Matyáš Lerch
Sur quelques applications d’un théorème arithmétique de Jacobi

Bull. international de l‘Academie des sciences de Cracovie, Cracovie 1904, 57–70

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501560

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

N° 2. Février 1904.

Séance du lundi 1 Février 1904.

PRÉSIDENCE DE M. E. GODLEWSKI.

8. M. M. LERCH. **Sur quelques applications d'un théorème arithmétique de Jacobi.** Mémoire présenté par M. S. Zaremba m. c.

Soit p un nombre premier impair, g une des racines primitives correspondantes, puis n un entier positif plus petit que $p-1$, et désignons par a un entier positif ou négatif qui satisfait à la congruence

$$a \equiv g^{p-1-n} \pmod{p},$$

qu'on peut mettre sous la forme fractionnaire plus simple

$$a \equiv \frac{1}{g^n} \pmod{p}. \tag{1}$$

En indiquant suivant l'usage par ind ν l'entier μ qui satisfait à la congruence

$$g^\mu \equiv \nu \pmod{p}, \quad (0 < \nu < p),$$

avec la condition accessoire $0 \leqq \mu < p-1$, considérons la fonction entière de l'indéterminée x

$$F_n(x) = \sum_{\nu=1}^{p-1} a^{\mathrm{ind}\,\nu}\, x^\nu \tag{2}$$

Dans un célèbre mémoire[1]) Jacobi met ce polynôme en relation avec la fonction Y_n, somme des termes en y^n, $y^{n+1}, \dots y^{p-1}$ dans le développement de Maclaurin correspondant à la fonction transcendante

$$\{\log(1+y)\}^n;$$

de sorte que la différence des deux expressions soit une série entière de la forme

$$\{\log(1+y)\}^n - Y_n = a_p y^p + a_{p+1} y^{p+1} + a^{p+2} y^{p+2} + \dots \tag{3}$$

La relation en question consiste en la congruence arithmétique

$$F_n(1+y) \equiv -\frac{1}{n!} Y_n \pmod{p}. \tag{4}$$

L'importance de la féconde découverte du grand géomètre ressortira en considérant le cas particulier de $n = m$, où l'on fait

$$\frac{p-1}{2} = m;$$

le résultat de Jacobi devient, dans le cas considéré,

$$Q(x) \equiv -\frac{1}{m!} Y_m(x-1) \quad (\text{mod. } p), \tag{5}$$

où $Q(x)$ désigne le polynôme intéressant

$$Q(x) = \sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) x^\nu. \tag{6}$$

Les coefficients de ce polynôme étant 1 ou -1, la congruence (5) le détermine sans ambiguité dès qu'on possède l'expression du polynôme $Y_m(x-1)$.

Dans ce qui suit, je vais démontrer la congruence de Jacobi (4), et j'y ajoute quelques conséquences du théorème (5).

1. La congruence (1) donne immédiatement

$$\alpha^{\operatorname{ind} \nu} \equiv \frac{1}{g^{n \operatorname{ind} \nu}} \equiv \frac{1}{\nu^n} \quad (\text{mod. } p),$$

ce qui permet de remplacer la fonction $F_n(x)$ par la suivante

$$\Phi_n(x) = \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{x^\nu}{\nu^n}, \tag{2*}$$

[1]) Ueber die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie (Journal de Crelle, T. 30, 1837; Werke, T. 6, p. 254).

car on a en effet

$$F_n(x) \quad \Phi_n(x) \quad (\mathrm{mod.}\ p).$$

Cela étant, considérons la fonction

$$\Phi_n(1+y) = \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{(1+y)^\nu}{\nu^n};$$

en remplaçant les puissances $(1+y)^\nu$ par leurs développements par la formule du binôme, il vient

$$\Phi_n(1+y) = \sum_{k=0}^{p-1} y^k \sum_{\nu=1}^{p-1} \binom{\nu}{k} \frac{1}{\nu^n}. \tag{7}$$

et nous allons réduire, suivant le module p, les coefficients des différentes puissances de l'indéterminée y. On n'a qu'à observer que l'on a

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{1}{\nu^{\pm s}} \quad 0 \quad (\mathrm{mod.}\ p).$$

si $0 < s > p-1$, mais que le second membre doit être remplacé par -1, si $s = 0$.

