Matyáš Lerch
Zur Théorie der elliptischen Functionen

Monatsch. Math. Phys. 9 (1898), 177–183

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501516

Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Von **M. Lerch** in Freiburg (Schweiz).

Die trigonometrische Entwicklung der elliptischen Funktion zweiter Art

$$\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_0(u)}$$

wurde von Jacobi gegeben und von den Herren Hermite und Kronecker aufs neue abgeleitet. Es soll hier gezeigt werden, dass man dieselbe in ziemlich elementarer Weise mit Hilfe der charakteristischen Eigenschaften der Transcendenten ϑ_0 und ϑ_1 auf directem functionentheoretischen Wege begründen kann.

Das Problem besteht in der Auswertung der Integrale

$$A_\lambda = \int_0^1 \frac{\vartheta_1(x+v)}{\vartheta_0(x)} e^{-\lambda x\pi i} dx,$$

denn es ist

$$\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_0(u)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{2n+1} e^{(2n+1)u\pi i};$$

die Integralbestimmung gelingt aber, wenn man den Ausdruck

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\vartheta_1\left(\frac{k}{m}+v\right)}{\vartheta_0\left(\frac{k}{m}\right)} e^{-\frac{k\lambda\pi i}{m}}$$

passend umformt, und dann zur Grenze für $m=\infty$ übergeht.

1. Die Functionen $\vartheta_0(u \mid \tau)$ und $\vartheta_1(u \mid \tau)$ seien durch die unendlichen Reihen definiert

$$(1) \quad \begin{cases} \vartheta_0(u \mid \tau) = 1 - 2q\cos 2u\pi + 2q^4\cos 4u\pi - 2q^9\cos 6u\pi + \cdots, \\ \vartheta_1(u \mid \tau) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin u\pi - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3u\pi + 2q^{\frac{25}{4}}\sin 5u\pi - \cdots, \end{cases}$$

in welchen die Größe $q = e^{\tau\pi i}$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als Eins ist. Diese in Bezug auf die complexe Veränderliche u ganze transcendente Functionen haben die Periodicitätseigenschaften

$$(2) \qquad \begin{cases} \vartheta_0(u+1) = \vartheta_0(u), \ \vartheta_0(u+\tau) = -\vartheta_0(u)\, e^{-\pi i(2u+\tau)} \\ \vartheta_1(u+1) = -\vartheta_1(u), \ \vartheta_1(u+\tau) = -\vartheta_1(u)\, e^{-\pi i(2u+\tau)}, \end{cases}$$

welche sie bis auf einen von u unabhängigen Factor vollkommen charakterisieren.

Außer dieser Thatsache werden wir noch von den Beziehungen

$$\vartheta_0\left(u + \frac{\tau}{2} \,\middle|\, \tau\right) = i\, e^{-\left(u+\frac{1}{4}\tau\right)\pi i}\, \vartheta_1(u \mid \tau),$$

$$\vartheta_1\left(u + \frac{\tau}{2} \,\middle|\, \tau\right) = i\, e^{-\left(u+\frac{1}{4}\tau\right)\pi i}\, \vartheta_0(u \mid \tau),$$

sowie von dem Umstande Gebrauch machen, dass für reelle u die Function $\vartheta_0(u)$ nicht verschwindet.

Um die Nullstellen-Betrachtung möglichst wenig ins Werk zu setzen, leiten wir noch den Hilfssatz ab, dass die Ausdrücke

$$\frac{\vartheta_0(u \mid m\tau)}{\vartheta_0\left(\frac{u+\alpha}{m} \,\middle|\, \tau\right)}, \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, m-1),$$

in welchen m irgend eine positive ganze Zahl bedeutet, ganze Transcendenten sind.

