Matyáš Lerch

O některých vzorcích z theorie determinantů

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 8 (1899), č. 12, 1–16

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501523

O některých vzorcích z theorie determinantů.

Sdílí

M. Lerch,
professor na universitě ve Fribourgu švýcarském.

(Předloženo dne 20. ledna 1899.)

I.

Znamená-li nám $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ soustavu n daných a vespolek různých veličin, naznačme symbolem

$$\Delta(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)$$

součin rozdílový

$$\prod_{\alpha < \beta}(x_\beta - x_\alpha), \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n),$$

který jak známo rovná se determinantu

$$\Delta(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) = \begin{vmatrix} 1, & x_1, & x_1^2, & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1, & x_2, & x_2^2, & \ldots & x_2^{n-1} \\ . & . & . & . & . \\ 1, & x_n, & x_n^2, & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

a položme dále k vůli přehlednosti

$$f(t) = (t - x_1)(t - x_2)(t - x_3) \ldots (t - x_n).$$

Při tomto označení platí pak známý vzorec Cauchyův*)

*) Cauchy, Exercices d'Analyse, 2e vol., p. 154. Baltzer, Theorie u. Anwendung der Determinanten, 5. vyd. str. 102 a 103.

$$
(1)\qquad \begin{vmatrix}
\frac{1}{t_1-x_1}, & \frac{1}{t_1-x_2}, & \frac{1}{t_1-x_3}, & \ldots & \frac{1}{t_1-x_n} \\
\frac{1}{t_2-x_1}, & \frac{1}{t_2-x_2}, & \frac{1}{t_2-x_3}, & \ldots & \frac{1}{t_2-x_n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\
\frac{1}{t_n-x_1}, & \frac{1}{t_n-x_2}, & \frac{1}{t_n-x_3}, & \ldots & \frac{1}{t_n-x_n}
\end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{\Delta(t_1, t_2, \ldots t_n)\,\Delta(x_1, x_2, \ldots x_n)}{f(t_1)\,f(t_2)\ldots f(t_n)},
$$

z něhož chceme některé konsekvence vyvoditi, a který především elementarnou cestou znova dokázati hodláme.

Abychom determinant (1), jejž znamenejme C, vyčíslili, odečtěme od konce počínaje ode všech sloupců determinantu toho po každé sloupec bezprostředně předcházející, takže první sloupec zůstane beze změny. Poněvadž

$$
\frac{1}{t-x_{\alpha+1}}-\frac{1}{t-x_\alpha}=\frac{x_{\alpha+1}-x_\alpha}{(t-x_\alpha)\,(t-x_{\alpha+1})},
$$

vyloučí se z determinantu činitel

$$
(x_2-x_1)\,(x_3-x_2)\,(x_4-x_3)\ldots(x_n-x_{n-1});
$$

se zbylým determinantem naložme jako s předešlým, toliko s tím rozdílem, že první dva sloupce mají zůstati nezměněny; tu nás identita

$$
\frac{1}{(t-x_{\alpha+1})\,(t-x_{\alpha+2})}-\frac{1}{(t-x_\alpha)\,(t-x_{\alpha+1})}
$$

$$
=\frac{x_{\alpha+2}-x_\alpha}{(t-x_\alpha)\,(t-x_{\alpha+1})\,(t-x_{\alpha+2})}
$$

vede k vyloučení dalšího činitele

$$
(x_3-x_1)\,(x_4-x_2)\,(x_5-x_3)\ldots(x_n-x_{n-2});
$$

naložíme-li se zbylým determinantem obdobně jako předešle, a s výsledkem rovněž a t. d., obdržíme takto pokračujíce konečně výraz

$$
C=D\,(x_2-x_1)\,(x_3-x_2)\ldots(x_n-x_{n-1})\,.\,(x_3-x_1)\,(x_4-x_2)\ldots
$$

$$
(x_n-x_{n-2})\,.\,(x_4-x_1)\,(x_5-x_2)\ldots(x_n-x_{n-3})\ldots.(x_n-x_1),
$$

při čemž D nám značí determinant

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{t_1 - x_1}, & \frac{1}{(t_1 - x_1)(t_1 - x_2)}, & \frac{1}{(t_1 - x_1)\,(t_1 - x_2)\,(t_1 - x_3)}, & \ldots & \frac{1}{(t_1 - x_1)\,(t_1 - x_2)\ldots(t_1 - x_n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{t_n - x_1}, & \frac{1}{(t_n - x_1)(t_n - x_2)}, & \frac{1}{(t_n - x_1)\,(t_n - x_2)\,(t_n - x_3)}, & \ldots & \frac{1}{(t_n - x_1)\,(t_n - x_2)\ldots(t_n - x_n)} \end{vmatrix},$$

a tedy máme

$$C = D \varDelta (x_1, x_2, x_3, \ldots x_n).$$

Abychom určili determinant D, násobme první jeho řádek funkcí $f(t_1)$, druhý veličinou $f(t_2)$, a t. d., konečně n-tý řádek veličinou $f(t_n)$. Tak obdržíme součin

$$D f(t_1), f(t_2) \ldots f(t_n)$$

vyjádřený determinantem, jehož první řádek má prvky

$$\frac{f(t_1)}{t_1 - x_1} = (t_1 - x_2)\,(t_1 - x_3)\ \ldots\ (t_1 - x_n),$$

$$\frac{f(t_1)}{(t_1 - x_1)\,(t_1 - x_2)} = (t_1 - x_3)\,(t_1 - x_4) \ldots (t_1 - x_n),$$

$$\frac{f(t_1)}{(t_1 - x_1)\,(t_1 - x_2)\,(t_1 - x_3)} = (t_1 - x_4)\,(t_1 - x_5) \ldots (t_1 - x_n), \ldots .$$

konečně

$$\frac{f(t_1)}{(t_1 - x_1)\,(t_1 - x_2) \ldots (t_1 - x_n)} = 1,$$

a ostatní řádky mají prvky téhož typu. Znamenáme-li tedy obecně

$$(t - x_{k+1})\,(t - x_{k+2}) \ldots (t - x_n) = G_{n-k}(t),\ G_0 = 1,$$

bude

$$D\,f\,(t_1)\,f\,(t_2) \ldots f(t_n) = \begin{vmatrix} G_{n-1}(t_1), & G_{n-2}(t_1), & \ldots & G_1\,(t_1), & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ G_{n-1}(t_n), & G_{n-2}(t_n), & \ldots & G_1\,(t_n), & 1 \end{vmatrix}.$$

