Matyáš Lerch

Sur quelques formules concernant les fonctions elliptiques et les intégrales Eulérienne

Věstník Král. čes. spol. nauk, II. tř., 1897, č. 28, 1–11

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501503

XXVIII.

Sur quelques formules concernant les fonctions elliptiques et les intégrales Eulériennes.

Note de **M. Lerch** à Fribourg (Suisse).

(Présenté le 28 mai 1897)

Je veux développer quelques remarques auxquelles m'a donné l'occasion une formule que j'avais publiée il y a huit années.*) Pour la déduire de nouveau, considérons la série

$$F(x,\ s,\ u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(x-m)^2+u]^{\frac{1}{2}s}},$$

dans laquelle je suppose pour plus de simplicité que les quantité x et u soient réelles et positives, la première inférieure à un, tandisque s peut être une quantité complexe quelconque, mais ayant sa partie réelle positive et supérieure à un.

En employant la formule

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}{\left[(x-m)^2+u\right]^{\frac{1}{2}s}} = \int_0^\infty e^{-zu-z(x-m)^2} z^{\frac{1}{2}s-1} dz$$

j'aurais d'abord

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) F(x,\ s,\ u) = \int_0^\infty z^{\frac{1}{2}s-1} e^{-zu} dz \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-z(x-m)^2},$$

*) Sur certains développements en séries trigonométriques (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, tome III). — On peut d'ailleurs consulter plu-

et puis, en employant l'écriture habituelle

$$\vartheta_3(v\,|\,\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{\pi i(m^2\tau+2mv)},$$

la formule suivante:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)F(x,s,u)=\int_0^\infty z^{\frac{1}{2}s-1}e^{-uz-x^2z}\vartheta_3\left(\frac{xz}{\pi i}\,\Big|\,\frac{zi}{\pi}\right)dz.$$

On simplifie en écrivant $z\pi$ au lieu de z, ce qui donne

$$(1)\qquad \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}{\pi^{\frac{1}{2}s}}F(x,s,u)=\int_0^\infty z^{\frac{1}{2}s-1}e^{-uz\pi-x^2z\pi}\vartheta_3\left(\frac{xz}{i}\,\Big|\,zi\right)dz,$$

et cette équation prend une forme un peu plus simple en employant la formule de transformation

$$\vartheta_3(v\,|\,\tau)=\sqrt{\frac{i}{\tau}}\,e^{-\frac{v^2\pi i}{\tau}}\,\vartheta_3\left(\frac{v}{\tau}\,\Big|\,\frac{-1}{\tau}\right)$$

qui donne:

$$\vartheta_3\left(\frac{xz}{i}\,\Big|\,zi\right)=z^{-\frac{1}{2}}e^{x^2z\pi}\vartheta_3\left(x\,\Big|\,\frac{i}{z}\right)$$

et par conséquent

$$(2)\qquad \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}{\pi^{\frac{1}{2}s}}F(x,s,u)=\int_0^\infty z^{\frac{s-3}{2}}e^{-uz\pi}\vartheta_3\left(x\,\Big|\,\frac{i}{z}\right)dz.$$

Puisque la fonction $\vartheta_3\left(x\,\Big|\,\frac{i}{z}\right)$, pour des petites valeurs de z, est infiniment approchée de l'unité, l'intégrale qui figure au second membre de l'équation (2) n'a du sens que lorsque la partie réelle de s surpasse un, puisque la limite inférieure dans l'intégrale est zéro.

---

sieurs ouvrages tchèques que j'avais publiés sur les séries Malmsténiennes dans les mémoires de l'Académie François-Joseph.

Cela étant, je prend $u = 0$ dans l'équations que nous venons d'obtenir et j'observe que l'on a

$$F(x, s, 0) = R(x, s) + R(1 - x, s),$$

en posant pour abréger

$$R(x, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(x+m)^s}. \tag{3}$$

Si l'on change en même temps z en $\frac{1}{z}$, on a l'équation

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}{\pi^{\frac{1}{2}s}} \left\{ R(x, s) + R(1 - x, s) \right\} \\ & \qquad = \int_0^{\infty} z^{-\frac{s+1}{2}} \vartheta_3(x \,|\, iz)\, dz. \end{aligned} \right. \tag{4}$$

Il est facile de transformer le deuxième membre de la sorte qu'il devient convergent pour toutes les valeurs de la variable s.

