Matyáš Lerch
Theorie funkce gamma

Věstník Čes. Akademie cis. Fr. Jos. pro vědy, slovesnost a umění v Praze 8 (1899), 308–324

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501532

arctg rozkládající ve dva členy možná si zjednati vzorce trojčlenné, jakýchž taktéž bylo užito, a z nichž vynikají známé dva vzorce Gaussovy.[1]

Ku konci budiž ještě poznamenáno, že konstruktivní stanovení veličiny π nemělo dosud valných úspěchů, jakož i dle povahy úkolu tohoto jest snadno pochopitelno.

Nejbližší nám známé vyšetření této hodnoty pochází od dra. Schuriga v Lipsku a od dra. Jičínského v J. Hradci, tuto o 7 jednotek na 8. místě desetinném menší, onde o 3 jednotky na témže místě větší. Podalť na prvém místě jmenovaný autor vzorec příbližný,

$$\pi = \sqrt{21} + \frac{1}{4}\sqrt{5} - 2, \tag{12}$$

kdež sestrojení jest proto jednoduché, že tu platí

$$\sqrt{21} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{5^2 - 2^2} = 4{\cdot}58257569\ \ldots$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{2^2 + 1^2} = 2{\cdot}23666797\ \ldots.$$

a tedy se vystačí s poučkou Pythagorovou, kdežto druhý badatel ostrovtipný přišel ke vzorci příbližnému

$$\pi = \frac{\cos 15^0 + 0{\cdot}45}{10} + 3 = 3{\cdot}14159258 \tag{13}$$

kterýž vede ještě rychleji k cíli, jelikož úhel 15^0 snadno se v kružnici dá vytknouti.[2])

Ovšem by mnohem zajímavější bylo znáti pochod myšlenkový, jak uvedení autorové ke svým vzorcům přišli; neb na první pohled není dosti jasným, jakož sotva se vystihne dráha, na níž přišel Dr. Bing ke svému vzorci mnohem méně přesnému, jen 5 míst desetinných poskytujícímu

$$\pi = 9\left(2\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{6}\right) - 31,$$

kterýž uveřejnil v únoru letošním jakožto prý vynikající řešení úkolu svrchu jmenovaného, neznaje ani Schuriga Němce, ani Jičínského Čecha. Snad tu hrála vynikající úlohu náhoda, anaž i jinde tak jeví se býti důležitou.

Theorie funkce gamma.

Napsal *M. Lerch.*

(Pokračování článku z ročníku II.)

I.

Jak Dirichlet první přesně byl dokázal, lze každou konečnou funkci spojitou, která má v intervallu (0 . . . 1) pouze konečný počet obratů (maxima a minima), rozvinouti v řadu

[1]) Viz: Studnička: »Výklady o funkcích monoperiodických«, Praha 1892, pag. 135, kdež i na str. 139 podán výsledek Shanksův.

[2]) Že veleznámému odborníku tomuto právnickému byla na londýnské výstavě r. 1872 udělena velká zlatá medaille za geometrický objev tento, připomínáme tuto jenom mimochodem.

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos 2x\pi + a_2 \cos 4x\pi + a_3 \cos 6x\pi + \ldots$$
$$+ b_1 \sin 2x\pi + b_2 \sin 4x\pi + b_3 \sin 6x\pi + \ldots,$$

při čemž součinitelé a_ν a b_ν jsou dáni integrály

$$a_0 = \int_0^1 f(x)\,dx, \quad a_\nu = 2\int_0^1 f(x) \cos 2\nu x\pi\,dx,$$

$$b_\nu = 2\int_0^1 f(x) \sin 2\nu x\pi\,dx,$$

Pro analysi mohou míti zajímavost ovšem jen takové případy, ve kterých lze tyto integrály skutečně vyjádřiti výrazy jednoduchými neb v jiném ohledu pravidelnými; pokaždé ale výsledky takto nabyté jaksi nutí k přímé verifikaci, poněvadž existenční důkaz Dirichletův není právě elementárný. Jestliže v tomto případě nicméně užijeme k odvození trigonometrického rozvoje funkce $\log \Gamma(x)$ vzorců předešlých, máme na mysli okolnost, že jak Poisson první a ještě před Dirichletem dokázal, trigonometrická řada naše vždy rovná se funkci $f(x)$, jakmile konverguje, při čemž funkce $f(x)$ podrobena jediné podmínce, aby byla schopnou integrace; poněvadž pak jsme s to Poissonovu větu dokázati prostředky veskrze elementarnými (což vyložiti si ponecháváme na jinou příležitost), můžeme tím spíše užiti této methody, aniž porušíme elementarnou povahu i jasnost svých výkladů.

