Matyáš Lerch

Sur la fonction $\zeta(s)$ pour les valeurs impaires de l'argument

Jornal des sciencias mathematicas e astronomicas, Coimbra, 14 (1900), 65–69

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501542

SUR LA FONCTION $\zeta(s)$ POUR LES VALEURS IMPAIRES DE L'ARGUMENT

NOTE DE

M. Lerch

Professeur à l'Université de Fribourg (Suisse)

Les valeurs de la fonction

$$(1)\qquad 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\ldots,$$

que Riemann a désignée par $\zeta(s)$, sont connues sous forme finie, si l'argument s est un entier pair, et on a, comme on sait,

$$(2)\qquad 2\zeta(2n)=\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}B_n,$$

en désignant par $B_1=\frac{1}{6}$, $B_2=\frac{1}{30}$, $B_3=\frac{1}{42}$,... les nombres de Bernoulli.

Quant aux quantités $\zeta(s)$ pour les valeurs impaires $s=3, 5, 7$, etc., on ne sait rien sur leur nature arithmétique, qui semble être fort compliquée ; on s'est borné à établir des séries à convergence plus rapide qui permettent les calculer, objet bien secondaire puisque on parvient au même but à l'aide du développement semiconvergent. Nous resterons cependant dans ce problème, dont nous avons donné autre fois une solution à l'aide d'une catégorie des séries, présentant beaucoup d'analogie avec certains développements de la théorie des fonctions elliptiques :

$$\Phi_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta'_{2s-1}(n)}{n^{s+k}} e^{-nx},$$

où $\Theta'_{2s-1}(n)$ représente la somme des puissances d'ordre $2s-1$ de tous les diviseurs impairs de l'entier n ; la quantité $\zeta(s)$, pour s impair, s'exprime sous forme finie à l'aide des quantités Φ_k, la complication de l'expression augmentant d'ailleurs avec la valeur de s.

Cette fois nous allons considérer les entiers de la forme $4k-1$, pour lesquels nous allons donner une solution beaucoup plus simple et très élémentaire dans son exposition. En partant de l'identité

$$\frac{1+x^{2k-1}}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \pm \ldots + x^{2k-2}$$

prenons $x = \frac{m^2}{n^2}$ en divisant en même temps par $n^2 m^{4k-2}$; nous aurons

$$\frac{1}{(m^2+n^2)\, m^{4k-2}} + \frac{1}{(m^2+n^2)\, n^{4k-2}} = \sum_{\nu=1}^{2k-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{n^{2\nu}\, m^{4k-2\nu}}.$$

Les séries à double entrée qu'on obtient en prenant la somme pour $m, n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ sont évidemment convergentes et l'on aura

$$\sum_{m,n} \frac{1}{m^{4k-2}(m^2+n^2)} + \sum_{m,n} \frac{1}{n^{4k-2}\,(m^2+n^2)}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{2k-1} (-1)^{\nu-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\nu}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{4k-2\nu}}.$$

Les deux séries au premier membre sont identiques, et les termes du second membre sont les produits de deux valeurs $\zeta(2\nu)$ et $\zeta(4k-2\nu)$ et sont égaux deux à deux, sauf le terme moyen $\nu = k$. On aura donc l'équation

$$(3) \qquad \sum_{m,n} \frac{1}{m^{4k-2}(m^2+n^2)} = \sum_{\nu=1}^{k-1} (-1)^{\nu-1} \zeta(2\nu)\,\zeta(4k-2\nu)$$

$$+ (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{2}\, \zeta^2(2k),$$

dont nous allons simplifier le premier membre. On a en effet

$$2\eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\eta^2+n^2} = \frac{2\pi}{e^{2\pi\eta}-1} - \frac{1}{\eta} + \pi,$$

et si l'on pose $\eta = m$, on aura en divisant par m^{4k-1} et prenant la somme,

$$2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{4k-2}(m^2+n^2)}=2\pi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{4k-1}}\,\frac{1}{e^{2m\pi}-1}$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{4k}}+\pi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{4k-1}}.$$

Au moyen de cette équation la formule (3) devient

$$\frac{\pi}{2}\zeta(4k-1)=\frac{1}{2}\zeta(4k)+(-1)^{k-1}\frac{1}{2}\zeta^2(2k)$$

$$+\sum_{\nu=1}^{k-1}(-1)^{\nu-1}\zeta(2\nu)\,\zeta(4k-2\nu)$$

$$-\pi\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{4k-1}}\,\frac{1}{e^{2m\pi}-1},$$

résultat qui d'après (2) peut s'écrire comme il suit

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{4k-1}}=\frac{(2\pi)^{4k-1}}{(4k)!}\Bigg[&B_{2k}+(-1)^{k-1}\frac{1}{2}\binom{4k}{2k}B_k^2\\&+\sum_{\nu=1}^{k-1}(-1)^{\nu-1}\binom{4k}{2\nu}B_\nu B_{2k-\nu}\Bigg]\\&-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{4k-1}}\,\frac{1}{e^{2m\pi}-1}.\end{aligned}\right.$$

A l'aide de cette formule le calcul numérique de la quantité $\zeta(4k-1)$ est réduit à la sommation d'une série à convergence rapide dont les coefficients sont les inverses des quantités $e^{2\pi}-1$, $e^{4\pi}-1$, $e^{6\pi}-1$ et se calculent une fois pour toutes.

Si pour la pratique cette formule présente quelque avantage, son importance théorique me semble apparaître plutôt dans la forme suivante

$$(5)\begin{cases} (4k)!\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m\pi)^{4k-1}}\operatorname{cothyp}(2m\pi) \\ = B_{2k}+(-1)^{k-1}\dfrac{1}{2}\dbinom{4k}{2k}B_k^2+\displaystyle\sum_{\nu=1}^{k-1}(-1)^{\nu-1}\binom{4k}{2\nu}B_\nu B B_{2k-\nu} \end{cases}$$

exprimant que le premier membre est un nombre rationnel dont il est aisé d'obtenir le denominateur a priori.