Matyáš Lerch
Contributions á la théorie des fonctions

Zprávy Král. Čes. spol. nauk, II. tř., 1886, 571–582

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501511

Contributions à la théorie des fonctions.

Par M. Lerch. Lu dans la séance du 15. octobre 1886.

Dans le tome 79 du *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Mr. *Du Bois-Reymond* a publié l'extrait d'une lettre de mon illustre maître Mr. *Weierstrass* se rapportant à une remarquable série trigonométrique qui représente une fonction continue d'une variable réelle,*) fonction qui n'a point de dérivée déterminée quelle que soit la valeur de la variable.

Dans ce qui suit je donne deux fonctions bien simples jouissant de la propriété de n'avoir pas une dérivée déterminée pour certaines valeurs de la variable qui se présentent dans chaque intervalle en nombre infini, propriété analogue à celle dont jouissent les fonctions construites par *Hankel***) au moyen de son *principe de condensation des singularités*, et j'y ajoute la démonstration d'une propriété des transcendantes elliptiques et de quelques autres.

1. La première fonction, dont je vais m'occuper, est donnée par la série

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos 2^n \pi x}{2^n}, \tag{1}$$

convergente pour toutes les valeurs réelles de x. Je démontre d'abord que cette fonction n'a pas une dérivée déterminée pour $x=0$, c'est à dire que le quotient $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ ne se rapproche d'aucune limite déterminée, si l'on y fait x décroître indéfiniment.

Car on a

$$-\frac{f(x)-f(0)}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-\cos 2^n \pi x}{x} \tag{2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^2 2^{n-1}\pi x}{2^{n-1}x}.$$

---

*) Cette fonction a été l'objet d'une recherche géométrique et analytique de Mr. *Chr. Wiener* dans le même Journal t. 90.

La lettre de Mr. *Weierstrass* se trouve aussi dans son excellent livre *Abhandlungen aus der Functionenlehre*, p. 97.

**) V. les Mathematische Annalen, t. 20, p. 63.

Si l'on y pose $x = x_1 = \frac{k}{2^\alpha}$, k et α étant deux entiers, le premier quelconque, le second positif, on a évidemment:

$$(3) \qquad -\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1} = \sum_{n=0}^{\alpha} \frac{\sin^2 2^{n-\alpha-1} k\pi}{2^{n-\alpha-1}k}$$

$$= \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{\alpha+1} 2^m \sin^2 \frac{\pi k}{2^m}.$$

Laissons k constant et faisons α croître indéfiniment, alors nous aurons $\lim\limits_{\alpha=\infty} x_1 = 0$ et de plus

$$(4) \qquad -\lim_{x_1=0}\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1} = \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{\infty} 2^m \sin^2 \frac{\pi k}{2^m}.$$

Le second membre est évidemment fini, différent de zéro et du même signe que k, c'est à dire du même signe que x_1 de sorte que les deux limites

$$\lim_{x_1=0}\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1}, \quad \lim\frac{f(-x_1)-f(0)}{-x_1}$$

sont différentes de zéro et de signes contraires. Il en résulte que la dérivée $\lim\limits_{x=0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ n'existe pas, c. qu. f. d.

2. Maintenant je démontre que la fonction (1) n'a pas de dérivée, si la variable x prend une valeur de la forme $\frac{a}{2^q}$, a et q étant deux nombres entiers quelconques. Car on trouve facilement:

$$f\left(\frac{a}{2^q}\right) = \sum_{n=0}^{q}\frac{\cos 2^{n-q} a\pi}{2^n} + \sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{2^n},$$

$$f\left(\frac{a}{2^q}+h\right) = \sum_{n=0}^{q}\frac{\cos\,(2^{n-q}a + 2^n h)\pi}{2^n}$$

$$+\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{\cos 2^n h\pi}{2^n},$$

de sorte que l'on obtient:

$$\frac{f\left(\frac{a}{2^q}+h\right)-f\left(\frac{a}{2^q}\right)}{h}=\sum_{n=0}^{q}\frac{\cos\,(2^{n-q}\,a+2^n h)\,\pi x-\cos 2^{n-q}\,a\pi x}{2^n h}$$
$$+\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{\cos 2^n h\pi x-1}{2^n h}.$$

Si h s'approche indéfiniment de zéro, la première somme a une limite déterminée et finie que je crois inutile d'écrire, et la seconde ne s'approche d'aucune limite indépendente du signe de h, d'après ce que nous avons dit plus haut, d'où il s'ensuit que pour $x=\frac{a}{2^q}$ la dérivée $\frac{df(x)}{dx}$ n'existe point.

