Lerch, Matyáš: Scholarly works

Matyáš Lerch

O počtu tříd kvadratických forem záporného diskriminantu

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 7 (1898), č. 4, 1–16

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501509

Terms of use:

© Akademie věd ČR, 1898

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

O počtu tříd kvadratických forem záporného diskriminantu.

Sdílí

M. Lerch,
professor na universitě ve Fribourgu švýcarském.

(Předloženo 18. prosince 1897.)

---

1. Výraz $ax^2+bxy+cy^2$, v němž x, y značí proměnné, a, b, c pak čísla celistvá, sluje kvadratickou formou proměnných x, y. Theorie čísel obírá se hlavně vlastnostmi součinitelů a, b, c, které formu úplně definují; k vůli stručnosti znamená se forma ta též jednoduše takto (a, b, c).

Výraz b^2-4ac nazývá se diskriminantem formy a, b, c; chceme uvažovati formy, jichž diskriminant je číslo záporné $-\Delta$, takže $\Delta=4ac-b^2$.

Podrobíme-li proměnné x, y linearné substituci, jejíž koëfficienty jsou čísla celistvá a determinant kladná jednotka

$$x=\alpha x'+\beta y',\quad y=\gamma x'+\delta y',\quad \alpha\delta-\beta\gamma=1,$$

vznikne z (a, b, c) forma nová $a'x'^2+b'x'y'+c'y'^2$; formy (a, b, c) a (a', b', c') takto spolu související slují rovnomocnými (ekvivalentní). Poněvadž formy s určitou formou rovnomocné jsou také vespolek rovnomocny, shrnujeme veškery kvadratické formy vespolek rovnomocné v určitou *třídu* forem kvadratických.

Formy téže třídy mají stejný diskriminant; naopak ale dvě formy téhož diskriminantu mohou náležeti třídám různým. Tu však dokázána věta, že počet tříd kvadratických forem příslušných k danému diskriminantu jest konečný. V následujícím se omezujeme na formy záporného diskriminantu $-\Delta$, i znamenati chceme literou $F(\Delta)$ počet tříd oněch forem, ve kterých součinitelé a a c jsou kladná čísla; formy ty slují kladné. Třídy ostatní jsou ve stejném počtu a jejich formy se obdrží z řečených forem obrácením znamení všech tří součinitelů.

Kladná forma (a, b, c) záporného diskriminantu nazývá se **redukovanou**, jestliže součinitelé její hoví následujícím podmínkám

$$|b| \leqq a \leqq c.$$

Vypočteme-li z rovnice

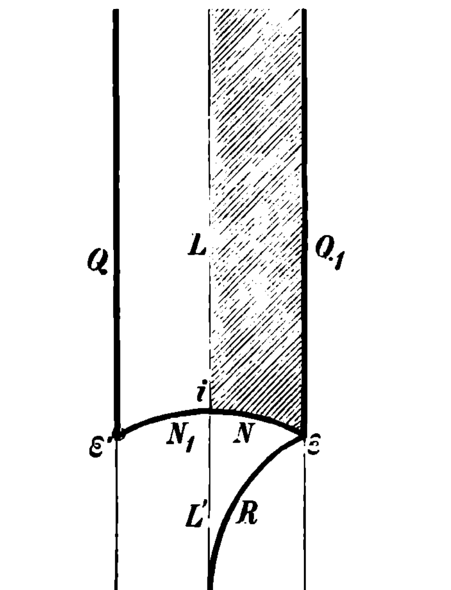
$$a x^2 + b x y + c y^2 = 0$$

poměr $\frac{x}{y} = \omega$, obdržíme dvě veličiny, z nichž jedna má pomyslnou část kladnou, t. j.

$$\omega = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a};$$

tu nazývati budeme **kořenem** formy (a, b, c).

Při daném diskriminantu přísluší naopak k danému číslu ω nanejvýš jedna soustava koëfficientů (a, b, c); následkem toho bod, který v rovině komplexní proměnné ω representuje kořen ω, representuje také jednoznačně kladnou formu (a, b, c) známého diskriminantu. Je-li forma (a, b, c) redukovanou, bude veličina $\omega = \xi + i\eta$ patrně toho tvaru, že platí podmínky



Obr. 1.

$$|\xi| \leqq \tfrac{1}{2}, \ \xi^2 + \eta^2 \geqq 1;$$

to znamená, že kořen redukované formy znázorněn jest bodem náležejícím obrazci $Q N_1 N Q_1$ (obr. 1) omezenému kruhovým obloukem $N_1 N$ opsaným poloměrem jedna kol nullového bodu roviny (ω), dále přímkami Q a Q_1 probíhajícími souběžně s kladnou osou pomyslnou od oblouku $N_1 N$ do nekonečna, kteréžto přímky ve svém prodloužení obsahují body

$$\omega = -\tfrac{1}{2}, \text{ resp. } \omega = \tfrac{1}{2}.$$

Je tedy uvažovaný obrazec $Q N_1 N Q_1$ křivočarý trojúhelník, jehož vrcholy jsou body $\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$, $\varepsilon' = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ a ∞i.

