Matyáš Lerch
Über den Kroneckerschen Beweis der sogenannten Kroneckerschen Grenzformel

Arch. der Math. u. Phys. (3), 6 (1904), 85–94

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501564

Über den Kroneckerschen Beweis der sogenannten Kroneckerschen Grenzformel.

Von M. Lerch in Freiburg (Schweiz).

Bedeuten a, b, c drei reelle Größen von der Beschaffenheit, daß $4ac - b^2 = 1$ und $a > 0$ ist, so konvergiert die folgende, schon von Lejeune-Dirichlet eingeführte Doppelreihe

$$\sum_{m,n}' \frac{1}{(am^2 + bmn + cn^2)^{1+\varrho}} \quad \begin{pmatrix} m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ \text{mit Ausschluß von } m = n = 0 \end{pmatrix},$$

solange $\varrho > 0$ bleibt; ihre Summe wächst ins Unendliche, wenn sich ϱ der Null nähert, und zwar so, daß sie nach Subtraktion von $2\pi/\varrho$ einen endlichen Rest gibt, der für $\varrho = 0$ bestimmt bleibt und sich durch elliptische Funktionen ausdrücken läßt. Dies erkannt zu haben, ist ein interessantes Resultat Kroneckers. Jedoch sind die Betrachtungen, welche dieser große Mathematiker zur Begründung seines Satzes ausgeführt hat[1]), der Form nach so kompliziert, daß sich das Bedürfnis eines einfacheren Beweises wirklich fühlbar macht. Solche Beweise sind nachher geliefert worden, und zwar von Herrn H. Weber[2]), von mir[3]) (zwei wesentlich verschiedene) und von Herrn Franel.[4]) Einige dieser Beweise gestatten in die analytische Natur der durch die Doppelreihe definierten Funktion von ϱ tiefer einzudringen; wenn man sich aber lediglich mit der Begründung der Kroneckerschen Grenzformel begnügen will, so läßt sich, wie ich vor längerer Zeit erkannt habe, der Kroneckersche Beweis so darstellen, daß er den anderen der Klarheit und Einfachheit nach in keiner Weise nachsteht. Eine Veröffentlichung dieser zumeist bloß formalen Vereinfachung scheint mir schon aus dem Grunde geboten zu sein, weil dadurch die der Kroneckerschen Beweisführung anhaftende gedankliche Eleganz erst recht zu Tage tritt.

---

1) Sitzungsberichte der kgl. preuß. Akad. d. Wiss., 1889, p. 123 u. ff.

2) Math. Ann., Bd. 33 und in dem Werke „Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen", p. 456.

3) Rozpravy české Akademie, I. Jahrg., Nr. 27 (§ 11), 1891, bzw. Sitzungsberichte d. kgl. böhm. Ges. der Wiss. in Prag, II. Klasse, 1893, Nr. IX.

4) Math. Ann., Bd. 48.

1. Wir gehen mit Kronecker von der unendlichen Doppelreihe

$$(1)\qquad F(\sigma,\tau,\varrho)=\sum_{m,\,n}{}' \frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{f(m,n)^{1+\varrho}}\qquad \left(\begin{array}{c} m,\, n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots \\ \text{mit Ausschluß von } m=n=0\end{array}\right)$$

aus, in welcher die Funktion $f(x, y)$ die quadratische Form $ax^2+bxy+cy^2$ bedeuten soll und σ, τ, ϱ drei reelle Größen sind, die wir den Bedingungen $0<\sigma<1$, $0<\tau<1$, $\varrho>0$ unterwerfen wollen. Mit Zuhilfenahme der bekannten Integralformel

$$\frac{\Gamma(1+\varrho)}{k^{1+\varrho}}=\int_0^\infty e^{-kx}x^\varrho dx$$

erhält man für $k=f(m, n)$ an Stelle von (1)

$$\Gamma(1+\varrho)F(\sigma,\tau,\varrho)=\sum_{m,\,n}{}'\int_0^\infty x^\varrho\, dx\cdot e^{-xf(m,\,n)+2\pi i(m\sigma+n\tau)},$$

und es soll zunächst gezeigt werden, daß man das Summationszeichen unter das Integralzeichen bringen darf, sodaß die Formel

$$(2)\qquad \Gamma(1+\varrho)F(\sigma,\tau,\varrho)=\int_0^\infty x^\varrho\, dx\sum_{m,\,n}{}' e^{-xf(m,\,n)+2\pi i(m\sigma+n\tau)},$$