Par conséquent, les termes

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \binom{\nu}{k} \frac{1}{\nu^n} \qquad (k = 0, 1, \ldots n-1)$$

peuvent être supprimés, et il ne restent que ceux où $k \geqq n$.

Pour en déterminer les restes suivant le module p, considérons le développement

$$\binom{\nu}{k} = A_1^{(k)} \nu + A_2^{(k)} \nu^2 + \ldots + A_n^{(k)} \nu^n + \ldots + A_k^{(k)} \nu^k,$$

les coefficients étant des fractions indépendantes de ν et dont le dénominateur commun est la factorielle k! En substituant cette expression, il vient

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \binom{\nu}{k} \frac{1}{\nu^n} = A_1^{(k)} \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{1}{\nu^{n-1}} + A_2^{(k)} \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{1}{\nu^{n-2}} + \ldots + A_{n-1}^{(k)} \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{1}{\nu} +$$

$$+ A_n^{(k)} (p-1) + A_{n+1}^{(k)} \sum_{\nu=1}^{p-1} \nu + A_{m+2}^{(k)} \sum_{\nu=1}^{p-1} \nu^2 + \ldots;$$

dans le second membre toutes les sommations indiquées donnent des multiples de p. et il ne reste que le terme $A_n^{(p-1)}\ (p-1)$ ou bien

$$\sum_{\nu=1}^{p-1}\binom{\nu}{k}\frac{1}{\nu^n} \equiv A_n^{(k)} \quad (\text{mod. } p).$$

Cela étant. la formule (7) permet de conclure

$$(8) \qquad \Phi_n(1+y) \equiv \sum_{k=n}^{p-1} A_n^{(k)}\, y^k \quad (\text{mod. } p).$$

et il ne s'agit que du polynôme qui constitue le deuxième membre.

D'après la définition des nombres $A_n^{(k)}$. la somme

$$(8') \qquad S = -\sum_{k=n}^{p-1} A_n^{(k)}\, y^k$$

est le coefficient de x^n dans le développement suivant les puissances de x de la fonction

$$(9) \qquad \varphi(x) = -\sum_{k=0}^{p-1}\binom{x}{k} y^k .$$

en d'autres termes

$$(10) \qquad S = \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0).$$

Ce point établi, la formule du binôme donne

$$(1+y)^x + \varphi(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty}\binom{x}{p+\mu} y^{p+\mu}$$

pourvu que l'on ait $y < 1$. La convergence étant uniforme dans les séries qui résultent par différentiations successives, on en tire en prenant les dérivées d'ordre n par rapport à x et faisant $x=0$ dans le résultat.

$$\left\{\log(1+y)\right\}^n + \varphi^{(n)}(0) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{p+\mu}\, y^{p+\mu},$$

la signification des coefficients $a_{p+\mu}$ étant évidente.

D'après la définition du polynôme $Y_n(y)$ on en conclut

$$Y_n(y) = -\varphi^{(n)}(0) = -n!\, S,$$

et la congruence ( ) devient

$$(11) \qquad \Phi_n(1+y) \equiv \frac{1}{n!} Y_n(y) \quad (\text{mod. } p)$$

et il en résulte immédiatement la congruence de Jacobi (4)

2. Dans le cas particulier de $n=m=\frac{p-1}{2}$ la congruence d'Euler

$$r^m \equiv \left(\frac{r}{p}\right) \pmod{p},$$

où le second membre est le symbole de Legendre habituel, fait voir que la fonction $F_m(x)$ ou devient

$$Q(x)=\sum_{\nu=1}^{p-1}\left(\frac{\nu}{p}\right)x^{\nu}.$$

d'où la congruence (5).