My rozdělíme ještě oblouk $N_1 N$ ve dvě části N_1 a N bodem i, takže náš obrazec bude čtyřúhelníkem křivočarým o vrcholech i, ε, ε', ∞i; nazveme jej základním čtyřúhelníkem.

Kořeny redukovaných forem kvadratických jsou tedy obsaženy v základním čtyřúhelníku (v obrazci 1. je pravá polovice toho čtyřúhelníka stínována).

Substitucí

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y', \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

přejde kořen $\omega = \frac{x}{y}$ v kořen $\omega' = \frac{x'}{y'}$ formy rovnomocné (a', b', c'); sice jest

$$\omega = \frac{\alpha\omega' + \beta}{\gamma\omega' + \delta};$$

naopak se odtud vypočte

$$\omega' = \frac{\alpha'\omega + \beta'}{\gamma'\omega + \delta'}, \quad (\alpha' = -\delta, \ \beta' = \beta, \ \gamma' = \gamma, \ \delta' = -\alpha)$$

kde opět

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1.$$

Probíhá-li ω čtyřúhelník základní, proběhne veličina ω' jiný čtyřúhelník v severní polovici roviny ω položený; ten pak úplně charakterisuje substituci

$$\begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \gamma\delta \end{pmatrix}.$$

Veškerým linearným substitucím odpovídají takto křivočaré čtyřúhelníky, které podél svých stran se pojí jeden ke druhému a zaplní jednoduše a bez mezer celou severní polovici roviny (ω).

Levá polovice našeho čtyřúhelníka t. j. obrazec QN_1L přetvoří se substitucí $\omega' = \frac{-1}{\omega}$ v křivočarý trojúhelník $L'RN$, jehož vrcholy jsou 0, i, ε, a jehož strana R je oblouk kruhový o středu 1. Trojúhelník tento připojen k pravé polovici obrazce základního LNQ_1 doplní jej na čtyřúhelník $LL'RQ_1$ o vrcholech i, 0, ε, ∞i, který možno taktéž považovati za základní čtyřúhelník, i možno na jeho základě zavésti jiný způsob redukce forem.

Nazveme-li v souhlasu se zavedeným názvoslovím dvě veličiny ω, ω' rovnomocnými, které vespolek souvisejí rovnicí tvaru

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \ (\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ celistvá čísla, } \alpha\delta - \gamma\beta = 1),$$

rovnomocnými, pak platí věta, že každý bod v severní polovici roviny (ω) jest rovnomocný s jedním bodem základního čtyřúhelníka, jenž sluje jeho repraesentantem (zástupcem). Rovněž má každý bod ve kterémkoli výše zmíněných čtyřúhelníků svého zástupce.

S tím souvisí okolnost, že každá kvadratická forma záporného diskriminantu je rovnomocnou s jednou formou redukovanou. Dvě formy redukované jsou vespolek rovnomocny jen tehdy, náležejí-li jejich kořenů zástupci obvodu čtyřúhelníka $Q N_1 N Q_1$. Neboť body na obvodě tohoto obrazce jsou po dvou rovnomocny, kdežto každé dva body uvnitř něho ležící jsou vespolek i s body na obvodě různomocny. A sice odpovídají body strany Q_1 bodům na Q vztahem $\omega' = \omega + 1$, kdežto body stran N a N_1 spolu souvisejí podle substituce $\omega' = \frac{-1}{\omega}$.

Body strany Q lze ještě odstraniti tím, že se definice forem redukovaných upraví takto

$$-a \leqq b < a, \quad a \leqq c.$$

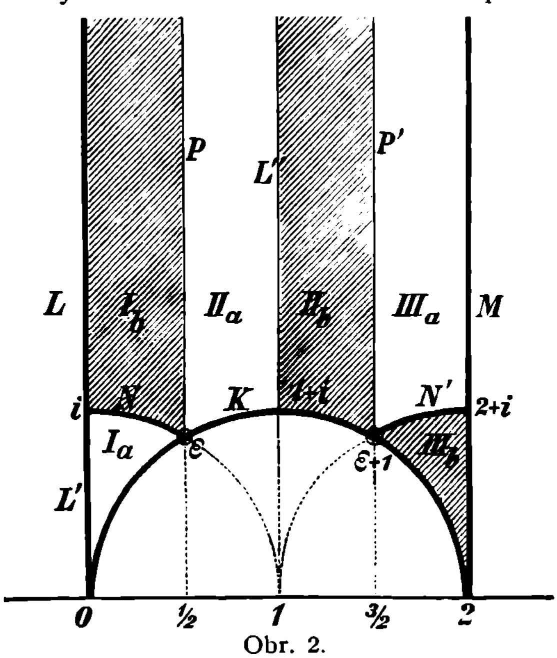
Kořeny ω náležející stranám N, N_1 náležejí formám, v nichž $a = c$, všechny ostatní formy redukované mají své kořeny mimo N a N_1. Poněvadž každý bod ω strany N je rovnomocný s jedním bodem strany ω_1, stačí se omeziti na stranu N; tudíž možno upraviti definici forem redukovaných v případě $a = c$ tak, že se předpokládá $0 \leqq b \leqq a$, takže definitivní úprava pojmu forem jednoznačně redukovaných zní takto: Forma (a, b, c) sluje jednoznačně redukovaná, je-li buď

$$-a \leqq b < a, \quad a < c$$

aneb

$$-a \leqq b \leqq 0, \quad a = c.$$

Pak je každá forma kvadratická záporného diskriminantu rovnomocná s jedinou formou redukovanou, a každá třída obsahuje jednu a to pouze jednn formu redukovanou. Počet tříd kvadratických forem daného záporného diskriminantu rovná se podle toho počtu forem jednoznačně redukovaných.



