

Lerch, Matyáš: Scholarly works

Matyáš Lerch

Remarque élémentaire sur la constante d'Euler

Jornal des ciencias mathematicas e astronomicas, Coimbra, 13 (1897),
129–133

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/501501>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

REMARQUE ÉLÉMENTAIRE SUR LA CONSTANCE D'EULER

NOTE DE

M. LERCH

Professeur à l'Université de Fribourg (Suisse)

En posant

$$\sum_1^{n-1} \frac{1}{v} = f(n), \quad \sum_1^{n-1} \frac{\log v}{v} = F(n),$$

on a

$$\lim_{n=\infty} \left\{ f(n) - \log n \right\} = C, \quad \lim_{n=\infty} \left\{ F(n) - \frac{1}{2} \log^2 n \right\} = K,$$

C et K étant deux certaines constantes, dont la première porte le nom d'Euler. Ces deux circonstances suffisent pour obtenir un développement de la constante C.

Soit en effet n impair, nous aurons évidemment

$$\sum_1^{n-1} \frac{\log v}{v} = 2^{\frac{1}{2}(n-1)} \sum_1^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{\log(2v)}{2v} = \sum_{v=1}^{n-1} (-1)^{v-1} \frac{\log v}{v},$$

ou bien

$$F(n) - F\left(\frac{n+1}{2}\right) - \log 2 \cdot f\left(\frac{n+1}{2}\right) = \sum_{v=1}^{n-1} (-1)^{v-1} \frac{\log v}{v}.$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[F(n) - \frac{1}{2} \log^2 n \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[F\left(\frac{n+1}{2}\right) - \frac{1}{2} \log^2 \frac{n+1}{2} \right] \\ &\quad - \log 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f\left(\frac{n+1}{2}\right) - \log \frac{n+1}{2} \right] \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} \log^2 n - \frac{1}{2} \log^2 \frac{n+1}{2} - \log 2 \cdot \log \frac{n+1}{2} \right] \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v-1} \frac{\log v}{v}. \end{aligned}$$

Or le premier membre étant

$$\frac{1}{2} \log^2 2 - C \log 2,$$

il s'ensuit la formule de M^r de la Vallée-Poussin (*)

$$(1) \quad \log 2 \cdot \left[C - \frac{1}{2} \log 2 \right] = \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \frac{\log v}{v}.$$

(*) Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers (Ann. Soc. scient., Brux., t. XX, 2^e partie, 1896), pag. 65.

On obtient une série analogue pour le nombre K , en partant de l'expression

$$\sum_1^{n-1} \frac{\log^2 v}{v} = G(n),$$

pour laquelle on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[G(n) - \frac{1}{3} \log^2 n \right] = K'.$$

A cet effet il suffit de considérer l'identité

$$\sum_1^{n-1} \frac{\log^2 v}{v} = 2^{-\frac{1}{2}(n-1)} \sum_1^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{\log^2 2v}{2v} - \sum_1^{n-1} (-1)^{v-1} \frac{\log^2 v}{v};$$

elle nous donne la formule

$$(2) \quad 2 \log 2 \left(K + C \frac{\log 2}{2} - \frac{\log^2 2}{6} \right) = \sum_1^{\infty} (-1)^v \frac{\log^2 v}{v}.$$

La formule d'Euler

$$\sum_1^{\infty} (-1)^v a_v^n = \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{\Delta^{n-1} a_1}{2^n}$$

permet de transformer les séries (1) et (2) en séries dont la convergence est plus rapide.

Il est clair qu'on peut obtenir par ce procédé la valeur des séries

$$\sum (-1)^v \frac{\log^3 v}{v}, \quad \sum (-1)^v \frac{\log^4 v}{v}, \dots$$

en fonction des constantes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_1^{n-1} \frac{\log^2 v}{v} - \frac{1}{3} \log^3 n \right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_1^{n-1} \frac{\log^3 v}{v} - \frac{1}{4} \log^4 n \right), \dots$$

Mais l'intérêt de la déduction précédente consiste dans ce qu'elle est entièrement élémentaire, et pour conserver ce caractère, j'ajoute une démonstration des lemmes sur lesquels elle est fondée.

En élevant l'équation

$$\log(v+1) = \log v + \frac{1}{v} + \frac{1}{2v^2} + \dots$$

à la puissance k^{me} , j'obtiens

$$\frac{\log^k(v+1) - \log^k v}{k} = \frac{\log^{k-1} v}{v} + \frac{A_v \log^{k-1} v}{v^2},$$

où A_v reste fini pour v infini; en y substituant $v = 2, 3, \dots, n-1$ et additionnant, il vient

$$\frac{1}{k} \log^k n = \sum_{v=2}^{n-1} \frac{\log^{k-1} v}{v} + \frac{1}{k} \log^k 2 + \sum_2^{n-1} \frac{A_v \log^{k-1} v}{v^2},$$

et il est clair que la dernière somme se réduit à la série convergente

$$\sum \frac{A_v \log^{k-1} v}{v^2}$$

lorsque n devient infini. Donc la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_1^{n-1} \frac{\log^{k-1} v}{v} - \frac{1}{k} \log^k n \right)$$

est finie.

