Matyáš Lerch

Einiges über den Intergrallogarithmus

Monatsch. Math. Phys. 16 (1905), 125–134

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501567

Einiges über den Integrallogarithmus.

Von **Matthias Lerch** in Freiburg (Schweiz).

I.

Für die Funktion

$$(1) \qquad li\,(e^{-u}) = -\int_u^\infty e^{-x}\,\frac{dx}{x}$$

bestehen mehrere Integraldarstellungen, die zum Teile mit der Theorie der sogenannten unvollständigen Gammafunktion

$$\int_\omega^\infty e^{-x}\,x^{s-1}\,dx$$

in Zusammenhang gebracht werden können. Eine, wie mir scheint, neue Formel, u. zw.

$$(2) \qquad \int_0^\infty e^{-u\left(x+\frac{1}{x}\right)}\log x\,\frac{dx}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{\pi}{u}}\,e^{2u}\,li\,(e^{-4u})$$

ergab sich durch einen Grenzübergang als Folge von einer Beziehung aus der Theorie der Besselschen Funktionen. Dieselbe soll hier in direkter und elementarer Weise begründet werden.

Zu dem Zwecke werde in dem Integral

$$J = \int_0^\infty e^{-u\left(x+\frac{1}{x}\right)}\log x\,\frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad (u > 0),$$

der Ausdruck $\log x$ durch das Integral

$$\log x = \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z}\,dz$$

ersetzt, also

$$J = \int_0^\infty e^{-u\left(x+\frac{1}{x}\right)} \frac{dx}{\sqrt{x}} \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z}\, dz.$$

Die Vertauschung der Integrationsordnung ist offenbar gestattet und liefert

$$J = \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left[e^{-z} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}\, e^{-u\left(x+\frac{1}{x}\right)} - \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}\, e^{-x(u+z)-\frac{u}{x}} \right].$$

Die inneren Integrationen sind mit Hilfe der bekannten Formel

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}\, e^{-ux-\frac{v}{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{u}} \cdot e^{-2\sqrt{uv}}$$

ausführbar und liefern

$$J = \sqrt{\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left[\frac{1}{\sqrt{u}}\, e^{-z-2u} - \frac{1}{\sqrt{u+z}}\, e^{-2\sqrt{u(u+z)}} \right].$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, fassen wir ihn als den Grenzwert für unendlich kleine positive ε der Größe

$$(a) \qquad J_\varepsilon = \sqrt{\frac{\pi}{u}}\, e^{-2u} \int_\varepsilon^\infty \frac{dz}{z}\, e^{-z} - \sqrt{\pi} \int_\varepsilon^\infty e^{-2\sqrt{u(u+z)}} \frac{dz}{z\sqrt{u+z}}$$

auf. Hier formen wir das zweite Integral vermöge der Substitution

$$u + z = u x^2$$

um; dabei ist

$$\frac{dz}{z\sqrt{u+z}} = \frac{2\,dx}{(x^2-1)\sqrt{u}},$$

und daher

$$\sqrt{\pi} \int_\varepsilon^\infty e^{-2\sqrt{u(u+z)}} \frac{dz}{z\sqrt{u+z}} = \sqrt{\frac{\pi}{u}} \int_{\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{u}}}^\infty e^{-2ux} \frac{2\,dx}{x^2-1};$$

vermöge der Identität

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

zerlegt sich die rechte Seite in die folgenden zwei Ausdrücke

$$\sqrt{\frac{\pi}{u}}\int\limits_{\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{u}}}^{\infty} e^{-2ux}\frac{dx}{x-1}-\sqrt{\frac{\pi}{u}}\int\limits_{\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{u}}}^{\infty} e^{-2ux}\frac{dx}{x+1}$$