Obr. 2.

To předeslavše uvažujme v rovině (ω) křivočarý trojúhelník $L K M$ (obr. 2) omezený přímkami $\xi = 0$, $\xi = 2$ a půlkruhem K opsaným poloměrem jedna kol středu $\omega = 1$. Obrazec ten — nazveme jej Ω — sestává ze tří křivočarých čtyřúhelníků I, II, III, z nichž v obrazci vždy jedna půle (na př. I_b) jest stínována. K obrazci Ω počítejme strany $L L'$ t. j. celou kladnou osu pomyslnou, nikoli však půlkruh K a stranu M.

Každý bod strany L t. j. $(i \ldots \infty i)$ jest rovnomocný s jedním bodem strany $L' \equiv (0 \ldots i)$, a naopak; týž poměr vládne mezi L a $L'' \equiv (1 + i \ldots \infty i)$, takže každý bod strany L je v obrazci Ω třikráte zastoupen; totéž platí o bodech uvnitř obrazce Ω ležících, s vyjímkou čar N, N', P, P'.

Čáry N a N' jsou oblouky kružnic majících poloměry rovné jedné a svoje středy na místech $\omega = 0$, resp. $\omega = 2$.

Čáry P a P' jsou přímky $(\varepsilon \ldots \infty i)$, $(\varepsilon + 1 \ldots \infty i)$, probíhající v oboru Ω rovoběžně s osou pomyslnou z průseků oblouků NK a $N'K$, jež odpovídají hodnotám $\omega = \varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ a $\omega = \varepsilon + 1$.

Čáry N a N' jsou vespolek rovnomocny, rovněž čáry P a P'. Body čáry N a body čáry P jsou tedy v obrazci Ω zastoupeny dvakráte. Naproti tomu tam vůbec není zastoupen bod ε, poněvadž jako bod čáry K z obrazce vyloučen; poněvadž také bod $1 + i$ z obrazce je vyloučen, je na Ω bod i zastoupen pouze jednou.

Poněvadž půlkruh K rozpadá se ve tři části rovnomocné se stranami $PNNP$, je každý bod jeho mimo ε (a $\varepsilon + 1$) zastoupen uvnitř Ω.

To předeslavše, proveďme ze všech forem (a, b, c) diskriminantu Ω výbor forem, majících své kořeny v oboru Ω; u forem těch bude vždy b záporné, a tedy je pišme ve tvaru

$$a x^2 - b x y + c y^2 \text{ č. } [a, b, c],\ b \geqq 0.$$

Forma $[a, b, c]$ jest pojata do výboru, je-li tedy její kořen

$$\omega = \frac{b + i\sqrt{\Delta}}{2a} = \xi + i\eta$$

takový, že platí podmínky

$$0 \leqq \xi < 2, \quad (\xi - 1)^2 + \eta^2 > 1.$$

Tato kriteria vyjádří se podmínkami mezi koëfficienty

(1) $$0 \leqq b < 4a, \quad b < c.$$

Ve výboru jsou obsaženy též formy výjimečné (singularní), jichž kořeny odpovídají bodům na čarách NN', PP'; ty vyznačíme tak, že k nim nepočítáme bod i a tedy budou podrobeny podmínkám pro čáru N

(N) $$0 < \xi < \tfrac{1}{2}, \quad \xi^2 + \eta^2 = 1,$$

dále pro body čáry N'

(N') $$\tfrac{3}{2} < \xi < 2, \quad (\xi - 2)^2 + \eta^2 = 1,$$

pak pro body na P

$$(P) \qquad \xi = \tfrac{1}{2}, \quad \eta > \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

a konečně pro body na P'

$$(P') \qquad \xi = \tfrac{3}{2}, \quad \eta > \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Výjimečné formy výboru budou tedy charakterisovány následujícími podmínkami

$$(N) \qquad 0 < b < a, \quad a = c;$$

$$(P) \qquad b = a, \quad \Delta > 3a^2;$$

o formách N' a P' netřeba se šířiti, poněvadž jsou s předešlými rovnomocny.

Ustanovme počet forem P. Tyto jsou charakterisovány neurčitou rovnicí druhého stupně

$$4ac - a^2 = \Delta \text{ s podmínkou } a < \sqrt{\frac{\Delta}{3}},$$

o neznámých a a c. Klademe-li $a = \delta$, $4c - a = \delta'$, je problém totožný se stanovením počtu rozkladů

$$(2) \qquad \Delta = \delta\delta',$$

v nichž kladná celistvá čísla δ, δ' podrobena podmínkám

$$(2^a) \qquad \delta + \delta' \equiv 0 \text{ (mod. 4)}, \ \delta < \sqrt{\frac{\Delta}{3}}.$$

Počet těchto rozkladů znamenejme $f_1(\Delta)$.