entsteht. Da die unter dem Integralzeichen stehende Doppelsumme in jedem Intervalle $(x_0\dots\infty)$, wo $x_0>0$, gleichmäßig konvergiert und einen Wert hat, der für unendlich wachsendes x so intensiv gegen die Null konvergiert wie eine Exponentialfunktion, so ist die Existenz des Integrals mit den Grenzen x_0 und ∞ evident. Über die Integrierbarkeit der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion von $x=0$ aus gewinnt man am bequemsten Aufschluß, wenn man die weiter unten noch zu benutzende Transformationsformel

$$(3)\qquad \sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-2u\pi f(m,\,n)+2\pi i(m\sigma+n\tau)}=\frac{1}{u}\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2\pi}{u}f'(m+\sigma,\,n+\tau)}$$

heranzieht. In derselben wurde $f'(x, y)=cx^2-bxy+ay^2$ gesetzt, und u bedeutet darin irgend welche positive Größe. Dieselbe findet sich in der zitierten Abhandlung Kroneckers vollständig bewiesen und kann auch direkt abgeleitet werden, wenn man die rechte Seite in eine Fouriersche Doppelreihe entwickelt. Da sich der Kroneckersche Beweis überdies in einem über die Kroneckerschen Arbeiten verfaßten Kommentar[1]) in getreuer Wiedergabe findet, so kann ich mir den Beweis der Formel (3) an dieser Stelle ersparen.

Wir wollen nun in den beiden Doppelreihen der Gleichung (3) das Glied $m = n = 0$ isolieren, und erhalten so

$$(3^0)\quad \begin{cases} \sum\limits_{m,n}{}' e^{-2u\pi f(m,n) + 2\pi i(m\sigma + n\tau)} \\ = \left(-1 + \frac{1}{u} e^{-\frac{2\pi}{u} f'(\sigma,\tau)}\right) + \frac{1}{u} \sum\limits_{m,n}{}' e^{-\frac{2\pi}{u} f'(m+\sigma,\, n+\tau)}, \end{cases}$$

wobei die Summationsbedingungen auf beiden Seiten die gleichen sind wie in der Formel (1).

Wenn man jetzt in (3^0) für u die Größe $x/2\pi$ setzt, so erhält man für die unter dem Integralzeichen in (2) stehende Funktion eine Darstellung, aus welcher unmittelbar zu ersehen ist, daß zur Integralexistenz die Bedingung $\varrho > -1$ ausreicht, solange allerdings die Ungleichungen $0 < \sigma < 1$, $0 < \tau < 1$ *in sensu rigoroso* stattfinden, wie wir übrigens angenommen haben. Diese letzte Bedingung wird jedoch bei der Annahme $\varrho > 0$ hinfällig, eine Bemerkung, die für das Folgende sehr wichtig ist.

Wir wollen nun zeigen, daß sich in (2) die Integration gliedweise ausführen läßt, wenn $\varrho > 0$ ist. Ich spalte zu dem Zwecke die Doppelreihe in zwei Teile $S_N + R_N$, indem ich setze

$$S_N = \sum_{m,n}{}' e^{-xf(m,n) + 2\pi i(m\sigma + n\tau)}, \qquad (f(m,n) \leq N)$$

$$R_N = \sum_{m,n}{}' e^{-xf(m,n) + 2\pi i(m\sigma + n\tau)}, \qquad (f(m,n) > N)$$

ich bezeichne außerdem mit S_N^0, R_N^0 die vorhergehenden Ausdrücke für das spezielle Wertsystem $\sigma = \tau = 0$.

Das Integral (2) ist dann offenbar

$$(4)\qquad \int_0^\infty x^\varrho (S_N + R_N)\,dx = \int_0^\infty x^\varrho S_N\,dx + \int_0^\infty x^\varrho R_N\,dx;$$

es existiert ferner unter der Annahme $\varrho > 0$ auch das Integral

$$\int_0^\infty x^\varrho (S_N^0 + R_N^0)\,dx \quad \text{sowie} \quad \int_0^\infty x^\varrho R_N^0\,dx,$$

1) Formes quadratiques et multiplication complexe. Deux formules fondamentales d'après Kronecker, par J. de Séguier. Berlin, Felix L. Dames, 1894.

und es ist, wie leicht zu sehen,

$$\lim_{N=\infty}\int_0^\infty x^\varrho R_N^0\,dx = 0.$$

Beachtet man, daß $|R_N| \leqq R_N^0$ ist, so folgt hieraus die Grenzgleichung

$$\lim_{N=\infty}\int_0^\infty x^\varrho R_N\,dx = 0,$$

und infolge dessen erschließt man aus (4)

$$\lim_{N=\infty}\int_0^\infty x^\varrho (S_N + R_N)\,dx = \lim_{N=\infty}\int_0^\infty x^\varrho S_N\,dx.$$

Da sich im letzten Integral die Summation und die Integration offenbar vertauschen lassen, so ist die rechte Seite dieser Gleichung nichts anderes als die Doppelreihe $\Gamma(1+\varrho)F(\sigma, \tau; \varrho)$, womit die Formel (2) erwiesen ist.