Nous en allons tirer une forme congrue suivant le module p du polynome

$$P_1(x)=-m!\sum_{\nu=m+1}^{2m}\left(\frac{\nu}{p}\right)x^{\nu} \tag{12}$$

somme des m derniers termes du polynôme $-m!\,Q(x)$.

Soit à cet effet

$$Y_m(y)=c_m y^m+c_{m+1}y^{m+1}+c_{m+2}y^{m+2}+\ldots+c_{2m}y^{2m},$$

remplaçons y par $x-1$, et après avoir développé tous les termes du second membre suivant les puissances de x, rejetons tous les termes contenant des puissances inférieures à x^{m+1}. Le polynôme qui reste devra être congru, suivant le module p, à l'expression $P_1(x)$, comme cela résulte immédiatement de la congruence (5). On aura donc pour le module p

$$\left.\begin{aligned}
P_1(x) \equiv {} & c_{m+1}x^{m+1}+c_{m+2}\left[x^{m+2}-\binom{m+2}{1}x^{m+1}\right] \\
& +c_{m+3}\left[x^{m+3}-\binom{m+3}{1}x^{m+2}+\binom{m+3}{2}x^{m+1}\right] \\
& +c_{m+4}\left[x^{m+4}-\binom{m+4}{1}x^{m+3}+\binom{m+4}{2}x^{m+2}-\right. \\
& \qquad\qquad \left.-\binom{m+4}{3}x^{m+1}\right] \\
& + \\
& +c_{2m}\left[x^{2m}-\binom{2m}{1}x^{2m-1}+\binom{2m}{1}x^{2m-2}+\ldots+\right. \\
& \qquad\qquad \left.+\binom{2m}{m-1}x^{m+1}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Cela étant, soit $p > 3$ et de la forme $4k+3$, et désignons suivant l'habitude par h le nombre des classes de formes quadratiques, positives et proprement primitives, du déterminant $-p$, c'est-à-dire des formes $(a, 2b, c) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, telles que $b^2 - ac = -p$. Si l'on considère les formes telles que

$$a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2,$$

l'expression $b_1^2 - 4a_1c_1$ est dite le discriminant, et celui-ci étant posé égal à $-p$, le nombre des classes correspondantes sera désigné par $Cl(-p)$. Les deux nombres h et $Cl(-p)$ sont en relation suivante

$$h = \left(2 - \left(\frac{2}{p}\right)\right) Cl(-p),$$

qui résulte de la circonstance évidente que

$$h = Cl(-4p).$$

Ces remarques faites, on doit à Dirichlet ce résultat classique et bien connu

$$h = \sum_{\nu=1}^{m} \left(\frac{\nu}{p}\right),$$

le nombre premier p ayant la forme $4k+3$, et $m = \frac{p-1}{2}$, et cette formule permet d'évaluer la quantité $P_1(1)$ suivant le module p.

On a en effet, d'après (12),

$$\frac{1}{m!} P_1(1) = -\sum_{\nu=m+1}^{2m} \left(\frac{\nu}{p}\right),$$

et si l'on y fait $\nu = p - \mu$, en observant que pour les modules de la forme $4k+3$

$$\left(\frac{p-\mu}{p}\right) = -\left(\frac{\mu}{p}\right),$$

il vient

$$\frac{1}{m!} P_1(1) = \sum_{\mu=1}^{m} \left(\frac{\mu}{p}\right) = h,$$

ou bien

$$P_1(1) = m!\, h.$$

On aura donc une expression du nombre h, si l'on fait $x = 1$

dans la congruence (13); le second membre se simplifie en observant que l'on a

$$1-\binom{m+\varrho}{1}+\binom{m+\varrho}{2}-\binom{m+\varrho}{3}+\ldots+(-1)^{\varrho-1}\binom{m+\varrho}{\varrho-1}$$
$$=(-1)^{\varrho-1}\binom{m+\varrho-1}{\varrho-1},$$

et il vient

$$m!\,h \equiv c_{m+1}-\binom{m+1}{1}c_{m+2}+\binom{m+2}{2}c_{m+3}-\binom{m+3}{3}c_{m+4}$$
$$+\ldots+(-1)^{m-1}\binom{2m-1}{m-1}c_{2m} \pmod{p}.$$

