Matyáš Lerch

Sur la cinquième démonstration de Gauss de la loi de réciprocité de Legendre

Jornal des sciencias mathematicas e astronomicas, Coimbra, 15 (1902), 97–104

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501545

SUR LA CINQUIÈME DÉMONSTRATION DE GAUSS DE LA LOI DE RÉCIPROCITÉ DE LEGENDRE

PAR

M. LERCH

(Professeur à l'Université de Fribourg)

Soit m un entier quelconque, n un entier positif impair, premier avec le précédent, et posons

$$(1) \qquad \mu(m, n) = \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 - \operatorname{sgn.} R\left(\frac{km}{n}\right)}{2},$$

où l'on pose suivant l'habitude

$$R(x) = x - E\left(x + \frac{1}{2}\right),$$

et sgn. x étant $+1$ ou à -1, suivant que x est positif ou négatif. Au moyen de la formule (1) soit défini le signe de gendre

$$\left(\frac{m}{n}\right)=(-1)^{\mu(m,n)}. \tag{2}$$

En supposant $m=n'$ positif et impair, on a le théorème de réciprocité

$$\left(\frac{n}{n'}\right)\left(\frac{n'}{n}\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n'-1}{2}}$$

La cinquième démonstration que Gauss a donnée de ce théorème, deviné par Euler et formulé par Legendre, est susceptible d'une modification qui permet d'établir en même temps les lois

$$\left(\frac{mm'}{n}\right)=\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m'}{n}\right),\quad \left(\frac{m}{nn'}\right)=\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n'}\right),$$

qui résument presque toute la théorie du signe de Legendre.

J'emploi, pour simplifier, la notation

$$\varphi(x)=\text{sgn.}\,R(x),$$

et j'observe que l'expression

$$\frac{1+\varphi(x)}{2}\,\frac{1+\varphi(y)}{2}\,\varphi(x)\,\varphi(y)$$

est toujours un entier. Cela étant, soient n, n' deux entiers impairs et positifs, premiers entre eux, puis choisissons deux entiers

m et m', soumis à la seule condition que m soit premier envers n, et m' envers n', et considérons la somme

$$\alpha = \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(nn'-1)} \frac{1+\varphi\left(\frac{m\nu}{n}\right)}{2} \cdot \frac{1+\varphi\left(\frac{m'\nu}{n'}\right)}{2} \cdot \varphi\left(\frac{m\nu}{n}\right) \varphi\left(\frac{m'\nu}{n'}\right),$$

dont la valeur est toujours un entier.

En introduisant les notations

$$A = \sum_{\nu} \varphi^2\left(\frac{m\nu}{n}\right) \varphi^2\left(\frac{m'\nu}{n'}\right)$$

$$B = \sum_{\nu} \varphi\left(\frac{m\nu}{n}\right) \varphi^2\left(\frac{m'\nu}{n'}\right),$$

$$C = \sum_{\nu} \varphi\left(\frac{m\nu}{n}\right) \varphi^1\left(\frac{m'\nu}{n'}\right).$$

$$B' = \sum_{\nu} \varphi^2\left(\frac{m\nu}{n}\right) \varphi\left(\frac{m'\nu}{n'}\right),$$

$$\left(\nu = 1, 2, 3, \ldots \frac{nn'-1}{2}\right),$$

on aura

$$4\alpha = A + B + B' + C.$$

La somme A contient autant d'unités qu'il y a des valeurs ν

non divisibles par n ou par n', et il s'ensuit

$$A = \frac{(n-1)(n'-1)}{2}.$$

Pour évaluer la somme C, observons que ses termes ne changent pas en mettant $-\nu$ au lieu de ν, d'où il suit que

$$2C = \sum_{\mu} \varphi\left(\frac{m\mu}{n}\right)\varphi\left(\frac{m'\mu}{n'}\right), \quad \left(\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \frac{nn'-1}{2}\right).$$

Puisque le terme général

$$\varphi\left(\frac{m\mu}{n}\right)\varphi\left(\frac{m'\mu}{n}\right)$$

ne change pas en augmentant μ d'un multiple du module nn', on peut remplacer l'ensemble des valeurs de μ par un autre ensemble de nn' valeurs incongrues; choisissons

$$\mu = nh' + n'h, \quad \left\{\begin{array}{l} h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \dfrac{n-1}{2} \\ h' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \dfrac{n'-1}{2} \end{array}\right\}.$$

