Matyáš Lerch

Ergänzungen zu dem Aufsatz „Bemerkungen über trigonometrische Reihen mit positiven Koefizienten"

Zprávy Král. Čes. spol. nauk, II. tř., 1903, č. 38, 1–7

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/501550`

XXXVIII.

Ergänzungen zu dem Aufsatz „Bemerkungen über trigonometrische Reihen mit positiven Koeffizienten".

(Sitzungsberichte vom Jahre 1898).

Von M. Lerch in Freiburg (Schweiz).

(Vorgelegt am 10. Juli 1908).

Unter dem obigen Titel habe ich 1898 einige Vermutungen veröffentlicht, die sich in konkreten Fällen bewährten, dann habe ich in einem Nachtrag den wahren Kern der Sache dargelegt und habe gleichzeitig bemerkt,*) dass die nunmehr mit Strenge bewiesenen Grenzformeln in dem früher dargelegten Sinne noch mit Vorsicht anzuwenden seien.

Von näherer Ausführung an Beispielen wurde ich damals abgehalten, da mir mein damaliger Gesundheitszustand nicht die nötige Arbeitsruhe spendete. Ich finde mich nun auf den dort behandelten Gegenstand umsomehr einzugehen verpflichtet, als die am Schlusse des Nachtrags geäusserten Bedenken sich in den meisten Fällen als begründet erweisen.

1. In dem im Eingang zitierten Aufsatze wurde gezeigt, dass für positive ganzzahlige m die Formel besteht

$$(1) \qquad -x\pi \int_0^{\frac{m}{x}} \varphi(t) \cos xt\pi \, dt = \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{m}{x}\right]} c_\nu \sin \nu x\pi ,$$

*) Seite 19 des Separatabdrucks.

worin $\varphi(t)$ die unstetige Funktion

$$\varphi(t)=\sum_{\nu=1}^{[t]} c_\nu$$

bedeutet, ferner wurde eine zweite Formel der gleichen Kategorie angedeutet, die ich in folgender Gestalt hersetze: *)

$$(2)\qquad x\pi\int_0^{\frac{2m+1}{2x}}\varphi(t)\sin xt\pi\,dt=\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{m}{x}\right]} c_\nu\cos\nu x\pi\,.$$

Ich schreibe nun $x\pi=\gamma$, und ziehe von den mitgeteilten Ausdrücken diejenigen ab, die einem anderen ganzzahligen Wert $m=k$ entsprechen.

So kommt

$$(1^*)\qquad \sum_{a<\nu\leqq b} c_\nu\sin\nu\gamma=-\gamma\int_a^b\varphi(t)\cos\gamma t\,dt\,,$$

$$(2^*)\qquad \sum_{a<\nu\leqq b} c_\nu\cos\nu\gamma=\gamma\int_{a'}^{b'}\varphi(t)\sin\gamma t\,dt\,,$$

wobei der Kürze wegen

$$a=\frac{k\pi}{\gamma}\,,\quad b=\frac{m\pi}{\gamma}\,,\quad a'=\frac{(2k+1)\pi}{\gamma}\,,\quad b'=\frac{(2m+1)\pi}{\gamma}$$

gesetzt wurde.

Diese Ausdrücke sollen nun in dem Falle, wo

$$c_\nu=\begin{cases}\dfrac{1}{\nu}\,, & \text{falls } \nu=p \text{ eine Primzahl,}\\ 0\,, & \text{falls } \nu \text{ eine zusammenges. Zahl ist,}\end{cases}$$

also wo es sich um die auf Primzahlen p bezogenen Summen

$$P=\sum_{a<p\leqq b}\frac{\sin p\gamma}{p}\,,\quad Q=\sum_{a<p\leqq b}\frac{\cos p\gamma}{p}$$

handelt, einer näheren Untersuchung unterzogen werden.

*) Eine Verallgemeinerung dieser Formel findet sich bei Herrn Franel, Math. Annalen Bd. 52.