Vycházejme z řady

$$\psi(u) = -C + \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+u}\right), \tag{1}$$

jež konverguje pro všecka u a definuje jednoznačnou funkci komplexní proměnné u, mající toliko polárné singularity jednoduché a to na místech $u = 0, -1, -2, -3, \ldots$ Konstanta C buď zatím neurčena, i ponecháme si na vůli ji ustáliti tak, aby se některé vlastnosti funkce zjednodušily.

Klademe-li

$$\log \Gamma(u) = \int_1^u \psi(x)\,dx, \tag{2}$$

obdržíme ve výrazu $\Gamma(u)$ funkci jednoznačnou, která je reciprokou hodnotou určité funkce celistvé a transcendentní a má pouze polarné singularity jednoduché $u = 0, -1, -2, -3, \ldots$

Z definice (1) snadno vychází

$$\psi(u+1) = \frac{1}{u} + \psi(u),$$

a tedy dle (2)

$$\log \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(2)} = \log u + \log \Gamma(u),$$

čili

$$\Gamma(u+1) = u\,\Gamma(u)\,.\,\Gamma(2).$$

Z rovnice (2) plyne již jako vlastnost obsažená v definici, že

$$\Gamma(1) = 1.$$

Poněvadž z (1) plyne integrací od 1 do 2

$$\log \Gamma(2) = -C + \sum_0^\infty \left(\frac{1}{\nu+1} - \log\frac{\nu+2}{\nu+1}\right).$$

můžeme stanoviti konstantu C tak, aby též

$$\Gamma(2) = 1,$$

čímž nacházíme hodnotu stálé C ve tvaru

$$C = \sum_0^\infty \left(\frac{1}{\nu+1} - \log\frac{\nu+2}{\nu+1}\right)$$

čili

$$C = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{\mu} - \log\frac{\mu+1}{\mu}\right),$$

kterýžto výraz lze též psáti

$$C = \lim_{n=\infty}\left(\sum_1^{n-1}\frac{1}{\mu} - \log n\right),$$

takže C je známou Eulerovou konstantou; funkce $\Gamma(n)$ takto stanovená má pak základní vlastnost

(3) $$\Gamma(u+1) = u\,\Gamma(u).$$

To předeslavše uvažujme integrál

$$\Phi(\omega) = \int_\omega^\infty \cos 2u\pi \frac{du}{u}.$$

který po substituci ku za u lze též psáti

$$\Phi(\omega) = \int_{\frac{\omega}{k}}^\infty \cos 2ku\pi \frac{du}{u};$$

při tom má znamenati ω veličinu realnou a kladnou, a k kladné číslo celistvé.

Rozložme nyní poslední integrál dle schematu

$$\int_{\frac{\omega}{k}}^\infty = \sum_{n=0}^\infty \int_{\frac{\omega}{k}+n}^{\frac{\omega}{k}+n+1},$$

a položme v obecném členu $u = x + n$; i vyjde

$$\Phi(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{\omega}{k}}^{\frac{\omega}{k}+1} \cos 2k x \pi \frac{dx}{x+n},$$

čili, což totéž jest,

$$\Phi(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{\omega}{k}}^{\frac{\omega}{k}+1} \cos 2k x \pi \, dx \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n+1}\right);$$

odtud pak plyne na základě známé věty o integraci řad stejnoměrně konvergentních, že bude

$$\Phi(\omega) = \int_{\frac{\omega}{k}}^{\frac{\omega}{k}+1} \cos 2k x \pi \, dx \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1}\right)$$

t. j. dle (1)

$$\Phi(\omega) = -\int_{\frac{\omega}{k}}^{\frac{\omega}{k}+1} \cos 2k x \pi \, dx \left(\psi(x) + C\right)$$

aneb konečně

$$\Phi(\omega) = -\int_{\frac{\omega}{k}}^{\frac{\omega}{k}+1} \psi(x) \cos 2k x \pi \, dx.$$

Poslední integrál

$$\Phi(\omega) = -\int_{\frac{\omega}{k}}^{\frac{\omega}{k}+1} \cos 2k x \pi \, d \log \Gamma(x)$$

po částečné integraci obdrží tvar

$$-\log \frac{\Gamma\left(\frac{\omega}{k}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\omega}{k}\right)} . \cos 2\omega\pi - 2k\pi \int_{\frac{\omega}{k}}^{\frac{\omega}{k}+1} \log \Gamma(x) . \sin 2k x \pi \, dx.$$

Pomocí vzorce (3) první člen se zjednoduší, jak následuje:

$$-\log \frac{\omega}{k} . \cos 2\omega\pi,$$

takže máme výsledek

$$(4)\qquad \Phi(\omega)+\cos 2\omega\pi . \log\omega = \cos 2\omega\pi . \log k - 2k\pi \int_{\frac{\omega}{k}}^{\frac{\omega}{k}+1} \log\Gamma(x)\sin 2kx\pi dx,$$

v němž

$$(4^a)\qquad \Phi(\omega) = \int_{\omega}^{\infty} \cos 2u\pi \frac{du}{u}.$$

Blíží-li se ω nulle, blíží se pravá strana hodnotě konečné a určité, i musí tedy též levá strana míti konečnou hodnotu krajní. Klademe-li pak

$$(4^b)\qquad A = \lim_{\omega=0}\left(\Phi(\omega) + \log\omega\right),$$

t. j.