Dle toho existuje $f_1(\Delta)$ forem P.

Formy N obdržíme řešením rovnice

$$\Delta = 4a^2 - b^2, \quad 0 < b < a.$$

Klademe-li $2a - b = \delta$, $2a + b = \delta'$, převede se problém v následující

$$(3) \qquad \Delta = \delta\delta', \quad \delta + \delta' \equiv 0 \text{ (mod. 4)}, \quad \sqrt{\frac{\Delta}{3}} < \delta < \sqrt{\Delta}.$$

Počet těchto rozkladů znamenejme $f_2(\Delta)$.

Počet všech výjimečných forem je tedy $2f_1(\Delta) + 2f_2(\Delta)$.

Číslo $f_1(\Delta) + f_2(\Delta) = f(\Delta)$ lze vyjádřiti poněkud jiným způsobem.

Rozklady (2) a (3) se doplňují na rozklady

$$(4) \qquad \Delta = \delta\delta', \quad \delta + \delta' \equiv 0 \text{ (mod. 4)}, \ \delta < \sqrt{\Delta},$$

vyloučí-li se z nich v jistých případech možný rozklad $\delta = \sqrt{\frac{\Delta}{3}}$.

Znamenejme literou $J(x)$ číslo jednu neb nullu, dle toho, je-li x celistvé čili nic. Pak je počet rozkladů, v nichž $\delta = \sqrt{\frac{\Delta}{3}}$, roven $J\left(\sqrt{\frac{\Delta}{3}}\right)$, poněvadž číslo

$$\delta + \delta' = \sqrt{\frac{\Delta}{3}} + \sqrt{3\Delta} = 4\sqrt{\frac{\Delta}{3}}$$

v tom případě je dělitelno čtyřmi.

Veličina $f(\Delta) + J\left(\sqrt{\frac{\Delta}{3}}\right)$ pak udává počet rozkladů (4).

Předpokládejme nyní, že Δ je liché, tedy $\Delta \equiv 3$ (mod. 4). Pak bude každý pár sdružených dělitelů δ, δ' ($\delta\delta' = \Delta$) hověti shodě $\delta + \delta' \equiv 0$ (mod. 4), a zbývá tedy další podmínka $\delta < \sqrt{\Delta}$; náš výraz $f(\Delta) + J\left(\sqrt{\frac{\Delta}{3}}\right)$ tedy bude roven počtu dělitelů čísla Δ menších než $\sqrt{\Delta}$; těch jest právě tolik co dělitelů větších než $\sqrt{\Delta}$; obojí tito dělitelé se doplňují na veškery dělitele čísla Δ, s výjimkou dělitele $\delta = \sqrt{\Delta}$, jenž existuje když Δ jest úplným čtvercem. Značí-li nám symbol $\Theta(\Delta)$ počet všech dělitelů čísla Δ, bude tedy

$$\Theta(\Delta) = 2f(\Delta) + 2J\left(\sqrt{\frac{\Delta}{3}}\right) + J(\sqrt{\Delta}),$$

takže

(4ᵃ) $$2f(\Delta) = \Theta(\Delta) - 2J\left(\sqrt{\frac{\Delta}{3}}\right) - J(\sqrt{\Delta}), \quad \Delta \equiv 3 \text{ (mod. 4)}.$$

Je-li dále Δ dělitelno osmi, nikoli však šestnácti, takže $\Delta \equiv 8$ (mod. 16), je ze dvou dělitelů δ, δ' jeden nedělitelný čtyřmi, druhý ano, a tedy podmínka $\delta + \delta' \equiv 0$ (mod. 4) není splnitelna; tudíž

(4ᵇ) $$f(\Delta) = 0, \quad \Delta \equiv 8 \text{ (mod. 16)}.$$

Je-li dále $\frac{\Delta}{4}$ číslo liché, takže $\Delta \equiv 4$ (mod. 8), bude každý rozklad tvaru

$$\Delta = 2\delta \, . \, 2\delta',$$

a podmínka $2\delta + 2\delta' \equiv 0$ (mod. 4) bude vždy splněna, poněvadž δ a δ' jsou dělitelé lichého čísla $\frac{\Delta}{4}$ a tedy mají součet sudý. Zde bude tedy $f(\Delta) + J\left(\sqrt{\frac{\Delta}{3}}\right)$ rovno počtu dělitelů čísla $\frac{\Delta}{4}$, kteří jsou menší než $\sqrt{\frac{\Delta}{4}}$, a následkem toho

(4ᶜ) $$2f(\Delta) = \Theta\left(\frac{\Delta}{4}\right) - 2J\left(\sqrt{\frac{\Delta}{3}}\right) - J(\sqrt{\Delta}), \quad \Delta \equiv 4 \text{ (mod. 8)}.$$

Konečně buď Δ dělitelno šestnácti; zde budou rozklady tvaru

$$\Delta = 4\delta \,.\, 4\delta',$$

a počet jich rovná se počtu dělitelů čísla $\frac{\Delta}{16}$, menších než $\sqrt{\frac{\Delta}{16}}$, takže vyjde

$$(4^d) \qquad 2f(\Delta) = \Theta\left(\frac{\Delta}{16}\right) - 2J\left(\sqrt{\frac{\Delta}{3}}\right) - J(\sqrt{\Delta}),\ \Delta \equiv 0 \ (\text{mod. } 16).$$

Ve výše zavedeném výboru forem (Ω) nejsou zahrnuty formy rovnomocné s formou, jejíž kořen jest $\omega = \varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$. Ve formě mající kořen ε jest

$$b = a,\ \Delta = 3a^2,$$

tedy forma ta zní $ax^2 - axy + ay^2$. Taková forma vyskytuje se mezi třídami diskriminantu $-\Delta$ obecně $J\left(\sqrt{\frac{\Delta}{3}}\right)$ kráte.

