Matyáš Lerch
Ze základů theorie funkcí elliptických. [I.]

Věstník Čes. Akademie cis. Fr. Jos. pro vědy, slovesnost a umění v Praze 5 (1896), 397–413

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501496

VĚSTNÍK

ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA

PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.

ROČNÍK V. ŘÍJEN 1896. ČÍSLO 7.

Referáty a zprávy vědecké, slovesné a umělecké.

Ze základů theorie funkcí elliptických.

Referuje *M. Lerch*, professor na universitě ve Fryburku švýcarském.

I.

1. Buďte A, B, C, D, E veličiny stálé (komplexní), tak volené, aby nullová místa celistvé funkce $R(\xi) = A\xi^4 + B\xi^3 + C\xi^2 + D\xi + E$ byla jednoducha, a uvažujme integrál elliptický

$$x = \int \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}},$$

v němž dolní mez je jistá konstanta, kterou ponecháme volnou. Rovnicí touto je definováno x jako funkce proměnné ξ, a inversí opět ξ jako analytická funkce proměnné x, kteroužto funkci znamenejme $\xi = \varphi(x)$. Ta tedy hoví differencialní rovnici $\frac{d\xi}{dx} = \sqrt{R(\xi)}$. O této funkci *elliptické* se různým způsobem dokazuje, že jest jednoznačnou v celé rovině znázorňující průběh komplexní proměnné x, a že jest dvojperiodickou, t. j. že existují dvě veličiny ω, ω', jichž poměr není realný, a pro něž platí identicky

$$\varphi(x + \omega) = \varphi(x), \quad \varphi(x + \omega') = \varphi(x).$$

Tyto základní vlastnosti funkce $\varphi(x)$ nepředpokládejme zatím za známy, nýbrž vyviňme její vlastnost addiční. Tato podána byla již Eulerem, ale teprve Abel a Jacobi dospěli k poznání pravé povahy těchto funkcí. Větu addiční funkcí elliptických možno nyní odůvodniti způsoby rozmanitými; my se v této zprávě přidržíme methody pana *Hermita*, vyložené v článku Sur quelques propositions fondamentales de la théorie des fonctions elliptiques, par Ch. Hermite à Paris, obsaženém v publikaci Mathematical papers read at the International Mathematical Congress held in connection with the World's Columbian Exposition Chicago 1893, vydané r. 1896, kterýžto článek podati ve volném překladě českým kruhům odborným jest vlastně účelem této zprávy.

* * *

Znamenejme a libovolnou stálou a píšíce $\alpha = \varphi(a)$ uvažujme výraz

$$y = \log(\xi - \alpha)\,.$$

Derivováním vůči x vychází nejprve

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{d\xi}{dx} \cdot \frac{1}{\xi - \alpha}\,,$$

tedy po dosazení hodnoty $\frac{d\xi}{dx} = \sqrt{R(\xi)}$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sqrt{R(\xi)}}{\xi - \alpha}\,,$$

odtud pak opětným derivováním plyne

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{(\xi - \alpha)\, R'(\xi) - 2R(\xi)}{2(\xi - \alpha)^2}\,,$$

a podobně se ukáže dále

$$\frac{\partial^2 y}{\partial a^2} = \frac{(\alpha - \xi)\, R'(\alpha) - 2R(\alpha)}{2(\xi - \alpha)^2}\,.$$

Odečtením tohoto výrazu od (1) se objeví rovnice

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial a^2} = \frac{(\xi - \alpha)\,[R'(\xi) + R'(\alpha)] - 2\,[R(\xi) - R(\alpha)]}{2(\xi - \alpha)^2}\,,$$

v níž lze pravou stranu zjednodušiti.