Zu dem Zwecke betrachten wir das Product

$$\varphi(u) = \vartheta_0\left(\frac{u}{m} \,\middle|\, \tau\right) \vartheta_0\left(\frac{u+1}{m} \,\middle|\, \tau\right) \vartheta_0\left(\frac{u+2}{m} \,\middle|\, \tau\right) \ldots \vartheta_0\left(\frac{u+m-1}{m} \,\middle|\, \tau\right),$$

und verificieren die Gleichungen

$$\varphi(u+1) = \varphi(u), \ \varphi(u+m\tau) = -e^{-\pi i(2u+m\tau)}\, \varphi(u),$$

aus denen sich schließen lässt, dass die Function $\varphi(u)$ bis auf einen constanten Factor C mit der Function $\vartheta_0(u \mid m\tau)$ übereinstimmt, d. h.

$$\vartheta_0(u \mid m\tau) = C\varphi(u).$$

Hieraus ergeben sich die Quotienten

$$\frac{\vartheta_0(u \mid m\tau)}{\vartheta_0\left(\frac{u+\alpha}{m} \middle| \tau\right)}$$

in der Form der Producte ganzer Transcendenten, womit das Behauptete erwiesen ist.

2. Dies vorausgeschickt, betrachten wir den Ausdruck

$$F(u) = e^{u\pi i} \sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{\vartheta_1\left(\frac{u+\alpha}{m} + v \middle| \tau\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u+\alpha}{m} \middle| \tau\right)} e^{\frac{-\lambda(u+\alpha)\pi i}{m}},$$

in welchem λ eine positive oder negative ungerade ganze Zahl ist. Man findet leicht

$$F(u+1) = -F(u),\ F(u+m\tau) = e^{-\pi i(2v+\lambda\tau-m\tau)} F(u).$$

Nachher betrachten wir die Function

$$G(u) = F(u)\,\vartheta_0(u \mid m\tau),$$

welche nach dem vorher Gesagten eine ganze Transcendente ist und die Periodicitäts-Gleichungen

$$G(u+1) = -G(u),\ G(u+m\tau) = -G(u)\,e^{-\pi i(2u+2v+\lambda\tau)}$$

befriedigt, woraus man schließt, dass die Gleichung besteht

$$G(u) = A'\,\vartheta_1\left(u+v+\frac{\lambda-m}{2}\tau \middle| m\tau\right),$$

in welcher die Constante A' noch zu bestimmen bleibt. Wir benutzen jedoch die zweite der Formeln (2) und setzen die Gleichung in die Form

$$G(u) = A\,e^{u\pi i}\,\vartheta_0\left(u+v+\frac{\lambda\tau}{2} \middle| m\tau\right),$$

worin A eine neue unbekannte Constante bedeutet.

Man hat also die Relation

$$\sum_{\alpha=0}^{m-1} \frac{\vartheta_1\left(\frac{u+\alpha}{m} + v \middle| \tau\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u+\alpha}{m} \middle| \tau\right)} \vartheta_0(u \mid m\tau)\, e^{-\frac{\lambda(u+\alpha)\pi i}{m}}$$

$$= A\,\vartheta_0\left(u+v+\frac{\lambda\tau}{2} \middle| m\tau\right).$$

Um A zu berechnen, setzen wir $u = \frac{m\tau}{2} + \xi$ und gehen zur Grenze für $\xi = 0$ über. Da infolge der ersten der Gleichungen (2)

$$\vartheta_0\left(\frac{u+\alpha}{m}\,\middle|\,\tau\right) = \vartheta_0\left(\frac{\alpha}{m} + \xi + \frac{\tau}{2}\,\middle|\,\tau\right) =$$
$$= i\,e^{-\pi i\left(\frac{\alpha}{m} + \xi + \frac{1}{4}\tau\right)}\,\vartheta_1\left(\frac{\alpha}{m} + \xi\,\middle|\,\tau\right),$$

ist, so verschwindet für $\xi = 0$ nur einer der Ausdücke

$$\vartheta_0\left(\frac{u+\alpha}{m}\,\middle|\,\tau\right),$$

und zwar der erste ($\alpha = 0$). Wir erhalten somit

$$A\,\vartheta_0\left(v + \frac{\lambda\tau}{2} + \frac{m\tau}{2}\,\middle|\,m\tau\right) =$$
$$= \vartheta_1\left(v + \frac{\tau}{2}\,\middle|\,\tau\right) e^{-\frac{1}{2}\lambda\tau\pi i}\left[\frac{\vartheta_0\left(m\xi + \frac{m\tau}{2}\,\middle|\,m\tau\right)}{\vartheta_0\left(\xi + \frac{\tau}{2}\,\middle|\,\tau\right)}\right]_{\xi=0},$$