$$(4^b)\qquad A = \lim_{\omega=0}\left\{\log\omega + \int_{\omega}^{\infty}\cos 2u\pi\frac{du}{u}\right\},$$

vyjde

$$(5)\qquad \int_0^1 \log\Gamma(x)\sin 2kx\pi dx = \frac{\log k}{2k\pi} - \frac{A}{2k\pi}.$$

Podobné úvaze podrobme nyní integrál

$$B = \int_0^{\infty}\sin 2u\pi\frac{du}{u} = \int_0^{\infty}\sin 2ku\pi\frac{du}{u};$$

máme nejprve

$$B = \sum_0^{\infty}\int_0^1 \sin 2ku\pi\frac{du}{u+\nu} = -\int_0^1 \psi(u)\sin 2ku\pi du$$

a po částečné integraci

$$B = 2k\pi\int_0^1 \log\Gamma(u)\cos 2ku\pi du$$

čili

$$(5^a)\qquad \int_0^1 \log\Gamma(x)\cos 2kx\pi dx = \frac{B}{2k\pi},$$

při čemž položeno

$$B = \int_0^{\infty}\sin 2u\pi\frac{du}{u}$$

aneb, což totéž jest,

$$(5^b) \qquad B = \int_0^\infty \sin x \frac{dx}{x}.$$

Klade-li se tedy pro u obsažená mezi 0 a 1

$$\log \Gamma(u) = a_0 + \sum_1^\infty a_\nu \cos 2\nu u\pi + \sum_1^\infty b_\nu \sin 2\nu u\pi,$$

bude dle vzorců (5) a (5^a)

$$a_\nu = \frac{B}{\nu\pi}, \quad b_\nu = \frac{\log\nu}{\nu\pi} - \frac{A}{\nu\pi},$$

konečně

$$(6) \qquad a_0 = \int_0^1 \log \Gamma(x)\, dx.$$

Výsledek lze tedy psáti

$$\log \Gamma(u) = a_0 + \frac{B}{\pi}\sum_{\nu=1}^\infty \frac{\cos 2\nu u\pi}{\nu} - A\sum_{\nu=1}^\infty \frac{\sin 2\nu u\pi}{\nu\pi}$$
$$+ \sum_1^\infty \frac{\log\nu}{\nu\pi} \sin 2\nu u\pi,$$

s podmínkou $o < u < 1$.

Za podmínky této jest však

$$\sum_1^\infty \frac{\cos 2\nu u\pi}{\nu} = -\log(2\sin u\pi),$$

$$\sum_1^\infty \frac{\sin 2\nu u\pi}{\nu\pi} = \frac{1}{2} - u,$$

a tedy bude

$$\log \Gamma(u) = a_0 - \frac{B}{\pi}\log\sin u\pi - A\left(\frac{1}{2} - u\right) + \sum_1^\infty \frac{\log\nu}{\nu\pi}\sin 2\nu u\pi.$$

Klade-li se $1 - u$ za u, což dovoleno hledíc k okolnosti $0 < 1 - u < 1$, obdržíme

$$\log \Gamma(1-u) = a_0 - \frac{B}{\pi}\log(2\sin u\pi) + A\left(\frac{1}{2} - u\right)$$
$$- \sum_1^\infty \frac{\log\nu}{\nu\pi}\sin 2\nu u\pi;$$

sečteme-li oba výsledky, vyskytne se rovnice

$$\log\left[\Gamma(u)\,\Gamma(1-u)\right] = 2\,a_0 - \frac{2\,B}{\pi}\log(2\sin u\pi).$$

Přičteme-li na obou stranách u a užijeme-li vzorce

$$u\,\Gamma(u) = \Gamma(1+u),$$

vyjde

$$\log\left[\Gamma(1+u)\,\Gamma(1-u)\right] = 2\,a_0 - \frac{2\,B}{\pi}\log(2\sin u\pi) + \log u\,;$$

levá strana je konečná pro nekonečně malá u, a musí tedy, aby též pravá strana tuto vlastnost měla, býti