Odečteme-li od prvního sloupce v tomto determinantu vhodně volený aggregát sloupců následujících, zredukuje se na první členy funkce G_{n-1}, t. j. na prvky t_1^{n-1}, t_2^{n-1}, $\ldots$ t_n^{n-1}; podobným způsobem lze druhý sloupec uvésti na t_1^{n-2}, t_2^{n-2}, $\ldots$ t_n^{n-1}; tak pokračujíce, obdržíme

$$D f(t_1)\ f(t_2) \ldots f(t_n) = \begin{vmatrix} t_1^{n-1} & t_1^{n-2} & \ldots & t_1 & 1 \\ t_2^{n-1} & t_2^{n-2} & \ldots & t_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_n^{n-1} & t_n^{n-2} & \ldots & t_n & 1 \end{vmatrix}.$$

kterýžto determinant má hodnotu*)

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Delta(t_1, t_2, \dots t_n)$$

a tedy

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\Delta(t_1, t_2, \dots t_n)}{f(t_1)\, f(t_2) \dots f(t_n)},$$

čímž vzorec (1) dokázán.

II.

Rovnici (1) pišme nyní ve tvaru

$$\begin{vmatrix} \frac{t_1^{n-1}}{f(t_1)}, & \frac{t_1^{n-2}}{f(t_1)}, & \frac{t_1^{n-3}}{f(t_1)}, & \dots & \frac{t_1}{f(t_1)}, & \frac{1}{f(t_1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{t_n^{n-1}}{f(t_n)}, & \frac{t_n^{n-1}}{f(t_n)}, & \frac{t_n^{n-3}}{f(t_n)}, & \dots & \frac{t_n}{f(t_n)}, & \frac{1}{f(t_n)} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\Delta(x_1, x_2, \dots x_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{t_1 - x_1}, & & \frac{1}{t_n - x_1} \\ \dots & & \dots \\ \frac{1}{t_1 - x_n}, & \dots & \frac{1}{t_n - x_n} \end{vmatrix},$$

rozviňme obě strany dle klesajících mocností veličin $t_1, t_2, \dots t_n$, i porovnejme na obou stranách součinitele při členu

$$\frac{1}{t_1^{m_1+1}\, t_2^{m_2+1} \dots t_n^{m_n+1}},$$

při čemž celistvá kladná čísla $m_1, m_2, \dots m_n$ tvořtež řadu stoupající, takže pouze m_1 může po případě býti nullou.

Na pravé straně bude uvažovaný součinitel zníti

$$\frac{(m_1, m_2, \dots m_n)}{\Delta(x_1, x_2, \dots x_n)},$$

znamenáme-li k vůli stručnosti

---

*) Znaménko $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ lze též psáti $(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}$, kde $\left[\frac{n}{2}\right]$ značí celky zlomku $\frac{n}{2}$.

$$(2) \qquad (m_1, m_2, \ldots m_n) = \begin{vmatrix} x_1^{m_1} & x_1^{m_2} & \ldots & x_1^{m_n} \\ x_2^{m_1} & x_2^{m_2} & \ldots & x_2^{m_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^{m_1} & x_n^{m_2} & \ldots & x_n^{m_n} \end{vmatrix};$$

abychom vyjádřiti mohli téhož součinitele na levé straně, položme

$$(3) \qquad \frac{1}{f(t)} = \frac{c_0}{t^n} + \frac{c_1}{t^{n+1}} + \frac{c_2}{t^{n+2}} + \ldots,$$

při čemž $c_0 = 1$, a znamenejme dále $c_{-1} = c_{-2} = \ldots = 0$; pak snadno se obdrží náš součinitel ve tvaru determinantu, a porovnáme-li jej s výrazem (2) obdržíme rovnici

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} c_{m_1}, & c_{m_1-1}, & c_{m_1-2}, & c_{m_1-3}, & \ldots \\ c_{m_2}, & c_{m_2-1}, & c_{m_2-2}, & c_{m_2-3}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m_n}, & c_{m_n-1}, & c_{m_n-2}, & c_{m_n-3}, & \ldots \end{vmatrix} = \frac{(m_1, m_2, \ldots m_n)}{\Delta(x_1, x_2, \ldots x_n)}.$$

Zbývá nyní determinant na levé straně stojící přetvořiti tak, aby se v něm vyskytovaly pouze základní úkony souměrné veličin $x_1, x_2, \ldots x_n$, čili což totéž jest, součinitelé funkce

$$(5) \qquad (t - x_1)(t - x_2) \ldots (t - x_n) = t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \ldots + a_n.$$

K tomu cíli dospějeme pomocí rovnice rekurrentní

$$(6) \qquad c_k + a_1 c_{k-1} + a_2 c_{k-2} + \ldots \quad a_n c_{k-n} = 0$$

platné pro $k > 0$.

