Matyáš Lerch

Über die arithmetische Gleichung $Cl(-\Delta) = 1$

Math. Ann. 57 (1903), 568–570

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501557

Über die arithmetische Gleichung $Cl(-\Delta)=1$.

Von

M. Lerch in Freiburg (Schweiz).

Wir betrachten die quadratischen Formen $ax^2+bxy+cy^2=(a, b, c)$, in welchen der mittlere Koeffizient b nicht notwendig gerade zu sein braucht*). An Stelle der Gaußschen Determinante tritt dann die Diskriminante $D=b^2-4ac$; wir bemerken, daß die Gaußschen Formen der Determinante n nichts anderes sind als die Kroneckerschen Formen mit der Diskriminante $4n$.

Wir bezeichnen im folgenden mit $Cl(-\Delta)$ die Anzahl der positiven und primitiven Klassen der quadratischen Formen der negativen Diskriminante $-\Delta$; letztere kann immer in der Form $-\Delta_0 Q^2$ vorausgesetzt werden, wobei Q eine positive ganze Zahl und $-\Delta_0$ die der $-\Delta$ entsprechende Fundamental- (oder Stamm-) Diskriminante bezeichnet, über deren Definition man die zitierten Arbeiten nachsehen kann.

Die bekannte Relation

$$Cl(-\Delta_0 Q^2)=\frac{2}{\tau_0}\,Q\prod_q\left(1-\left(\frac{-\Delta_0}{q}\right)\frac{1}{q}\right)\cdot Cl(-\Delta_0) \tag{1}$$

gestattet dann die Bestimmung der Klassenzahl auf den Fall einer Fundamentaldiskriminante zurückzuführen; darin bedeutet in üblicher Weise τ_0 die Zahl 2, wenn $\Delta_0>4$, dagegen ist $\tau_0=4$ für $\Delta_0=4$ und $\tau_0=6$ für $\Delta_0=3$.

Man überzeugt sich leicht, daß den Diskriminanten $-\Delta$ für $\Delta=3$, 4, 7, 8, 11, 19, 43, 67, 163 nur eine Klasse entspricht; ob dadurch die

*) Diese ältere Gestalt der quadratischen Formen bietet gegenüber der von Gauß und Dirichlet behandelten $ax^2+2bxy+cy^2$ gewisse Vorzüge; die Modifikationen, welche alsdann in den Dirichletschen Resultaten einzutreten haben, finden sich in den Arbeiten Kroneckers (Berliner Sitzungsberichte, 1885, p. 768 u. ff.) und des Herrn H. Weber (Göttinger Nachrichten, 1893). Als Kommentar der Kroneckerschen Arbeiten ist überdies ein Werk des Herrn de Séguier (formes quadratiques et multiplication complexe; Berlin, F. L. Dames, 1894) zu nennen.

Gesamtheit der Diskriminanten, wofür $Cl(-\Delta)=1$ ist, erschöpft sei, läßt sich mit den uns zu Gebote stehenden Hülfsmitteln kaum erledigen. Deswegen verdient das neulich durch elementare Betrachtungen begründete Resultat des Herrn Ed. Landau (Math. Ann. Bd. 56, p. 671), nach welchem die negativen Gaußschen *Determinanten* $-1, -2, -3, -4, -7$ die einzigen sind, denen die Klassenanzahl $h=1$ zukommt, ein besonderes Interesse. Dasselbe läßt sich auch so formulieren, daß die Gleichung $Cl(-4n)=1$ nur die fünf Lösungen $n=1, 2, 3, 4, 7$ zuläßt, und kann leicht mit Hülfe der Relation (1) und mit Benützung der analytisch leicht zu verifizierenden Tatsache, daß $Cl(-\Delta_0)$ für zusammengesetzte Fundamentaldiskriminanten außer für $\Delta_0=4$ und 8 immer gerade ist, bewiesen werden. Das soll im folgenden gezeigt werden.