Il ne nous reste que de remarquer que les points représentant les valeurs de la forme $x=\frac{a}{2^q}$ se trouvent dans chaque intervalle fini un nombre infini de fois.

3. Prenons maintenant la série

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n!\,\pi x}{n!} \tag{5}$$

convergente pour toutes les valeurs réelles de x et formons le quotient

$$\frac{f(0)-f(x)}{x}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{2}n!\,\pi x}{n!\,x}.$$

Si l'on pose $x_1=\frac{k}{\alpha!}$, k et α étant deux nombres entiers impairs, le premier quelconque, le second positif, on trouve:

$$\frac{f(0)-f(x_1)}{x_1}=2\sum_{n=0}^{\alpha}\frac{\sin^2\frac{n!}{\alpha!}\cdot\frac{k\pi}{2}}{\frac{n!}{\alpha!}k}$$
$$=\frac{2}{k}+2\sum_{n=0}^{\alpha-1}\frac{\sin^2\frac{n!}{\alpha!}\cdot\frac{k\pi}{2}}{\frac{n!}{\alpha!}k}.$$

La dernière somme est positive et plus petite que la suivante:*)

$$\sum_{n=0}^{\alpha-1} \frac{\left(\frac{n!}{\alpha!}\frac{k\pi}{2}\right)^2}{\frac{n!}{\alpha!}|k|} = \frac{1}{4}|k|\pi^2 \sum_{n=0}^{\alpha-1}\frac{n!}{\alpha!}$$

$$= \frac{1}{4}|k|\pi^2\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} + \frac{1}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)} + \cdots + \frac{1}{\alpha(\alpha-1)\ldots 2}\right)$$

et celle-ci est inférieure à la quantité que l'on obtient en remplaçant les fractions $\frac{1}{\alpha(\alpha-1)}$, $\frac{1}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2}$, etc. qui sont au nombre de $\alpha-1$ par la plus grande d'entre elles, de sorte que la somme considérée est moindre que la quantité

$$\frac{1}{4}|k|\pi^2\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha(\alpha-1)}\right) = \frac{1}{2\alpha}|k|\pi^2$$

qui devient infiment petite si l'on fait α croître au-delà de toute limite.

Il en suit la formule

$$\lim_{x_1=0}\frac{f(0)-f(x_1)}{x_1} = \frac{2}{k},$$

d'où il résulte que la quantité $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ ne s'approche d'aucune limite déterminée quand x devient infiniment petit.

4. Mettons dans la série (5) pour x la valeur $x_0 = \frac{a}{q!}$; nous aurons

$$f(x_0) = \sum_{n=0}^{q_0}\frac{\cos\frac{n!\,a\pi}{q!}}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{1}{n!},$$

q_0 désignant ou q ou $q+1$ suivant que q est impair ou non; on aura de plus

*) Nous désignons par $|k|$ la valeur absolue de k.

$$f(x_0+h)=\sum_{n=0}^{q_0}\frac{\cos\left(\frac{n!a}{q!}+n!h\right)\pi}{n!}+\sum_{n=q_0+1}^{\infty}\frac{\cos n!\pi h}{n!},$$

d'où l'on calcule

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\sum_{n=0}^{q_0}\frac{\cos\left(\frac{n!a}{q!}+n!h\right)\pi-\cos\frac{n!a\pi}{q!}}{n!h}$$

$$+\sum_{n=q_0+1}^{\infty}\frac{\cos n!\pi h-1}{n!}.$$

Quand on fait h décroître indéfiniment, la première somme s'approche d'une limite finie et déterminée tandis que la seconde devient indéterminée comme nous l'avons vu auparavant, de sorte que la fonction $f(x)$ donnée par la série (5) n'a jamais une dérivée, si l'on prend pour x une valeur de la forme $\frac{a}{q!}$, a et q étant deux nombres entiers impairs. On voit que l'ensemble des points correspondants aux valeurs de cette forme est condensé dans tout l'intervalle.

