziert,

$$P(s) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{s+n}}{n!\,(s+n)} + \text{ganze Funkt.};$$

dies gibt an die Hand, die Prymsche Zerlegung durch die folgende zu ersetzen:

(11) $$\Gamma(s) = P(s, \omega) + Q(s, \omega),$$

wobei

(12) $$P(s, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega^{s+n}}{n!\,(s+n)}$$

und $Q(s, \omega)$ eine ganze Funktion von s ist. Das Vorhanden des Parameters ω gestattet nun, $Q(s, \omega)$ als Funktion von ω zu untersuchen, um dann für $\omega = 1$ die Prymsche Funktion zu erhalten. Es folgt aus (12) durch Differentiation nach ω

$$\frac{\partial P}{\partial \omega} = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega^{s+n-1}}{n!} = e^{-\omega} \omega^{s-1},$$

und infolgedessen aus (11)

$$\frac{\partial Q}{\partial \omega} = -e^{-\omega} \omega^{s-1},$$

Hieraus folgt offenbar

$$Q(s, \omega) = \int_{\omega}^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx + f(s),$$

und es bleibt noch die von ω unabhängige ganze Funktion $f(s)$ zu bestimmen.

Wir setzen zu dem Zwecke

(13) $$\overline{Q}(s, \omega) = \int_{\omega}^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx,$$

und gehen zur Bestimmung der Funktion $f(s)$ über. Es ist

$$\Gamma(s) - f(s) = P(s, \omega) + \overline{Q}(s, \omega).$$

Nun ergibt sich aus (13) nach einer partiellen Integration

$$(\alpha) \qquad \overline{Q}(s, \omega) = -\frac{\omega^s e^{-\omega}}{s} + \frac{1}{s}\overline{Q}(s+1, \omega),$$

ferner folgt aus der Darstellung

$$P(s, \omega) = e^{-\omega}\left(\frac{\omega^s}{s} + \frac{\omega^{s+1}}{s(s+1)} + \frac{\omega^{s+2}}{s(s+1)(s+2)} + \cdots\right)$$

die Beziehung

$$(\beta) \qquad P(s, \omega) = \frac{\omega^s e^{-\omega}}{s} + \frac{1}{s} P(s+1, \omega).$$

Aus (α) und (β) folgt durch Addition

$$P(s, \omega) + \overline{Q}(s, \omega) = \frac{P(s+1, \omega) + \overline{Q}(s+1, \omega)}{s}$$

das heißt

$$\Gamma(s) - f(s) = \frac{\Gamma(s+1) - f(s+1)}{s},$$

und hieraus

$$(14) \qquad f(s+1) = s f(s).$$

Setzt man

$$\Phi(s) = \frac{f(s)}{\Gamma(s)},$$

so ist $\Phi(s)$ eine ganze Funktion und $\Phi(s+1) = \Phi(s)$; infolgedessen hat man eine in der ganzen s-Ebene gültige Entwicklung

$$(15) \qquad \Phi(s) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu e^{2\nu s\pi i};$$

wir zeigen, daß die sämtlichen Koeffizienten in derselben Null sind, wodurch man $f(s) = 0$ erhält und damit die gewünschte Darstellung von Q vollendet sein wird.

Ich setze nun $s = 1 + a + ib$, $0 \leqq a \leqq 1$, und beachte, daß alsdann

$$|P(s, \omega)| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{n+a+1}}{(n+1)!}, \quad |\overline{Q}(s, \omega)| < \int_{\omega}^{\infty} e^{-x} x^a \, dx;$$

infolgedessen ist

$$|P(s, \omega) + \overline{Q}(s, \omega)| < M,$$

wenn M eine weder von a noch von b abhängende Größe bedeutet, und daher

$$(16)\qquad |\Gamma(s)-f(s)|<M;\quad (s=1+a+ib,\ 0\leqq a\leqq 1).$$

Nun ist

$$\Gamma(1+a+ib)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a+ib}}{1+\frac{a+ib}{n}},$$

der absolute Betrag also

$$|\Gamma(1+a+ib)|=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a}}{1+\frac{a}{n}}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{(a+n)^2}}}$$