Die Funktion $\varphi(t)$ hat alsdann nach einem Satz von Mertens den Wert

$$\varphi(t) = \sum_{p \leqq t} \frac{1}{p} = llt + G + \chi(t),$$

wo l das Funktionalzeichen der natürlichen Logarithmen ist und G eine gewisse Konstante bedeutet; von der Funktion $\chi(t)$ weiss man nur, dass

$$\lim_{t=\infty} \chi(t) = 0.$$

Beachtet man nun, das wegen der speziellen Form unserer Zahlen a, b, a', b'

$$\int_a^b G \cos \gamma t \, dt = 0, \int_{a'}^{b'} G \sin \gamma t \, dt = 0,$$

und formt man die Integrale

$$\int llt \, {\cos \atop \sin} \gamma t \, dt$$

mit Hilfe der partiellen Integration um, so ergiebt sich

$$P = \int_a^b \frac{\sin \gamma t}{t \, lt} dt - \gamma \int_a^b \chi(t) \cos \gamma t \, dt,$$

$$Q = \int_{a'}^{b'} \frac{\cos \gamma t}{t \, lt} dt + \gamma \int_{a'}^{b'} \chi(t) \sin \gamma t \, dt.$$

Nimmt man z. B. $\gamma = \frac{\pi}{2}$, so wird

$$\sin p\gamma = (-1)^{\frac{p-1}{2}}, \; a = 2k, \; b = 2m,$$

und die erste dieser Formeln ergiebt

$$(3) \qquad \sum_{2k<p<2m} \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p} = \int_{2k}^{2m} \frac{\sin \frac{t\pi}{2}}{tlt} dt - \frac{\pi}{2} \int_{2k}^{2m} \chi(t) \cos \frac{t\pi}{2} dt.$$

Das erste Integral rechts hat ein von m unabhängiges Zeichen $(-1)^k$; wäre nun für alle hinreichend grossen k und m das zweite Glied rechter Hand absolut kleiner wie das erste, so wäre das Zeichen der Summen

$$\sum_{2k<p<2m} \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p}, \qquad \sum_{2k+2<p<2m} \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p}$$

beziehungsweise $(-1)^k$ und $(-1)^{k+1}$, und dies erfordert, dass entweder $2k+1$ eine Primzahl sei, oder dass die beiden Summen gleich Null seien. Nun lässt sich in unendlich vielen Fällen konstatieren, dass weder das eine noch das andere zutrifft, und die Annahme ist somit falsch, d. h. es wird unendlich oft vorkommen, dass das zweite Integral rechts in (3) das erste dem absoluten Betrage nach übertrifft.

Die mit unendlich wachsendem t unendlich klein werdende Funktion $\chi(t)$ hat daher eine solche Eigentümlichkeit, dass sich aus der Formel (3) in Bezug auf das Verhalten der linken Seite für sehr grosse k und m kein unmittelbarer Schluss ziehen lässt.

2. Bei der eben bemerkten Beschaffenheit unserer Ausdrücke wird z. B. die Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \sin \nu\gamma = -\gamma \lim_{m=\infty} \int_0^{\frac{m\pi}{\gamma}} \varphi(t) \cos \gamma t \, dt \tag{4}$$

uns nur ausnahmsweise über das Verhalten der linken Seite für unendlich kleine γ Aufschluss geben können. Dies wird allerdings immer dann gelingen, wenn wir für die Funktion $\varphi(t)$ eine analytisch-asymptotische Darstellung $\psi(t)$ derart besitzen, dass die Ergänzungsfunktion $\varphi(t) - \psi(t) = \chi(t)$ ein konvergentes Integral

$$\int_a^{\infty} |\chi(t)| \, dt$$

liefert, oder eine anderweitige Beschaffenheit aufweist, nach welcher sich die Konvergenz der Integrale

$$\int_a^{\infty} \chi(t) \frac{\sin}{\cos} \gamma t \, dt$$

erschliessen lässt.