Hier setze ich im ersten Integral $x=y+1$, im zweiten $x=y-1$, wodurch die Gestalt

$$\sqrt{\frac{\pi}{u}}\int\limits_{\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{u}}-1}^{\infty} e^{-2uy-2u}\frac{dy}{y}-\sqrt{\frac{\pi}{u}}\int\limits_{1+\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{u}}}^{\infty} e^{-2uy+2u}\frac{dy}{y}$$

zum Vorschein kommt. Dies ist der Wert des zweiten Gliedes in der rechten Seite von (a). Setzt man ihn ein, so ergibt sich, wenn man zu gleicher Zeit die Variable $x=2uy$ einführt, die Darstellung

$$J_\varepsilon=\sqrt{\frac{\pi}{u}}\,e^{-2u}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon'} e^{-x}\frac{dx}{x}+\sqrt{\frac{\pi}{u}}\,e^{2u}\int\limits_{u_1}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x},$$

wobei $\varepsilon'=2u\left(\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{u}}-1\right)$, $u_1=2u+2u\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{u}}$ gesetzt wurde. Nun ist aber

$$\lim_{\varepsilon=0}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon'} e^{-x}\frac{dx}{x}=\lim\log\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}=0,\quad \lim u_1=4u,$$

und daher

$$\lim J_\varepsilon=\sqrt{\frac{\pi}{u}}\,e^{2u}\int\limits_{4u}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}.$$

Das Integral J hat daher den Wert

$$J=\sqrt{\frac{\pi}{u}}\,e^{2u}\int\limits_{4u}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x},$$

und die Formel (2) ist bewiesen.

II.

Zu folgenden Betrachtungen gab mir ein Resultat des großen Mathematikers Hermite Anlaß, das mir leider nur durch ein Zitat (Educational Times, XXIX) und ohne Beweis bekannt wurde.

Wir beginnen mit Auswertung der endlichen Summe

$$S_n = \sum_{\mu=0}^{n} \frac{(-1)^\mu}{\Gamma(v+\mu)\,\Gamma(u+n-\mu)}.$$

Ich benütze die Beziehung

$$(\alpha) \qquad \Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

vermöge deren sich zunächst die Darstellung

$$\frac{1}{\Gamma(v+\mu)\,\Gamma(u+n-\mu)} =$$

$$= (-1)^n \frac{\sin u\pi \sin v\pi}{\pi^2} \Gamma(1-v-\mu)\,.\,\Gamma(1+\mu-n-u)$$

ergibt. Wird alsdann

$$S'_n = \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^\mu \frac{\Gamma(1-v-\mu)\,\Gamma(1+\mu-n-u)}{\Gamma(2-u-v-n)}$$

gesetzt, so hat man

$$S_n = (-1)^n \frac{\sin u\pi \sin v\pi}{\pi^2} \Gamma(2-u-v-n)\, S'_n,$$

und es handelt sich daher noch um die Summe S'_n. Wir machen vorübergehend die Annahmen

$$v+n<0, \quad u+n<0,$$

die uns gestatten, die Eulersche Gleichung

$$\frac{\Gamma(1-v-\mu)\,\Gamma(1+\mu-n-u)}{\Gamma(2-u-v-n)} = \int_0^1 x^{-v-\mu}(1-x)^{\mu-n-u}\,dx$$

zu verwenden. Mit Hilfe derselben ergibt sich zunächst durch Summierung unter dem Integralzeichen:

$$S'_n = \int_0^1 x^{-v}(1-x)^{-n-u} \frac{1-\left(\frac{x-1}{x}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{x-1}{x}\right)}\,dx$$

oder

$$S'_n = \int_0^1 x^{-n-v}(1-x)^{-n-u}\left(x^{n+1}+(-1)^n(1-x)^{n+1}\right)dx$$

und nun ergibt dieselbe Eulersche Formel das gewünschte Resultat

$$S'_n = \frac{\Gamma(2-v)\,\Gamma(1-n-u)}{\Gamma(3-n-u-v)} + (-1)^n \frac{\Gamma(2-u)\,\Gamma(1-n-v)}{\Gamma(3-n-u-v)}.$$

Unsere obige Darstellung von S_n liefert infolgedessen

$$S_n = (-1)^n \frac{\sin u\pi \sin v\pi}{\pi^2 (2-n-u-v)} [\Gamma(2-v)\,\Gamma(1-n-u) + \\ + (-1)^n \Gamma(2-u)\,\Gamma(1-n-v)],$$

oder nach Umformung vermöge der Formel (α),

$$(3) \qquad S_n = \frac{1}{u+v+n-2}\left(\frac{1}{\Gamma(v-1)\,\Gamma(n+u)} + (-1)^n \frac{1}{\Gamma(u-1)\,\Gamma(n+v)}\right).$$