Užijeli se výrazu

$$R(\xi) = R(\alpha) + R'(\alpha)(\xi - \alpha) + \frac{1}{2} R''(\alpha)(\xi - \alpha)^2 + \frac{1}{6} R'''(\alpha)(\xi - \alpha)^3$$
$$+ \frac{1}{24} R^{(4)}(\alpha)(\xi - \alpha)^4$$

a výrazu pro $R'(\xi)$ odtud plynoucího, obdržíme pro čitatele

$$[R'(\xi) + R'(\alpha)](\xi - \alpha) - 2\,[R(\xi) - R(\alpha)]$$

výraz

$$\frac{1}{6} R'''(\alpha)(\xi - \alpha)^3 + \frac{1}{12} R^{(4)}(\alpha)(\xi - \alpha)^4,$$

a tedy pravá strana naší rovnice bude

$$\frac{1}{12} R'''(\alpha)(\xi - \alpha) + \frac{1}{24} R^{(4)}(\alpha)(\xi - \alpha)^2,$$

i lze ji psáti také ve tvaru

$$\left(2A\alpha+\frac{1}{2}B\right)(\xi-\alpha)+A(\xi-\alpha)^2$$

aneb též

$$A\xi^2+\frac{1}{2}B\xi-\left(A\alpha^2+\frac{1}{2}B\alpha\right);$$

hoví tedy výraz o proměnných x, a

$$y=\log(\xi-\alpha)$$

rovnici parcialné druhého řádu

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 y}{\partial a^2}=A\xi^2+\frac{1}{2}B\xi-\left(A\alpha^2+\frac{1}{2}B\alpha\right), \tag{2}$$

kterou chceme integrovati. Položme za tím účelem

$$\psi(x)=\int_{x_0}^{x}\left(A\xi^2+\frac{1}{2}B\xi\right)dx, \tag{3}$$

kde x_0 je libovolná konstanta. Pak vychází z (2) jako obecné řešení výraz

$$y=f(x-a)+f_1(x+a)+\int_{x_0}^{x}\psi(x)\,dx+\int_{x_0}^{a}\psi(a)\,da, \tag{4}$$

v němž $f(z)$ a $f_1(z)$ jsou funkce libovolné. Naše uvažované y je však řešení již **určité**, a tedy zde budou také funkce $f(z)$ a $f_1(z)$ výrazy zcela určitými, obsahujícími vedle x_0 pouze parametry výrazu y.

Rovnici tuto pišme

$$\log(\xi-\alpha)=f(x-a)+f_1(x+a)+\int_{x_0}^{x}\psi(x)\,dx+\int_{x_0}^{a}\psi(x)\,dx, \tag{4^a}$$

a differencujme obě strany vůči literám x i a, stále majíce na zřeteli význam liter ξ a α daný rovnicemi $\xi=\varphi(x)$, $\alpha=\varphi(a)$. Znamenáme-li

$$f'(x)=F(x), \quad f'_1(x)=F_1(x),$$

vyjdou výsledky

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)-\varphi(a)}&=F(x-a)+F_1(x+a)+\psi(x),\\ \frac{\varphi'(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}&=F(x-a)-F_1(x+a)+\psi(a),\end{aligned}\right. \tag{5}$$

které slouží k seznání funkcí F a F_1, a tím také k seznání funkcí f a f_1.

Vyměnímeli v druhé z rovnic (5) litery a, x, a obrátímeli znamení na obou stranách, vyjde,

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = -F(a-x) + F_1(x+a) + \psi(x),$$

a porovnámeli tento výsledek s prvním ze vzorců (5), máme

$$F(x-a) = -F(a-x),$$

t. j. *funkce $F(x)$ je lichou.*

Znamenejme nyní

$$\Phi(x, a) = \frac{\varphi'(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}, \tag{6}$$

i bude dle druhého ze vzorců (5)

$$\begin{aligned}\Phi(x+y, a) - \Phi(x-y, a) = {} & F(x+y-a) - F(x-y-a) \\ & + F_1(x-y+a) - F_1(x+y+a),\end{aligned}$$

čímž eliminováno $\psi(a)$. Ježto $F(x)$ je funkce lichá, jest pravá strana symetrickou vůči literám x, a. Neboť výměnou liter těch se obdrží výraz

$$F(a+y-x) - F(a-y-x) + F_1(a-y+x) - F_1(a+y+x)$$

totožný s výrazem

$$-F(x-y-a) + F(x+y-a) + F_1(x-y+a) - F_1(x+y+a)$$

t. j. s výrazem původním.