On doit ensuite à Jacobi[1] la détermination du signe dans la congruence de Dirichlet

$$m! \equiv \pm 1 \pmod{p}$$

à savoir

$$m! \equiv \left(\frac{2}{p}\right)(-1)^{\frac{h+1}{2}}, \pmod{p=2m+1}.$$

En substituant cette valeur, on aura donc en définitive.

$$\sum_{\nu=1}^{m}\binom{-m-1}{\nu-1}c_{m+\nu} \equiv (-1)^{\frac{h+1}{2}}\left(\frac{2}{p}\right)h \pmod{p}, \tag{14}$$

les coefficients c étant définis par le développement de Maclaurin

$$\{\log(1+y)\}^m = c_m y^m + c_{m+1}y^{m+1} + c_{m+2}y^{m+2} + \ldots$$

En prenant par exemple $p=7$, on aura $\log^3(1+y)$

$$=y^3\left(1-\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}y^2-\frac{1}{4}y^3+\ldots\right)^3$$
$$=y^3-\frac{3}{2}y^4+\frac{7}{4}y^5-\frac{15}{8}y^6+\ldots$$

et la somme (14) devient

$$-\frac{3}{2}+\binom{-4}{1}\frac{7}{4}-\binom{-4}{2}\frac{15}{8}=-\frac{109}{4}=-\frac{218}{8} \equiv -\frac{1}{1} \pmod{7}$$

et on a en effet $h=1$, $\left(\frac{2}{p}\right)=1$.

[1] Observatio arithmetica de numero classium etc. (Journal de Crelle, T. 9; Werke T. 6, p. 240). On peut aussi consulter notre article présenté le 14 Janvier 1898 à la Société royale des Sciences de Prague.

La quantité $Q(-1)$ dans le cas de $p=4k+3$ s'exprime aussi au moyen du nombre h, car elle est

$$\sum_{1}^{2m}(-1)^{\nu}\left(\frac{\nu}{p}\right)=-\sum\left(\frac{\lambda}{p}\right)+\sum_{\nu=1}^{m}\left(\frac{2\nu}{p}\right). \quad (\lambda=1.3,5.\dots p-2)$$

et si l'on observe que $\lambda=p-2\nu$, il vient

$$Q(-1)=2\sum_{1}^{m}\left(\frac{2\nu}{p}\right)=2\left(\frac{2}{p}\right)h\,.$$

La congruence (5) donne ensuite pour $x=-1$

$$-m!\,Q(-1)\equiv Y_m(-2) \quad (\text{mod. } p);$$

le premier membre étant congru avec le nombre

$$(-1)^{\frac{h-1}{2}}2h,$$

on aura en substituant $y=-2$ dans l'expression de Y_m, la formule suivante

$$(15) \qquad \sum_{\nu=0}^{m}(-2)^{\nu}c_{m+\nu}\equiv(-1)^{\frac{h+1}{2}}\left(\frac{2}{p}\right)2h \quad (\text{mod. } p),$$

où l'on a fait usage de la congruence

$$(-2)^{m}\equiv-\left(\frac{2}{p}\right).$$

L'exemple précédent donne comme valeur du premier membre

$$1+\frac{3}{2}\cdot 2+\frac{7}{4}\,4+\frac{15}{8}\,8\equiv 5\equiv-2 \quad (\text{mod. } 7).$$

Enfin je pose $x=i$ dans la fonction $Q(x)$, et j'observe qu'en posant $\varepsilon=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$, on a

$$\left(\frac{\nu}{p}\right)=\left(\frac{\varepsilon p}{\nu}\right);$$

pour ν impair on a ensuite

$$i^{\nu}=\left(\frac{-4}{\nu}\right)i\,.$$

et on trouve, par conséquent

$$Q(i) = i\sum_{\nu=1}^{p-1}\left(\frac{-4\varepsilon p}{\nu}\right) + \sum_{\nu=1}^{m}(-1)^{\nu}\left(\frac{2\nu}{p}\right).$$