Formy mající kořen $\omega = i$ jsou typu $(a, 0, a)$, a ve výboru forem (Ω) přichází $J(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta})$ kráte.

Znamenejme nyní literou $G(\Delta)$ počet všech forem výboru (Ω). Mezi těmi vyskytuje se $J(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta})$ forem o kořeni i a $2f(\Delta)$ forem výjimečných; zbytek

$$G(\Delta) - 2f(\Delta) - J(\tfrac{1}{2}\sqrt{\Delta})$$

rozpadá se v

$$\frac{G(\Delta) - 2f(\Delta) - J(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta})}{3}$$

trojic forem rovnomocných, a každá z těchto trojic zastupuje jednu třídu.

K těmto třídám pojí se $J(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta})$ tříd obsahujících formu $(a, 0, a)$, pak $J\left(\sqrt{\frac{\Delta}{3}}\right)$ tříd $(a, -a, a)$ a konečně $f(\Delta)$ tříd výjimečných. Tedy počet všech tříd kvadratických forem diskriminantu $-\Delta$ bude

$$F(\Delta) = f(\Delta) + J\left(\sqrt{\frac{\Delta}{3}}\right) + J\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right) + \tfrac{1}{3}\left[G(\Delta) - 2f(\Delta) - J(\tfrac{1}{2}\sqrt{\Delta})\right]$$

a následovně

$$(5) \qquad 3F(\Delta) = 3J\left(\sqrt{\frac{\Delta}{3}}\right) + 2J\left(\frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right) + f(\Delta) + G(\Delta);$$

IV.

veličina $J(\varDelta)$ dána rovnicemi (4^a) . . . (4^d), a $G(\varDelta)$ značí počet forem z výboru (Ω), t. j. počet řešení požadavku

$$0 \leqq b < 4a, \quad b < c; \quad ac - b^2 = \varDelta.$$

Ustanovme nyní tento počet $G(\varDelta)$. Podmínky tyto lze zahrnouti, požadavkem, aby výraz

$$\frac{\varDelta + b^2}{4a} - b = \frac{\varDelta - (4a - b)b}{4a}$$

byl při podmínce $4a > b$ kladným číslem celistvým; je totiž $c - b$ jeho hodnota.

Zaveďme literu $4a - b = \lambda$; pak je λ číslo celistvé a kladné, podrobené podmínce

$$b + \lambda \equiv 0 \pmod{4},$$

a požadavek náš se redukuje na vyjádření počtu případů, v nichž výraz

$$\frac{\varDelta - b\lambda}{b + \lambda}$$

je číslem celistvým. Píšeme-li ještě ν za b, máme tedy výsledek:

»Symbol $G(\varDelta)$ rovná se počtu případů, kdy výraz

$$\text{(6)} \qquad \frac{\varDelta - \lambda\nu}{\lambda + \nu}, \quad \left(\begin{matrix} \lambda > 0, \nu \geqq 0; \\ \lambda + \nu \equiv 0 \mod 4 \end{matrix}\right),$$

jest kladné číslo celistvé.«

Jinak vyjádřeno,

»$G(\varDelta)$ udává počet řešení neurčité rovnice

$$\varDelta = xy + (x + y)z, \quad x + y \equiv 0 \pmod{4},$$
$$x = 0, 1, 2, \ldots; \quad y, z = 1, 2, 3, \ldots$$

Pomocí tohoto výsledku bude lze stanoviti součty

$$\sum_{k=1}^{n} F(4k - 1) \text{ a } \sum_{k=1}^{n} F(4k);$$

za tím účelem uvažme, že dle (6)

$$G(\varDelta) = \sum_{\lambda, \nu} J\left(\frac{\varDelta - \lambda\nu}{\lambda + \nu}\right), \quad \left(\begin{matrix} \varDelta > \lambda\nu, \ \lambda + \nu \equiv 0 \pmod{4} \\ \lambda > 0, \ \nu \geqq 0 \end{matrix}\right).$$

Avšak dle známé vlastnosti celků veličiny x, které znamenejme $E(x)$, bude

$$J\left(\frac{\varDelta - \lambda\nu}{\lambda + \nu}\right) = E\left(\frac{\varDelta - \lambda\nu}{\lambda + \nu}\right) - E\left(\frac{\varDelta - \lambda\nu - 4}{\lambda + \nu}\right),$$

přibere-li se podmínka $\lambda \equiv \nu \equiv \Delta$ (mod. 2), která je nutná k celistvosti výrazu (6).

