Matyáš Lerch
Příspěvek k určování existenčního oboru analytických úkonů

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 9 (1900), č. 9, 1–8

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501540

Příspěvek k určování existenčního oboru analytických úkonů.

Podává

M. Lerch.

(Předloženo dne 14. prosince 1899.)

Budiž ω veličina komplexní s kladnou částí pomyslnou, takže veličina

$$q = e^{\omega \pi i}$$

bude ve své prosté hodnotě menší jedné. Součin za této podmínky konvergentní

$$\varphi(\omega) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})$$

jest analytická funkce proměnné ω, která se chová pravidelně v celé polovici roviny (ω) položené nad osou realnou. Jest o této funkci známo, že se na ose realné nikde nechová pravidelně, takže ji nelze propagovati do jižní polovice roviny (ω), ale vlastnost tato si ještě neproklestila cestu do knih učebných o theorii funkcí elliptických jednajících, a proto nebude snad bez užitku, vyložím-li v následujícím jednoduchý důkaz tohoto fakta, kterýž zasluhuje povšimnutí již k vůli překvapující roli, jakou tu hrají jisté arithmetické výrazy.

Logarithmováním součinu $\varphi(\omega)$ obdržíme

$$\log \varphi(\omega) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \log(1 - q^{2\mu}),$$

a dosadíme-li sem známý výraz

$$\log(1 - q^{2\mu}) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} q^{2\mu\nu},$$

obdržíme dvojnásob nekonečnou řadu

$$\log \varphi(\omega) = -\sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} q^{2\mu\nu}.$$

jejíž konvergence jest absolutní.

Nekonečná řada dvojnásobná

$$(1) \qquad \psi(\omega) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu \nu^2 \pi} q^{2\mu\nu}$$

rovněž absolutně konvergentní souvisí s funkcí $\varphi(\omega)$ rovnicí následující

$$(2) \qquad \frac{d\psi(\omega)}{d\omega} = -2i \log \varphi(\omega),$$

jejíž správnost leží na snadě. Řadu (1) převedeme v řadu jednoduchou, provedeme-li sčítání vůči μ, čímž vyjde

$$(1^a) \qquad \psi(\omega) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 \pi} \log(1 - e^{2\nu\omega\pi i}),$$

kterýžto tvar má nám sloužiti za základ v předsevzatém šetření.

Rozložíme-li ω na část realnou x a pomyslnou iy, kde y je kladné, vznikne otázka, co se stane z funkce $\psi(x + iy)$, přejdeme-li k mezím pro $y = 0$; pro náš účel stačí uvažovati část pomyslnou této funkce. Položíme tedy

$$\psi(x + iy) = \psi_0(x, y) + i\psi_1(x, y),$$

i vypočteme, ježto

$$\log(1 - e^{2\nu x\pi i - 2\nu y\pi})$$
$$= \log \sqrt{(1 - e^{-2\nu y\pi} \cos 2\nu x\pi)^2 + e^{-4\nu y\pi} \sin^2 2\nu x\pi}$$
$$- i \operatorname{arctg} \frac{e^{-2\nu y\pi} \sin 2\nu x\pi}{1 - e^{-2\nu y\pi} \cos 2\nu x\pi},$$

podle (1^a) následující rovnici:

$$(3) \qquad \psi_1(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 \pi} \operatorname{arctg} \frac{e^{-2\nu y\pi} \sin 2\nu x\pi}{1 - e^{-2\nu y\pi} \cos 2\nu x\pi}.$$

Tvrdíme, že pro nekonečně ubývající y se tento výraz blíží veličině

$$\psi_1(x,0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\nu x\pi}{1-\cos 2\nu x\pi}, \tag{3ª}$$

což dokážeme omezivše se na případ, kdy číslo x jest irracionalné. Důkaz žádaný bude proveden, ukáže-li se, že ke každé kladné konstantě δ, jakkoli malé, přísluší kladná veličina η tak malá, že pro všecka kladná y, jež nepřevyšují η, bude rozdíl $\psi_1(x,y) - \psi_1(x,0)$ ve svém prostém obnosu menší než δ.