Um nun die rechte Seite von (2) umzuformen, spalte ich das Integral nach dem Schema

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$$

in zwei andere, ersetze im ersten Integral die Doppelsumme

$$\sum{}' e^{-xf(m,n)+2\pi i(m\sigma+n\tau)}$$

durch den transformierten Ausdruck (3^0)

$$\left(-1+\frac{2\pi}{x}e^{-\frac{4\pi^2}{x}f'(\sigma,\tau)}\right)+\frac{2\pi}{x}\sum_{m,n}{}' e^{-\frac{4\pi^2}{x}f'(m+\sigma,\, n+\tau)}$$

und führe die Integrationsvariable $1/x$ anstelle von x ein. Alsdann läßt sich das Integral der mit x^ϱ multiplizierten Reihe mit demjenigen, dessen Grenzen 1 und ∞ sind, vereinigen, während man die aus dem eingeklammerten Ausdruck stammenden Integrale von dem Rest abtrennen kann. Man erhält in der Weise die Formel

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\Gamma(1+\varrho)F(\sigma,\tau,\varrho) = -\frac{1}{1+\varrho} + 2\pi\int_1^\infty e^{-4\pi^2 xf'(\sigma,\tau)}\frac{dx}{x^{1+\varrho}} \\ &+\int_1^\infty dx\sum_{m,n}{}'\left(x^\varrho e^{-xf(m,n)+2\pi i(m\sigma+n\tau)} + \frac{2\pi}{x^{1+\varrho}}e^{-4\pi^2 xf'(m+\sigma,\, n+\tau)}\right).\end{aligned}\right.$$

Die Dirichletsche Doppelreihe entsteht aus (1) vermöge des Grenzübergangs $\sigma = 0$, $\tau = 0$, da wegen $\varrho > 0$ offenbar

$$\lim_{\sigma = 0,\, \tau = 0} F(\sigma, \tau, \varrho) = \sum_{m, n}' \frac{1}{f(m, n)^{1+\varrho}} = F(0, 0, \varrho).$$

Auf der rechten Seite der Gleichung (5) verwandelt sich bei diesem Grenzübergang das erste Integral in

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1+\varrho}} = \frac{1}{\varrho},$$

und ebenso läßt sich beim zweiten Integral der Grenzübergang durch bloßes Einsetzen $\sigma = \tau = 0$ ausführen, sodaß man nach der Division durch $\Gamma(1 + \varrho)$ die Formel

$$F(0, 0, \varrho) = -\frac{1}{(1+\varrho)\,\Gamma(1+\varrho)} + \frac{2\pi}{\varrho\,\Gamma(1+\varrho)}$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(1+\varrho)} \int_1^\infty dx \sum_{m, n}' \left(x^\varrho e^{-x f(m, n)} + \frac{2\pi}{x^{1+\varrho}} e^{-4\pi^2 x f'(m, n)} \right)$$

erhält. In derselben ist das erste und dritte Glied rechts an der Stelle $\varrho = 0$ endlich und stetig, und die Potenzentwickelung

$$\frac{2\pi}{\varrho\,\Gamma(1+\varrho)} = \frac{2\pi}{\varrho} - 2\pi\,\Gamma'(1) + \cdots$$

zeigt, daß die Differenz

$$F(0, 0, \varrho) - \frac{2\pi}{\varrho}$$

an der Stelle $\varrho = 0$ endlich und stetig bleibt, und daselbst den Wert

$$(6) \quad \begin{cases} \lim\limits_{\varrho = 0} \left[F(0, 0, \varrho) - \dfrac{2\pi}{\varrho} \right] \\ = -1 - 2\pi\,\Gamma'(1) + \displaystyle\int_1^\infty dx \sum_{m, n}' \left(e^{-x f(m, n)} + \frac{2\pi}{x} e^{-4\pi^2 x f'(m, n)} \right) \end{cases}$$