Da

$$\prod_1^{\infty}\left(1+\frac{b^2}{(a+n)^2}\right)<\prod_1^{\infty}\left(1+\frac{b^2}{n^2}\right)=$$

$$=\frac{e^{|b|\pi}-e^{-|b|\pi}}{2|b|\pi}<\frac{1}{2\pi|b|}e^{|b\pi|}$$

so folgt

$$(17)\left|\frac{1}{\Gamma(1+a+ib)}\right|<\frac{A}{\sqrt{|b|}}e^{|b|\frac{\pi}{2}},\quad (0\leqq a\leqq 1,\quad |b|>0),$$

wobei A eine von a und b unabhängige Größe ist.

Dividiert man nun (16) auf beiden Seiten mit $|\Gamma(1+a+ib)|$, so kommt demnach

$$|\Phi(1+a+ib)-1|<\frac{M}{|\Gamma(1+a+ib)|}<\frac{AM}{\sqrt{|b|}}e^{|b|\frac{\pi}{2}}.$$

Nun ist in (15)

$$|c_\nu|<\frac{\mathfrak{M}}{e^{-2\nu b\pi}}\quad (\nu\gtrless 0),$$

wenn $\mathfrak{M}$ den Maximalwert von $\Phi(s)-1$ für $s=x+ib$ bei konstantem b bedeutet. Wählt man b negativ und hinreichend groß, so wird der Quotient

$$\frac{\mathfrak{M}}{e^{-2\nu b\pi}}<\frac{AM}{\sqrt{|b|}}e^{\pi b\left(2\nu-\frac{1}{2}\right)}$$

beliebig klein für $\nu > 0$ und daher $c_\nu = 0$ für $\nu > 0$; ebenso ist $c_\nu = 0$ für $\nu < 0$, und wäre c_0 von Null verschieden, so hätte man

$$\Phi(s) = c_0, \quad f(s) = c_0 \Gamma(s),$$

und dies erfordert wiederum $c_0 = 0$, da sonst $f(s)$ keine ganze Funktion wäre. Es ist also $f(s) = 0$ und wir haben die Gleichungen

$$(18) \qquad Q(s, \omega) = \int_\omega^\infty e^{-x} x^{s-1} dx, \quad \Gamma(s) = P(s, \omega) + Q(s, \omega).$$

Ist der reelle Teil von s positiv, so ist $\lim_{\omega=0} \omega^s = 0$ und also auch $\lim_{\omega=0} P(s, \omega) = 0$, so daß man die Gleichung

$$\Gamma(s) = \lim_{\omega=0} \int_\omega^\infty e^{-x} x^{s-1} dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$$

erhält.

Es sei nun $\Phi(s)$ eine Funktion, die in der ganzen Ebene den Charakter einer rationalen Funktion besitzt, oder vielmehr derjenige Teil der Mittag-Lefflerschen Darstellung, der sich von einer solchen Funktion bloß um eine ganze Transzendente unterscheidet; die Funktion $\Phi(s)$ ist eine in der ganzen Ebene gleichmäßig konvergierende Reihe von rationalen Funktionen, so beschaffen, daß jeder Unendlichkeitsstelle von $\Phi(s)$ ein Glied der Reihe entspricht. Ist z. B. $-a$ eine Unendlichkeitsstelle von $\Phi(s)$, so ist das derselben entsprechende Glied der Reihe ein Aggregat von Gliedern wie

$$\Psi(s) = \frac{1}{(s+a)^m},$$

wozu noch eine ganze rationale Funktion hinzukommen kann.