Za tím účelem určeme celistvé číslo m podmínkou

$$\sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} < \frac{\delta}{2},$$

a uvažme, že funkce arcus tangens je vždy ve svém prostém obnosu menší než $\frac{\pi}{2}$, takže bude

$$\left| \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2\pi} \operatorname{arctg} \frac{e^{-2\nu y\pi}\sin 2\nu x\pi}{1-e^{-2\nu y\pi}\cos 2\nu x\pi} \right| < \frac{\delta}{4},$$

$$\left| \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\nu x\pi}{1-\cos 2\nu x\pi} \right| < \frac{\delta}{4}.$$

Při známém nyní čísle m lze určiti η tak, aby pro $0 < y \leqq \eta$ každý z m rozdílů

$$\frac{1}{\nu\pi^2} \operatorname{arctg} \frac{e^{-2\nu y\pi}\sin 2\nu x\pi}{1-e^{-2\nu y\pi}\cos 2\nu x\pi} - \frac{1}{\nu^2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\nu x\pi}{1-\cos 2\nu x\pi},$$

příslušných k hodnotám $\nu = 1, 2, 3 \ldots m$, byl absolutně menší než $\frac{\delta}{2m}$ takže jich součet bude menší než $\frac{\delta}{2}$.

Provedeme-li nyní rozklad

$$\begin{aligned} &\psi_1(x,y) - \psi_1(x,0) \\ &= \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{\nu^2\pi}\left(\operatorname{arctg} \frac{e^{-2\nu y\pi}\sin 2\nu x\pi}{1-e^{-2\nu y\pi}\cos 2\nu x\pi} - \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\nu x\pi}{1-\cos 2\nu x\pi}\right) \\ &\quad + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2\pi} \operatorname{arctg} \frac{e^{-2\nu y\pi}\sin 2\nu x\pi}{1-e^{-2\nu y\pi}\cos 2\nu x\pi} \\ &\quad - \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\nu x\pi}{1-\cos 2\nu x\pi}, \end{aligned}$$

potřebujeme si vzpomenouti, že pravá strana sestává z veličin, o nichž právě bylo ukázáno, že jsou pořadem menší než $\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{4}, \frac{\delta}{4}$, abychom viděli, že platí nerovnost

$$|\psi_1(x,y) - \psi_1(x,0)| < \delta,$$

kterou právě jsme chtěli dokázati.

Dotvrdivše takto rovnici

$$\lim_{y=0} \psi_1(x,y) = \psi_1(x, 0),$$

udělme výrazu $\psi_1(x, 0)$ tvar elegantnější. Poněvadž

$$\frac{\sin 2\nu x \pi}{1 - \cos 2\nu x \pi} = \cot \nu x \pi,$$

bude nám hledati úhel $\varrho \pi$, jehož tangens jest rovna $\operatorname{tg} \nu x \pi$; určeme celistvé číslo μ tak, aby rozdíl $\nu x - \mu = \varrho$ byl mezi nullou a jednou, přesněji

$$0 \leqq \varrho < 1;$$

pak bude $\operatorname{tg} \nu x \pi = \operatorname{tg}(\mu + \varrho)\pi = \operatorname{tg} \varrho \pi$, a veličina

$$\operatorname{arctg}(\cot \nu x \pi) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} - \varrho\right)\pi\right)$$

bude míti hodnotu $\left(\frac{1}{2} - \varrho\right)\pi$.

Veličinu ϱ, která jest nejmenším kladným zbytkem veličiny νx, lze psáti $\mathfrak{R}(\nu x)$, znamená-li se obecně

$$\mathfrak{R}(z) = z - E(z)$$

nejmenší kladný zbytek veličiny z; při tomto označení bude tedy

$$\psi_1(x, 0) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - \mathfrak{R}(\nu x)}{\nu^2}. \tag{4}$$

Co do svého tvaru arithmetického tato funkce připomíná onu veskrze přetržitou funkci, kterou uvádí Riemann ve své rozpravě habilitační*) jakožto příklad funkce integrace schopné. Okolnost, že tohoto druhu výrazy, utvořené na základě methody kondensace míst zvláštních, nacházejí se v souvislosti s funkcemi elliptickými, tedy s oborem jedním z nejpravi-

*) Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.

delnějších a vlastnostmi algebraickými nejbohatších, jest zajisté pamětihodná.

O funkci $\psi_1(x, 0) = f(x)$, definované naší řadou (4), lze dokázati, že e na každém irracionalném místě spojitou, kdežto na místech racionalných x_0 existují sice krajní hodnoty

$$\lim_{h=0} f(x_0 + h) = f(x_0 + 0), \quad \lim_{h=0} f(x_0 - h) = f(x_0 - 0),$$

ale tyto jsou různy. Okolnost tato tkví ve vlastnostech funkce $\Re(z)$, dle nichž

$$\lim_{h=0} \Re(z \pm h) = \Re(z) \text{ při lomeném } z,$$

a dále

$$\lim \Re(z + h) = \Re(z + 0) = \Re(z) = 0,$$
$$\lim \Re(z - h) = \Re(z - 0) = \Re(z) + 1 = 1$$

při celistvém z.