Puisque, cette substitution faite,

$$\varphi\left(\frac{m\mu}{n}\right) = \varphi\left(\frac{mn'h}{n}\right), \quad \varphi\left(\frac{m'\mu}{n'}\right) = \varphi\left(\frac{m'nh'}{n'}\right),$$

il vient

$$2C=\sum_{h=-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}}\varphi\left(\frac{mn'h}{n}\right).\sum_{h'=-\frac{n'-1}{2}}^{\frac{n'-1}{2}}\varphi\left(\frac{m'nh'}{n'}\right).$$

Chacun des deux facteurs est evidemment égal à zéro, et par conséquent

$$C=0.$$

Il restent encore à évaluer les deux sommes B et B′. La somme B s'obtient en supprimant dans la somme

$$\sum_{\nu}\varphi\left(\frac{m\nu}{n'}\right)$$

les termes qui rendent nulle la quantité $\varphi\left(\frac{m'\nu}{n'}\right)$. Or ce sont les valeurs $\nu=hn'$ $\left(h\leqq\frac{n-1}{2}\right)$, et il s'ensuit que

$$B=\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(nn'-1)}\varphi\left(\frac{m\nu}{n}\right)-\sum_{h=1}^{\frac{1}{2}(n-1)}\varphi\left(\frac{mn'h}{n}\right).$$

La signification de la fonction $\varphi(x)$ fait voir immédiatement que toutes les sommes

$$\sum_{\nu=1}^{kn}\varphi\left(\frac{m\nu}{n}\right),\ (k\text{ entier})$$

sont nulles. Puisque

$$\frac{nn'-1}{2} = n\,\frac{n'-1}{2} + \frac{n-1}{2},$$

il ne restent de la première somme, dans l'expression de B, que les termes

$$\sum_{\nu = n\frac{n'-1}{2}+1}^{n\frac{n'-1}{2}+\frac{n-1}{2}} \varphi\left(\frac{m\nu}{n}\right) - \sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \varphi\left(\frac{mh}{n}\right),$$

et il s'ensuit

$$B = \sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \varphi\left(\frac{mh}{n}\right) - \sum_{h=1}^{\frac{n-1}{2}} \varphi\left(\frac{mn'h}{n}\right),$$

ou bien, en faisant usage de l'écriture (1),

$$B = 2\mu\,(mn', n) - 2\mu\,(m, n).$$

On trouve de la même manière

$$B' = 2\mu\,(m'n, n') - 2\mu\,(m', n'),$$

et en portant ces valeurs dans l'équations

$$4\alpha = A + B + B' + C,$$

il vient

$$\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n'-1}{2}+\mu(mn', n)+\mu(m'n, n')$$

$$-\mu(m, n)-\mu(m', n')=2\alpha.$$

En faisant usage de la définition (2), on en tire

(A) $$\left(\frac{mn'}{n}\right)\left(\frac{m'n}{n'}\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n'-1}{2}}\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m'}{n'}\right).$$

Faisant $m=m'=1$, on a la loi de réciprocité

(B) $$\left(\frac{n'}{n}\right)\left(\frac{n}{n'}\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n'-1}{2}}$$

puisque la définition (1) donne immediatement

$$\mu(1, n)=0, \left(\frac{1}{n}\right)=1.$$

Faisant $m'=1$, la formule (A) devient

$$\left(\frac{mn'}{n}\right)\left(\frac{n}{n'}\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n'-1}{2}}\left(\frac{m}{n}\right),$$

d'où, en divisant avec (B) membre à membre,

$$(3)\qquad \left(\frac{mn'}{n}\right)=\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n'}{n}\right).$$

Observant que la formule

$$\text{sgn. R}\,(x+h)=\text{sgn. R}\,(x)$$

donne

$$\mu\,(m+hn,n)=\mu\,(m,n),$$

on voit que

$$(C)\qquad \left(\frac{m+hn}{n}\right)=\left(\frac{m}{n}\right).$$

Ce théorème là permet de conclure au moyen de (3) la relation plus générale

$$(D)\qquad \left(\frac{mm'}{n}\right)=\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m'}{n}\right).$$

Prenant m, m' positifs et impairs, et transformant les deux membres d'après la loi de réciprocité (B), on en tire un troisième théorème fondamental

$$(E)\qquad \left(\frac{m}{nn'}\right)=\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n'}\right),$$

écrit avec notation changée.

On sait comment on peut déduire du théorème (D) la signification habituelle du signe $\left(\frac{m}{n}\right)$, si n est un nombre premier (*).

(*) V. *Kronecker, Monatsberichte de l'Académie de Berlin*, 1876; ou *Bachmann, Niedere Zahlentheorie* (Leipzig, 1902, pag. 245).