Platí tedy vztah

$$\Phi(x+y, a) - \Phi(x-y, a) = \Phi(a+y, x) - \Phi(a-y, x). \tag{7}$$

V druhé z rovnic (5)

$$\Phi(x, a) = F(x-a) - F_1(x+a) - \psi(a) \tag{5^a}$$

pišme $a+y$ za a, podruhé $a-y$ za a, a sečtěme výsledky; tím se obdrží

$$\begin{aligned}\Phi(x, a+y) + \Phi(x, a-y) = {} & F(x-y-a) - F_1(x+y+a) \\ & + F(x+y-a) - F_1(x-y+a) \\ & - \psi(a+y) - \psi(a-y).\end{aligned}$$

Dosadímeli dále do (5^a) $x+y$ a $x-y$ za x, objeví se po sečtení výsledků:

$$\begin{aligned}\Phi(x+y, a) + \Phi(x-y, a) = {} & F(x+y-a) - F_1(x+y+a) \\ & + F(x-y-a) - F_1(x-y+a) \\ & - 2\psi(a).\end{aligned}$$

Z posledních dvou rovnic vychází vztah

$$(8)\quad \begin{cases} \Phi(x+y,a)+\Phi(x-y,a) \\ \quad =\Phi(x,a+y)+\Phi(x,a-y)+\psi(a+y)+\psi(a-y)-2\psi(a), \end{cases}$$

který neobsahuje již funkcí F a F_1. Pišme jej ve tvaru

$$(8^*)\quad \begin{cases} \psi(a+y)+\psi(a-y)-2\psi(a) \\ \quad =\Phi(x+y,a)+\Phi(x-y,a)-\Phi(x,a+y)-\Phi(x,a-y), \end{cases}$$

a všimněme si podrobněji jeho obsahu. Funkce $\psi(x)$ definovaná rovnicí (3)

$$\psi(x)=\int_{x_0}^{x}\left[A\varphi(x)^2+\frac{1}{2}B\varphi(x)\right]dx$$

má dle (8*) tu vlastnost, že výraz

$$\psi(a+y)+\psi(a-y)-2\psi(a)$$

lze vyjádřiti racionalně pomocí veličin

$$\varphi(x+y),\ \varphi(x-y),\ \varphi(a+y),\ \varphi(a-y),\ \varphi'(a+y),\ \varphi'(a-y),\ \varphi(x),$$
$$\varphi(a),\ \varphi'(a),$$

které jsou elliptické funkce svých argumentů. Funkci $\psi(x)$ nazýváme elliptickým *integrálem druhého způsobu* (intégrale de seconde espèce), a *rovnice (8*) podává větu addiční tohoto integrálu.*

V rovnici (8) je dovoleno klásti $x=a$, poněvadž se tím žádný z argumentů funkcí Φ a ψ nestane singularným. Položímeli tedy do rovnice (8) $x=a$, a odečtemeli výsledek od rovnice té, obdržíme

$$(9)\quad \begin{cases} \Phi(x+y,a)+\Phi(x-y,a)=\Phi(x,a+y)+\Phi(x,a-y)+\Phi(a+y,a) \\ \qquad +\Phi(a-y,a)-\Phi(a,a+y)-\Phi(a,a-y). \end{cases}$$

Sečtěme nyní rovnice (7) a (9), i obdržíme

$$(10)\quad \begin{cases} 2\Phi(x+y,a)=\Phi(x,a+y)+\Phi(x,a-y)+\Phi(a+y,x) \\ \qquad -\Phi(a-y,x)+\Phi(a+y,a)+\Phi(a-y,a) \\ \qquad -\Phi(a,a+y)-\Phi(a,a-y), \end{cases}$$

aneb nahradímeli jednotlivá Φ jich hodnotami stanovenými na základě vzorce (6),

$$(10^*)\quad \begin{cases} \dfrac{2\varphi'(a)}{\varphi(x+y)-\varphi(a)}=\dfrac{\varphi'(a+y)+\varphi'(a)}{\varphi(a+y)-\varphi(a)}+\dfrac{\varphi'(a-y)+\varphi'(a)}{\varphi(a-y)-\varphi(a)} \\ \qquad -\dfrac{\varphi'(a+y)-\varphi'(x)}{\varphi(a+y)-\varphi(x)}-\dfrac{\varphi'(a-y)+\varphi'(x)}{\varphi(a-y)-\varphi(x)} \end{cases}$$

Rovnice tato podává obecnou větu addiční elliptických úkonů. K její odvození bylo třeba pouze předpokládati, že $\varphi(x)$ jest jednoznačná funkce x v jistém okolí bodu $x=0$; neb volíli se také hodnoty a, y dosti malými, budou všechny zde uvažované argumenty obsaženy v témž okolí.