Nun ist aber, falls ω eine positive reelle Größe bedeutet,

$$\omega^{-s} \Psi(s) = \omega^a \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\nu (\log \omega)^\nu}{\nu!\, (s+a)^{m-\nu}} + \text{ganze Funkt. } (s),$$

und somit auch

$$\Psi(s) = \Psi(s, \omega) + \text{ganze Funkt. } (s),$$

wenn

$$\Psi(s, \omega) = \omega^{s+a} \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{(-1)^\nu (\log \omega)^\nu}{\nu!\, (s+a)^{m-\nu}}$$

gesetzt wird.

Führt man nun in die Entwicklung $\Phi(s)$ an Stelle der Elemente $\Psi(s)$ die entsprechenden Ausdrücke $\Psi(s, \omega)$ ein, so entsteht eine neue Funktion $\Phi(s, \omega)$, und diese hat die Eigenschaft, daß die partielle Ableitung

$$\frac{\partial \Phi(s, \omega)}{\partial \omega} = f(s, \omega)$$

eine ganze Funktion von s ist, und es wird daher $\Phi(s, \omega)$ als analytische Fortsetzung eines Integrals

$$\int_a f(s, \omega)\, d\, a$$

aufgefaßt werden können, sobald $\Phi(s, a)$ identisch verschwindet.

Auf die eben auseinandergesetzte Weise lassen sich namentlich diejenigen Entwicklungen umformen, welche Hermite in Anschluß an den Satz des Herrn Mittag-Leffler abgeleitet hat. Es sei z. B.

$$F(s) = \Gamma(s)\, \Gamma(s + a),$$

und a keine ganze Zahl. Die Unendlichkeitsstellen von $F(s)$ sind durchaus einfach, und zwar von der Form

$$s_0 = -m, \quad s_1 = -a - n, \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und die entsprechenden Residuen lauten

$$R_0 = (-1)^m \frac{\Gamma(a - m)}{m!} = \frac{1}{m!\ \Gamma(m + 1 - a)} \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$R_1 = \frac{(-1)^n\, \Gamma(-a - n)}{n!} = -\frac{1}{n!\ \Gamma(n + 1 + a)} \cdot \frac{\pi}{\sin a\pi};$$

die durch den Mittag-Lefflerschen Satz erzeugte Entwicklung wäre also

$$\Phi(s) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\ \Gamma(m + 1 - a)(s + m)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\ \Gamma(n + 1 + a)(s + a + n)} \right\}$$

und der Unterschied

$$F(s) - \Phi(s)$$

ist eine ganze Transzendente. Unser Verfahren besteht nun in der Bildung der Funktion

$$\Phi(s,\ \omega) = \frac{\pi}{\sin a\pi}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega^{s+m}}{m!\ \Gamma(m+1-a)(s+m)} - \right. \tag{19}$$
$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{s+a+n}}{n!\ \Gamma(n+1+a)(s+a+n)}\right\}.$$

Für dieselbe ist

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\Phi(s,\ \omega) = \frac{\pi}{\sin a\pi}\,\omega^{s-1}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega^{m}}{m!\ \Gamma(m+1-a)} - \right.$$
$$\left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{a+n}}{n!\ \Gamma(n+1+a)}\right\}.$$

Wird nun mit $E(z,\ u)$ die Besselsche Funktion

$$E(z,\ u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!\ \Gamma(u+m+1)}$$

bezeichnet, so lautet die letzte Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\Phi(s,\ \omega) = \frac{\pi}{\sin a\pi}\,\omega^{s-1}[E(\omega,\ -a) - \omega^a E(\omega,\ a)],$$

und hieraus

$$\Phi(s,\ \omega) = \frac{\pi}{\sin a\pi}\int_0^{\omega} z^{s-1}\,[E(z,\ -a) - z^a E(z,\ a)]\,dz, \tag{20}$$

sobald der reelle Teil von s positiv ist, weil die Funktion $\Phi(s,\omega)$ unter dieser Annahme mit ω verschwindet.

Hier drängt sich die Frage nach der Existenz der Grenze

$$\lim_{\omega=\infty}\Phi(s,\ \omega)$$

auf, weil letztere vermutlich mit $F(s)$ zusammenfällt oder mindestens mit $F(s)$ eng zusammenhängt.

