Matyáš Lerch

Ze základů théorie funkcí elliptických. [III.]

Věstník Čes. Akademie cis. Fr. Jos. pro vědy, slovesnost a umění v Praze 5 (1896), 561–568

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501498

Ze základů theorie funkcí elliptických.

Referuje *M. Lerch*, professor na universitě ve Fryburku švýcarském.

(Dokončení.)

9. Vraťme se nyní po dlouhé odbočce této k citované práci pana Hermitea.

Pan Hermite definoval funkci $\psi(x)$ vzorcem (3)

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} \left(A\,\xi^2 + \frac{1}{2} B\xi\right) dx$$

Obraťme se jediné k případu $\xi = \operatorname{sn} x$, kde $A = k^2$, $B = 0$, a volme $x_0 = 0$; pak obdržíme funkci

$$\psi(x) = \int_0^x k^2 \operatorname{sn}^2 x\, dx,$$

o níž jsme právě jednali. Podle druhého vzorce (5) obdržíme

$$\frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} x - \operatorname{sn} a} = F(x-a) - F_1(x+a) - \psi(a);$$

dosadíme-li sem $x + iK'$ za x, obdržíme, ježto

$$sn(x + iK') = \frac{1}{k\, sn\, x},$$

následující vzorec

$$\frac{k \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} x}{1 - k \operatorname{sn} a \operatorname{sn} x} = F(x - a + iK') - F_1(x + a + iK') - \psi(a);$$

obrátíme-li pak znamení při a,

$$\frac{k \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} x}{1 + k \operatorname{sn} a \operatorname{sn} x} = F(x + a + iK') - F_1(x - a + iK') + \psi(a).$$

Tyto výsledky odečtěme a znamenejme pro pohodlí

$$F_0(x) = F(x + iK') + F_1(x + iK'),$$

i obdržíme vztah

$$(a) \qquad \frac{2k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x} = F_0(x-a) - F_0(x+a) - 2\psi(a).$$

Abychom určili funkci $F_0(x)$, položme $x = 0$, i vyjde

$$(b) \qquad F_0(-a) - F_0(a) = 2\psi(a).$$

Derivujeme-li rovnici (a) vůči x, a klademe-li u výsledku $x = 0$, obdržíme

$$F_0'(-a) = F_0'(a),$$

takže musí

$$F_0(-a) = C - F_0(a),$$

kde C je konstanta. Podle toho rovnice (b) tu poskytne výraz

$$F_0(a) = \frac{1}{2} C - \psi(a),$$

a dosadíme-li do (a), vyjde vztah

$$(53) \qquad \frac{2k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x} = \psi(x+a) - \psi(x-a) - 2\psi(a).$$

Výměnou liter a, x plyne

$$(53^a)\qquad \frac{2k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn}^2 a}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x} = \psi(x+a) + \psi(x-a) - 2\psi(x),$$

a sečteme-li oba výsledky, obdržíme

$$2k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} x \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} x + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x} = \psi(x+a) - \psi(x) - \psi(a)$$

aneb, což totéž jest,

$$(54)\qquad \psi(x+a) - \psi(x) - \psi(a) = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x+a).$$

Toť theorém addiční pro funkci $\psi(x)$. Poznamenejme, že analogická věta pro funkci $\zeta(x)$ se obdrží ze vzorce (16)

$$\zeta(a+x) + \zeta(a-x) - 2\zeta(a) = \frac{\wp'(a)}{\wp(a)-\wp(x)};$$

vyměníme-li litery a, x, vyjde

$$\zeta(a+x) - \zeta(a-x) - 2\zeta(x) = \frac{-\wp'(x)}{\wp(a)-\wp(x)},$$

a sečteme-li oba poslední vzorce, objeví se vztah

$$(55)\qquad \zeta(a+x) - \zeta(a) - \zeta(x) = \frac{\wp'(a)-\wp'(x)}{\wp(a)-\wp(x)}.$$

Ze vzorce (53) plyne integrací vůči x, klade-li se

$$\chi(x) = \int_0^x \psi(x)\,dx,$$

vzorec

$$(56)\qquad \int_0^x \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 x}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x}\,dx = \frac{1}{2}\chi(x+a) - \frac{1}{2}\chi(x-a) - x\psi(a),$$

kterým se t. zv. třetí *eliptický integrál* (int. třetího způsobu) redukuje na výrazy závislé na jediném argumentu.