Omezivše se na případ $m_1 = 0$, na nějž se případ obecný bezprostředně redukuje, znamenejme

$$m_2 - 1 = \varrho_1, \; m_3 - m_2 - 1 = \varrho_2, \ldots m_n - m_{n-1} - 1 = \varrho_{n-1},$$

takže bude

$$m_2 = \varrho_1 + 1, \; m_3 = \varrho_1 + \varrho_2 + 2, \ldots m_n = \varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_{n-1} + n - 1,$$

při čemž $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ jsou celistvá čísla nikoli záporná, a jich součet

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_{n-1} = m$$

má býti kladný.

Pomocí elementarných pravidel uvésti lze determinant (4) na determinant stupně $m + n$, který má následující složení:

Prvních n sloupců — znamenejme jich souhrn literou $\mathfrak{A}$ — zní

$$\begin{matrix} c_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ c_1 & c_0 & 0 & 0 & \dots \\ c_2 & c_1 & c_0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

další sloupce v počtu m, jichž souhrn znamenati chceme literou $\mathfrak{B}$, mají určitých n řádků složených ze samých null, a sice jsou to ony řádky, jež v determinantu našem $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$ začínají prvky

$$c_0,\ c_{m_2},\ c_{m_3},\ \dots\ c_{m_n};$$

ostatní řádky soustavy $\mathfrak{B}$ v počtu m tvoří v přirozeném pořádku za sebou vzaty systém jednotkový (předešlými řádky ovšem místy přerušený)

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{matrix}$$

který znamenejme literou $\mathfrak{B}_0$.

Pro důkaz tohoto tvrzení stačí rozložiti determinant $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$ podle věty Laplaceovy v součet součinů determinantů stupně m a n, tak sice, že se determinanty ze soustavy $\mathfrak{A}$ spojují s doplňkovými determinanty ze soustavy $\mathfrak{B}$. V této poslední jest však pouze jeden determinant od nully různý, totiž determinant soustavy jednotkové $|\mathfrak{B}_0|$ mající hodnotu 1, a příslušný determinant z $\mathfrak{A}$ jest právě náš determinant (4), t. j.

$$\begin{vmatrix} c_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ c_{m_2} & c_{m_2-1} & c_{m_2-2} & c_{m_2-3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m_n} & c_{m_n-1} & c_{m_n-2} & c_{m_n-3} & \dots \end{vmatrix}$$

Součin těchto determinantů dlužno opatřiti znamením, jež stanoveno třídou permutace, jejíchž prvých n prvků zní

$$0,\ m_2,\ m_3,\ \dots\ m_n,$$

a následující prvky jsou čísla

$$1,\ 2\ \dots\ m_2-1,\ m_2+1,\ m_2+2,\ \dots\ m_3-1,\ m_3+1,\ \dots\ m_n-1;$$

tato permutace má patrně

$$(m_2-1)+(m_3-2)+(m_4-3)+\ldots.+(m_n-n+1)$$

inversí; počet tento lze psáti

$$m_2+m_3+m_4+\ldots+m_n-\frac{n(n-1)}{2}=s-\frac{n(n-1)}{2},$$

a tedy bude třeba determinant (4) vzíti se znamením

$$\varepsilon=(-1)^{s-\frac{n(n-1)}{2}},\quad(s=m_2+m_3+\ldots+m_n),$$

aby se obdržel determinant $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$.

Tento determinant $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ nyní přetvoříme tím způsobem, že ke každému řádku přičteme jeho veškery předchůdce, násobené pořadem veličinami a_1, a_2, a_3, ... Užije-li se při tom vztahu rekurrentního (6), přejde systém $\mathfrak{A}$ v systém nový $\mathfrak{A}'$ mající tvar

$$\begin{array}{cccccc}
c_0 & 0 & 0 & \ldots. & 0 \\
0 & c_0 & 0 & \ldots. & 0 \\
0 & 0 & c_0 & \ldots. & 0 \\
\ldots & & \ldots & \ldots & \\
0 & 0 & 0 & \ldots. & c_0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots. & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots. & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots. & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ldots. & 0
\end{array}$$

t. j. prvních n řad tvoří soustavu jednotkovou (ježto $c_0=1$) a ostatních m řad obsahuje samé nully.

Systém $\mathfrak{B}$ měl tu vlastnost, že v každém sloupci vyskytnul se jediný prvek od nully různý, a sice rovný číslu 1; tyto jednotky jsou tak rozloženy ve schematě, že od levé strany ke pravé klesají od hora dolů.

Po transformaci přijde systém $\mathfrak{B}$ v soustavu $\mathfrak{B}'$, jejíž sloupce mají tvar takový, že s počátku obsahují samé nully až k místu vyznačenému jednotkou v soustavě $\mathfrak{B}$; píšeme-li a_0 za tuto jednotku, budou následující (od nully různé) prvky uvažovaného sloupce v soustavě $\mathfrak{B}'$ zníti $a_0, a_1, a_2 \ldots..$ zcela pravidelně až do konce.

Podle toho bude systém $\mathfrak{B}'$ úplně určen, udáme-li polohy prvků a_0. Prvky ty jsou rozloženy po jistých »příčkách« rovnoběžných s hlavní příčkou, a sice takto: První příčka začíná druhým prvkem prvního sloupce (v soustavě $\mathfrak{B}'$) a obsahuje ϱ_1 prvků a_0; prodlouží-li se příčka tato o jedno místo, přijdeme k prvku 0; pod tímto pak svisle leží jeden prvek a_0, jímž začíná druhá příčka s ϱ_2 prvky a_0 (jež ovšem odpadne v případě $\varrho_2=0$)

Pod prodloužením (o jedno místo) této příčky leží jeden prvek a_0, tvořící začátek třetí příčky, obsahující ϱ_3 prvků a_0, atd.