Budiž tedy $x_0 = \frac{p}{q}$ racionalné číslo ve tvaru nepřevodném, kde q lze voliti kladné. Utvořme řady

$$f(x_0 + h) = \sum_1^\infty \frac{\frac{1}{2} - \Re(\nu x_0 + \nu h)}{\nu^2},$$

$$f(x_0 - h) = \sum_1^\infty \frac{\frac{1}{2} - \Re(\nu x_0 - \nu h)}{\nu^2}$$

i dokažme, že bude

$$\lim_{h=0} f(x_0 + h) = \sum_1^\infty \frac{\frac{1}{2} - \Re(\nu x_0 + 0)}{\nu^2} = f(x_0 + 0),$$

$$\lim_{h=0} f(x_0 - h) = \sum_1^\infty \frac{\frac{1}{2} - \Re(\nu x_0 - 0)}{\nu^2} = f(x_0 - 0).$$

Omezíme se na důkaz první věty. Buď δ daná kladná konstanta a určeme celistvé kladné číslo m podmínkou

$$\sum_{\nu=m+1}^\infty \frac{1}{\nu^2} < \frac{\delta}{2};$$

poněvadž veličiny $\frac{1}{2} - \Re(z)$ leží pokaždé mezi $-\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$, budou nekonečné řady

$$\sum_{m+1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - \Re(\nu x_0 + \nu h)}{\nu^2}, \quad \sum_{m+1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - \Re(\nu x_0 + 0)}{\nu^2}$$

míti prosté svoje obnosy menší $\frac{\delta}{4}$. Na pravé straně rovnice

$$f(x_0 + h) - f(x_0 + 0) = \sum_{1}^{m} \frac{\Re(\nu x_0 + 0) - \Re(\nu x_0 + \nu h)}{\nu^2}$$
$$+ \sum_{m+1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - \Re(\nu x_0 + \nu h)}{\nu^2} - \sum_{m+1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - \Re(\nu x_0 + 0)}{\nu^2}$$

přicházejí dvě nekonečné řady, jichž prosté hodnoty jsou menší než $\frac{\delta}{4}$, a jich součet bude tedy menší než $\frac{\delta}{2}$. První výraz na pravé straně jest složen z konečného počtu členů, a stává se přetržitým pouze na místech, pro něž $\nu x_0 + \nu h$ stane se číslem celistvým; to se přihoditi může jen pro konečný počet hodnot h, a nepřihodí se vůbec, určíme-li přiměřeně malou veličinu k a volíme-li $h \leqq k$; tím lze též dosíci, aby každý člen

$$\frac{\Re(\nu x_0 + 0) - \Re(\nu x_0 + h)}{\nu^2}$$

stal se absolutně menším než $\frac{\delta}{2m}$, a tedy náš součet absolutně menším než $\frac{\delta}{2}$. Následovně bude při všech kladných hodnotách h, jež nepřevyšují k, platit nerovnost

$$| f(x_0 + h) - f(x_0 + 0) | < \delta,$$

která obsahuje tvrzení

$$\lim_{h=0} f(x_0 + h) = f(x_0 + 0).$$

Podobným způsobem dokáže se věta druhá.

Rozdíl obou mezných hodnot $f(x_0 + 0)$ a $f(x_0 - 0)$ bude dán řadou

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\Re(\nu x_0 - 0) - \Re(\nu x_0 + 0)}{\nu^2}$$

o jejíž členech víme, že nezmizí jen tehdy, je-li νx_0 číslo celistvé, ve kterémž případě mají hodnotu $\frac{1}{\nu^2}$. Potřebujeme tedy bráti v úvahu pouze členy $\nu = q, 2q, 3q, 4q, \ldots$, jež dají hledaný výsledek

$$f(x_0+0)-f(x_0-0)=\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2 q^2}=\frac{\pi^2}{6q^2}, \quad x_0=\frac{p}{q}.$$

Předpokládejme nyní, že se funkce $\varphi(\omega)$ chová pravidelně v jistém plošném oboru Ω, prostoupeném osou realnou, a sice buď $(\alpha \ldots \beta)$ úsek realné osy oboru Ω náležející. V témž oboru bude též $\psi(\omega)$ funkcí analyticky pravidelnou. Je-li x irracionalná hodnota vzatá z intervallu $(\alpha \ldots \beta)$, bude, jak výše vyloženo,

$$\lim_{y=0} \psi_1(x,y)=\psi_1(x,0)=f(x)$$

pomyslnou částí analytické funkce

$$\lim_{y=0} \psi(x+iy)=\psi(x),$$

a tedy též funkcí analytickou, následovně spojitou.