$$\frac{2\,B}{\pi} = 1, \quad \text{t. j.} \quad B = \frac{\pi}{2}$$

Pak ale pravá strana jest

$$2\,a_0 - \log\frac{2\sin u\pi}{u},$$

což pro $u = 0$ má hodnotu

$$2\,a_0 - \log 2\,\pi\,;$$

ježto pro $u = 0$ levá strana uvažované rovnice mizí, musí

$$2\,a_0 - \log 2\,\pi = 0$$

čili

$$a_0 = \log\sqrt{2\pi}\,;$$

tímto způsobem nalezeny výsledky vedlejší

$$\log\Gamma(u)\,\Gamma(1-u) = \log\frac{\pi}{\sin u\pi}$$

čili

(7) $$\Gamma(u)\,\Gamma(1-u) = \frac{\pi}{\sin u\pi}\,;$$

dále

(8) $$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

(9) $$\int\limits_0^1 \log\Gamma(x)\,dx = \log\sqrt{2\pi},$$

nám již odjinud známé, a dále rozvoj

$$\log\Gamma(u) = \log\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}\log(2\sin u\pi) - A\left(\frac{1}{2} - u\right)$$
$$+ \sum_1^\infty \frac{\log\nu}{\nu\pi}\,.\,\sin 2\,\nu u\pi,$$

čili

$$(\alpha)\quad \log \Gamma(u) + \frac{1}{2} \log \frac{\sin u\pi}{\pi} + A\left(\frac{1}{2} - u\right) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\log \nu}{\nu\pi} \cdot \sin 2\nu u \pi.$$

Kdybychom se však pokusili o stanovení hodnoty stálé veličiny A podobně, jako se nám to podařilo s veličinami B a a_0, nevedl by žádný jednoduchý obrat k cíli. I nechceme-li předpokládati za známý mezný výraz

$$\lim \left\{ \log \omega + \int_{\omega}^{\infty} \cos 2u\pi \frac{du}{u} \right\},$$

nezbývá než stanoviti A differencováním naší poslední rovnice na obou stranách, a klásti při tom

$$u = \frac{1}{2}.$$

Differencování řady

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\log \nu}{\nu\pi} \sin 2\nu u\pi$$

provede se na základě pravidla, které jsme svým časem elementarně a za podmínek dosti obecných byli dokázali, [1]) a které vyjádřeno vzorcem

$$\frac{\sin x\pi}{\pi} D_x \sum_{1}^{\infty} \frac{c_\nu}{\nu} \sin 2\nu x\pi = -c_1 \sin x\pi + \sum_{1}^{\infty} (c_\nu - c_{\nu+1}) \sin (2\nu + 1) x\pi.$$

V našem případě obdrží se tedy

$$\sin x\pi \,.\, D_x \sum_{1}^{\infty} \frac{\log \nu}{\nu\pi} \sin 2\nu x\pi = \sum_{1}^{\infty} \log \frac{\nu}{\nu + 1} \,.\, \sin (2\nu + 1) x\pi$$

a odtud pro $x = \frac{1}{2}$

$$D_{x=\frac{1}{2}} \sum_{1}^{\infty} \frac{\log \nu}{\nu\pi} \,.\, \sin 2\nu x\pi = \sum_{1}^{\infty} (-1)^\nu \log \frac{\nu}{\nu + 1}.$$

Differencujeme-li tedy rovnici (α) pro $u = \frac{1}{2}$, vyjde

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) - A = \sum_{1}^{\infty} (-1)^\nu \log \frac{\nu}{\nu + 1}.$$

[1]) Comptes Rendus, 1894, II. svazek. Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 1895. Věstník Č. Akademie, ročník V.

Jest pak dále

$$\sum_1^\infty (-1)^\nu \log \frac{\nu}{\nu+1} = -\sum_1^\infty \left(\log \frac{2\mu-1}{2\mu} - \log \frac{2\mu}{2\mu+1}\right)$$

$$= -\sum_1^\infty \log\left(1 - \frac{1}{4\mu^2}\right) = -\log \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \log \frac{\pi}{2},$$

a rovnice naše bude

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) - A = \log \frac{\pi}{2}.$$

Jest pak dle (1)

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -C + \sum_0^\infty \left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+\frac{1}{2}}\right)$$

$$= -C + 2\sum_{\nu=0}^\infty \left(\frac{1}{2\nu+2} - \frac{1}{2\nu+1}\right)$$

t. j.

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -C + 2\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n} = -C - 2\log 2,$$

takže máme

$$A = \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \log 2 - \log \pi = -C - \log 2\pi,$$

a rovnice hledaná bude

$$\log \Gamma(u) + \frac{1}{2}\log \frac{\sin u\pi}{\pi} + \left(C + \log 2\pi\right)\left(u - \frac{1}{2}\right) \tag{10}$$

$$= \sum_1^\infty \frac{\log \nu}{\nu\pi} \sin 2\nu u\pi.$$

Toť známá řada Kummerova, [1]) kterou lze mnohými jinými methodami ještě odůvodniti.

II.