Jest nyní snadno určiti hodnotu determinantu $|\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'|$, na nějž jsme přetvořili determinant $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$. V soustavě $\mathfrak{A}'$ existuje toliko jeden determinant od nully různý, a ten pochází od prvních n řádků i má hodnotu 1; následkem toho bude $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}|$ roven determinantu stupně m, sestávajícímu z m posledních řádků soustavy $\mathfrak{B}'$.

Soustava $\mathfrak{B}'$ rozdělena jest výše popsanými příčkami ve dvě části, z nichž svrchní obsahuje samé nully a spodní sestává z prvků a zařaděných v příčky s předešlými rovnoběžné a stejně dlouhé, jež obsazeny jsou pokaždé stejnou literou. Znamenejme $\mathfrak{B}''$ posledních m řádků soustavy $\mathfrak{B}'$; poněvadž první sloupec v $\mathfrak{B}'$ začíná prvky $0\, a_0 \ldots.$ (předpokládá-li se $\varrho_1 > 0$, t. j. $m_2 > 1$), bude na místě $(n+1)$ním tohoto sloupce státi prvek a_{n-1}. Tudíž soustava $\mathfrak{B}''$ začne svoji diagonálu ϱ_1 prvky a_{n-1}; prvky nad nimi ležící jsou pak $a_{n-2}\, a_{n-3} \ldots$, pokud místo stačí, prvky pod nimi ležící pak jsou vždy a_n, 0, 0...

Po příčce jednotkové (a_0) v soustavě $\mathfrak{B}'$ následuje vždy příčka jednotková, sešinutá dolů o jedno místo; tudíž po ϱ_1 prvcích a_{n-1} v diagonále soustavy $\mathfrak{B}''$ bude následovati ϱ_2 prvků a_{n-2}, po té ϱ_3 prvků a_{n-3}, atd. Má tedy soustava $\mathfrak{B}''$ tvar následující:

$$\begin{array}{llll}
a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ldots. \\
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots. \\
0 & a_n & a_{n-1} & \ldots. \\
0 & 0 & a_n & \ldots\ldots \\
0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Je-li na př. $\varrho_1 = 3$, $\varrho_2 = 2$, $\varrho_3 = 0$, $\varrho_4 = 1$, má $\mathfrak{B}''$ tvar (ježto n = 5)

$$\begin{array}{cccccc}
a_4 & a_3 & a_2 & a_0 & 0 & 0 \\
a_5 & a_4 & a_3 & a_1 & a_0 & 0 \\
0 & a_5 & a_4 & a_2 & a_1 & 0 \\
0 & 0 & a_5 & a_3 & a_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_4 & a_3 & a_0 \\
0 & 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_1
\end{array}$$

Determinant tento bude přesně určen, známe-li jeho příčku, i znamenati jej budeme

$$[a_4\, a_4\, a_4\, a_3\, a_3\, a_1],$$

v obecném případě tedy

$$\Big[\underbrace{a_{n-1}\, a_{n-1} \ldots a_{n-1}}_{\varrho_1}\ \underbrace{a_{n-2}\, a_{n-2} \ldots a_{n-2}}_{\varrho_2}, \ldots\ldots \Big]$$

Poněvadž hledaný determinant (4) má hodnotu

$$\varepsilon\,|\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}| = \varepsilon\,|\mathfrak{B}''|,$$

kde

$$\varepsilon = (-1)^{s - \frac{n(n-1)}{2}},$$

bude výsledek náš zníti

$$\frac{(0, m_2, m_3, m_4 \;..\; m_n)}{\Delta\,(x_1, x_2, \ldots x_n)}$$

$$= (-1)^{s - \frac{n(n-1)}{2}} \Big[\underbrace{a_{n-1} \ldots a_{n-1}}_{\varrho_1}, \underbrace{a_{n-2} \ldots a_{n-2}}_{\varrho_2}, \ldots, \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{\varrho_{n-1}}\Big]$$

Výsledek ten nabude žádoucí elegance, zavedou-li se na místě veličin a_1, a_2, a_3, ... základní úkony souměrné veličin x_1, x_2 ... x_n, t. j. výrazy

$$\begin{aligned}
\mathfrak{f}_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\
\mathfrak{f}_2 &= x_1\,x_2 + x_1\,x_3 + x_2\,x_3 + \ldots + x_{n-1}\,x_n, \\
\mathfrak{f}_3 &= x_1\,x_2\,x_3 + x_1\,x_2\,x_4 + \ldots + x_{n-2}\,x_{n-1}\,x_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{f}_n &= x_1\,x_2 \ldots x_n,
\end{aligned}$$

jež s veličinami a souvisejí rovnicemi

$$a_1 = -\mathfrak{f}_1,\; a_2 = \mathfrak{f}_2,\; a_3 = -\mathfrak{f}_3, \ldots$$

Nejjednodušším způsobem dospějeme k cíli, obrátíme-li znamení všech x, neboť tak přejdou výrazy a_ν v $\mathfrak{f}_\nu$, kdežto determinanty

$$(0, m_2, m_3, \ldots m_n),\; \Delta\,(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

přejdou ve výrazy

$$(-1)^{m_2 + m_3 + \ldots + m_n}\,(0, m_2, m_3, \ldots m_n), \text{resp.}\,(-1)^{1+2+\ldots+(n-1)}\,\Delta\,(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

Tím způsobem náš výsledek nabývá tvaru

$$\text{(7)}\qquad \frac{(0, m_2\; m_3, \ldots m_n)}{\Delta\,(x_1, x_2, \ldots x_n)} = \Big[\underbrace{\mathfrak{f}_{n-1} \ldots \mathfrak{f}_{n-1}}_{\varrho_1}, \underbrace{\mathfrak{f}_{n-2} \ldots \mathfrak{f}_{n-2}}_{\varrho_2}, \ldots \underbrace{\mathfrak{f}_1 \ldots \mathfrak{f}_1}_{\varrho_{n-1}}\Big]$$