5. De ce que nous avons démontré sur les séries (1) et (5) il résulte immédiatement que les deux fonctions analytiques suivantes

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{2^n}=z+z^2+z^4+z^8+z^{16}+z^{32}+\ldots.,$$

$$\Psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n!}=z+z^{1.2}+z^{1.2.3}+z^{1.2.3.4}+\ldots.$$

n'existent que pour les valeurs réelles ou imaginaires de z d'un module inférieur à l'unité, c'est à dire représentées par les points à l'intérieur du cercle fondamental dont l'équation est $|z|=1$, et que ces fonctions ne peuvent pas être continuées en dehors de ce cercle.

Des fonctions de la même nature se rencontrent dans la théorie des fonctions elliptiques.

La série fondamentale de *Jacobi*

$$(1)\qquad \vartheta_{00}(u|\tau)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}e^{\pi i(\nu^2\tau+2\nu u)}=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}q^{\nu^2}e^{2\nu u\pi i},\quad q=e^{\tau\pi i},$$

n'est convergente que si le module de q est moindre que l'unité quelque soit la valeur de u.

Je dis que si l'on prend pour u une valeur fixe, la série (1) devient une fonction de q ne pouvant pas être continuée au delà du cercle fondamental $|q| \leqq 1$.

Prenons d'abord pour u une valeur essentiellement imaginaire; la fonction (1) s'annule pour toutes les valeurs de τ pour lesquelles on peut déterminer deux nombres entiers m, n tels que

$$u = \frac{1}{2}(1+\tau) + m + n\tau,$$

c'est à dire pour toutes les valeurs de τ de la forme

$$\tau = \frac{2u - (2m+1)}{2n+1},$$

où l'entier n est assujetti à la condition de rendre positive la partie imaginaire de τ. Mais les points représentant ces valeurs sont distribués dans le demiplan positif (correspondant aux valeurs dont la partie imaginaire est positive) de telle manière que chaque cercle ayant son centre sur l'axe réel en contient une infinité, de sorte que chaque point de l'axe réel est un point-limite de l'ensemble constitué par ces points. Donc l'axe réel est une ligne singulière de la fonction $\vartheta_{00}(u|\tau)$ considérée par rapport à la variable τ, ou ce qui est le même, la circonférence du cercle fondamental est une ligne singulière de la fonction $\vartheta_{00}(u|\tau) = \vartheta_{00}(u, q)$ considérée par rapport à la variable q, de sorte que cette fonction ne peut pas être continuée en dehors dudit cercle, c. qu. f. d.

Le raisonnement précédent n'est pas appliquable dans le cas où la valeur fixe de u est réelle.

Posons $u = (\alpha + \beta\tau)u_1$, $\tau_1 = \dfrac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}$, α, β, γ, δ étant des nombres entiers satisfaisant à la condition

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

et nous aurons, comme on sait,*) la formule

*) Une démonstration remarquable de cette formule a été donnée par mon illustre maître Mr. *Kronecker* dans les Monatsberichte de Berlin, 1880: „Ueber den vierten Gauss'schen Beweis etc."

$$(2)\qquad \vartheta_{00}(u_1|\tau_1) = \varepsilon\, e^{\pi i\beta u u_1}\sqrt{\alpha+\beta\tau}\,\vartheta_{1+\beta+\delta,\,1-\alpha-\gamma}(u|\tau),$$

dans laquelle ε désigne une racine huitième de l'unité.