oder nach (2)

$$A\,\vartheta_1\left(v + \frac{\lambda\tau}{2}\,\middle|\,m\tau\right) = \vartheta_0(v\mid\tau)\left[\frac{\vartheta_1(m\xi\mid m\tau)}{\vartheta_1(\xi\mid\tau)}\right]_{\xi=0},$$

sodass man schließlich erhält

$$A = m\,\frac{\vartheta_0(v\mid\tau)}{\vartheta_1'(o\mid\tau)}\;\frac{\vartheta_1'(o\mid m\tau)}{\vartheta_1\left(v + \frac{\lambda\tau}{2}\,\middle|\,m\tau\right)}.$$

Setzt man dies in die obige Gleichung ein, so nimmt dieselbe folgende Form an:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\vartheta_1'(o\mid\tau)}{\vartheta_0(v\mid\tau)}\sum_{\alpha=0}^{m-1}\frac{\vartheta_1\left(\frac{u+\alpha}{m} + v\,\middle|\,\tau\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u+\alpha}{m}\,\middle|\,\tau\right)}\,e^{-\frac{\lambda(u+\alpha)\pi i}{m}} \\ &= m\,\frac{\vartheta_1'(o\mid m\tau)\,\vartheta_0\left(u + v + \frac{\lambda\tau}{2}\,\middle|\,m\tau\right)}{\vartheta_0(u\mid m\tau)\,\vartheta_1\left(v + \frac{\lambda\tau}{2}\,\middle|\,m\tau\right)}, \end{aligned}\right.$$

$$(\lambda = \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5, \ldots).$$

In dieser Gleichung setzen wir $u=0$; dies liefert

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_1'(o\mid\tau)}{\vartheta_0(v\mid\tau)}\dfrac{1}{m}\sum\limits_{\alpha=0}^{m-1}\dfrac{\vartheta_1\left(\frac{\alpha}{m}+v\,\middle|\,\tau\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\alpha}{m}\,\middle|\,\tau\right)}e^{-\frac{\lambda\alpha\pi i}{m}} \\ =\dfrac{\vartheta_1'(o\mid m\tau)\,\vartheta_0\left(u+v+\frac{\lambda\tau}{2}\,\middle|\,m\tau\right)}{\vartheta_0(u\mid m\tau)\,\vartheta_1\left(v+\frac{\lambda\tau}{2}\,\middle|\,m\tau\right)}, \end{cases}$$

und wenn man hier zur Grenze für $m=\infty$ übergeht, so verwandelt sich die linke Seite in ein bestimmtes Integral, die rechte Seite geht dagegen in den einfachen Ausdruck

$$\frac{\pi}{\sin\pi\left(v+\frac{\lambda\tau}{2}\right)}$$

über; man hat somit die Formel

$$(5)\quad \frac{\vartheta_1'(o)}{\vartheta_1(v)}\int_0^1\frac{\vartheta_1(x+v)}{\vartheta_0(x)}e^{-\lambda x\pi i}\,dx=\frac{\pi}{\sin\pi\left(v+\frac{\lambda\tau}{2}\right)},$$

$$(\lambda=\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ldots)$$

welche die Aufgabe löst. Damit ist die Relation

$$(6)\quad \frac{\vartheta_1'(o)\,\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_0(u)\,\vartheta_0(v)}=\pi\sum_\lambda\frac{e^{\lambda u\pi i}}{\sin\pi\left(v+\frac{\lambda\tau}{2}\right)},$$

$$(\lambda=\pm 1,\pm 3,\pm 5,\ldots),$$

in neuer directer Weise abgeleitet.