Ježto jsme ukázali, že funkce $f(x)$, daná řadou (4), není spojitá, narážíme na nemožnost i musíme zamítnouti domněnku, že by funkce $\varphi(\omega)$ chovala se někde na ose realné pravidelně.

Na konec stůjtež zde ještě některé poznámky, které s předmětem předcházejícím se nacházejí v úzké souvislosti.

Pro funkci $\psi_0(x,y)$ obdrželi bychom přímým dosazením $y=0$ výraz

(5) $$\psi_0(x,0)=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2\pi}\log|2\sin\nu x\pi|;$$

jeho pravá strana konverguje na jisto, je-li x číslo irracionalné algebraické, t. j. kořenem rovnice

$$a_0 x^{\varkappa}+a_1 x^{\varkappa-1}+a_2 x^{\varkappa-2}+\ldots+a_{\varkappa}=0,$$

jejíž součinitelé jsou čísla celistvá. Za to však postrádá všeho smyslu pro každé racionalné x, a z čísel ostatních, transcendentních, lze v každém sebe užším intervallu nalézti taková, pro něž řada tato diverguje.

Nyní ještě poznámku o řadě (1). Uvedeme-li ji nejprve na tvar

$$\psi(\omega)=\sum_{\mu,\nu}\frac{\mu}{\mu^2\nu^2\pi}q^{2\mu\nu},$$

a shrneme-li členy se společnou hodnotou $\mu\nu=n$, bude součet příslušných hodnot μ patrně součtem všech dělitelů čísla n, toto číslo samo i jednotku včítaje; znamenáme-li jej $\Theta_1(n)$, obdržíme tvar

$$\psi(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_1(n)}{n^2 \pi} q^{2n}; \quad q = e^{x\pi i \; y\pi};$$

je-li dovoleno v této řadě přejíti k mezím pouhým dosazením $y = 0$, obdržíme

$$\psi_1(x, 0) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\Theta_1(n)}{n^2 \pi} \sin 2\, n\, x\, \pi,$$

a tedy dle (4) výsledek ovšem nejistý

$$(6) \qquad \sum_{\nu = 1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - \Re(\nu x)}{\nu^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_1(n)}{n^2 \pi} \sin 2\, n\, x\, \pi,$$

který nicméně vede k důsledkům správným. Tak na příklad násobme na obou stranách differenciálem $e^{-a x}\, d x$ a integrujme od nully do nekonečna; i objeví se vztah správný

$$(7) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{a}{\nu}}} - \frac{\nu}{a} - \frac{1}{2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_1(n)}{n} \, \frac{2\, a\, \pi}{a^2 + 4\, n^2 \pi^2}\,.$$

Podobně obdržíme z (6) prostou integrací rovnici správnou

$$(8) \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{\Re^2(\nu x) - \Re(\nu x) + \frac{1}{6}}{\nu^3} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_1(n)}{n^3} \cos 2\, n\, x\, \pi.$$

Poznamenání. Úvahy předcházející jsou v podstatě zahrnuty v posmrtné publikaci Riemannově »Fragmente über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunctionen« (Riemannovy spisy, str. 453 druhého vydání). Poněvadž fragmenty nebyly určeny k uveřejnění, nemůže překvapiti, že se v nich nacházejí některá menší nedopatření; jest však zřejmo, že výrazy na této cestě se namanuvší vyvolaly některá místa rozpravy habilitační, a rovněž vysvítá, že Riemann měl v úmyslu vyšetřiti konvergenci výrazů podobných pravé straně rovnice (6). Přečetné relace Riemannem v uvedených fragmentech vyvinuté vztahují se k arithmetickým úkonům jako $E(x)$, $\Re(x)$ a pod., kteroužto historicky zajímavou okolnost dlužno vytknouti vzhledem ke známým rozpravám Kroneckerovým uveřejněným o více než třicet roků později ve spisech Akademie Berlínské.