Podle toho vyjde

$$\sum_{k=1}^{n} G(4k-1) = \sum_{\lambda, \nu} E\left(\frac{4n - \lambda\nu - 1}{\lambda + \nu}\right), \tag{7^a}$$

se summačními podmínkami

$$\lambda,\ \nu = 1, 3, 5, 7, \ldots ;\quad \lambda + \nu \equiv 0 \text{ (mod. 4)},$$

a dále

$$\sum_{k=1}^{n} G(4k) = \sum_{\lambda', \nu'} E\left(\frac{4n - \lambda'\nu'}{\lambda' + \nu'}\right), \tag{7^b}$$

kde

$$\begin{aligned} \lambda' &= 2, 4, 6, 8, 10, \ldots \\ \nu' &= 0, 2, 4, 6, 8, \ldots \\ \lambda' + \nu' &\equiv 0 \text{ (mod. 4)}. \end{aligned}$$

Výsledky tyto obdrží tvar pro počítání pohodlnější, rozdělí-li se členové $\lambda > \nu$ od členů $\lambda < \nu$, dále klade-li se $\lambda' = 2\alpha$, $\nu' = 2\beta$, a odstraní-li se členové $\beta = 0$ a $\alpha = \beta$.

Tak vyjde

$$\sum_{k=1}^{n} G(4k-1) = 2\sum_{\lambda, \nu} E\left(\frac{4n - \lambda\nu - 1}{\lambda + \nu}\right), \tag{7^c}$$

kde

$$\lambda < \nu,\quad \lambda + \nu \equiv 0 \text{ (mod. 4.)},\quad (\lambda, \nu = 1, 3, 5, 7, \ldots).$$

Dále

$$\sum_{1}^{n} G(4k) = \sum_{\alpha=1}^{n} E\left(\frac{n}{\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{\sqrt{n}} E\left(\frac{n - \alpha^2}{\alpha}\right) + 2\sum_{\alpha, \beta} E\left(\frac{2n - 2\alpha\beta}{\alpha + \beta}\right),$$

kde

$$\alpha < \beta;\quad \alpha + \beta \text{ sudé};\quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Užije-li se tu známého vztahu Dirichletova

$$\sum_{\alpha=1}^{n} E\left(\frac{n}{\alpha}\right) = 2\sum_{\alpha=1}^{\sqrt{n}} E\left(\frac{n}{\alpha}\right) - E^2(\sqrt{n}),$$

vyjde výsledek jednodušší

$$(7^d) \qquad \sum_{k=1}^{n} G(4k) = 3\sum_{a=1}^{\sqrt{n}} E\left(\frac{n}{a}\right) - \tfrac{3}{2}E^2(\sqrt{n}) - \tfrac{1}{2}E(\sqrt{n}) +$$
$$+ 2\sum_{\alpha,\beta} E\left(\frac{2n - 2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right),$$

kde

$$\alpha < \beta;\quad \alpha+\beta \text{ sudé};\quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Nyní potřebujeme ještě vyšetřiti součet

$$\sum_{n}^{1} f(4k-1) = S$$

Podle (4[a]) jest

$$2S = \sum_{k=1}^{n} \Theta(4k-1) - 2\sum_{1}^{n} J\left(\sqrt{\frac{4k-1}{3}}\right) - \sum_{1}^{n} J(\sqrt{4k-1}).$$

Avšak vždy

$$J(\sqrt{4k-1}) = 0,$$

$$\sum_{1}^{n} J\left(\sqrt{\frac{4k-1}{3}}\right) = E\left(\frac{1+\sqrt{\frac{4n-1}{3}}}{2}\right),$$

a tedy

$$2\sum_{k=1}^{n} f(4k-1) = -2E\left(\frac{1+\sqrt{\frac{4n-1}{3}}}{2}\right) + \sum_{1}^{n} \Theta(4k-1).$$

Podle vzorce (5) se tedy obdrží

$$3\sum_{1}^{n} F(4k-1) = 2E\left(\frac{1+\sqrt{\frac{4n-1}{3}}}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{n} \Theta(4k-1) +$$
$$+ \sum_{1}^{n} G(4k-1),$$

což dle (7[c]) zní

$$(8) \qquad 3\sum_{1}^{n} F(4k-1) = \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{n} \Theta(4k-1) + 2E\left(\frac{1+\sqrt{\frac{4n-1}{3}}}{2}\right) +$$
$$+ 2\sum^{\lambda,\nu} E\left(\frac{4n - \lambda\nu - 1}{\lambda+\nu}\right),$$

IV.

při čemž podmínky summační znějí

$$\nu > \lambda = 1, 3, 5, 7, \ldots;\ \lambda + \nu \equiv 0 \ (\text{mod. } 4).$$