Soit premièrement $p = 4k+3$, les deux termes du deuxième membre seront respectivement

$$i\sum_{\nu=1}^{p-1}\left(\frac{2p}{\nu}\right), \quad -\sum_{\nu=1}^{m}\left(\frac{2\nu}{p}\right) + 2\sum_{\nu=1}^{\frac{m-1}{2}}\left(\frac{4\nu}{p}\right); \tag{16}$$

la deuxième de ces expressions qui est

$$-\left(\frac{2}{p}\right)\sum_{\nu=1}^{m}\left(\frac{\nu}{p}\right) + 2\sum_{\nu=1}^{\frac{p-3}{4}}\left(\frac{\nu}{p}\right) \tag{16a}$$

se compose de deux parties dont la première a pour valeur

$$-\left(\frac{2}{p}\right)h = \left[-2\left(\frac{2}{p}\right)+1\right]Cl(-\Delta).$$

et dont la seconde s'obtient au moyen de la formule[1] suivante

$$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\Delta}{4}\right]}\left(\frac{-\Delta}{a}\right) = \frac{2+\left(\frac{2}{\Delta}\right)-\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{2}\,Cl(-\Delta) \tag{17}$$

qui donne

$$2\sum_{\nu=1}^{\frac{p-3}{4}}\left(\frac{\nu}{p}\right) = \left(1+\left(\frac{2}{p}\right)\right)Cl(-p).$$

La quantité (16a) sera donc égale à la suivante

$$\left(2-\left(\frac{2}{p}\right)\right)Cl(-p) = h.$$

Pour évaluer la somme

$$\sum_{\nu=1}^{p}\left(\frac{4p}{\nu}\right), \tag{16b}$$

j'observe que $4p = D$ est un discriminant fondamental positif et

[1] V. Bulletin de Mr. Darboux. 1897.

pour des tels discriminants a lieu l'équation suivante[1]) qui pour D impair provient de Dirichlet.

$$\sum_{\nu=1}^{[\frac{1}{4}D]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2}\, Cl(-4D). \tag{18}$$

Il s'ensuit que la somme (16b) a pour valeur

$$\left(2-\left(\frac{2}{p}\right)\right) Cl(-p) = h;$$

en somme, on a le résultat suivant

$$Q(i) = (1+i)\, h$$

qui subsiste aussi pour le cas de $p = 4k+1$. On a en effet au lieu de (16)

$$Q(i) = i \sum_{\nu=1}^{p} \left(\frac{-4p}{\nu}\right) + 2 \sum_{\nu=1}^{\frac{p-1}{4}} \left(\frac{\nu}{p}\right).$$

car ici la somme

$$\sum_{\nu=1}^{m} \left(\frac{2\nu}{p}\right)$$

est nulle. Les deux parties dont se compose la quantité $Q(i)$ s'obtiennent au moyen des formules (17) et (18) relatives à $\Delta = 4p$ et $D = p$, ce qui vérifie le résultat annoncé, pourvu que l'on prenne, bien entendu,

$$h = Cl(-4p).$$

Cela étant, on conclut de la congruence (5) que si l'on développe la quantité

$$-\frac{1}{m!} \sum_{\nu=m}^{2m} c_\nu (i-1)^\nu = A + iB, \tag{19}$$

on aura

$$A \equiv B \equiv h \pmod{p}. \tag{19'}$$

quel que soit le nombre premier p (> 3), et où l'on a posé $m = \frac{p-1}{2}$.