A cet effet je décompose l'intégrale comme il suit

$$\int_0^a z^{-\frac{s+1}{2}} \vartheta_3(x \,|\, iz)\, dz + \int_a^{\infty} z^{-\frac{s+1}{2}} \vartheta_3(x \,|\, iz)\, dz,$$

la constante a étant supposée positive, et dans la seconde intégrale je remplace ϑ_3 par l'expression

$$[\vartheta_3(x \,|\, iz) - 1] + 1;$$

en employant enfin la valeur

$$\int_a^{\infty} z^{-\frac{s+1}{2}} dz = \frac{2}{s-1} a^{-\frac{s-1}{2}}$$

nous aurons l'équation:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}{\pi^{\frac{1}{2}s}}\cdot\left\{R(x,s)+R(1-x,s)\right\} \\ &= \frac{2}{s-1}a^{\frac{1-s}{2}}+\int_0^a \varepsilon^{-\frac{s+1}{2}}\vartheta_3(x\,|\,i\varepsilon)d\varepsilon+\int_a^\infty \varepsilon^{-\frac{s+1}{2}}[\vartheta_3(x\,|\,i\varepsilon)-1]\,d\varepsilon. \end{aligned}\right.$$

Chacune des intégrales qui figurent au second membre est évidemment une transcendante entière par rapport à s, et le premier terme $\frac{2}{s-1}a^{\frac{1-s}{2}}$ a un seule pôle $s=1$.

Ici se présente la remarque intéressante que la deuxième intégrale est en même temps une fonction transcendante entière de la quantité x, ce qui nous permet d'étudier la nature analytique de la transcendante définie par l'intégrale

$$(6)\qquad \int_0^a \varepsilon^{-\frac{s+1}{2}}\vartheta_3(x\,|\,i\varepsilon)\,d\varepsilon = \Phi(x);$$

car la formule (5) donne

$$(6^*)\quad \Phi(x) = -\frac{2}{s-1}a^{\frac{1-s}{2}}+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}{\pi^{\frac{1}{2}s}}\left\{R(x,s)+R(1-x,s)\right\} - \int_a^\infty \varepsilon^{-\frac{s+1}{2}}[\vartheta_3(x\,|\,i\varepsilon)-1]\,d\varepsilon.$$

Il s'ensuit que la fonction $\Phi(x)$, continuation analytique de l'intégrale (6), existe dans tout le plan de la variable complexe x, ne présentant d'autres points critiques que les points de ramification de dégré infini

$$x=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots\ldots$$

Quant à l'intégrale (6) elle-même il faut remarquer qu'elle ne converge que lorsque la quantité x se trouve représentée par un point situé à l'intérieur du carré ayant pour l'hypothénuse le segment de l'axe $(0\ldots 1)$; elle converge en même temps dans les carrés dont les hypothénuses sont les segments $(n \ldots n+1)$, mais la fonction analytique q'elle y définit est différente.

En reprenant l'équation (5), je me rappelle les propriétés connues de la fonction $R(x, s)$. Elles consistent dans ce que la différence

$$R(x, s) - \frac{1}{s-1}$$

est une transcendante entière par rapport à s, et que les développements de la fonction $R(x, s)$ aux environs des points $s = 1$ et $s = 0$ sont respectivement de la forme

$$(7) \quad R(x, s) = \frac{1}{s-1} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + a_1(s-1) + a_2(s-1)^2 + \ldots$$

$$(8) \quad R(x, s) = \left(\frac{1}{2} - x\right) + \log \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}} \cdot s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + \ldots.$$

Considérons maintenant les développements, suivant les puissances de $s-1$, des deux membres de l'équation (5). Celui du premier membre s'obtient en multipliant la série

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)}{\pi^{\frac{1}{2}s}} = 1 + A\frac{s-1}{2} + A'(s-1)^2 + \ldots.$$

par la suivante

$$R(x, s) + R(1-x, s) = \frac{2}{s-1} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)}$$
$$+ a'_1(s-1) + a'_2(s-1)^2 + \ldots$$

qui résulte de l'équation (7). Dans ce qui précède nous avons posé pour abréger

$$A = \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} - \log \pi = \Gamma'(1) - \log 4\pi.$$

Le premier membre de l'équation (5) a donc son développement de la forme

$$\frac{2}{s-1} + \left(A - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)}\right) + a_1''(s-1) + a_2''(s-1)^2 + \dots$$

Le développement du deuxième membre étant évidemment

$$\frac{2}{s-1} - \log a + \int_0^a \vartheta_3(x\,|\,iz)\,\frac{dz}{z} + \int_a^\infty \frac{\vartheta_3(x\,|\,iz) - 1}{z}\,dz$$

$$+ a_1''(s-1) + a_2''(s-1)^2 + \dots$$

on en conclut l'équation

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \dfrac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} = A + \log a - \displaystyle\int_0^a \frac{\vartheta_3(x\,|\,iz)}{z}\,dz \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \displaystyle\int_a^\infty \frac{\vartheta_3(x\,|\,iz) - 1}{z}\,dz. \end{cases}$$