[Z rovnice této lze dle Weierstrassa souditi, že $\varphi(x)$ je funkce jednoznačná; neboť pro $x=y$ máme rovnici

$$\frac{2\varphi'(a)}{\varphi(2x)-\varphi(a)}=\frac{\varphi'(a+x)+\varphi'(a)}{\varphi(a+x)-\varphi(a)}+\frac{\varphi'(a-x)+\varphi'(a)}{\varphi(a-x)-\varphi(a)}$$
$$-\frac{\varphi'(a+x)-\varphi'(x)}{\varphi(a+x)-\varphi(x)}-\frac{\varphi'(a-x)+\varphi'(x)}{\varphi(a-x)-\varphi(x)}:$$

probíháli proměnná x kruh poloměru r, probíhá $2x$ kruh poloměru $2r$, a v novém kruhu tomto má funkce φ povahu funkce racionalné; nyní lze opětováním úvahy rozšířiti znalost funkce do kruhu poloměru $4r$, $8r$, $16r, \ldots$, tedy do celé roviny.]

2. V případě $R(\xi)=(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)$ položme

$$x=\int_0 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}.$$

Jeli zvláště k realný ryzí zlomek, bude možno integrál rozvinouti v řadu

$$x=\xi+a_1\xi^3+a_2\xi^5+\ldots,$$

konvergentní pro $|\xi|<1$. Volme ξ realné mezi -1 a $+1$, a položme $\xi=\sin v$; tím integrál obdrží tvar

$$x=\int_0^v \frac{dv}{\sqrt{1-k^2\sin^2 v}}. \tag{11}$$

Pro $v=\frac{\pi}{2}$ obdrží x hodnotu

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\sqrt{1-k^2\sin^2 v}},$$

pro $v=-\frac{\pi}{2}$ pak je $x=-K$. Probíháli naopak x realný intervall od $-K$ do K jdoucí, odpovídají mu zcela určité hodnoty v, a sice probíhá v intervall $\left(-\frac{\pi}{2}\ldots\frac{\pi}{2}\right)$.

Tuto veličinu v nazval Jacobi amplitudou veličiny x ($v=\text{am}.\,x$), takže pak bude

$$\xi=\sin\text{am}\,x\,,\quad \sqrt{1-\xi^2}=\cos\text{am}\,x\,; \tag{12}$$

Jacobi dále znamenal $\sqrt{1-k^2\sin^2 v}=\Delta v$, takže se důsledně píše

$$\sqrt{1-k^2\xi^2}=\Delta\,\text{am}\,x\,. \tag{12a}$$

Pro tyto úkony elliptické zavedl později Gudermann označení jednodušší $sn\,x$, $cn\,x$, $dn\,x$, kterého budeme dále užívati; jejich derivace lze psáti $sn'\,x$ etc.

Dle definice jest
$$sn'\,x = cn\,x \,.\, dn\,x\,,$$
a pomocí tohoto vzorce se vypočte dále
$$cn'\,x = -\,sn\,x\,dn\,x\,,$$
$$dn'\,x = -\,k^2\,sn\,x \,.\, cn\,x\,.$$

Dále se snadno vypočte, že
$$\left(\frac{sn\,x}{cn\,x}\right)' = \left(1 + \frac{sn^2 x}{cn^2 x}\right) dn\,x\,,$$
$$\left(\frac{sn\,x}{dn\,x}\right)' = \left(1 + k^2\,\frac{sn^2 x}{dn^2 x}\right) cn\,x\,.$$

Klademeli tedy pořadem $\xi = sn\,x\,, \dfrac{sn\,x}{cn\,x}\,, \dfrac{sn\,x}{dn\,x}$, obdržíme funkce, které hoví každá své příslušné rovnici differencialné
$$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = (1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)\,,$$
$$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = (1+\xi^2)(1+k'^2\xi^2)\,, k' = \sqrt{1-k^2}\,,$$
$$\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = (1+k^2\xi^2)(1-k'^2\xi^2)\,.$$