Dans notre cas considéré plus haut $p = 7$, on a comme la valeur du premier membre

[1]) On la trouvera dans un mémoire couronné par l'Académie de Paris, en 1900

$$A + iB = -\frac{1}{6}\left[c_3(i-1)^3 + c_4(i-1)^4 + c_5(i-1)^5 + c_6(i-1)^6\right]$$

$$= -\frac{1}{6}\left[2(1+i)c_3 - 4c_4 + 4c_5(1-i) + 8ic_6\right]$$

$$\equiv (2c_3 - 4c_4 + 4c_5) + i(2c_3 - 4c_5 + 8c_6)$$

$$\equiv 1 + i \pmod{7}.$$

Considérons encore le cas de $p = 5$: on aura

$$c_2 y^2 + c_3 y^3 + c_4 y^4 \sim y^2\left(1 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y^2\right)^2$$

d'où

$$c_2 y^2 + c_3 y^3 + c_4 y^4 = y^2 - y^3 + \frac{41}{12}y^4$$

ce qui pour $y = i - 1$ devient

$$-4i - \frac{17}{3};$$

la division par $-m! = -2$ donne

$$A + Bi \equiv 2i + \frac{17}{6} \equiv 2i + 2 \pmod{5}.$$

L'équation (9) et la suivante

$$Y_n(y) = -\varphi^{(n)}(0)$$

donnent

$$Y_n(y) = \sum_{k=n}^{p-1} y^k D^n_{x=0}\binom{x}{k}$$

Dans le cas qui nous occupe $n = m$, nous avons

$$(20) \qquad -m!\,Q(1+y) \equiv \sum_{k=m}^{2m} y^k D^m_{x=0}\binom{x}{k} \pmod{p}.$$

On a d'ailleurs comme cela résulte des raisonnements établis plus haut

$$c_\nu = D^m_{x=0}\binom{x}{\nu}.$$

et la congruence (14) permet de conclure que la fonction entière

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{m}\binom{-m-1}{\nu-1}\binom{x}{m+\nu}$$

vérifie la congruence relative au module $p = 2m + 1 = 4k + 3$:

(21a) $$f^{(m)}(0) \equiv (-1)^{\frac{k+1}{2}} \left(\frac{2}{p}\right) h\,.$$

Observons que notre fonction $f(x)$ peut se mettre sous une forme plus simple. à savoir

(21b) $$f(x) = \sum_{\mu=0}^{m-1} (-1)^{\mu} \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-m-\mu)}{m!\,\mu!\,(m+\mu+1)}$$

Toute transformation ou réduction suivant le module p de cette fonction donne une formule concernant le nombre h.

Une autre représentation algébrique de la fonction $Q(x)$ résulte de la congruence

(22) $$Q(x) \equiv \sum_{\nu=0}^{p-1} \nu^m x^{\nu} \pmod{p}.$$

si l'on observe que le second membre résulte en faisant $z = 0$ dans la dérivée d'ordre m de la fonction de z

$$\sum_{\nu=0}^{p-1} x^{\nu} e^{\nu z} = \frac{1 - x^p e^{pz}}{1 - x e^z}$$

en d'autres termes.

$$Q(x) \equiv D^m_{z=0} \frac{1 - x^p e^{pz}}{1 - x e^z} \pmod{p}.$$

Cela étant. on a pour z suffisamment petit. le développement

$$\frac{1}{1 - x e^z} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots .$$

où les a_ν sont des fonctions entières de la quantité $\frac{x}{1-x}$, divisées par $1-x$; les coefficients de la fonction entière $(1-x)\,a_\nu$ ne peuvent contenir le facteur p en dénominateur que si $\nu \geqq p$; il s'ensuit que les coefficients du développement

$$\frac{e^{pz} - 1}{1 - x e^z}$$

seront divisibles par p tant qu'il s'agit des termes en z, $z^2, \dots z^{p-1}$, et cela subsiste même lorsqu'on choisit pour x une valeur rationnelle ou algébrique. telle que $1-x$ reste premier avec p. On aura alors

$$D^m_{z=0}\,\frac{x^p e^{pz}}{1-xe^z} = D^m_{z=0}\,\frac{x^p}{1-xe^z}\,.$$

et par conséquent

$$Q(x) = D^m_{z=0}\,\frac{1-x^p}{1-xe^z} \pmod{p} \qquad (23)$$

En faisant $x = -1$ et supposant $p = 4k+3$, l'équation

$$Q(-1) = \left(\frac{2}{p}\right) 2h$$

donne ce résultat de Cauchy et de Mr. Hurwitz[1])