In der Gleichung (1) bezieht sich das Produkt auf der rechten Seite auf alle verschiedenen Primfaktoren q von Q; wir setzen $Q=Q'\cdot\prod q$, sodaß also $Q'=1$ sein muß, wenn Q durch kein Quadrat teilbar sein soll; alsdann lautet die Gleichung (1) wie folgt

$$(1^*)\qquad Cl(-\Delta_0 Q^2)=\frac{2}{\tau_0}\,Q'\prod_q\left(q-\left(\frac{-\Delta_0}{q}\right)\right)\cdot Cl(-\Delta_0).$$

Ist nun zunächst $\Delta_0=4$, also $\tau_0=4$, so wird

$$(2)\qquad Cl(-4Q^2)=\frac{1}{2}\,Q'\prod_q\left(q-\left(\frac{-4}{q}\right)\right)\cdot$$

Für $q=3, 5, 7, \cdots$ ist immer $q-\left(\frac{-4}{q}\right)\geqq 4$, und daher wird die rechte Seite von (2) immer die Einheit übertreffen, wenn Q eine ungerade Primzahl enthält; die hier einzig zulässige Primzahl $q=2$ ergibt aber

$$\frac{1}{2}\left(q-\left(\frac{-4}{q}\right)\right)=1,$$

und es muß daher $Q'=1$, $Q=2$ sein, wenn $Cl(-4Q^2)$ den Wert Eins haben soll. D. h.

„die Gleichung $Cl(-4Q^2)=1$ hat nur die zwei Lösungen $Q=1$ und $Q=2$".

Es sei zweitens $\Delta_0=3$, also $\tau_0=6$; dann lautet die Gleichung (1*) einfach

$$(3)\qquad Cl(-3Q^2)=\frac{1}{3}\,Q'\prod_q\left(q-\left(\frac{-3}{q}\right)\right)\cdot$$

Ist eine der Primzahlen q größer als 3, so ist die rechte Seite immer gerade und daher größer als Eins; ferner ist $q-\left(\frac{-3}{q}\right)$ gleich 3 für $q=2$

sowie für $q = 3$, und es kann daher, da $Q' = 1$ genommen werden muß, die Zahl Q nur die Werte 2 oder 3 haben, sodaß

„die Gleichung $Cl(-3Q^2) = 1$ keine anderen Lösungen als $Q = 1, 2, 3$ zuläßt".

Ist schließlich $\Delta_0 > 4$, also $\frac{2}{\tau_0} = 1$, so kann die rechte Seite von (1*) nur für $Q' = 1$ und für primzahlige Δ_0 oder für $\Delta_0 = 8$ ungerade sein. Ist zunächst $\Delta_0 = 8$, so wird $q - \left(\frac{-\Delta_0}{q}\right)$ immer von Eins verschieden, und daher $Cl(-8Q^2) = 1$ nur für $Q = 1$ stattfinden.

Ist aber Δ_0 eine Primzahl, so kann höchstens $Q = q = 2$ dem Ausdruck (1*) den Wert Eins erteilen, und zwar nur wenn $\left(\frac{2}{\Delta_0}\right) = 1$, d. h. wenn $\Delta_0 \equiv 7 \pmod{8}$ ist. Nun ist in der Tat $Cl(-7) = 1$, also auch $Cl(-4\cdot 7) = 1$; dagegen für $\Delta_0 = 8k - 1$, $k \geqq 2$ hat man mindestens zwei inäquivalente reduzierte Formen der Diskriminante $-\Delta_0 = 1 - 8k$, nämlich

$$(1, 1, 2k), \quad (2, 1, k),$$

und daher wird nie $Cl(-\Delta_0)$ den Wert Eins haben, falls

$$\Delta_0 = 8k - 1 > 7.$$

Alles zusammengefaßt, hat die Gleichung $Cl(-\Delta) = 1$ die Lösungen $\Delta = 4, 8;\ 3, 12, 27;\ 8;\ 7, 28$; außer denselben besitzt sie nur primzahlige Lösungen und zwar von der Form $\Delta = 8k + 3$; einige derselben sind tatsächlich bekannt, nämlich $\Delta = 11, 19, 43, 67, 163$, es bleibt jedoch dahingestellt, ob es deren mehrere gibt.

Damit ist auch das Resultat des Herrn Landau bewiesen. Die von ihm benützte Methode, weil sie auf die Gleichung $Cl(-4\Delta_0) = 3$ zurückkommt, versagt bei der Behandlung der Gleichung $Cl(-\Delta) = 1$ für ungerade Δ; man kann nur schließen, daß in diesem Falle sämtliche Ausdrücke

$$\Delta, \ \frac{\Delta + 1}{4} = p, \ p + 1\cdot 2, \ p + 2\cdot 3, \cdots, p + m(m+1)$$

$\left(\text{wenn } m = \left[\sqrt{\frac{\Delta}{12}} - \frac{1}{2}\right]\right)$ Primzahlen sein müssen.