En y prenant $x = \frac{1}{2}$ et en choisissant $a = 1$, on aura l'équation

$$\Gamma'(1) + \log\frac{\pi}{4} = -\int_0^1 \frac{\vartheta_0(0\,|\,iz)}{z}\,dz - \int_1^\infty \frac{\vartheta_0(0\,|\,iz) - 1}{z}\,dz.$$

En changeant, dans la première intégrale, z en $\frac{1}{z}$ et en faisant usage de la formule de transformation

$$\vartheta_0\left(0\,\middle|\,\frac{i}{z}\right) = \sqrt{z}\,\vartheta_2(0\,|\,iz),$$

il vient

$$(10)\quad \Gamma'(1) + \log\frac{\pi}{4} = -\int_1^\infty \frac{\vartheta_0(0\,|\,iz) + \vartheta_2(0\,|\,iz)\sqrt{z} - 1}{z}\,dz.$$

Cela étant, les formules

$$\vartheta_0(0\,|\,iz) - 1 = 2\sum_n (-1)^n e^{-n^2 z\pi},$$

$$\vartheta_2(0\,|\,is) = 2\sum_m e^{-\frac{1}{4}m^2 s\pi}, \qquad \begin{pmatrix} m = 1,\ 3,\ 5,\ 7\ \ldots\ldots \\ n = 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots\ldots \end{pmatrix},$$

conduisent à la représentation suivante de la constante d'EULER

$$C = -\Gamma'(1):$$

$$(10a)\quad \begin{cases} C = \log\frac{\pi}{4} + 2\sum_n (-1)^n \int\limits_{n^2\pi}^{\infty} e^{-s}\frac{ds}{s} \\ \qquad + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_m \frac{1}{m}\int\limits_{\frac{1}{4}m^2\pi}^{\infty} e^{-s}\frac{ds}{\sqrt{s}}, \ \begin{pmatrix} m = 1,\ 3,\ 5,\ 7, \ldots \\ n = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Supposons maintenant x infiniment petit et observons que le premier membre de l'équation (9) sera équivalent à l'expression

$$-\frac{1}{x} + 2\Gamma'(1).$$

Pour obtenir la valeur du second membre de ladite équations dans laquelle je choisis $a = 1$ il faut d'abord rechercher l'expression

$$\int\limits_0^1 \vartheta_3(x\,|\,is)\,\frac{ds}{s} = \varphi(x).$$

On a d'abord

$$\vartheta_3(x\,|\,is) = \frac{1}{\sqrt{s}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{s}(x+n)^2}$$

ou bien

$$\vartheta_3(x\,|\,is) = \frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{\pi x^2}{s}} + \frac{1}{\sqrt{s}}\sum_n{}' e^{-\frac{\pi}{s}(x+n)^2}, \ (n = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots).$$

A l'aide de cette expression l'intégrale $\varphi(x)$ prend la forme

$$\varphi(x) = \int\limits_0^1 e^{-\frac{\pi x^2}{s}}\,\frac{ds}{s^{\frac{3}{2}}} + f(x),$$

où

$$f(x) = \int_0^1 \frac{ds}{s^{\frac{3}{2}}} \sum_n{}' e^{-\frac{\pi}{s}(x+n)^2}$$

Or, évidemment

$$\int_0^1 e^{-\frac{\pi x^2}{s}} \frac{ds}{s^{\frac{3}{2}}} = \int_1^\infty e^{-\pi x^2 s} \frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{x} - \int_0^1 e^{-\pi x^2 s} \frac{ds}{\sqrt{s}}.$$

Cela étant, observons ensuite que l'on a

$$f(0) = \int_0^1 \frac{ds}{s^{\frac{3}{2}}} \sum_n{}' e^{-\frac{\pi n^2}{s}} = \int_0^1 \frac{ds}{s^{\frac{3}{2}}} \left(\vartheta_3\left(0 \middle| \frac{i}{s}\right) - 1\right)$$

ou bien

$$f(0) = \int_1^\infty \frac{\vartheta_3(0 \mid is) - 1}{\sqrt{s}} ds,$$

et que l'intégrale

$$\int_0^1 e^{-\pi x^2 s} \frac{ds}{\sqrt{s}}$$

pour $x = 0$ se réduit à 2; on aura de la sorte pour x infiniment petit la formule suivante