Řada

$$\sum_0^\infty \left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+u}\right),$$

[1]) Crelleův žurnál, sv. XXXV.

která vyjadřuje funkci $\psi(u) + C$, jest sice absolutně i stejnoměrně konvergentní, ale konvergence její jest tak zdlouhava, že pro účely praktické pozbývá všeho významu. Odtud sice odvodí se rozvoj mocninný, užije-li se tvaru

$$C + \psi(1+u) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu+u}\right),$$

a pak při $|u| < 1$

$$\frac{1}{\mu+u} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{u^{\nu}}{\mu^{\nu+1}},$$

takže vyjde

$$C + \psi(1+u) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{u^{\nu}}{\mu^{\nu+1}}$$

čili

$$C + \psi(1+u) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \zeta(\nu+1) u^{\nu},$$

kde položeno, jak obyčejem,

$$\zeta(\nu+1) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu^{\nu+1}}.$$

V řadě této však vyskytují se konstanty $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, ... které neumíme vyjádřiti ve tvaru zakončeném, ačkoli máme pro jich numerické stanovení prostředky výhodné. Vzhledem k této okolnosti může býti zajímavo, že lze nicméně funkci $\psi(u)$ vyjádřiti řadou, [1]) jež konverguje při libovolném u a to rychlostí řady geometrické s poměrem $e^{-\pi}$. Ačkoli výsledek ten plyne bezprostředně z našich studií o řadách Malmsténských vyložených v různých našich rozpravách vydaných Českou Akademií, nicméně zdá se mi býti žádoucím podati zde výklad přímý.

Položme

$$(1) \qquad F(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[u + (w+n)^2]^s},$$

i jest možno tuto funkci rozvinouti v řadu

$$F(w) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{2m w \pi i},$$

a to buď při proměnné realné dle věty Dirichletovy aneb jednodušeji při proměnné komplexní dle věty Laurentovy.

Koefficienty se obdrží pomocí vzorce

$$A_m = \int_0^1 F(w) e^{-2m w \pi i} dw,$$

[1]) Bulletin des Sciences mathématiques, réd. par M. Darboux, 1897.

tedy nahradíme-li $F(w)$ řadou (1),

$$A_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \frac{e^{-2mw\pi i}\, dw}{[u+(w+n)^2]^s}$$

čili po substituci

$$w + n = x$$

$$A_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{e^{-2mx\pi i}\, dx}{(u+x^2)^s},$$

což lze sloučiti v integrál jediný

$$A_m = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2mx\pi i} \frac{dx}{(u+x^2)^s}.$$

Abychom tento stanovili, užijme vzorce

$$\frac{1}{(u+x^2)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z(u+x^2)} z^{s-1}\, dz,$$

takže vyjde

$$A_m = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-uz} z^{s-1}\, dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{-zx^2-2mx\pi i}\, dx.$$

Jest však dle známé věty

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-zx^2-2mx\pi i}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{z}}\, e^{-\frac{m^2\pi^2}{z}},$$

takže vyjde

$$A_m = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-uz-\frac{m^2\pi^2}{z}} z^{s-\frac{3}{2}}\, dz,$$

a dle toho bude platiti základní vztah

$$(2) \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[u+(w+m)^2]^s} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2mw\pi i} \int_0^{\infty} e^{-uz-\frac{m^2\pi^2}{z}} z^{s-\frac{3}{2}}\, dz.$$

Isolujme v pravo člen $m = 0$, jehož hodnota jest

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \cdot \frac{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{u^{s-\frac{1}{2}}},$$

i obdržíme vzorec známý

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[u+(w+m)^2]^s} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)\,u^{s-\frac{1}{2}}} \tag{2*}$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' e^{2mw\pi i} \int_0^\infty e^{-uz-\frac{m^2\pi^2}{z}} z^{s-\frac{3}{2}}\, dz.$$

Zde kladme $\frac{u+c_2(w_2+n)^2}{c_1}$ za u a w_1 za w, i sečtěme pro $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

Obdržíme

$$\sum \frac{1}{[u+c_1(w_1+m)^2+c_2(w_2+n)^2]^s}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{c_1}\,\Gamma(s)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[u+c_2(w_2+n)^2]^{s-\frac{1}{2}}}$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi}}{c_1{}^s\,\Gamma(s)} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' e^{2mw_1\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\frac{u+c_2(w_2+n)^2}{c_1}z-\frac{m^2\pi^2}{z}} z^{s-\frac{3}{2}}\, dz;$$

vyměňme nyní litery c_1 a c_2, zároveň pak w_1 a w_2; tím se levá strana nezmění a odpadne, odečte-li se rovnice tak vzniklá od poslední. Máme tudíž

$$\frac{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{c_1 c_2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\sqrt{c_1}}{[u+c_1(w_1+n)^2]^{s-\frac{1}{2}}} - \frac{\sqrt{c_2}}{[u+c_2(w_2+n)^2]^{s-\frac{1}{2}}} \right\}$$

$$= \frac{1}{c_1{}^s} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' e^{2mw_1\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\frac{u+c_2(w_2+n)^2}{c_1}z-\frac{m^2\pi^2}{z}} z^{s-\frac{3}{2}}\, dz$$

$$- \frac{1}{c_2{}^s} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' e^{2mw_2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\frac{u+c_1(w_1+n)^2}{c_2}z-\frac{m^2\pi^2}{z}} z^{s-\frac{3}{2}}\, dz.$$