erreicht. Um diesen Grenzwert genauer zu beherrschen, muß man noch den Integralwert rechts ermitteln; die so erwachsene neue Aufgabe löst Kronecker in geistreicher Weise durch Heranziehung der Formel (5) im Grenzfalle $\varrho = 0$, welche unter der Bezeichnung

$$F(\sigma, \tau, 0) = \lim_{\varrho = 0} F(\sigma, \tau, \varrho)$$

offenbar die Gestalt hat

$$(7)\quad \begin{cases} F(\sigma, \tau, 0) = -1 + 2\pi \int\limits_1^\infty e^{-4\pi^2 x f'(\sigma, \tau)} \frac{dx}{x} \\ + \int\limits_1^\infty dx \sum\limits_{m, n}' \left(e^{-x f(m, n) + 2\pi i(m\sigma + n\tau)} + \frac{2\pi}{x} e^{-4\pi^2 x f'(m+\sigma, n+\tau)}\right). \end{cases}$$

Wenn man nämlich in derselben das zweite Glied rechts auf die linke Seite bringt, so läßt sich der Grenzübergang zu $\sigma = 0$, $\tau = 0$ ausführen, und man erhält

$$-1 + \int\limits_1^\infty dx \sum\limits_{m, n}' \left(e^{-x f(m, n)} + \frac{2\pi}{x} e^{-4\pi^2 x f'(m, n)}\right)$$
$$= \lim_{\sigma=0, \tau=0} \left\{F(\sigma, \tau, 0) - 2\pi \int\limits_1^\infty e^{-4\pi^2 x f'(\sigma, \tau)} \frac{dx}{x}\right\}.$$

Die linke Seite bildet einen Bestandteil der rechten Seite von (6), und demnach hat man an Stelle von (6) die Gleichung

$$(8)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\varrho=0} \left[F(0, 0, \varrho) - \frac{2\pi}{\varrho}\right] \\ = -2\pi \Gamma'(1) + \lim\limits_{\sigma=0, \tau=0} \left\{F(\sigma, \tau, 0) - 2\pi \int\limits_1^\infty e^{-4\pi^2 x f'(\sigma, \tau)} \frac{dx}{x}\right\}. \end{cases}$$

Nun hat aber Kronecker den Ausdruck $F(\sigma, \tau, 0)$ schon früher bestimmt, und zwar[1])

$$(9)\quad F(\sigma, \tau, 0) = -2\pi \log \left\{e^{(w_1 + w_2)\tau^2 \pi i} \frac{\vartheta_1(\sigma + \tau w_1 | w_1)\, \vartheta_1(\sigma - \tau w_2 | w_2)}{H(w_1)\, H(w_2)}\right\},$$

wobei der Kürze wegen

$$w_1 = \frac{-b + i}{2c}, \quad w_2 = \frac{b + i}{2c}$$

gesetzt und ferner die Bezeichnung

$$(10)\qquad H(w) = e^{\frac{w\pi i}{12}} \prod_{n=1}^\infty (1 - e^{2nw\pi i})$$

benutzt wird. Die Bezeichnung $\vartheta_1(u|w)$ ist die in der Theorie der elliptischen Funktionen übliche, und zwar für $q = e^{w\pi i}$:

$$\vartheta_1(u|w) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin u\pi \prod_{n=1}^\infty (1 - q^{2n})(1 - q^{2n} e^{2u\pi i})(1 - q^{2n} e^{-2u\pi i}).$$

---

1) Berliner Sitzungsberichte 1883, S. 497 u. ff.

Wir geben die Begründung des Hilfssatzes (9) weiter unten, und wollen uns seiner vorläufig bedienen, um den Grenzausdruck auf der rechten Seite von (8) zu ermitteln.

Man hat offenbar

$$\int_1^\infty e^{-4\pi^2 x f'(\sigma,\tau)}\frac{dx}{x}=\int_{4\pi^2 f'(\sigma,\tau)}^\infty e^{-x}\frac{dx}{x},$$

und da sich vermöge der partiellen Integration die Formel ergibt

$$\int_\varepsilon^\infty e^{-x}\frac{dx}{x}=-e^{-\varepsilon}\log\varepsilon+\int_\varepsilon^\infty e^{-x}\log x\,dx,$$

aus welcher für unendlich kleine ε

$$\int_\varepsilon^\infty e^{-x}\frac{dx}{x}=-\log\varepsilon+\int_0^\infty e^{-x}\log x\,dx=-\log\varepsilon+\Gamma'(1)$$

folgt, so kann man an Stelle der rechten Seite von (8) schreiben

$$-4\pi\Gamma'(1)+\lim_{\sigma=0,\ \tau=0}\{F(\sigma,\tau,0)+2\pi\log 4\pi^2 f'(\sigma,\tau)\}.$$