Každá z těchto funkcí ξ definuje určitou funkci $\varphi(x)$, jež vznikne inversí integrálu tvaru
$$x = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}}\,,$$
a sice jsou tyto funkce liché, t. j. $\varphi(-x) = -\varphi(x)$. Pro liché funkce $\varphi(x)$ však na pravé straně rovnice (10) vymizí první dva členy, volíme-li $a = 0$, což vyžaduje, aby $\varphi(0)$ bylo konečné, a tedy $= 0$. I zbude

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{2\varphi'(0)}{\varphi(x+y)} &= -\frac{\varphi'(y) - \varphi'(x)}{\varphi(y) - \varphi(x)} + \frac{\varphi'(y) + \varphi'(x)}{\varphi(y) + \varphi(x)} \\ &= 2\,\frac{\varphi(x)\,\varphi'(y) - \varphi'(x)\,\varphi(y)}{\varphi^2(x) - \varphi^2(y)}\,. \end{aligned} \right.$$

Prvou z těchto rovnic lze také psáti

$$(12^a) \qquad \frac{2\varphi'(0)}{\varphi(x+y)} = D_x \log \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{\varphi(x) - \varphi(y)} + D_y \log \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{\varphi(x) - \varphi(y)}\,.$$

Podle (12) jest v našich případech

(a) $$sn\,(x+y)=\frac{sn^2 x - sn^2 y}{sn\,x\,cn\,y\,dn\,y - sn\,y\,cn\,x\,dn\,x},$$

$$\frac{sn\,(x+y)}{cn\,(x+y)}=\frac{sn^2 x - sn^2 y}{sn\,x\,cn\,x\,dn\,y - sn\,y\,cn\,y\,dn\,x},$$

$$\frac{sn\,(x+y}{dn\,(x+y)}=\frac{sn^2 x - sn^2 y}{sn\,x\,dn\,x\,cn\,y - sn\,y\,dn\,y\,cn\,x};$$

z rovnic těch obdržíme

(b) $$cn\,(x+y)=\frac{sn\,x\,cn\,x\,dn\,y - sn\,y\,cn\,y\,dn\,x}{sn\,x\,cn\,y\,dn\,y - sn\,y\,cn\,x\,dn\,x},$$

(c) $$dn\,(x+y)=\frac{sn\,x\,dn\,x\,cn\,y - sn\,y\,dn\,y\,cn\,x}{sn\,x\,cn\,y\,dn\,y - sn\,y\,cn\,x\,dn\,x}.$$

Čitatele a jmenovatele zlomků (a), (b), (c) budeme násobiti výrazem $sn\,x\,cn\,y\,dn\,y + sn\,y\,cn\,x\,dn\,x$; tím se objeví ve jmenovateli výraz

$$sn^2 x\,cn^2 y\,dn^2 y - sn^2 y\,cn^2 x\,dn^2 x$$
$$=\xi^2(1-\eta^2)(1-k^2\eta^2)-\eta^2(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2),$$

kde psáno $\xi = sn\,x$, $\eta = sn\,y$. Výraz ten lze psáti

$$(\xi^2-\eta^2)(1-k^2\xi^2\eta^2),$$

takže místo (a) obdržíme

(13ª) $$sn\,(x+y)=\frac{sn\,x\,cn\,y\,dn\,y + sn\,y\,cn\,y\,dn\,x}{1-k^2 sn^2 x\,sn^2 y};$$

podobně se vyvine

(13ᵇ) $$cn\,(x+y)=\frac{cn\,x\,cn\,y - sn\,x\,dn\,x\,sn\,y\,dn\,y}{1-k^2 sn^2 x\,sn^2 y},$$

(13ᶜ) $$dn\,(x+y)=\frac{dn\,x\,dn\,y - k^2 sn\,x\,cn\,x\,sn\,y\,cn\,y}{1-k^2 sn^2 x\,sn^2 y}.$$