Komplikovanější jest výpočet součtu

$$\sum f(4k).$$

Pro lichá $k = \lambda$ je dle (4^c)

$$\text{a)} \qquad 2f(4\lambda) = \Theta(\lambda) - 2J\left(\sqrt{\frac{\lambda}{3}}\right) - J(\sqrt{\lambda}),$$

pro $k = 2\lambda$ (λ liché) je pak $f(4k) = 0$, a konečně pro $k = 4\nu$ jest dle (4^d)

$$\text{b)} \qquad 2f(16\nu) = \Theta(\nu) - 2J\left(\sqrt{\frac{4\nu}{3}}\right) - J(\sqrt{4\nu});$$

uváží-li se ještě, že vždy

$$J\left(\sqrt{\frac{2\lambda}{3}}\right) = 0, \ J(\sqrt{2\lambda}) = 0,$$

obdržíme sečtením výrazů a) a b)

$$2\sum_1^n f(4k) = \sum_{\lambda=1,3,5,\ldots}^{n} \Theta(\lambda) + \sum_1^{\left[\frac{n}{4}\right]} \Theta(\nu) - 2\sum_1^n J\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right) - \sum_1^n J(\sqrt{k})$$

Podle vzorce (5) tedy

$$6\sum_1^n F(4k) = 4\sum_1^n J\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right) + 3\sum_1^n J(\sqrt{k}) + \sum \Theta(\lambda) + \sum \Theta(\nu) + \\ + 2\sum_1^n G(4k).$$

Avšak

$$\sum_1^n J\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right) = E\left(\sqrt{\frac{n}{3}}\right), \ \sum_1^n J(\sqrt{k}) = E(\sqrt{n}),$$

$$\sum_1^m \Theta(\nu) = 2\sum_1^{\sqrt{m}} E\left(\frac{m}{\nu}\right) - E^2(\sqrt{m}),$$

tedy

$$\sum_1^{\left[\frac{1}{4}n\right]} \Theta(\nu) = 2\sum_1^{\sqrt{\frac{n}{4}}} E\left(\frac{n}{4\nu}\right) - E^2\left(\sqrt{\frac{n}{4}}\right);$$

podle (7^d) je pak

$$2\sum G(4k) = 6\sum_1^{\sqrt{n}} E\left(\frac{n}{\alpha}\right) - 3E^2(\sqrt{n}) - E(\sqrt{n}) + 4\sum_{\alpha,\beta} E\left(\frac{2n - 2\alpha\beta}{\alpha + \beta}\right),$$

IV.

a tedy se obdrží

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
6\sum_{1}^{n} F(4k) = \sum_{\lambda=1,3,5,\ldots}^{n} \Theta(\lambda) + 2E(\sqrt{n}) + 4E\left(\sqrt{\frac{n}{3}}\right) - 3E^{2}(\sqrt{n}) - \\
- E^{2}(\tfrac{1}{2}\sqrt{n}) + 6\sum_{1}^{\sqrt{n}} E\left(\frac{n}{\alpha}\right) + 2\sum_{1}^{\frac{1}{2}\sqrt{n}} E\left(\frac{n}{4\nu}\right) + \\
+ 4\sum_{\alpha,\beta} E\left(\frac{2n - 2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)
\end{aligned}
\right.
$$

při čemž v posledním součtu má býti $\alpha + \beta$ vždy sudé a dále

$$\beta > \alpha = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

proveďme výpočet pro $n = 10$. Tu máme

$$\Theta(1) + \Theta(3) + \Theta(5) + \Theta(7) + \Theta(9) = 10,$$

$$2E(\sqrt{10}) + 4E(\sqrt{\tfrac{10}{3}}) = 10,$$

$$E(\tfrac{10}{1}) + E(\tfrac{10}{2}) + E(\tfrac{10}{3}) = 18,$$

tedy

$$6\sum_{1}^{\sqrt{n}} E\left(\frac{n}{\alpha}\right) = 108,$$

dále

$$2\sum_{1}^{\frac{1}{2}\sqrt{n}} E\left(\frac{10}{4\nu}\right) = 2E(\tfrac{10}{4}) = 4,$$

$$\sum_{\alpha,\beta} E\left(\frac{2n - 2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right) = E\left(\frac{10-3}{2}\right) + E\left(\frac{10-5}{3}\right) = 4,$$

konečně

$$3E^{2}(\sqrt{10}) + E^{2}(\tfrac{1}{2}\sqrt{10}) = 28;$$

tedy součet

$$6\sum_{1}^{10} F(4k) = 10 + 10 + 108 + 4 + 16 - 28 = 120,$$

takže

$$\sum_{1=k}^{10} F(4k) = 20,$$

IV.

o čemž nás poučí následující tabulka forem redukovaných:

Δ	
4	(1, 0, 1)
8	(1, 0, 2)
12	(1, 0, 3), (2, 2, 2)
16	(1, 0, 4), (2, 0, 2)
20	(1, 0, 5), (2, 2, 3)
24	(1, 0, 6), (2, 0, 3)
28	(1, 0, 7), (2, 2, 4)
32	(1, 0, 8), (2, 0, 4), (3, 2, 3)
36	(1, 0, 9), (2, 2, 5), (3, 0, 3)
40	(1, 0, 10), (2, 0, 5)