Der eingeklammerte Ausdruck ist nun nach (9) offenbar

$$-2\pi\log e^{(w_1+w_2)\tau^2\pi i}\frac{\vartheta_1(\sigma+\tau w_1\,|\,w_1)\,\vartheta_1(\sigma-\tau w_2\,|\,w_2)}{H(w_1)\,H(w_2)\,4\pi^2 f'(\sigma,\tau)},$$

und da man für unendlich kleine σ und τ

$$\sin(\sigma+\tau w_1)\pi\cdot\sin(\sigma-\tau w_2)\pi=\pi^2(\sigma+\tau w_1)(\sigma-\tau w_2)=\pi^2\frac{f'(\sigma,\tau)}{c}$$

hat, so geht der in Rede stehende Ausdruck für $\sigma=0$, $\tau=0$ über in

$$-2\pi\log\frac{e^{(w_1+w_2)\frac{\pi i}{4}}\Pi(1-e^{2\pi w_1\pi i})^3\,\Pi(1-e^{2\pi m_2\pi i})^3}{c\cdot H(w_1)\,H(w_2)}$$
$$=4\pi\log\frac{\sqrt{c}}{H(w_1)\,H(w_2)}.$$

Man hat daher an Stelle von (8)

$$\text{(11)}\quad \lim_{\varrho=0}\left[F(0,0,\varrho)-\frac{2\pi}{\varrho}\right]=-4\pi\Gamma'(1)+4\pi\log\frac{\sqrt{c}}{H(w_1)\,H(w_2)},$$

die Kroneckersche *Grenzformel*. Man kann ihr eine etwas allgemeinere Gestalt erteilen, indem man eine allgemeine *positive* quadratische Form $ax^2+bxy+cy^2$ mit der negativen Diskriminante $b^2-4ac=-\Delta$ einführt. Wird dann

$$w_1=\frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2c},\quad w_2=\frac{b+i\sqrt{\Delta}}{2c}$$

gesetzt, so lautet das gemeinte Theorem wie folgt:

$$\lim_{\varrho=0}\left[-\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}{}'\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{am^2+bmn+cn^2}\right)^{1+\varrho}\right]$$
$$=-2\Gamma'(1)-\log\sqrt{\Delta}+2\log\frac{\sqrt{c}}{H(w_1)\,H(w_2)}.$$

2. Nachdem wir den Hauptgegenstand erledigt haben, wollen wir auf einige Punkte näher eingehen, welche die Hilfsformel (9) betreffen. Man kann dieselbe vorläufig so formulieren, daß die Grenzgleichung

$$(12)\qquad \lim_{\varrho=0}F(\sigma,\tau,\varrho)=\sum_{m,n}{}'\frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{f(m,n)}$$

stattfindet, wobei rechts die Summation zuerst nach n und dann nach m auszuführen ist, d. h. genau ausgedrückt, daß man die folgende Größe bilden soll:

$$(12\text{a})\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{e^{2\pi in\tau}}{f(0,n)}+\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{f(m,n)},$$

wobei der am Summationszeichen angebrachte Accent bedeutet, daß man das Glied $n=0$, bezw. $m=0$ unterdrücken soll.

Daß die Übereinstimmung des Grenzwertes $F(\sigma, \tau, 0)$ mit der Doppelreihe (12a) nicht von vorneherein klar ist, ersieht man schon aus dem Umstande, daß die Doppelreihe $F(\sigma, \tau, \varrho)$ für $\varrho > 0$ absolut konvergiert, während dies bei (12a) nicht der Fall ist. Für diese Übereinstimmung hat Kronecker einen Beweis entwickelt, der sich auf eine Abelsche Identität gründet (l. c., Art. IV), außerdem hat er einen zweiten Beweis angedeutet (Art. V), dessen Ausführung jedoch dem Kommentator Herrn J. de Séguier nicht gelungen ist.[1]) Es wird an der betreffenden Stelle zwar mit aller Strenge gezeigt, daß der Grenzwert

$$\lim_{\varrho=0}F(\sigma,\tau,\varrho)=F(\sigma,\tau,0)$$

existiert, und daß er durch das Integral

$$\int_0^\infty dx\sum_{m,n}{}'e^{-xf(m,n)+2\pi i(m\sigma+n\tau)}$$

dargestellt wird; für die Übereinstimmung des letzteren mit dem Ausdruck (12a) habe ich mich jedoch vergebens bemüht, an der angegebenen

1) S. 192 des citierten Werkes.