Um letzterer Frage näher zu treten, setze ich im Integral (20) $z = x^2$, und im Resultat

$$\Phi(s,\ \omega) = \frac{2\pi}{\sin a\pi}\int_0^{\sqrt{\omega}} x^{2s-1}\,dx\,[E(x^2,\ -a) - x^{2a}\,E(x^2,\ a)]$$

benütze ich die Integraldarstellung der E-Funktion

$$E(x^2,\ u) =$$
$$= x^{-u}\left\{-\frac{\sin u\pi}{\pi}\int_0^1 e^{-x\left(t+\frac{1}{t}\right)}\,t^{u-1}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x\cos\vartheta}\cos u\vartheta\,d\vartheta\right\}.$$

Nach Einführung dieser Darstellung zieht sich unser Ausdruck wie folgt zusammen

$$\Phi(s, \omega) = 2\int_0^{\sqrt{\omega}} x^{2s+a-1}\,dx \int_0^1 e^{-x\left(t+\frac{1}{t}\right)} (t^a + t^{-a}) \frac{dt}{t}$$

oder nach Umkehrung der Integrationenfolge (welche gestattet ist, falls der reelle Teil von $2s + a$ positiv ist)

$$(21)\qquad \Phi(s, \omega) = 2\int_0^1 (t^a + t^{-a}) \frac{dt}{t} \int_0^{\sqrt{\omega}} e^{-x\left(t+\frac{1}{t}\right)} x^{2s+a-1}\,dx.$$

Hier ist nun klar, daß der in Frage stehende Grenzwert existiert, und zwar ist

$$(22)\qquad \lim_{\omega=\infty} \Phi(s, \omega) = 2\int_0^1 (t^a + t^{-a}) \frac{dt}{t} \int_0^{\infty} e^{-x\left(t+\frac{1}{t}\right)} x^{2s+a-1}\,dx = \Psi(s).$$

Die innere Integration ist unmittelbar ausführbar und gibt

$$\Psi(s) = 2\,\Gamma(2s+a)\int_0^1 \frac{t^a + t^{-a}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^{2s+a}} \frac{dt}{t}$$

oder

$$\Psi(s) = 2\Gamma(2s+a)\left[\int_0^1 \frac{t^{2a+2s-1}\,dt}{(t^2+1)^{2s+a}} + \int_0^1 \frac{t^{2s-1}\,dt}{(t^2+1)^{2s+a}}\right]$$

oder wenn in den Integralen $t^2 = \frac{1}{x}$, resp. $t^2 = x$ gesetzt wird,

$$\Psi(s) = \Gamma(2s+a)\left[\int_1^{\infty} \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{2s+a}} + \int_0^1 \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{2s+a}}\right],$$

so daß schließlich

$$\Psi(s) = \Gamma(2s+a)\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{2s+a}} = \Gamma(s)\,\Gamma(a+s).$$

Der Grenzausdruck (22) stellt also tatsächlich die ursprüngliche Funktion

$$F(s) = \Gamma(s)\,\Gamma(s+a)$$

dar, sobald die reellen Teile der Größen s und $2s + a$ positiv sind, und wir haben außer der Formel

$$(23)\quad \Gamma(s)\,\Gamma(s+a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}\int_0^\infty x^{s-1}\,dx\,[E(x,\,-a) - x^a E(x,\,a)]$$

folgende Darstellungen für die ganze Funktion

$$(24)\qquad G(x) = \Gamma(s)\,\Gamma(s+a) - \Phi(s,\,\omega):$$

$$(24^1)\qquad G(x) = \frac{\pi}{\sin a\pi}\int_\omega^\infty x^{s-1}\,dx\,[E(x,\,-a) - x^a E(x,\,a)],$$

$$(24^2)\qquad G(x) = 2\int_0^1 \frac{(t^{2a}+1)\,t^{2s-1}}{(t^2+1)^{2s+a}}\,Q\left(2s+a,\frac{t^2+1}{t}\sqrt{\omega}\right)dt.$$

Es ist nicht uninteressant in (23) den Grenzfall $a=0$ zu erledigen.