Si l'on fait $\tau = vi$ en prenant pour u_1 une valeur réelle constante différente de zéro, et si l'on fait la variable réelle v croître au-delà de toute limite, la partie réelle de la quantité

$$\pi i\beta u u_1 = \pi\beta(\alpha i - \beta v)\, u_1^2$$

deviendra négative et infinie, de sorte que la quantité

$$\varepsilon e^{\pi i\beta u u_1}\sqrt{\alpha+\beta\tau} = \varepsilon e^{\pi\beta(\alpha i-\beta v)\,u_1^2}\sqrt{\alpha+\beta vi}$$

deviendra infiniment petite, et il ne nous reste que de rechercher le second facteur dans le second membre de l'équation (2). En écrivant pour abréger $1+\beta+\delta = g$, $1-\alpha-\gamma = h$, nous aurons par définition

$$\vartheta_{g,h}(u|\tau) = (-1)^{gh}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\pi i[(\nu+\frac{1}{2}g)^2\tau + 2(\nu+\frac{1}{2}g)(u+\frac{1}{2}h)]}$$

et si l'on y remplace τ par vi, et u par $(\alpha+\beta vi)u_1$, chaque terme dépendant de τ deviendra infiniment petit, de sorte que cette quantité s'approche ou de zéro ou de l'unité suivant que g est impair ou non. Ainsi la quantité (2) devient infiment petite pour $v = \infty$, c'est à dire

$$\lim_{v=\infty}\vartheta_{00}\left(u_1\,\middle|\,\frac{\gamma+\delta vi}{\alpha+\beta vi}\right) = 0.$$

Cette formule exprime que si la variable τ_1 s'approche indéfiniment d'une valeur rationnelle quelconque $\dfrac{\delta}{\beta}$ en restant toujours sur une circonférence ayant son centre sur l'axe réel, la fonction $\vartheta_{00}(u_1|\tau_1)$, où l'on a donné à u_1 une valeur réelle constante, devient infiniment petite, de sorte que l'axe réel est une ligne singulière de cette fonction, en exceptant le cas où celle-ci est identiquement nulle.

Il reste encore à examiner le cas où l'on a $u_1 = 0$.

Dans ce cas la formule (2) nous donne

$$\vartheta_{00}\left(0\,\middle|\,\frac{\gamma+\delta vi}{\alpha+\beta vi}\right) = \varepsilon\sqrt{\alpha+\beta vi}\,\vartheta_{1+\beta+\delta,\,1-\alpha-\gamma}(0|vi)$$

de sorte qu'on aura d'après la formule (3):

$$\vartheta_{00}\left(0\left|\frac{\gamma+\delta v i}{\alpha+\beta v i}\right.\right)=\varepsilon(-1)^{gh}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}e^{-\pi v(\nu+\frac{1}{2}g)^2}\sqrt{\alpha+\beta v i};$$

alors si g est pair, le second membre se décompose en un terme infiniment croissant avec v et en une série des termes infiments petits, et devient par conséquent infiniment grand. Si, au contraire, le nombre g est impair, tous les termes deviendront infiniment petits ainsi que la série elle-même. Il en résulte que si la variable τ_1 s'approche indéfiniment d'une valeur rationnelle quelconque $\frac{\delta}{\beta}$ en restant toujours sur une certaine circonférence ayant son centre sur l'axe réel, la fonction $\vartheta_{00}(o\,|\,\tau_1)$ deviendra ou infiniment petite ou infiniment grande suivant que la somme $\delta+\beta$ est paire ou non, c'est à dire si le numérateur et le dénominateur de la fraction réduite $\frac{\delta}{\beta}$ sont tous les deux impairs ou non,*) d'où il suit que l'axe réel est une ligne singulière de la fonction considérée, c. qu. f. d.

Remarquons encore que la même chose peut être démontrée des trois autres fonctions de Jacobi ϑ_{01}, ϑ_{10}, ϑ_{11}.