In dem Falle $c_\nu = \frac{1}{\nu}$ z. B. hat man

$$\varphi(t) = \frac{\Gamma'(t-\varrho)}{\Gamma(t-\varrho)} + C,$$

wenn C die Euler'sche Konstante und $\varrho = t - [t]$ den kleinsten positiven Rest von t bedeutet.

Nun ist aber

$$\frac{\Gamma'(t-\varrho)}{\Gamma(t-\varrho)} = D \log \Gamma(t) - \varrho\, D^2 \log \Gamma(t) + \frac{1}{2}\varrho^2 D^3 \log \Gamma(t)$$

also die Darstellung

$$\varphi(t) = \psi(t) + \chi(t),$$

wobei

$$\psi(t) = \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}, \quad \chi(t) = -\varrho\psi'(t) + \frac{1}{2}\varrho^2\psi''(t) - .$$

Man kann nun bekanntlich die letzte Reihe durch

$$\chi(t) = -\varrho\psi'(t) + \frac{1}{2}\varrho^2\psi''(t - \vartheta\varrho),\ (0 < \vartheta < 1),$$

ersetzen, und es ist dann für eine hinreichend grosse Konstante n

$$-\gamma\int_n^{\frac{m\pi}{\gamma}} \chi(t) \cos \gamma t\, dt = \gamma\int_n^{\frac{m\pi}{\gamma}} \varrho\psi'(t) \cos \gamma t\, dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_n^{\frac{m\pi}{\gamma}} \varrho^2\psi''(t - \vartheta\varrho) \cos \gamma t\, dt.$$

Da $\psi''(t)$ wie $\frac{1}{t^2}$ abnimmt, wird das letzte Integral für hinreichend grosse n und $\frac{m}{\gamma}$ beliebig klein, und die ganze Untersuchung kommt auf das Integral

$$J_\varrho = \gamma\int_n^{\frac{m\pi}{\gamma}} \varrho\psi'(t) \cos \gamma t\, dt$$

zurück. Darin bedeutet ϱ die unstetige Funktion $t-[t]$, und man würde das Integral durch Intervallspaltung behandeln müssen. Man kommt auf diesem Wege wieder auf das Verhalten der Grössen zurück

$$\sum_{\mu=n}^{\frac{m\pi}{\gamma}} \psi'(\mu+1)\sin(\mu+1)\gamma,$$

also auf Grössen der gleichen Art wie

$$\sum_{\nu=n+1}^{m'} \frac{\sin\nu\gamma}{\nu},$$

um deren Bestimmung es sich handelt; von diesen kommt das Integral

$$\int_n^{m'} \psi'(t)\sin\gamma t\,dt$$

zum Abzug, also ihr Einfluss wird beseitigt, wenn auch nicht gerade in einfachster Weise.

Diese Bemerkungen bringen uns über die Anwendung der Grenzformel (4) für unendlich kleine γ zu Genüge ins Klare, und ich möchte nur noch darauf aufmerksam machen, dass unser Problem sich mit Fragen von hervorragendem analytischen Interesse im Zusammenhange befindet, wie z. B. mit der Konvergenzfrage inbetreff der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_1(n)}{n^2\pi}\sin 2nx\pi, \tag{5}$$

in welcher $\Theta_1(n)$ die Divisorensumme von n bedeutet. Dieselbe, wenn sie konvergiert, stellt die überall unstetige Funktion

$$\sum_1^{\infty} \frac{\frac{1}{2}-R(\nu x)}{\nu^2}$$

dar, wobei $R(s)=s-[s]$ gesetzt wird.

Man hat bekanntlich die asymptotische Gleichung

$$\sum_1^{[t]} \frac{\Theta_1(n)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,lt + A + \chi(t),$$

wobei A eine Konstante bedeutet, ferner

$$\lim \chi(t) = 0 \quad \text{für } t = \infty.$$

Die Konvergenz der Reihe (5) deckt sich mit derjenigen des Integrals

$$\int_a^\infty \chi(t) \cos 2xt\pi \, dt,$$

welches aber wegen mangelhaften Kenntnissen über $\chi(t)$ sich zur Zeit der Untersuchung entzieht.