Da für $a=0$

$$\frac{\partial}{\partial a}E\,(x,\,-a) = \sum_{m=0}^\infty \frac{\Psi(m+1)}{m!\;m!}\,x^m,$$

wenn

$$\Psi(u) = \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}$$

gesetzt wird, so kommt

$$(25)\quad \Gamma(s)^2 = \int_0^\infty x^{s-1}\,dx\left[2\sum_0^\infty \frac{\Psi(m+1)}{m!\;m!}\,x^m - \log x\,.\,E(x,\,0)\right].$$

Noch einfacher schreibt sich das Resultat, das sich aus (24) und (24^2) für $a=0$ ergibt:

$$(26)\left\{\begin{aligned} &\Gamma(s)^2 - \sum_{m=0}^\infty\left[\frac{\omega^{s+m}}{m!\;m!\;(s+m)^2} + \frac{2\,\Psi(m+1) - \log\omega}{m!\;m!\;(s+m)}\,\omega^{s+m}\right] = \\ &\qquad = 4\int_0^1 \frac{t^{2s-1}\,dt}{(t^2+1)^{2s}}\,Q\left(2s,\,\frac{t^2+1}{t}\sqrt{\omega}\right).\end{aligned}\right.$$

Schreibt man hier $\omega = \frac{u^2}{4}$ und setzt

$$t+\frac{1}{t} = 2x,\quad t = x - \sqrt{x^2-1},\quad \frac{dt}{t} = -\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}},$$

so lautet die rechte Seite

$$(26^1) \qquad 4^{1-s}\int_1^\infty \frac{dx}{x^{2s}\sqrt{x^2-1}}\,Q(2s,\ ux),$$

und diese Größe hat demnach den Wert

$$(26^2) \qquad \begin{aligned} &\Gamma(s)^2-\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{u^{2s+2m}}{4^{s+m}\,m!\,m!\,(s+m)^2}+\right.\\ &\left.+\frac{2\Psi(m+1)-2\log\frac{u}{2}}{4^{s+m}\,m!\,m!\,(s+m)}\,u^{2s+2m}\right].\end{aligned}$$

Für unendlich kleine s ergibt sich hieraus

$$(27) \qquad \left\{\begin{aligned} &\Gamma'(1)^2+\Gamma''(1)-2\left[2\Gamma'(1)-\log\frac{u}{2}\right]\log\frac{u}{2}-\\ &-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1+2m\,\Psi(m+1)-2m\log\frac{u}{2}}{4^m\,m!\,m!\,m^2}\,u^{2m}=\\ &=4\int_1^\infty Q(0,\ ux)\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.\end{aligned}\right.$$

Beachtet man, daß

$$dQ(0,\ ux)=-e^{-ux}\frac{dx}{x},$$

so ergibt eine partielle Integration als den Wert der rechten Seite

$$(27^1) \qquad 4\int_1^\infty \frac{\log(x+\sqrt{x^2-1})}{x}\,e^{-ux}\,dx.$$

Für $s=1$ wird der Ausdruck (26^1)

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,Q(2,\ ux);$$

wegen

$$\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}=d\,\frac{\sqrt{x^2-1}}{x},\qquad dQ(2,\ ux)=-e^{-ux}\,u^2x\,dx$$

ergibt eine partielle Integration, wenn man zu gleicher Zeit mit (26^2) vergleicht:

(28)
$$u^2 \int_1^\infty \sqrt{x^2-1}\, e^{-ux}\, dx =$$
$$= 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{u^{2m}}{4^m\, m!\, m!} + 2m \frac{\Psi(m) - \log \frac{u}{2}}{4^m\, m!\, m!} u^{2m} \right].$$