6. La fonction $\vartheta_{00}(u\,|\,\tau)$ pouvant s'exprimer par le produit

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}\xi^2)(1+q^{2n-1}\xi^{-2}),$$

où l'on a écrit $\xi=e^{\tau\pi i}$, n'est qu'un élément d'une classe trés-étendue des fonctions n'existant qu'à l'interieur du cercle fondamental et pouvant s'exprimer en produit de la forme

$$\prod_{n-1}^{\infty}(1-q^{\alpha_n}\xi),$$

α_1, α_2, α_3, ... désignant des nombres entiers positifs parmi lesquels il ne se trouve qu'un nombre limité qui sont égaux entre eux. Ce produit est convergent pour toutes les valeurs de q d'un module in-

*) Une démonstration semblable se trouve chez Mr. *Weierstrass* à la page 95 de son oeuvre cité plus haut. Une autre démonstration de ce fait est contenue dans une formule découverte par *Cauchy* (v. *Kronecker* l. c.).

férieur à l'unité et définit une fonction de cette variable que nous désignerons par $\varphi(q, \xi)$. Si la valeur de ξ est supérieure à l'unité, la fonction $\varphi(q, \xi)$ devient zéro pour toutes les valeurs de q de la forme :

$$q = \left(\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{1}{\alpha_n}},$$

valeurs qui sont représentées par des points placés à l'intérieur du cercle fondamental et constituant un ensemble infini dont les points-limites remplissent toute la circonférence dudit cercle, d'où il résulte que la fonction $\varphi(q, \xi)$ ne peut pas être continuée audelà de ce cercle, si le module de ξ est supérieur à l'unité.

Telle est par exemple la fontion

$$\varphi(q, \xi) = (1 + q\xi)(1 + q^2\xi)(1 + q^4\xi)(1 + q^8\xi)\ldots(1 + q^{2^n}\xi)\ldots;$$

mais on en ne peut point conclure que la fonction jouisse de la même propriété singulière pour $\xi = 1$. Car on a ici

$$\varphi(q, 1) = \frac{1}{1-q},$$

fonction existant pour toutes les valeurs de q.

Le développement de cette fonction $\varphi(q, \xi)$ suivant les puissances croissantes de q est donné par la formule

$$\varphi(q, \xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \xi^{a_\nu} q^\nu, \quad a_0 = 0,$$

a_ν désignant le nombre des termes de l'expression

$$\nu = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \ldots + 2^{\nu_m}$$
$$(m = a_\nu;\ 0 \leqq \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_m).$$

Pour $\nu = 13$ on a par exemple: $\nu = 1 + 4 + 8$ donc $a_{13} = 3$.

D'autres fonctions possédant la propriété qui nous occupe sont fournies par les produits de la forme plus générale:

$$\Phi(q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{\alpha_n} c_n).$$

Pour $a_n = n^2$, $c_n = a^n$, a étant une quantité de module supérieur à l'unité, cette formule nous donne la fonction

$$\psi(q, a) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n^2} a^n)$$

qui devient zéro pour toutes les valeurs contenue dans la formule

$$q = \sqrt[n^2]{\frac{1}{a^n}} = a^{-\frac{1}{n}},$$

valeurs qui se présentent dans chaque environ de tous les points de la circonférence $|q| = 1$, de sorte que cette ligne-ci est une ligne singulière de la fonction considérée.

7. La circonférence du cercle fondamental est une ligne singulière ou une coupure essentielle des fonctions envisagées. C'est une coupure essentielle puisque la fonction perd son caractère analytique pour tous ses points, et ces coupures sont d'une nature bien-différente de celles de *Riemann* et de celles qui ont été explicitement introduites par Mr. *Hermite* dans une lettre à Mr. *Mittag-Leffler*. À la catégorie des expressions à coupure de Mr. *Hermite* (coupures de représentation ou de convergence) appartiennent toutes les expressions qui, dans diverses parties du plan, représentent des fonctions différentes. Quand il s'agit d'une variable réelle, des expressions de cette espèce sont données par le théorème de *Fourier*, tandis que pour la variable imaginaire c'est *Gauss* qui en a donné le premier exemple. Mais parmi ces expressions les plus remarquables sont celles qui se présentent sous la forme d'une série infinie dont les termes sont les fonctions rationnelles de la variable considérée, expressions dont il se trouve des exemples déjà dans le célèbre Traité de calcul différentiel de Mr. *Bertrand* parmi les exercices à la page 359 (nos. 3. et 9.). Il me semble que ces séries de Mr. *Bertrand* sont d'un origine semblable à celui que les expressions que j'ai données dans un petit mémoire intitulé *Remarques sur quelques points de la théorie élémentaire des fonctions* imprimé dans les Comptes rendus de la Société royale des Sciences de Bohême pour l'année 1885.