Stelle irgend einen Beweisgrund zu entdecken. Der oben auseinandergesetzte analoge Beweis im Falle $\varrho > 0$ ist hier nicht anwendbar, weil das Integral

$$\int_0^\infty dx \sum{}' e^{-x f(m,\, n)}$$

nicht existiert. Bevor dieser prinzipielle Punkt mit gehöriger Strenge erledigt ist, kann ich nur den ersten von den Kroneckerschen Beweisen als brauchbar betrachten. Von diesem soll hier eine vereinfachte Darstellung kurz angedeutet werden. Es wird genügen zu zeigen, daß die Gleichung

$$\lim_{\varrho=0} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{f(m,\, n)^{1+\varrho}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{f(m,\, n)}$$

stattfindet; denn der Rest der Doppelreihe läßt sich durch dasselbe Verfahren behandeln.

In der bekannten Abelschen Identität

$$\sum_{n=0}^{r} a_n b_n = \sum_{n=0}^{r-1} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_r b_r, \quad A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n,$$

etze ich

$$a_n = e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}, \quad b_n = f(m,\, n)^{-1-\varrho},$$

daß

$$A_n = \frac{e^{2\pi i m\sigma}\left(e^{2\tau\pi i(n+1)} - 1\right)}{e^{2\tau\pi i} - 1}.$$

Die Bemerkung, daß in diesem Falle

$$\lim_{r=\infty} A_r b_r = 0$$

liefert unmittelbar die Relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(m\sigma+n\tau)}}{f(m,\, n)^{1+\varrho}}$$

$$\frac{e^{2m\sigma\pi i}}{e^{2\tau\pi i} - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{2\tau\pi i(n+1)} - 1\right)\left[f(m,\, n)^{-1-\varrho} - f(m,\, n+1)^{-1-\varrho}\right].$$

Anwendung des Mittelwertsatzes ergibt ferner

$$f(m,\, n)^{-1-\varrho} - f(m,\, n+1)^{-1-\varrho}$$
$$= (1+\varrho) f(m,\, n+\vartheta)^{-2-\varrho}(bm + 2cn + 2c\vartheta),$$

wobei $0 < \vartheta < 1$ ist, und hieraus folgt, daß die Doppelreihe, welche entsteht, wenn man rechts $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ setzt und die Resultate addiert, nicht nur absolut, sondern auch gleichmäßig in Bezug auf ϱ in der Umgebung von $\varrho = 0$ konvergiert. Dies gibt

$$\lim_{\varrho = 0} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i (m\sigma + n\tau)}}{f(m, n)^{1+\varrho}}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{e^{2m\sigma\pi i}}{e^{2\tau\pi i} - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{2\tau\pi i(n+1)} - 1\right) \left(\frac{1}{f(m, n)} - \frac{1}{f(m, n+1)}\right),$$

und die rechte Seite ist nichts anderes als eine Umformung der Doppelreihe

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i (m\sigma + n\tau)}}{f(m, n)}$$

vermittelst der Abelschen Identität.

Nachdem die Gleichung (12) bewiesen ist, bleibt noch übrig, die Summation auf der rechten Seite auszuführen, um zur Hülfsformel (9) zu gelangen. Dies geschieht am einfachsten, wenn man gerade den umgekehrten Weg verfolgt wie Kronecker. Man erhält zunächst vermöge der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{f(m, n)} = \frac{1}{mi}\left(\frac{1}{n - m w_1} - \frac{1}{n + m w_2}\right);$$

multipliziert man beiderseits mit $e^{2\pi i(m\sigma + n\tau)}$, so läßt sich rechts mit Hilfe der Relation

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2n\tau\pi i}}{n - u} = 2\pi i \frac{e^{2u\tau\pi i}}{1 - e^{2u\pi i}}$$

die Summation nach n ausführen, und wenn man in der so gewonnenen einfachen Reihe mit dem Summationsbuchstaben $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$ die einzelnen Glieder in geometrische Reihen verwandelt, so wird man mit Hilfe der logarithmischen Reihe die Summation nach m ausführen können, wodurch dann nach geringen Rechnungen die Formel (9) sich ergibt.

Freiburg (Schweiz), 21. November 1902.