Determinant na pravé straně stojící lze přeměnou řádků v sloupce (transposicí) psáti jak následuje

$$
\left|\begin{array}{llll}
\mathfrak{f}_{n-1} & \mathfrak{f}_{n} & 0 & 0\ldots \\
\mathfrak{f}_{n-2} & \mathfrak{f}_{n-1} & \mathfrak{f}_{n} & 0\ldots \\
\mathfrak{f}_{n-3} & \mathfrak{f}_{n-2} & \mathfrak{f}_{n-1} & \mathfrak{f}_{n}\ldots \\
\multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\
\mathfrak{f}_{n-\varrho_1} & \mathfrak{f}_{n-\varrho_1+1} & \mathfrak{f}_{n-\varrho_1+2}\cdots & \mathfrak{f}_{n-1}\,\mathfrak{f}_{n}\,0\ldots \\
\mathfrak{f}_{n-\varrho_1-2} & \mathfrak{f}_{n-\varrho_1-3}\cdots & \mathfrak{f}_{n-3}\,\mathfrak{f}_{n-2} & \mathfrak{f}_{n-1}\,\mathfrak{f}_{n}\,0\ldots \\
\multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\
\mathfrak{f}_{n-\varrho_1-\varrho_2-1}\cdots & & & \\
\multicolumn{4}{c}{\dotfill}
\end{array}\right|
$$

takže tu determinant má v příčce za sebou ϱ_1 prvků $\mathfrak{f}_{n-1}$, ϱ_2 prvků $\mathfrak{f}_{n-2}$, ϱ_3 prvků $\mathfrak{f}_{n-3}, \ldots$ a rozšiřuje se pravidelně na pravo zvyšováním i na levo snižováním přípon, při čemž se klade

$$\mathfrak{f}_0 = 1,\ \mathfrak{f}_{n+1} = \mathfrak{f}_{n+2} = \ldots = 0$$

Vzorec (7), který jsme tu v plné obecnosti dokázali, byl postaven panem F. J. Studničkou *) a verifikován jím na jistém počtu jednodušších případů ($n \leqq 4$); deduktivní odůvodnění obecného theorému přenechal p. spisovatel »pp. kollegům svým odborným«.

III.

Pro Borchardtovu větu determinantní

$$D = \varDelta T,$$

ve které položeno

$$
\varDelta = \left|\begin{array}{c}
\dfrac{1}{t_1 - x_1}, \dfrac{1}{t_2 - x_1}, \ldots \dfrac{1}{t_n - x_1} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{1}{t_1 - x_n}, \dfrac{1}{t_2 - x_n}, \ldots \dfrac{1}{t_n - x_n}
\end{array}\right|,\quad
D = \left|\begin{array}{c}
\dfrac{1}{(t_1 - x_1)^2}, \dfrac{1}{(t_2 - x_1)^2}, \ldots \dfrac{1}{(t_n - x_1)^2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{1}{(t_1 - x_n)^2}, \dfrac{1}{(t_2 - x_n)^2}, \ldots \dfrac{1}{(t_n - x_n)^2}
\end{array}\right|
$$

a ve které dále znamená T součet

$$T = \sum_{(i)} \frac{1}{(t_1 - x_{i_1})(t_2 - x_{i_2}) \ldots (t_n - x_{i_n})}$$

---

*) **O determinantech mocninných a sestavných. Číslo IX. spisův poctěných jubilejní cenou Král. Č. Společnosti Náuk v Praze, 1897.**

vztahující se ke všem $n!$ permutacím $i_1, i_2 \ldots i_n$ čísel $1, 2, 3, \ldots n$ bez opakování, bylo dáno několik důkazů, mezi nimi také jednoduchý důkaz induktivní. Že by však některý z těchto důkazů pronikl až na kořen sám tohoto zajímavého úkazu algebraického, nezdá se nám možno tvrditi. Z té příčiny chceme Borchardtovu větu podrobiti hlubší analysi i redukovati ji na prosté identity elementarné algebry.

Především uvažme, že lze součin $\varDelta\, T$ přeměniti v součet determinantů, provede-li se násobení

$$\varDelta \cdot \frac{1}{(t_1 - x_{i_1})(t_2 - x_{i_2}) \ldots (t_n - x_{i_n})}$$

tím způsobem, že první sloupec determinantu $\varDelta$ násobíme veličinou $\dfrac{1}{t_1 - x_{i_1}}$, druhý veličinou $\dfrac{1}{t_2 - x_{i_2}}$ atd. Takto rovnice Borchardtova nabude tvaru

$$\sum_{(i)} \begin{vmatrix} \dfrac{1}{(t_1 - x_1)(t_1 - x_{i_1})}, & \dfrac{1}{(t_2 - x_1)(t_2 - x_{i_2})}, & \ldots & \dfrac{1}{(t_n - x_1)(t_n - x_{i_n})} \\ \dfrac{1}{(t_1 - x_2)(t_1 - x_{i_1})}, & \dfrac{1}{(t_2 - x_2)(t_2 - x_{i_2})}, & \ldots & \dfrac{1}{(t_n - x_2)(t_n - x_{i_n})} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{1}{(t_1 - x_n)(t_1 - x_{i_1})}, & \dfrac{1}{(t_2 - x_n)(t_2 - x_{i_2})}, & \ldots & \dfrac{1}{(t_n - x_n)(t_n - x_{i_n})} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{1}{(t_1 - x_1)^2}, & \dfrac{1}{(t_n - x_1)^2} \\ \ldots & \ldots \\ \dfrac{1}{(t_1 - x_n)^2}, & \dfrac{1}{(t_n - x_n)^2} \end{vmatrix},$$