V rovnici této se předpokládá pro konvergenci řad $s > 1$; přejděme nyní k limitě pro $s = 1$; kladme zatím $s = 1 + \varrho$, takže ϱ je kladná veličina nekonečně malá, a bude s chybou nekonečně malou

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{c_1 c_2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{c_1^{-\varrho}}{\left[\frac{u}{c_1} + (w_1 + n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\varrho}} - \frac{c_2^{-\varrho}}{\left[\frac{u}{c_2} + (w_2 + n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\varrho}} \right\}$$

$$= \frac{1}{c_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' e^{2 m w_1 \pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u + c_2 (w_2 + n)^2}{c_1} z - \frac{m^2 \pi^2}{z}} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$- \frac{1}{c_2} \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' e^{2 m w_2 \pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{u + c_1 (w_1 + n)^2}{c_2} z - \frac{m^2 \pi^2}{z}} \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Integrály na pravé straně se vyčíslí pomocí vzorce

$$\int_0^{\infty} e^{-az - \frac{b}{z}} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-2\sqrt{ab}};$$

výsledek bude lze krátiti činitelem $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{c_1 c_2}}$, a zbude

$$\lim_{\varrho=0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{c_1^{-\varrho}}{\left[\frac{u}{c_1} + (w_1 + n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\varrho}} - \frac{c_2^{-\varrho}}{\left[\frac{u}{c_2} + (w_2 + n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\varrho}} \right\}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2 m w_1 \pi i - 2\pi |m| \sqrt{\frac{u + c_2 (w_2 + n)^2}{c_1}}}}{\sqrt{\frac{u}{c_2} + (w_2 + n)^2}}$$

$$- \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2 m w_2 \pi i - 2\pi |m| \sqrt{\frac{u + c_1 (w_1 + n)^2}{c_2}}}}{\sqrt{\frac{u}{c_1} + (w_1 + n)^2}}.$$

Sčítání co do m lze provésti pomocí vzorce

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' e^{2 m w \pi i} r^{|m|} = \frac{\cos 2 w \pi - r}{\frac{1}{2}(r + r^{-1}) - \cos 2 w \pi},$$

takže obdržíme při označení

$$U_\varrho = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{c_1^{-\varrho}}{\left[\frac{u}{c_1} + (w_1 + n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\varrho}} - \frac{c_2^{-\varrho}}{\left[\frac{u}{c_2} + (w_2 + n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\varrho}} \right\}$$

výsledek již jednodušší

$$\lim_{\varrho=0} U_\varrho = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{u}{c_2}+(w_2+n)^2}} \cdot \frac{\cos 2 w_1 \pi - e^{-2\pi\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\sqrt{\frac{u}{c_2}+(w_2+n)^2}}}{\cos\mathrm{hyp}\left(2\pi\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\sqrt{\frac{u}{c_2}+(w_2+n)^2}\right)-\cos 2 w_1 \pi}$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{u}{c_1}+(w_1+n)^2}} \cdot \frac{\cos 2 w_2 \pi - e^{-2\pi\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\sqrt{\frac{u}{c_1}+(w_1+n)^2}}}{\cos\mathrm{hyp}\left(2\pi\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\sqrt{\frac{u}{c_1}+(w_1+n)^2}\right)-\cos 2 w_2 \pi}.$$

Zbývá nyní stanoviti limitu výrazu

$$U_\varrho = c_2^{-\varrho} \sum \left\{ \frac{\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^\varrho}{\left[\frac{u}{c_1}+(w_1+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\varrho}} - \frac{1}{\left[\frac{u}{c_2}+(w_2+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\varrho}} \right\}.$$

K tomu cíli uvažme, že veličina

$$\sum \frac{1}{\left[\frac{u}{c_1}+(w_1+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\varrho}}$$

se dle vzorce (2*) redukuje na výraz $\Gamma(\varrho)$ zvětšený o veličinu konečnou pro $\varrho = 0$; dle toho bude výraz tvaru

$$\sum \frac{a_2 \varrho^2 + a_3 \varrho^3 + \ldots}{\left[\frac{u}{c_1}+(w_1+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\varrho}}$$

nekonečně malý zároveň s ϱ, a dále

$$\lim_{\varrho=0} \varrho \sum \frac{1}{\left[\frac{u}{c_1}+(w_1+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\varrho}} = 1.$$