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - 2 + \int_1^\infty \frac{\vartheta_3(0 \mid is) - 1}{\sqrt{s}} ds,$$

et la valeur principale du deuxième membre de la formule (9) sera par conséquent

$$-\frac{1}{x} + A + 2 - \int_1^\infty \frac{\vartheta_3(0 \mid is) - 1}{\sqrt{s}} ds - \int_1^\infty \frac{\vartheta_3(0 \mid is) - 1}{s} ds.$$

En comparant avec la valeur approchée du premier membre, et en remplacant la constante A par sa valeur $\Gamma'(1) - \log 4\pi$, il s'ensuit

$$(11)\qquad \Gamma'(1) + \log 4\pi - 2 = -\int_1^{\infty} [\vartheta_3(0 \mid iz) - 1] \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\sqrt{z}}\right) dz.$$

En additionnant membre à membre, avec l'équation (10), et en employant les identités

$$\vartheta_0(0 \mid iz) + \vartheta_3(0 \mid iz) = 2\vartheta_3(0 \mid 4iz),$$

$$\vartheta_2(0 \mid iz) + \vartheta_3(0 \mid iz) = \vartheta_3\left(0 \,\middle|\, \frac{iz}{4}\right),$$

on aura d'abord

$$2\Gamma'(1) + 2\log\pi - 2 = -2\int_1^{\infty} \frac{\vartheta_3(0 \mid 4iz) - 1}{z}\, dz$$

$$-\int_1^{\infty} \frac{\vartheta_3\left(0 \,\middle|\, \frac{iz}{4}\right) - 1}{\sqrt{z}}\, dz$$

Changeant z en $\frac{z}{4}$ dans la première intégrale et en $4z$ dans la seconde il vient

$$(12)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\Gamma'(1) + \log\pi - 1 = -\int_4^{\infty} \frac{\vartheta_3(0 \mid iz) - 1}{z}\, dz \\ &\qquad\qquad -\int_{\frac{1}{4}}^{\infty} \frac{\vartheta_3(0 \mid iz) - 1}{\sqrt{z}}\, dz. \end{aligned} \right.$$

En retranchant membre à membre les deux équations (11) et (12), il vient

$$2\log 2 - 1 = -\int_1^{4} \frac{\vartheta_3(0 \mid iz) - 1}{z}\, dz + \int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{\vartheta_3(0 \mid iz) - 1}{\sqrt{z}}\, dz$$

ou bien

$$\int_1^4 \vartheta_3(0 \mid iz)\frac{dz}{z} - \int_{\frac{1}{4}}^1 \vartheta_3(0 \mid iz)\frac{dz}{\sqrt{z}} = 0.$$

Or cette équation devient évidente en employant la formule de transformation

$$\vartheta_3(0 \mid iz) = \frac{1}{\sqrt{z}}\left(0 \,\middle|\, \frac{i}{z}\right),$$

et en changeant, dans l'intégrale correspondante z en $\frac{1}{z}$. Par conséquent les formules (10) et (11) ne sont qu'une et même chose; la formule (11) est cependant la plus simple.

En revenant à la formule (9) remarquons que l'intégration par parties nous donne

$$\int_0^a \vartheta_3(x \mid iz)\frac{dz}{z} = \log a \,.\, \vartheta_3(x \mid ia) - \int_0^a \log z \quad d\vartheta_3(x \mid iz),$$

$$\int_a^\infty \frac{\vartheta_3(x \mid iz) - 1}{z}\, dz = -\log a \,.\, [\vartheta_3(x \mid ia) - 1]$$
$$- \int_a^\infty \log z \,.\, d\vartheta_3(x \mid iz),$$

ce qui change le deuxième membre comme il suit

$$A + \int_0^\infty \log z \,.\, d\vartheta_3(x \mid iz).$$

Or on a

$$d\,\vartheta_3(x \mid iz) = \frac{1}{4\pi}\,\vartheta''_3(x \mid iz)\, dz,$$

de la sorte qu'il vient au lieu de (9) l'équation

$$(9^*) \qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{\pi}{2} \cot x\pi = \frac{\Gamma'(1) - \log 4\pi}{2}$$

$$+ \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty \vartheta_3''(x \mid is) \log s \, ds.$$

En intégrant par rapport à x, on retombe sur la série de Kummer.

Arrêtons-nous encore à l'équation (5), en y posant $s = 0$; la formule (8) permet immédiatement de conclure l'équation

$$-2 \log 2 \sin x\pi = \int_0^\infty [\vartheta_3(x \mid is) - 1] \frac{ds}{\sqrt{s}},$$

dont la vérification directe est immédiate.

Nákladem Královské České Společnosti Náuk. — Tiskem dra Ed. Grégra v Praze 1897.