tak že jeví se býti zvláštním případem identity

$$(1) \qquad \sum_{(i)} \begin{vmatrix} \dfrac{f_1(x_1) - f_1(x_{i_1})}{x_1 - x_{i_1}}, & \dfrac{f_2(x_1) - f_2(x_{i_2})}{x_1 - x_{i_2}}, & \ldots & \dfrac{f_n(x_1) - f_n(x_{i_n})}{x_1 - x_{i_n}} \\ \dfrac{f_1(x_2) - f_1(x_{i_1})}{x_2 - x_{i_1}}, & \dfrac{f_2(x_2) - f_2(x_{i_2})}{x_2 - x_{i_2}}, & \ldots & \dfrac{f_n(x_2) - f_n(x_{i_n})}{x_2 - x_{i_n}} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ \dfrac{f_1(x_n) - f_1(x_{i_1})}{x_n - x_{i_1}}, & \dfrac{f_2(x_n) - f_2(x_{i_2})}{x_n - x_{i_2}}, & \ldots & \dfrac{f_n(x_n) - f_n(x_{i_n})}{x_n - x_{i_n}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f'_1(x_1) f'_2(x_1) \dots f'_n(x_1) \\ f'_1(x_2) f'_2(x_2) \dots f'_n(x_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ f'_1(x_n) f'_2(x_n) \dots f'_n(x_n) \end{vmatrix}$$

ve které $f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x)$ značí funkce do jisté míry libovolné, i předpokládá se, že na levé straně výraz

$$\frac{f_\alpha(x_\beta) - f_\alpha(x_{i_\alpha})}{x_\beta - x_{i_\alpha}}$$

mající v případě $\beta = i_\alpha$ tvar neurčitý $\frac{0}{0}$ nahražen býti má svojí pravou hodnotou

$$f'_\alpha(x_\beta).$$

Volbu funkcí $f(x)$ lze vždy tak zaříditi, že platí při daných (vespolek různých) hodnotách $x_1 \dots x_n$ rovnice

$$f_\beta(x_\alpha) = a_\alpha^{(\beta)}, \quad f'_\beta(x_\alpha) = b_{\alpha\beta},$$

při čemž $a_\alpha^{(\beta)}$ a $b_{\alpha\beta}$ značí dvakráte n^2 daných zcela libovolných veličin. Tudíž jest vztah (1) identický s rovnicí následující

$$(1^*) \quad \sum_{(i)} \begin{vmatrix} \frac{a_1^{(1)} - a_{i_1}^{(1)}}{x_1 - x_{i_1}}, & \frac{a_1^{(2)} - a_{i_2}^{(2)}}{x_1 - x_{i_2}}, \dots & \frac{a_1^{(n)} - a_{i_n}^{(n)}}{x_1 - x_{i_n}} \\ \frac{a_2^{(1)} - a_{i_1}^{(1)}}{x_2 - x_{i_1}}, & \frac{a_2^{(2)} - a_{i_2}^{(2)}}{x_2 - x_{i_2}}, \dots & \frac{a_2^{(n)} - a_{i_n}^{(n)}}{x_2 - x_{i_n}} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \frac{a_n^{(1)} - a_{i_1}^{(1)}}{x_n - x_{i_1}}, & \frac{a_n^{(2)} - a_{i_2}^{(2)}}{x_n - x_{i_2}}, \dots & \frac{a_n^{(n)} - a_{i_n}^{(n)}}{x_n - x_{i_n}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11}, b_{12}, \dots b_{1n} \\ b_{21}, b_{22}, \dots b_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ b_{n1}, b_{n2} \dots b_{nn} \end{vmatrix},$$

při čemž se předpokládá, že výraz

$$\frac{a_\mu^{(\nu)} - a_{i_\mu}^{(\nu)}}{x_\mu - x_{i_\mu}} \text{ při } i_\mu = \mu \text{ nahradí se veličinou } b_{\mu\nu}.$$

Tuto rovnici (1*) chceme nyní verifikovati, vycházejíce z definice determinantu stupně n dané ve tvaru

$$\begin{vmatrix} c_1^{(1)} & c_1^{(2)} & \ldots & c_1^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n^{(1)} & c_n^{(2)} & \ldots & c_n^{(n)} \end{vmatrix} = \sum_{(k)} (-1)^{\varkappa} c_{k_1}^{(1)} c_{k_2}^{(2)} \ldots c_{k_n}^{(n)},$$

při čemž (k) probíhá všech $n!$ permutac $k_1 k_2 \ldots k_n$ čísel od jedné do n, a $\varkappa$ značí počet inversí permutace (k). Vyjádřímeli jednotlivé determinanty na levé straně rovnice (1*) stojící dle tohoto pravidla, objeví se výraz

$$A = \sum_{(k')} \sum_{(k)} (-1)^{\varkappa} \frac{a_{k_1}^{(1)} - a_{k'_1}^{(1)}}{x_{k_1} - x_{k'_1}} \cdot \frac{a_{k_2}^{(2)} - a_{k'_2}^{(2)}}{x_{k_2} - x_{k'_2}} \cdots \frac{a_{k_n}^{(n)} - a_{k'_n}^{(n)}}{x_{k_n} - x_{k'_n}},$$

při čemž psáno z důvodů typografických

$$k'_1\, k'_2 \ldots k'_n \text{ za } i_{k_1}\, i_{k_2} \ldots i_{k_n}.$$

Poněvadž (i) probíhá všech $n!$ permutac neodvisle od (k), platí totéž o (k') a tedy bude A součtem $n!\, n!$ členů, jež vzniknou, spojí-li se každá permutace (k) s každou permutací (k').

