Matyáš Lerch

Remarque élémentaire sur la constante d'Euler

Jornal des sciencias mathematicas e astronomicas, Coimbra, 13 (1897), 129–133

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501501

REMARQUE ÉLÉMENTAIRE SUR LA CONSTANTE D'EULER

NOTE DE

M. LERCH

Professeur à l'Université de Fribourg (Suisse)

En posant

$$\sum_{1}^{n-1} \frac{1}{\nu} = f(n), \quad \sum_{1}^{n-1} \frac{\log \nu}{\nu} = F(n),$$

on a

$$\lim_{n=\infty} \left\{ f(n) - \log n \right\} = C, \quad \lim_{n=\infty} \left\{ F(n) - \frac{1}{2} \log^2 n \right\} = K,$$

C et K étant deux certaines constantes, dont la première porte le nom d'Euler. Ces deux circonstances suffissent pour obtenir un développement de la constante C.

Soit en effet n impair, nous aurons évidemment

$$\sum_{1}^{n-1} \frac{\log \nu}{\nu} - 2 \sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{\log (2\nu)}{2\nu} = \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{\nu-1} \frac{\log \nu}{\nu},$$

ou bien

$$F(n) - F\left(\frac{n+1}{2}\right) - \log 2 . f\left(\frac{n+1}{2}\right) = \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^{\nu-1} \frac{\log \nu}{\nu} .$$

Il s'ensuit

$$\lim_{n=\infty}\left[F(n) - \frac{1}{2}\log^2 n\right] - \lim_{n=\infty}\left[F\left(\frac{n+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\log^2 \frac{n+1}{2}\right]$$

$$-\log 2 . \lim_{n=\infty}\left[f\left(\frac{n+1}{2}\right) - \log\frac{n+1}{2}\right]$$

$$+\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{2}\log^2 n - \frac{1}{2}\log^2\frac{n+1}{2} - \log 2 . \log\frac{n+1}{2}\right]$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{\log \nu}{\nu}.$$

Or le premier membre étant

$$\frac{1}{2}\log^2 2 - C\log 2,$$

il s'ensuit la formule de Mr de la Vallée-Poussin (*)

$$(1) \qquad \log 2 . \left[C - \frac{1}{2}\log 2\right] = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\log \nu}{\nu}.$$

(*) Recherches analytiques sur la theorie des nombres premiers (*Ann. Soc. scient.*, Brux., t. xx, 2e partie, 1896), pag. 65.

On obtient une série analogue pour le nombre K, en partant de l'expression

$$\sum_{1}^{n-1} \frac{\log^2 \nu}{\nu} - G(n),$$

pour laquelle on a

$$\lim_{n=\infty}\left[G(n) - \frac{1}{3}\log^3 n\right] = K'.$$

A cet effet il suffit de considérer l'identité

$$\sum_{1}^{n-1} \frac{\log^2 \nu}{\nu} - 2\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{\log^2 2\nu}{2\nu} = \sum_{1}^{n-1} (-1)^{\nu-1} \frac{\log^2 \nu}{\nu};$$

elle nous donne la formule

$$(2) \qquad 2\log 2\left(K + C\frac{\log 2}{2} - \frac{\log^2 2}{6}\right) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\log^2 \nu}{\nu}.$$

La formule d'Euler

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{\nu} a_{\nu}^{n} = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\Delta^{n-1} a_1}{2^n}$$

permet de transformer les séries (1) et (2) en séries dont la convergence est plus rapide.

Il est claire qu'on peut obtenir par ce procédé la valeur des séries

$$\sum(-1)^{\nu}\frac{\log^3\nu}{\nu},\quad \sum(-1)^{\nu}\frac{\log^4\nu}{\nu},\ldots$$

en fonction des constantes

$$\lim_{n=\infty}\left(\sum_1^{n-1}\frac{\log^2\nu}{\nu}-\frac{1}{3}\log^3 n\right),\quad \lim_{n=\infty}\left(\sum_1^{n-1}\frac{\log^3\nu}{\nu}-\frac{1}{4}\log^4 n\right),\ldots$$

Mais l'intérêt de la déduction précédente consiste dans ce qu'elle est entièrement élémentaire, et pour conserver ce caractère, j'ajoute une démonstration des lemmes sur lesquels elle est fondée.

En élevant l'équation

$$\log(\nu+1)=\log\nu+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{2\nu^2}+\ldots$$

à la puissance k^{me}, j'obtiens

$$\frac{\log^k(\nu+1)-\log^k\nu}{k}=\frac{\log^{k-1}\nu}{\nu}+\frac{A_\nu\log^{k-1}\nu}{\nu^2},$$

où A_ν reste fini pour ν infini; en y substituant $\nu=2, 3, \ldots n-1$ et additionnant, il vient

$$\frac{1}{k}\log^k n=\sum_{\nu=2}^{n-1}\frac{\log^{k-1}\nu}{\nu}+\frac{1}{k}\log^k 2+\sum_2^{n-1}\frac{A_\nu\log^{k-1}\nu}{\nu^2},$$

et il est claire que la dernière somme se réduit à la série convergente

$$\sum \frac{A_\nu \log^{k-1}\nu}{\nu^2},$$

lorsque n devient infini. Donc la limite

$$\lim_{n=\infty}\left(\sum_{1}^{n-1} \frac{\log^{k-1}\nu}{\nu} - \frac{1}{k}\log^k n\right)$$

est finie.