Nahradíme-li tedy veličinu

$$\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^\varrho \text{ řadou } 1 + \varrho \log \frac{c_2}{c_1} + \frac{\varrho^2}{1.2} \log^2 \frac{c_2}{c_1} + \ldots,$$

obdržíme

$$\lim_{\varrho=0} U_\varrho = \lim_{\varrho=0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\left[\frac{u}{c_1}+(w_1+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\varrho}} - \frac{1}{\left[\frac{u}{c_2}+(w_2+n)^2\right]^{\frac{1}{2}+\varrho}} \right\}$$

$$+ \log \frac{c_2}{c_1}$$

Řada na pravé straně stojící konverguje stejnoměrně v komplexním okolí bodu $\varrho = 0$ a obdržíme tedy její hodnotu pro $\varrho = 0$ pouhou substitucí $\varrho = 0$, takže vyjde

$$\lim_{\varrho - 0} U_\varrho = \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{c_1} + (w_1 + n)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{c_2} + (w_2 + n)^2}} \right\} + \log \frac{c_2}{c_1},$$

a máme tedy výsledek

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(w_1 + n)^2 + \frac{n}{c_1}}} - \frac{1}{\sqrt{(w_2 + n)^2 + \frac{n}{c_2}}} \right\} = \log \frac{c_1}{c_2}$$

$$+ \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(w_2 + n)^2 + \frac{n}{c_2}}} \frac{\cos 2 w_1 \pi - e^{-2\pi \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \sqrt{(w_2 + n)^2 + \frac{n}{c_2}}}}{\cos \operatorname{hyp}\left(2\pi \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \sqrt{(w_2 + n)^2 + \frac{n}{c_2}}\right) - \cos 2 w_1 \pi}$$

$$- \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(w_1 + n)^2 + \frac{n}{c_1}}} \frac{\cos 2 w_2 \pi - e^{-2\pi \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \sqrt{(w_1 + n)^2 + \frac{n}{c_1}}}}{\cos \operatorname{hyp}\left(2\pi \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \sqrt{(w_1 + n)^2 + \frac{n}{c_1}}\right) - \cos 2 w_2 \pi}.$$

Výsledek tento nabude jisté elegance, zavedeme-li $c_1 n$ za n, klademe-li $\frac{c_1}{c_2} = t^2$ a znamenáme-li

$$\psi(w, n) = \lim_{n = \infty} \left\{ \sum_{\nu = -n}^{n} \frac{1}{\sqrt{(w + \nu)^2 + n}} - 2 \log n \right\}. \tag{3}$$

Pak lze jej psáti

$$\psi(w_1, n) - \psi(w_2, t^2 n) = \log t^2$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(w_2 + n)^2 + t^2 n}} \frac{\cos 2 w_1 \pi - e^{-\frac{2\pi}{t} \sqrt{(w_2 + n)^2 + t^2 n}}}{\cos \operatorname{hyp}\left(\frac{2\pi}{t} \sqrt{(w_2 + n)^2 + t^2 n}\right) - \cos 2 w_1 \pi} \\ &- \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(w_1 + n)^2 + n}} \frac{\cos 2 w_2 \pi - e^{-2\pi t \sqrt{(w_1 + n)^2 + n}}}{\cos \operatorname{hyp}\left(2\pi t \sqrt{(w_1 + n)^2 + n}\right) - \cos 2 w_2 \pi}. \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

Funkce $\psi(w, n)$ definovaná vzorcem (4) vyskytuje se v mathematické fysice; pokud mi známo, přichází poprvé (poněkud nepřímo) u Riemanna ve známé jeho práci Zur Theorie der Nobilischen Farbenringe, a byla též studována slavným učencem francouzským p. Appellem.[1]) Ve formě (3) vyskytla se již v našich publikacích z roku 1891 a 1894. Výsledek (4) se zjednoduší v případě $t = 1$, a sice bude

[1]) Journal de Mathématiques, 1886.

$$
(5)\quad
\begin{cases}
\psi(w_1, u) - \psi(w_2, u) \\
= \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(w_2+n)^2+u}} \; \frac{\cos 2 w_1 \pi - e^{-2\pi\sqrt{(w_2+n)^2+u}}}{\operatorname{cos\,hyp}\left(2\pi\sqrt{(w_2+n)^2+u}\right) - \cos 2 w_1 \pi} \\
- \displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(w_1+n)^2+u}} \; \frac{\cos 2 w_2 \pi - e^{-2\pi\sqrt{(w_1+n)^2+u}}}{\operatorname{cos\,hyp}\left(2\pi\sqrt{(w_1+n)^2+u}\right) - \cos 2 w_2 \pi} .
\end{cases}
$$

Přejdeme-li k mezím pro $u = 0$, obdržíme z (3) v případě $0 < w < 1$

$$
\psi(w, 0) = \lim \left(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{w+\nu} - \log n \right) + \lim \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu - w} - \log n \right)
$$