Ve výrazu A vyskytuje se $n!$ členů nezávislých na $x_1, x_2, \ldots x_n$, a sice jsou to členy, v nichž (k) i (k') jest jedna a táž permutace; členy ty mají součet

$$B = \sum_{(k)} (-1)^{\varkappa} b_{k_1 1}\, b_{k_2 2} \ldots b_{k_n n},$$

který nic jiného není než determinant na pravé straně rovnice (1*) stojící. Potřebujeme dokázati, že se v součtu A zbývající členové navzájem ruší. Součet

$$A - B = \sum_{(k)(k')} (-1)^{\varkappa} \frac{a_{k_1}^{(1)} - a_{k'_1}}{x_{k_1} - x_{k'_1}} \cdot \frac{a_{k_2}^{(2)} - a_{k'_2}^{(2)}}{x_{k_2} - x_{k'_2}} \cdots \frac{a_{k_n}^{(n)} - a_{k'_n}^{(n)}}{x_{k_n} - x_{k'_n}},$$

v němž permutace (k) i (k') se různí, skládá se ze součtů částečných

$$S_i = \sum_{(k)} (-1)^{\varkappa} \frac{a_{k_1}^{(1)} - a_{k'_1}^{(1)}}{x_{k_1} - x_{k'_1}} \cdot \frac{a_{k_2}^{(2)} - a_{k'_2}^{(2)}}{x_{k_2} - x_{k'_2}} \cdots \frac{a_{k_n}^{(n)} - a_{k'_n}^{(n)}}{x_{k_n} - x_{k'_n}},$$

v nichž permutace (k') jsou úplně závisly na permutacích (k), a sice vznikne (k'), podrobí-li se permutace (k) určité (od totožnosti různé) substituci či záměně i.

Každý z těchto částečných součtů S_i, jichž jest celkem $n! - 1$, rovná se nulle, jak chceme ukázati. Neboť součet tento jest determinantem

$$S_i = \begin{vmatrix} \dfrac{a_1^{(1)} - a_{i_1}^{(1)}}{x_1 - x_{i_1}}, & \dfrac{a_1^{(2)} - a_{i_1}^{(2)}}{x_1 - x_{i_1}}, & \ldots & \dfrac{a_1^{(n)} - a_{i_1}^{(n)}}{x_1 - x_{i_1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{a_n^{(1)} - a_{i_n}^{(1)}}{x_n - x_{i_n}}, & \dfrac{a_n^{(2)} - a_{i_n}^{(2)}}{x_n - x_{i_n}}, & \ldots & \dfrac{a_n^{(n)} - a_{i_n}^{(n)}}{x_n - x_{i_n}} \end{vmatrix}$$

při čemž $i_1\, i_2 \ldots i_n$ jest permutace, jež vznikne, podrobí-li se permutace základní $1, 2, 3, \ldots n$ substituci i. Nechť se nyní substitucí i, jež není identitou, převede prvek α v prvek β, tento v prvek γ, atd., až se zakončí cyklus prvkem μ. Vhodnou přeměnou pořadu řádků v determinantu S_i obdržíme

$$\pm S_i = \begin{vmatrix} \dfrac{a_\alpha^{(1)} - a_\beta^{(1)}}{x_\alpha - x_\beta}, & \dfrac{a_\alpha^{(2)} - a_\beta^{(2)}}{x_\alpha - x_\beta}, & \ldots & \dfrac{a_\alpha^{(n)} - a_\beta^{(n)}}{x_\alpha - x_\beta} \\ \dfrac{a_\beta^{(1)} - a_\gamma^{(1)}}{x_\beta - x_\gamma}, & \dfrac{a_\beta^{(2)} - a_\gamma^{(2)}}{x_\beta - x_\gamma}, & \ldots & \dfrac{a_\beta^{(n)} - a_\gamma^{(n)}}{x_\beta - x_\gamma} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{a_\mu^{(1)} - a_\alpha^{(1)}}{x_\mu - x_\alpha}, & \dfrac{a_\mu^{(2)} - a_\alpha^{(2)}}{x_\mu - x_\alpha}, & \ldots & \dfrac{a_\mu^{(n)} - a_\alpha^{(n)}}{x_\mu - x_\alpha} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

Násobíme-li napsané právě řádky veličinami (patrně od nully různými) $x_\alpha - x_\beta,\ x_\beta - x_\gamma, \ldots x_\mu - x_\alpha$, a sečteme-li výsledky, objeví se samé nully, čímž dokázána rovnice

$$S_i = 0$$

a tedy též

$$A - B = 0.$$

Tímto způsobem vynikla zároveň pravá podstata vztahu Borchardtova.

IV.

Buď

$$A = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

libovolný determinant a znamenejme

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} = \frac{\partial A}{\partial a_{\alpha\alpha'}}, \quad \begin{bmatrix} \alpha\ \beta \\ \alpha'\ \beta' \end{bmatrix} = \frac{\partial^2 A}{\partial a_{\alpha\alpha'}\ \partial a_{\beta\beta'}};$$

$$\begin{bmatrix} \alpha\ \beta\ \gamma \\ \alpha'\ \beta'\ \gamma' \end{bmatrix} = \frac{\partial^3 A}{\partial a_{\alpha\alpha'}\ \partial a_{\beta\beta'}\ \partial a_{\gamma\gamma'}}$$

atd. Pak platí známá věta

$$(1)\qquad \begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ s_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_1 \\ s_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ s_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} r_0\ r_1 \\ s_0\ s_1 \end{bmatrix}$$

i dokážeme relace následující:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1\ r_2 \\ s_1\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ s_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_2\ r_0 \\ s_1\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_2 \\ s_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_0\ r_1 \\ s_1\ s_2 \end{bmatrix} \\ &= A \begin{bmatrix} r_0\ r_1\ r_2 \\ s_0\ s_1\ s_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1\ r_2\ r_3 \\ s_1\ s_2\ s_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_1 \\ s_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_2\ r_3\ r_0 \\ s_1\ s_2\ s_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_2 \\ s_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_3\ r_0\ r_1 \\ s_1\ s_2\ s_3 \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} r_3 \\ s_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_0\ r_1\ r_2 \\ s_1\ s_2\ s_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} r_0\ r_1\ r_2\ r_3 \\ s_0\ s_1\ s_2\ s_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mnohem obecnější jest však relace