Položme nyní ve vzorci (8) $n = 10$; tu bude

$$\sum_1^{10} \Theta(4k - 1) = 28;$$

dále v součtu máme pro

$$\lambda = 1, \ \nu = 3, 7, 11, 15, 19$$
$$\lambda = 3, \ \nu = 5, 9$$

$$\sum E\left(\frac{39 - \lambda\nu}{\lambda + \nu}\right) = E\left(\frac{39 - 3}{4}\right) + E\left(\frac{39 - 7}{8}\right) +$$
$$+ E\left(\frac{39 - 11}{12}\right) + E\left(\frac{39 - 15}{16}\right) + E\left(\frac{39 - 19}{20}\right) + E\left(\frac{39 - 15}{8}\right) +$$
$$+ E\left(\frac{39 - 27}{12}\right) = 21;$$

tedy

$$3 \sum_1^{10} F(4k - 1) = \tfrac{28}{2} + 2 \,.\, 2 + 2 \,.\, 21 = 60,$$

tedy

$$\sum_1^{10} F(4k - 1) = 20,$$

IV.

o čemž nás přesvědčí následující tabulka forem redukovaných

Δ	
3	(1, 1, 1)
7	(1, 1, 2)
11	(1, 1, 3)
15	(1, 1, 4), (2, 1, 2)
19	(1, 1, 5)
23	(1, 1, 6), (2, $\pm$ 1, 3)
27	(1, 1, 7), (3, 3, 3)
31	(1, 1, 8), (2, $\pm$ 1, 4)
35	(1, 1, 9), (3, 1, 3)
39	(1, 1, 10), (2, $\pm$ 1, 5), (3, 3, 4)

Formu (a, b, c) a příslušnou jí třídu zoveme primitivní, nemají-li čísla a, b, c společného dělitele; znamenáme-li symbolem $Cl\,(-\Delta)$ počet tříd primitivních diskriminantu $-\Delta$, bude toto číslo obecně různé od $F(\Delta)$.

Je-li d největší společný činitel součinitelů a, b, c, takže $\frac{a}{d} = a'$ $\frac{b}{d} = b'$, $\frac{c}{d} = c'$ tvoří formu primitivní, bude

$$a\,c - b^2 = d^2\,(a'\,c' - b'^2),$$

tedy diskriminant Δ obsahuje kvadratického dělitele d^2. Čísla $F\,(\Delta)$ a $Cl\,(-\Delta)$ tedy splývají pro ony diskriminanty, které nemají kvadratických činitelů.

Budiž Q^2 největší čtverec obsažený v Δ jako činitel, tak aby podíl

$$\frac{-\Delta}{Q^2} = -\Delta_0$$

měl ještě tvar diskriminantu, takže pro sudá Δ_0 platí

$$\Delta_0 \equiv 4 \text{ aneb} \equiv 8 \text{ (mod. 16)}.$$

Tento diskriminant $-\Delta$ neobsahuje kvadratických dělitelů lichých, a ze sudých pouze 4, nemá-li $-\frac{\Delta_0}{4}$ tvar diskriminantní, takže může ještě býti Δ_0 dělitelno osmi, nikoli však šestnácti.

Nyní máme rovnici

$$4\,a'\,c' - b'^2 = \frac{\Delta_0\,Q^2}{d^2},$$

ze které plyne, že d obsaženo v Q; o liché části z d je to patrno, a kdyby pak po odstranění všech společných dělitelů zbylo

$$\frac{\Delta_0 Q^2}{d^2} = \frac{\Delta_0 Q_1^2}{\alpha},$$

kde Q_1 je liché, bylo by celistvé číslo $\frac{-\Delta_0}{4\alpha}$ zbaveno tvaru diskriminantního, tedy též součin $\frac{-\Delta_0}{4\alpha} Q_1^2$, což se protiví hodnotě $b'^2 - 4a'c'$.

Tudíž je $\frac{Q}{d}$ celistvé číslo, a forma (a', b', c') je primitivní formou diskriminantu

$$-\Delta_0 \cdot \left(\frac{Q}{d}\right)^2;$$

z toho plyne, že bude

$$F(\Delta_0 Q^2) = \sum_{Q:d} Cl\left(\frac{-\Delta_0 Q^2}{d^2}\right), \tag{10}$$

kde součet se vztahuje ke všem dělitelům d čísla Q.

Stanovením součtů jako (8) a (9) zabýval se pan Hermite, užívaje při tom některých svých vzorců z theorie funkcí elliptických.*) Nicméně se naše výsledky v detailech liší od výrazů slavného mathematika francouzského; neboť pan Hermite uvažoval formy typu $a x^2 + 2 b x y + c y^2$, jak je byl zavedl Gauss i Dirichlet, kdežto v přítomné práci vzata za základ forma obecnější $a x^2 + b x y + c y^2$ po příkladu Kroneckerově. Užívání těchto forem má za následek jistá zjednodušení theorie, v přítomném problému však spíše se zdá tvar klassický vésti k výsledkům přehlednějším.

Formy Gaussovské diskriminantu $b^2 - a c = -n$ splývají s formami Kroneckerovými diskriminantu $(2 b)^2 - 4 a c = -4 n$.

---

*) Remarques arithmétiques sur quelques formules de la théorie des fonctions elliptiques (Journal für die reine u. angew. Mathematik, sv. 100). Viz též »Sur quelques conséquences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du Bulletin de l'Académie Impériale de St. Pétersbourg, t. VI, též Acta math. sv. V.

IV.