$$\left(\frac{2}{p}\right) h = D^m_{z=0}\,\frac{1}{1+e^z} \pmod{p}$$

La formule $Q(i) = (1+i)h$ reproduit ce dernier résultat légèrement changé, si $p = 4k+3$, mais en supposant $p = 4k+1$ on trouve ce résultat de M. Hurwitz

$$h = D^m_{z=0}\,\frac{e^z}{1+e^{2z}} \pmod{p}.$$

En terminant, remarquons que la fonction $Q(x)$ est complètement définie par la congruence algébrique

$$Q^2(x) = \text{const.} \pmod{X},$$

où

$$X = \frac{x^p-1}{x-1}\,.$$

si l'on ajoute que le terme le plus élevé est $(-1)^m x^{2m}$.

Il paraît difficile de parvenir à la détermination de la constante qui est $(-1)^m p$, sans faire usage des racines de l'unité. La solution de ce problème, de la détermination purement algébrique du polynôme $Q(x)$, serait du plus haut intérêt. On doit à M. Zolotarev[2]) ce résultat important, que les fonctions Y et Z qui vérifient l'identité de Gauss

$$Y^2 - (-1)^m p Z^2 = 4X,$$

s'obtiennent au moyen du développement en fraction continue du quotient $Q(x):X$. Les procédés de cette espèce deviennent impra-

[1]) Acta mathematica, T. 19, p. 351 et ss.

[2]) Nouvelles Annales de Mathématique, 1872.

ticables. il est vrai, même pour des valeurs relativement petites du nombre p, puisqu'on est amené bientôt à des très grands nombres. Mais sans les regarder comme des algorithmes véritables, les résultats de cette nature ne cessent pas d'être intéressants, et, j'en suis sûr, il doit s'y cacher des vérités très importantes.

---

9. M. K. KOSTANECKI m. t. **Zmiany w jajku mięczaka Mactry, rozwijającem się partenogenetycznie pod wpływem chlorku potasowego.** (*Über die Veränderungen im Inneren des unter dem Einfluss von KCl-Gemischen künstlich parthenogenetisch sich entwickelnden Eis von Mactra*). (*Étude cytologique de la parthénogénèse artificielle des oeufs de Mactra sous l'influence de KCl*).

Im Monate Juli 1902 habe ich in einer vorläufigen Mitteilung [1]) die Resultate meiner im Monate April und Anfang Mai 1902 in der zoologischen Station in Neapel vorgenommenen Untersuchung über künstliche Befruchtung und künstliche parthenogenetische Furchung bei Mactra veröffentlicht, jedoch nur insofern, als ich die Vorgänge am lebenden Material unter dem Mikroskop verfolgen konnte. Seitdem habe ich das umfangreiche fixierte und eingebettete Material auf Schnitten genauer untersucht Der Zweck dieser Untersuchung war vor allem der, über die im Inneren des Eis bei der künstlichen Parthenogenese sich abspielenden Vorgänge Aufschluss zu erhalten. Um jedoch dieselben beurteilen zu können, musste ich zunächst den Reifungs- und Befruchtungsprozess bei diesem Mollusken genauer cytologisch kennen lernen. Sowohl der Reifungs- als auch der Befruchtungsprozess verläuft bei Mactra in der für Mollusken, man kann sagen, typischen Weise. Die unbefruchteten Eier, mögen sie auch mehrere (5—7) Stunden im Meerwasser liegen, zeigen keine Veränderungen: ohne Befruchtung wird also bei Mactra im Gegensatz zu vielen anderen Tierspecies die Richtungsmitose nicht eingeleitet; nach Zusatz von Samen beginnt dagegen das Keimbläschen nach einiger Zeit seine runde Gestalt zu verlieren. An Schnitten von Eiern, welche 20—30 Minuten

[1]) Über künstliche Befruchtung und künstliche parthenogenetische Furchung bei Mactra. Bulletin de l'Académie des sciences de Cracovie. Classe des sciences mathématiques et naturelles. Juillet 1902.