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\sum_{(k)} (-1)^{\varkappa} \begin{bmatrix} k_0\ k_1\ k_2\ \ldots\ k_i \\ s_0\ s_1\ s_2\ \ldots\ s_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{i+1}\ k_{i+2}\ \ldots\ k_m \\ s_{i+1}\ s_{i+2}\ \ldots\ s_m \end{bmatrix} \\ &= A \begin{bmatrix} r_0\ r_1\ r_2\ \ldots\ r_m \\ s_0\ s_1\ s_2\ \ldots\ s_m \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

při čemž součet na levé straně vztahuje se ke všem kombinacím $(i+1)$ní třídy $k_0\, k_1 k_2 \ldots k_i$ prvků $r_0\, r_1\, r_2 \ldots r_m$, dále značí $k_{i+1} k_{i+2} \ldots k_m$ kombinaci sestavenou z prvků zbývajících; $\varkappa$ značí počet inversí v permutaci

$$k_0\, k_1\, k_2\ \ldots\ k_i\, k_{i+1}\, k_{i+2}\ \ldots\ k_m.$$

Příklad:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\begin{bmatrix} r_0\ r_1 \\ s_0\ s_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_2\ r_3 \\ s_2\ s_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_0\ r_2 \\ s_0\ s_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1\ r_3 \\ s_2\ s_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_0\ r_3 \\ s_0\ s_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1\ r_2 \\ s_2\ s_3 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} r_1\ r_2 \\ s_0\ s_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_0\ r_3 \\ s_2\ s_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_1\ r_3 \\ s_0\ s_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_0\ r_2 \\ s_2\ s_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_2\ r_3 \\ s_0\ s_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_0\ r_1 \\ s_2\ s_3 \end{bmatrix} \\ &= A \begin{bmatrix} r_0\ r_1\ r_2\ r_3 \\ s_0\ s_1\ s_2\ s_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Relace (4) obdrží se ze známé rovnice

$$(6)\quad \begin{vmatrix} A_{r_0 s_0} & A_{r_0 s_1} & A_{r_0 s_2} & \dots & A_{r_0 s_m} \\ A_{r_1 s_0} & A_{r_1 s_1} & A_{r_1 s_2} & \dots & A_{r_1 s_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{r_m s_0} & A_{r_m s_1} & A_{r_m s_2} & \dots & A_{r_m s_m} \end{vmatrix} = A^m \begin{bmatrix} r_0\, r_1\, r_2 \dots r_m \\ s_0\, s_1\, s_2 \dots s_m \end{bmatrix},$$

v níž značí

$$A_{\alpha\beta} = \frac{\partial A}{\partial a_{\alpha\beta}},$$

způsobem velmi jednoduchým, rozvine-li se totiž determinant (6) podle věty Laplaceovy v součiny determinantů stupně $i+1$ a $m-i$. Tak se obdrží totiž nejprvé

$$\sum_{(k)} (-1)^{\varkappa} (A_{k_0 s_0} A_{k_1 s_1} \dots A_{k_i s_i}) \,.\, (A_{k_{i+1} s_{i+1}} \dots A_{k_m s_m})$$

$$= A^m \begin{bmatrix} r_0\, r_1 \dots r_m \\ s_0\, s_1 \dots s_m \end{bmatrix};$$

součet na levé straně se vztahuje ke všem kombinacím (k), totiž $k_0\, k_1 \dots k_i$ třídy $i+1$, jež lze sestaviti z prvků $r_0\, r_1 \dots r_m$, a dále značí $\varkappa$ počet inversí v permutaci

$$k_0\, k_1\, k_2 \dots k_i \mid k_{i+1}\, k_{i+2} \dots k_m,$$

jejíž druhá část jest opět kombinací; závorkové symboly mají obvyklý význam determinantů.

Vyjádříme-li nyní oba determinanty pomocí pravidla (6), a zkrátíme-li veličinou A^{m-1}, obdržíme vzorec (4).

Kdybychom rozvinuli determinant (6) podle prvků prvého sloupce, tvořivše subdeterminanty pomocí záměn cyklických, obdrželi bychom podobně relaci

$$(7)\quad \sum_{k=0}^{m} (-1)^{km} \begin{bmatrix} k_0 \\ s_0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} k_1\, k_2 \dots k_m \\ s_1\, s_2 \dots s_m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} r_0\, r_1 \dots r_m \\ s_0\, s_1 \dots s_m \end{bmatrix},$$

ve které $k_0\, k_1 \dots k_m$ značí permutaci liter $r_0\, r_1 \dots r_m$, již z této základní permutace vyvodíme záměnou cyklickou k-kráte opakovanou.

Tyto výsledky jsem r. 1891 předložil Č. Akademii, avšak odvozené způsobem mnohem složitějším; seznav však jejich bezprostřední pramen v relaci (6), potlačil jsem jich uveřejnění; podávám-li je nyní veřejnosti, netajím se nikterak s jejich skromným významem, i činím tak proto, bych je měl pohotově pro případ, že by se daly applikovati.

—