Dans le même mémoire j'ai donné le développement de la fonction

$$a = \frac{1}{2}(-t \pm \sqrt{t^2 + 4})$$

par la série (paragraphe III, formule (3))

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{P_n(t)\,P_{n+1}(t)}\,;$$

$$P_n(t) = t^n + \binom{n-1}{1} t^{n-2} + \ldots + \binom{n-\nu}{\nu} t^{n-2\nu} + \ldots,$$

où les parenthèses $\binom{n-\nu}{\nu}$ désignent les coëfficients binomiaux. Chaque terme de cette série devient infini pour certaines valeurs représentées par des points du segment de droite $(-2i \ldots . + 2i)$, et l'ensemble des points qui sont les infinis des différents termes de cette série est condensé dant tout l'intervalle de la coupure $(-2i \ldots . + 2i)$, quoique la fonction représentée par la série a pour tous les points à l'intérieur de cette coupure une valeur finie et bien déterminée, et y possède un caractère partout régulier. On en doit conclure que la divergence d'une expression représentant une fonction n'exige rien de singulier relatif à cette fonction, celle-ci pouvant exister aussi pour les valeurs de la variable appartenant à la région de divergence de l'expression qui la représente.

C'est une circonstance qui exige la correction d'un théorème que Mr. *Goursat* avait inséré dans les Comptes Rendus t. 94, page 716.

Mr. *Goursat* considère l'expression bien générale

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{1 - \dfrac{x}{a_\nu}},$$

où les modules des quantités c_ν doivent avoir une somme finie, et les a_ν sont quelconques.

En appelant A une région simplement connexe ne contenant à son intérieur aucun point de la série

(1) $$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,$$

Mr. *Goursat* énonce le théorème suivant:

„Soit x_0 un point de l'aire A, et R le rayon du plus grand cercle qui, ayant pour centre le point x_0, ne contient à son intérieur aucun point de la série (1); si ce cercle contient sur son contour un seul point appartenant à la série (1), il est *précisément le cercle* *de convergence* de la série $P(x-x_0)^u$ qui doit représenter la fonction $F(x)$.

Mais dans le cas où l'ensemble des points (a_ν) est condensé dans tout l'intervalle d'un arc de courbe il peut se faire que le cercle de convergence de la série de Taylor $P(x-x_0)$ représentant la fonction $F(x)$ est plus grand que celui qui a été signalé par Mr. *Goursat.*

De plus, l'éminent géomètre considère une région T ne contenant à son intérieur des points a_ν, région limitée par des arcs de courbe qui contiennent dans chaque voisinage detous leurs points une infinité des points a_ν. Je dis qu'il n'en résulte point que la fonction $F(x)$ n'existerait qu'à l'intérieur de l'aire T.

Mais si l'on veut construire des fonctions ne pouvant pas être continuées en dehors de la région T, on peut supposer que celle-ci contient une infinité des points a_ν et que l'ensemble des points-limites de l'ensemble (a_ν) est identique avec la périphérie de T. La fonction $F(x)$ ayant à l'intérieur de T une infinité des pôles qui s'approchent indéfiniment de tous les points de la périphérie de T a celle-ci pour ligne singulière et ne peut pas être continuée au de là de la dite région.

Je termine en remarquant que les séries trigonométriques (1) et (5) considérées plus haut ne sont que des cas particuliers d'une série trigonométrique très-générale possédant la même propriété, et qu'en spécialisant cette série on peut construire une infinité de séries trigonométriques qui n'ont jamais une dérivé quelque soit la valeur de la variable, séries parmi lesquelles se trouve celle de Mr. *Weierstrass* et la suivante

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{u^\nu}{1.3.5\ldots(2\nu+1)} \cos[1.3.5\ldots(2\nu+1)\pi x],$$

u désignant une quantité positive supérieure à l'unité, comme j'espère de l'établir prochainement.

Prague, octobre 1886.