Podle vzorce (47^b) bude

$$\chi(x) = -\log \sigma_3(x) = -2\eta_1\omega_1 u^2 + \log \vartheta_0(u) - \log \vartheta_0,$$

kde $u = \frac{x}{2K}$; následkem toho pravá strana vzorce (56) obdrží tvar

$$(56^a)\qquad \log \frac{\vartheta_0\left(\frac{x-a}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{x+a}{2K}\right)} + \frac{x}{2K}\,\frac{\vartheta'_0\left(\frac{a}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{a}{2K}\right)}.$$

Tato theorie funkcí elliptických má v čele theorém addiční. Ukážeme příště, jak lze základní věty theorie této vyvinouti přímým studiem integrálu

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}},$$

aniž při tom užito algebraické pomůcky, jakou jest věta addiční.

10. V odstavcích předešlých odvozeny základní vlastnosti funkce $\varphi(x)$ ve zvláštních případech, kdy polynom čtvrtého stupně $R(\xi)$ má tvar

$$(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2) \text{ aneb } 4\xi^3 - g_2\xi - g_3.$$

Zbývá ještě prozkoumati povahu funkce $\varphi(x)$ v případě obecném. Za tím účelem uveďme polynom $R(\xi)$ na tvar součinu $(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)(\xi-\alpha_3)(\xi-\alpha_4)$, předpokládajíce $A=1$. Integrál

$$x = \int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)(\xi-\alpha_3)(\xi-\alpha_4)}}$$

přetvořme substitucí

$$\frac{\xi-\alpha_2}{\xi-\alpha_1} = \frac{\alpha_2-\alpha_3}{\alpha_1-\alpha_3}\,z;$$

tou obdržíme nejprve

$$\xi = \frac{\alpha_2(\alpha_1-\alpha_3)-\alpha_1(\alpha_2-\alpha_3)z}{\alpha_1-\alpha_3-(\alpha_2-\alpha_3)z},$$

tedy

$$R(\xi) = \frac{Cz(1-z)(1-k^2z)}{\left[\alpha_1-\alpha_3-(\alpha_2-\alpha_3)z\right]^4},$$

kde položeno

$$C = (\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2 \,.\, (\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4),$$

$$k^2 = \frac{(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)};$$

poněvadž

$$d\xi = -\frac{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_3)}{\left[\alpha_1-\alpha_3-(\alpha_2-\alpha_3)z\right]^2}\,dz,$$

vyjde

$$\frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} = \sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}\,\frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}}$$

a odtud

$$x = g\int \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1-k^2z)}},$$

kde

$$g = \sqrt{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)}.$$

Nazveme-li x_0 integrační stálou, můžeme klásti

$$x = g \int_0 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(1 k^2 z)}} + x_0 ,$$

a odtud vychází, že

$$z = \operatorname{sn}^2 \frac{x - x_0}{g} ,$$

při čemž funkce $\operatorname{sn} u$ tvořena na základě modulu k.

Z hořejší substituce tedy plyne pro funkci $\xi = \varphi(x)$ výraz

$$\varphi(x) = \frac{\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_3) - \alpha_1(\alpha_2 - \alpha_3) \operatorname{sn}^2 \frac{x - x_0}{g}}{(\alpha_1 - \alpha_3) - (\alpha_2 - \alpha_3) \operatorname{sn}^2 \frac{x - x_0}{g}} .$$

Odtud vychází, že funkce $\varphi(x)$ jest jednoznačná a má v celé rovině povahu funkce racionalné, dále že má periody $2\,Kg$, $2\,i\,K'g$. Její poly jsou nullová místa funkce

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3} - \operatorname{sn}^2 \frac{x - x_0}{g} .$$

Z rovnice

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 v} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} = \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v}$$

plyne, že řešení rovnice

$$\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v = 0$$

jsou nullová místa funkcí $\sigma(u - v)$ a $\sigma(u + v)$, t. j. rovnice tato má pouze řešení tvaru

$$u = \pm v + 2\,m\,K + 2\,n\,i\,K',$$

z nichž pouze dvě leží v rovnoběžníku period. Odtud soudíme, že funkce $\varphi(x)$ má v rovnoběžníku period dva poly, které jsou stupně prvního. Kdyby totiž pol p byl stupně druhého, musela by také na něm vymizeti derivace výrazu

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3} - \operatorname{sn}^2 \frac{x - x_0}{g} ,$$

čili zmizela by pro $x = p$ funkce

$$\operatorname{sn} \frac{x - x_0}{g} \operatorname{cn} \frac{x - x_0}{g} \operatorname{dn} \frac{x - x_0}{g} ;$$

to nastane pro*)

$$x - x_0 = 0, \text{ resp. } = g\,K,\ g\,K + g\,i\,K' \text{ (mod. } 2\,K,\ 2\,i\,K').$$

---

*) Rovnici $x = u + 2\,m\,K + 2\,n\,i\,K'$ vyjadřujeme *shodou* $x \equiv u$ (mod. $2\,K$, $2\,i\,K'$).