Wenn man hier die rechte Seite wie folgt schreibt

$$2\pi i\sum\frac{e^{\lambda u\pi i}}{e^{\pi i\left(v+\frac{\lambda\tau}{2}\right)}-e^{-\pi i\left(v+\frac{\lambda\tau}{2}\right)}},$$

oder indem man die Reihe nach dem Vorzeichen von λ in zwei Theile spaltet,

$$2\pi i \sum \frac{e^{\mu u \pi i}}{e^{\pi i\left(v+\frac{\mu\tau}{2}\right)} - e^{-\pi i\left(v+\frac{\mu\tau}{2}\right)}} + 2\pi i \sum \frac{e^{-\mu u \pi i}}{e^{\pi i\left(v-\frac{\mu\tau}{2}\right)} - e^{-\pi i\left(v-\frac{\mu\tau}{3}\right)}}$$

$$(\mu = 1, 3, 5, 7, \ldots)$$

so kann man die einzelnen Glieder wieder entwickeln. Es ist

$$\frac{e^{\mu u \pi i}}{e^{\pi i\left(v+\frac{\mu\tau}{2}\right)} - e^{-\pi i\left(v+\frac{\mu\tau}{2}\right)}} = -\sum_{\nu} e^{(\mu u + \nu v)\pi i + \frac{1}{2}\mu\nu\tau\pi i},$$

$$\frac{e^{-\mu u \pi i}}{e^{\pi i\left(v-\frac{\mu\tau}{2}\right)} - e^{-\pi i\left(v-\frac{\mu\tau}{2}\right)}} = \sum_{\nu} e^{-(\mu u + \nu v)\pi i + \frac{1}{2}\mu\nu\tau\pi i},$$

$$(\nu = 1, 3, 5, \ldots),$$

und durch Einsetzen dieser Entwickelungen erhält die Gleichung (6) die Form

$$\frac{\vartheta_1'(o)\,\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_0(u)\,\vartheta_0(v)} = -2\pi i \sum_{\mu,\nu} q^{\frac{1}{2}\mu\nu}\left(e^{(\mu u+\nu v)\pi i} - e^{-(\mu u+\nu v)\pi i}\right)$$

oder auch

$$(6^*)\qquad \frac{\vartheta_1'(o)\,\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_0(u)\,\vartheta_0(v)} = 4\pi \sum_{\mu,\nu} q^{\frac{1}{2}\mu\nu} \sin\pi(\mu u + \nu v),$$

$$(\mu, \nu = 1, 3, 5, 7, \ldots).$$

Die Gleichung (3) repräsentiert (für $\lambda = 1, 3, 5, \ldots, 2m-1$) m Relationen, die von einander unabhängig sind, da die Determinante

$$\left| e^{-\frac{\lambda\alpha\pi i}{m}} \right| \quad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \\ \lambda = 1, 3, 5, \ldots, 2m-1 \end{pmatrix}$$

nicht Null ist.

Als eine Anwendung der Formel (6*) möge hier folgende Rechnung Platz finden. Wir differentieren beiderseits nach v und setzen $v = -u$; so ergibt sich zunächst

$$\left(\frac{\vartheta_1'(o)}{\vartheta_0(u)}\right)^2 = 4\pi^2 \sum_{\mu,\nu} \nu q^{\frac{1}{2}\mu\nu} \cos\pi u(\mu - \nu).$$

Hier ziehen sich die Glieder $\mu > \nu$ mit den Gliedern $\mu < \nu$ paarweise zusammen, und zwar erhält man für den Coefficienten von $\cos 2nu\pi$ den Ausdruck

$$\sum_{\nu} \nu q^{\frac{1}{2}\nu(\nu+2n)} + \sum_{\mu} (\mu + 2n)\, q^{\frac{1}{2}\mu(\mu+2n)} = 2 \sum_{\mu} (\mu + n)\, q^{\frac{1}{2}\mu(\mu+2n)}$$

$$(\mu = 1, 3, 5, 7, \ldots)$$

sodass das Resultat die Form annimmt

$$\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\vartheta_1'(o)}{\vartheta_0(u)}\right)^2 = \sum_{\mu} \mu\, q^{\frac{1}{2}\mu^2} + 2 \sum_{\mu, n} (\mu + n)\, q^{\frac{1}{2}\mu(\mu+2n)} \cos 2nu\pi$$

$$\begin{pmatrix} \mu = 1, 3, 5, 7, \ldots \\ n = 1, 2, 3, 4, \ldots \end{pmatrix}.$$