čili

$$
\psi(w, 0) = -\psi(w) - \psi(1-w).
$$

Ježto z rovnice $\Gamma(w)\,\Gamma(1-w) = \dfrac{\pi}{\sin w\pi}$

vychází logarithmickým derivováním

$$
\psi(w) - \psi(1-w) = -\pi \cot w\pi,
$$

máme

$$
\psi(w) + \psi(1-w) = 2\,\psi(w) + \pi \cot w\pi,
$$

a tedy nám rovnice (4) poskytne

$$
2\,[\psi(w_1) - \psi(w_2)] + \pi\,[\cot w_1\pi - \cot w_2\pi]
$$

$$
= -\log t^2 + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|w_1+n|} \; \frac{\cos 2 w_2 \pi - e^{-2\pi t |w_1+n|}}{\operatorname{cos\,hyp} 2\pi t\,(w_1+n) - \cos 2 w_2 \pi}
$$

$$
- \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|w_2+n|} \; \frac{\cos 2 w_1 \pi - e^{-\frac{2\pi}{t}|w_2+n|}}{\operatorname{cos\,hyp} \dfrac{2\pi}{t}\,(w_2+n) - \cos 2 w_1 \pi}
$$

čili

$$
(6)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\Gamma'(w_1)}{\Gamma(w_2)} - \dfrac{\Gamma'(w_2)}{\Gamma(w_2)} + \dfrac{\pi}{2}\left[\cot w_1\pi - \cot w_2\pi\right] \\
= -\log t + \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|w_1+n|} \; \frac{\cos 2 w_2 \pi - e^{-2\pi t |w_1+n|}}{\operatorname{cos\,hyp} 2\pi t\,(w_1+n) - \cos 2 w_2 \pi} \\
- \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|w_2+n|} \; \frac{\cos 2 w_1 \pi - e^{-\frac{2\pi}{t}|w_2+n|}}{\operatorname{cos\,hyp} \dfrac{2\pi}{t}\,(w_2+n) - \cos 2 w_1 \pi} .
\end{cases}
$$

Klademe-li $t = 1$, vyjde

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\Gamma'(w_1)}{\Gamma(w_1)} - \frac{\Gamma'(w_2)}{\Gamma(w_2)} + \frac{\pi}{2}\left[\cot w_1 \pi - \cot w_2 \pi\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|w_1 + n|} \frac{\cos 2 w_2 \pi - e^{-2\pi |w_1 + n|}}{\cos\mathrm{hyp}\, 2\pi (w_1 + n) - \cos 2 w_2 \pi} \\
&- \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|w_2 + n|} \frac{\cos 2 w_1 \pi - e^{-2\pi |w_2 + n|}}{\cos\mathrm{hyp}\, 2\pi (w_2 + n) - \cos 2 w_1 \pi}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Volíme-li pak zvláště $w_2 = \frac{1}{2}$, odpadne $\cot w_2 \pi$, a $\frac{\Gamma'(w_2)}{\Gamma(w_2)}$ obdrží hodnotu $- C - 2 \log 2$; konečně druhá řada v pravo obdrží tvar

$$
4 \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda} \frac{\cos 2 w_1 \pi - e^{-\lambda \pi}}{\cos\mathrm{hyp}\, \lambda \pi - \cos 2 w_1 \pi},\ (\lambda = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots),
$$

takže vyjde vzorec

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)} + \frac{\pi}{2}\cot w \pi + C + 2 \log 2 \\
&= -2 \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda} \frac{\cos 2 w \pi - e^{-\lambda \pi}}{\cos\mathrm{hyp}\, \lambda \pi - \cos 2 w \pi} \\
&- \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|n + w|} \cdot \frac{1}{e^{2\pi |n+w|} + 1},\ (\lambda = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots),
\end{aligned}
\right.
$$

jejž jsme chtěli odvoditi.

Pro číselné počítání je vzorec tento výhodný jednak pro svoji rychlou konvergenci nezávislou na hodnotě w, jednak pro jednoduché operace, jaké se v něm vyskytují. Konstanty $e^{\pm\pi}$, $e^{\pm 2\pi}$, $e^{\pm 3\pi}$, ... $\cos\mathrm{hyp}\, \pi$, $\cos\mathrm{hyp}\, 3\pi$, ... vypočtou se jednou pro vždy, počemž se v každém případě ustanoví $\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)}$ na základě hodnot $\cot w \pi$, $\cos 2 w \pi$, $e^{w\pi}$, $e^{(1-w)\pi}$ prostým násobením a dělením.

Principes et développements de géométrie cinématique.

Ouvrage contenant de nombreuses applications à la théorie des surfaces. Par le colonel A. Mannheim, professeur à l' école polytechnique. Paris, Gauthier-Villars et fils, imprimeurs-libraires du Bureau des Longitudes et de l' École Polytechnique 1894.

Referuje *M. Pelíšek.*

Slovutný autor odhodlal se k soubornému vydání svých vědeckých prací z oboru geometrie pohybu, jež byly během takřka čtyřiceti let uveřejněny v různých mathematických časopisech, zejména však v publikacích