Avšak pro tyto hodnoty x výraz

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3} - \operatorname{sn}^2 \frac{x - x_0}{g}$$

rovná se pořadem veličinám

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3}, \quad \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3} - 1, \quad \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3} - \frac{1}{k^2};$$

první dvě nejsou nully, poněvadž kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ jsou různy, poslední veličina pak jest

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3} - \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_2 - \alpha_3)} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2)}{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}$$

a je z téže příčiny od nully různa.

Funkce $\varphi(x)$ má tedy dva podstatně různé poly, které jsou stupně prvního; budeme je znamenati p a p'.

Po této přípravě přistupme k dodatkům, vztahujícím se k obecné addiční větě funkce $\varphi(x)$, které s námi písemně sdělil pan Hermite listem ze dne 3. června t. r. Addiční větu funkce $\varphi(x)$, která zní

$$\begin{aligned} \frac{2\varphi'(a)}{\varphi(x+y) - \varphi(a)} &= \frac{\varphi'(a+y) + \varphi'(a)}{\varphi(a+y) - \varphi(a)} + \frac{\varphi'(a-y) + \varphi'(a)}{\varphi(a-y) - \varphi(a)} \\ &- \frac{\varphi'(a+y) - \varphi'(x)}{\varphi(a+y) - \varphi(x)} - \frac{\varphi'(a-y) + \varphi'(x)}{\varphi(a-y) - \varphi(x)}, \end{aligned}$$

lze použitím identity

$$\frac{\varphi'(a) + \varphi'(a+y)}{\varphi(a+y) - \varphi(a)} = -(D_a - 2D_y) \log \left[\varphi(a) - \varphi(a+y)\right]$$

uvésti na tvar

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2D_a \log \left[\varphi(a) - \varphi(x+y)\right] \\ & = (D_a - 2D_y) \log \left[\varphi(a) - \varphi(a+y)\right] \\ & + (D_a + 2D_y) \log \left[\varphi(a) - \varphi(a-y)\right] \\ & + (D_x + D_y) \log \frac{\varphi(x) - \varphi(a+y)}{\varphi(x) - \varphi(a-y)}. \end{aligned} \right.$$

Bod a volme nekonečně blízko při polu p stupně prvního, takže bude $a = p + \varepsilon$, a pro funkci $\varphi(a)$ existuje rozvoj tvaru

$$\varphi(a) = \frac{R}{\varepsilon} + C + C'\varepsilon + C''\varepsilon^2 + \ldots,$$

v němž nás zajímá hlavně **residuum** R.

Použitím této řady nalezneme rozvoje

$$\log\left[\varphi(a)-\varphi(x+y)\right]=\log\frac{R}{\varepsilon}+\frac{C-\varphi(x+y)}{R}\varepsilon+\dots,$$

$$\log\left[\varphi(a)-\varphi(a+y)\right]=\log\frac{R}{\varepsilon}+\frac{C-\varphi(p+y)}{R}\varepsilon+\dots,$$

z nichž plyne derivováním

$$2D_a\log\left[\varphi(a)-\varphi(x+y)\right]=-\frac{2}{\varepsilon}+2\frac{C-\varphi(x+y)}{R}+\dots,$$

$$(D_a\mp 2D_y)\log\left[\varphi(a)-\varphi(a\pm y)\right]=-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{C-\varphi(p\pm y)}{R}+\dots;$$

po dosazení těchto výrazů do rovnice (A) vypadnou členy $\frac{1}{\varepsilon}$ a taktéž konstanta C, i vyjde porovnáním stálých členů vztah

$$(B)\quad 2\varphi(x+y)=\varphi(p+y)+\varphi(p-y)-R(D_x+D_y)\log\frac{\varphi(x)-\varphi(p+y)}{\varphi(x)-\varphi(p-y)}.$$

Ve zvláštním případě $\varphi(x)=\operatorname{sn}x$ máme $p=iK'$, $R=\frac{1}{k}$, a ježto

$$\operatorname{sn}(iK'+y)+\operatorname{sn}(iK'-y)=0,$$

vyjde

$$2\operatorname{sn}(x+y)=\frac{1}{k}(D_x+D_y)\log\frac{1+k\operatorname{sn}x\operatorname{sn}y}{1-k\operatorname{sn}x\operatorname{sn}y}.$$