Mit Hilfe dieser Formel läßt sich die Multiplikation der folgenden Reihen

$$(4) \qquad \begin{aligned} F(x, u) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(u)}{\Gamma(u+\nu)} x^\nu, \\ F(-x, v) &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu \Gamma(v)}{\Gamma(v+\mu)} x^\mu \end{aligned}$$

in einfacher Gestalt ausführen, und zwar ergibt sich

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} F(x, u)\, F(-x, v) = (v-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(u)\, x^n}{(u+v+n-2)\,\Gamma(u+n)} + \\ + (u-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(v)\,(-x)^n}{(u+v+n-2)\,\Gamma(v+n)} \end{aligned} \right.$$

Setzt man hier $v = 1$ und beachtet, daß

$$F(-x, 1) = e^{-x},$$

so kommt

$$(6) \qquad e^{-x} F(x, u) = (u-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!\,(u+n-1)}.$$

Schreibt man hier $x = \omega$, $u = a+1$ und macht die Annahmen $\omega > 0$, $a > 0$, so geht die unendliche Reihe auf der rechten Seite in die folgende über

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega^n}{n!\,(a+n)} = \omega^{-a} P(a, \omega),$$

wobei in üblicher Weise

$$P(a, \omega) = \int_0^\omega e^{-x} x^{a-1} \, dx \tag{7}$$

gesetzt wird. Die Gleichung (6) ist somit nichts anderes als die vielfach wiedergefundene Eulersche Gleichung

$$P(a, \omega) = e^{-\omega} \left[\frac{\omega^a}{a} + \frac{\omega^{a+1}}{a(a+1)} + \frac{\omega^{a+2}}{a(a+1)(a+2)} + \cdots \right] \tag{8}$$

und es ist

$$F(\omega, a+1) = \frac{a e^\omega}{\omega^a} P(a, \omega). \tag{9}$$

Ferner ist zu bemerken, daß

$$F(-\omega, b+1) = \frac{b e^{-\omega}}{\omega^b} \int_0^\omega e^x x^{b-1} \, dx,$$

und die Formel (5) geht für $x = \omega$, $u = a + 1$, $v = b + 1$ in die folgende über

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\omega^{a+b}} \int_0^\omega e^{-x} x^{a-1} \, dx \int_0^\omega e^x x^{b-1} \, dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a) \, \omega^n}{(a+b+n) \, \Gamma(a+n+1)} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b) \, (-\omega)^n}{(a+b+n) \, \Gamma(b+n+1)}. \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Übrigens ist die Funktion $P(a, \omega)$ nicht als das einfachste Element diesbezüglicher Theorie zu betrachten, vielmehr gebührt diese Stellung der Transzendente

$$\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!\,(a+n)},$$

welche in bezug auf beide Argumente ein einfaches Verhalten aufweist.

III.

An Stelle von (4) betrachten wir die Funktion

$$f(x, u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(u)\, x^{\nu}}{\Gamma(u+\nu+1)}. \tag{11}$$

Verwandelt man in (5) u und v in $u+1$ resp. $v+1$, so entsteht

$$\begin{aligned} f(x, u) f(-x, v) = &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(u)\, x^n}{(u+v+n)\,\Gamma(u+n+1)} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(v)\,(-x)^n}{(u+v+n)\,\Gamma(v+n+1)} \end{aligned} \tag{12}$$

Nun ist

$$f(x, u) = \frac{1}{u} F(x, u+1)$$

nach (6) gleich der Größe

$$f(x, u) = e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!\,(u+n)}. \tag{13}$$

Für unendlich kleine u wird demnach

$$e^{-x} f(x, u) = \frac{1}{u} + \mathfrak{L}(-x) + (u),$$

wenn (u) eine unendlich kleine Größe bedeutet, und die Bezeichnung

$$\mathfrak{L}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!\, n} \tag{14}$$

benützt wird. Für unendlich kleine u ergibt sich demnach aus (12)

$$\begin{aligned} e^x f(-x, v)\left[\frac{1}{u} + \mathfrak{L}(-x)\right] = &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(v)\,(-x)^n}{(v+n)\,\Gamma(v+n+1)} + \\ &+ \frac{1}{u} \sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,(n+v)} - \\ &- \sum_{n=0}^{\infty} \left[\psi(n+1) - \psi(1) + \frac{1}{n+v}\right] \cdot \frac{x^n}{n!\,(n+v)} + (u). \end{aligned}$$