Z rovnice (B) lze ustanoviti residuum funkce $\varphi(x)$ na druhém polu p', t. j. součinitele R' v rozvoji

$$\varphi(x)=\frac{R'}{\varepsilon}+C+C'\varepsilon+C''\varepsilon^2+\dots,$$

kde $x=p'+\varepsilon$. Užijeme-li tu totiž rozvojů

$$\varphi(x+y)=\varphi(p'+y)+\dots,$$

$$\log\frac{\varphi(x)-\varphi(p+y)}{\varphi(x)-\varphi(p-y)}=\log\frac{R'-\left[\varphi(p+y)-C\right]\varepsilon+\dots}{R'-\left[\varphi(p-y)-C\right]\varepsilon+\dots}$$

$$=\frac{\varphi(p-y)-\varphi(p+y)}{R'}\varepsilon+\dots,$$

obdržíme z (B) především rovnici

$$(B')\quad 2\varphi(p'+y)=\varphi(p+y)+\varphi(p-y)+\frac{R}{R'}\left[\varphi(p+y)-\varphi(p-y)\right].$$

Volme nyní y velmi malé a rozviňme obě strany této rovnice podle mocností veličiny y. Levá strana začíná svůj rozvoj členem $\frac{2R'}{y}$, pravá strana však $\frac{2R^2}{R'y}$ a tedy musí $2R' = \frac{2R^2}{R'}$, t. j. $R'^2 = R^2$.

Z rovnice té vychází buď $R' = R$ aneb $R' = -R$. Případ první není možný, poněvadž pro $R' = R$ rovnice (B') by byla $\varphi(p'+y) = \varphi(p+y)$ a odtud pro $y = x - p'$

$$\varphi(x) = \varphi(x + p - p'),$$

což vyžaduje, aby $p - p'$ bylo periodou, věc to nemožná. Tím tedy ukázáno, že na druhém polu p' má funkce $\varphi(x)$ residuum opačné $R' = -R$. Z rovnice (B') vychází pak zajímavý vztah

$$(B^0) \qquad \varphi(p'+y) = \varphi(p-y),$$

jehož použitím rovnice (B) obdrží tvar

$$(B^*) \quad 2\varphi(x+y) = \varphi(p+y) + \varphi(p'+y) - R(D_x + D_y)\log\frac{\varphi(x) - \varphi(p+y)}{\varphi(x) - \varphi(p'+y)},$$

jejž podal pan G. Fontené (C. R. sv. 122).

Vztah (B^0) lze také vyjádřiti větou, že součet argumentů, pro něž funkce $\varphi(x)$ obdrží danou hodnotu, je stálý $(= p + p')$.

Metamorfosa pigmentová.

(Přehled.)

Napsal *Vladislav Růžička.*

(Dokončení.)

Vznik žloutenky novorozeňat byl rozmanitě vykládán. Virchow a Orth hledali příčinu v gastroduodenalním katarrhu. Frerichs se domníval, že uzavřením veny pupeční po porodu může tlak v jaterních cevách nyní úplně naplněných klesnouti až pod tlak, jímž se žluč vylučuje ze žlučových kapillar, a tím že může žluč býti vehnána do krve. Frerichs považoval také tento ikterus za hepatogenní. Také Hewitt a Silbermann, též F. Weber (84) tvrdili, že ihned po porodu nastávající rozšíření jaterní krevní dráhy způsobuje kompressi žlučových kanálků v játrech a stasi žlučovou. Birch-Hirschfeld (276) ukázal na časté venostasy v průběhu porodu a po něm a na oedem z nich ve vazivu provázejícím žlučovody jater se vyvíjející, oedem t. zv. pouzdra Glissonova. Tento oedem se dostavuje hlavně při protrahovaném porodu, zauzlení pupeční šňůry, slabé srdeční činnosti novorozence a způsobuje kompresse žlučovodů a resorpční ikterus. Na podporu uvedeno, že se v perikardialním transsudatu dvakráte zdařila zkouška na kyseliny žlučové.

B. Schultze (263) dokázal, že ikterus novorozených jest jaksi zjevem fysiologickým, jenž nastává i bez rozmnožené tvorby žluče, když následkem klesajícího tlaku krevního žluč opět do krve přestoupí. Poněvadž se tento ikterus často objevuje po pozdním zauzlení pupeční šňůry, jde asi o silnější