Das Vergleichen der mit $\frac{1}{u}$ multiplizierten Glieder liefert kein neues Resultat, dagegen ergeben die von u unabhängigen Glieder

$$e^x \mathfrak{L}(-x) f(-x, v) = \sum_0^\infty \frac{\Gamma(v)(-x)^n}{(v+n)\Gamma(v+n+1)} -$$
$$- \sum_{n=0}^\infty \left[\psi(n+1) - \psi(1) + \frac{1}{n+v}\right] \frac{x^n}{n!\,(n+v)}.$$

Im Vorhergehenden ist dem häufigen Gebrauch gemäß die Schreibweise

$$\psi(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$$

benützt worden. Die Konstante $-\psi(1)$ ist bekanntlich die Euler-Mascheronische, und wenn

$$\psi(1) = -C$$

gesetzt wird, so kommt auf der rechten Seite die Größe

$$-C \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!\,(n+v)} = -C e^x f(-x, v)$$

vor, die wir auf die linke Seite überführen wollen. So entsteht

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & e^x f(-x, v)[C + \mathfrak{L}(-x)] = \\ & = \sum_0^\infty \frac{\Gamma(v)(-x)^n}{(v+n)\Gamma(v+n+1)} - \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!\,(v+n)^2} - \\ & \qquad - \sum_0^\infty \frac{\psi(n+1)\,x^n}{n!\,(v+n)}. \end{aligned} \right.$$

In dieser Gleichung lassen wir nun an Stelle von v eine unendlich kleine Größe treten; da alsdann

$$e^x f(-x, v) = \frac{1}{v} + \mathfrak{L}(x) + (v),$$

so lautet die linke Seite von (15) bis auf unendlich kleine Größen

$$\left[\frac{1}{v} + \mathfrak{L}(x)\right] \left[C + \mathfrak{L}(-x)\right],$$

rechts hat man dagegen Glieder mit $\frac{1}{v^2}, \frac{1}{v}$ und konstante. Die ersteren heben sich gegenseitig auf, während die Betrachtung der Koeffizienten von $\frac{1}{v}$ nichts Neues herbeiführen würde. Wir beschäftigen uns somit nur mit konstanten Gliedern. Dasselbe der rechten Seite lautet

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi(1)-\psi(n+1)-\frac{1}{n}\right]\frac{(-x)^n}{n\,.\,n!}-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!\,n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n+1)\,x^n}{n!\,n},$$

und wir haben somit die Relation

$$\mathfrak{L}(x)\,[C+\mathfrak{L}(-x)]=-C\,\mathfrak{L}(-x)-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+(-x)^n}{n!\,n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n+1)}{n!\,n}(x^n+(-x)^n)$$

oder

$$(16)\quad\left\{\begin{array}{l}[C+\mathfrak{L}(x)]\quad[C+\mathfrak{L}(-x)]=\\ =C^2-2\sum\limits_{s}\left(\psi(s+1)+\frac{1}{s}\right)\frac{x^s}{s!\,s}\\ \qquad(s=2,4,6,8,\;\ldots).\end{array}\right.$$

Wegen der bekannten Gleichungen

$$li\,(e^x)=\log x+C+\mathfrak{L}(x),$$
$$li\,(e^{-x})=\log x+C+\mathfrak{L}(-x),$$

scheint die ganze Transzendente

$$C+\mathfrak{L}(x)$$

als das einfachste Element der Theorie des Integrallogarithmus zu betrachten sein. Eine Bestätigung hievon läßt sich nur von der Weiterentwicklung der Theorie erwarten, falls überhaupt einfache Eigenschaften dieser bisher zu wenig elastischen Transzendente erwartet werden können.

Zum Schlusse möge als ein einfaches Korollar der Gleichung (10) der Fall $a = b = \frac{1}{2}$ erörtert werden; in demselben wird

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{\lambda} \frac{\omega^{\lambda}}{\lambda \, \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} = \int_{0}^{\sqrt{\omega}} e^{-x^2} \, dx \int_{0}^{\sqrt{\omega}} e^{x^2} \, dx \tag{17}$$

$$(\lambda = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots).$$