3. Zvolímeli za $R(\xi)$ polynom stupně třetího, t. j. klademeli $A=0$, zůstanou všecky předešlé výsledky v platnosti. Zvolme

$$R(\xi)=4\xi^3-g_2\xi-g_3$$

a definujme integrál

$$x=-\int_\xi^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}},$$

kde integrál zůstává aspoň pro veliká ξ realným, jsou-li g_2, g_3 realné veličiny. Poněvadž pro dosti velká ξ

$$\frac{1}{\sqrt{R(\xi)}} = \frac{1}{2}\xi^{-\frac{3}{2}} + a_1 \xi^{-\frac{7}{2}} + a_2 \xi^{-\frac{9}{2}} + \ldots,$$

obdržíme

$$x = -\xi^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{5} a_1 \xi^{-\frac{5}{2}} - \frac{2}{7} a_2 \xi^{-\frac{7}{2}} - \ldots\ldots,$$

kde nám na konstantách $a_1, a_2, \ldots$ zatím nezáleží.

Zdvojmocněním vyjde tvar

$$x^2 = \frac{1}{\xi} + \frac{b_1}{\xi^3} + \frac{b_2}{\xi^4} + \ldots,$$

a obrácením nalezneme

$$\frac{1}{\xi} = x^2 - b_1 x^6 + c x^8 + c' x^{10} + \ldots\ldots$$

a tedy

$$\xi = \frac{1}{x^2} + c_1 x^2 + c_2 x^4 + c_3 x^6 + \ldots, \ (c_1 = b_1).$$

Tímto prvkem je definována elliptická funkce, kterou znamenejme s Weierstrassem $\wp(x)$, takže máme pro malá x rozvoj tvaru

$$\wp(x) = \frac{1}{x^2} + c_1 x^2 + c_2 x^4 + c_3 x^6 + \ldots\ldots;$$

funkce ta je charakterisována mimo to rovnicí differencialnou

$$\wp'(x)^2 = 4\wp x^3 - g_2 \wp x - g_3.$$

Zvolme nyní ve vzorci (10) $\varphi(x) = \wp(x)$. Výraz

$$\Phi(x, a) = \frac{\varphi'(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = -D_a \log[\varphi(a) - \varphi(x)]$$

poskytne vzorce

$$\Phi(a+y, x) = -D_x \log\left[\wp(x) - \wp(a+y)\right],$$

$$\Phi(x, a+y) = -D_y \log\left[\wp(x) - \wp(a+y)\right],$$

$$\Phi(a, a+y) = -D_y \log\left[\wp(a) - \wp(a+y)\right].$$

Těchto dlužno užiti k přetvoření vzorce (10), jenž obdrží tvar

$$\frac{2\wp'(a)}{\wp(x+y)-\wp(a)}=D_y\log\frac{\wp(x)-\wp(a-y)}{\wp(x)-\wp(a+y)}$$

$$+D_x\log\frac{\wp(x)-\wp(a-y)}{\wp(x)-\wp(a+y)}$$

$$-D_y\log\frac{\wp(a)-\wp(a-y)}{\wp(a)-\wp(a+y)}$$

$$+\frac{\wp'(a)}{\wp(a+y)-\wp(a)}+\frac{\wp'(a)}{\wp(a-y)-\wp(a)}.$$

Obě strany rozviňme podle mocností veličiny a, kterou dlužno voliti v okolí místa $a=0$, a porovnejme součinitele při prvních mocnostech. Levá strana rovná se výrazu

$$\frac{-\frac{4}{a^3}+4c_1a+8c_2a^3+\dots}{-\frac{1}{a^2}+\wp(x+y)-c_1a^2-c_2a^4\dots}=\frac{4}{a}\,\frac{1-c_1a^4-2c_2a^6-\dots}{1-a^2\wp(x+y)+c_1a^4+c_2a^6+\dots}$$

a tedy lze ji rozvinouti v řadu

(a) $$\frac{2\wp'(a)}{\wp(x+y)-\wp(a)}=\frac{4}{a}+4\wp(x+y)\,a+\dots$$

Podobně bude dále

(b) $$D_y\log\frac{\wp(x)-\wp(a-y)}{\wp(x)+\wp(a-y)}=D_y\log\frac{\wp(x)-\wp(y)+\wp'(y)\,a+\dots}{\wp(x)-\wp(y)-\wp'(y)\,a+\dots}$$

$$=D_y\log\frac{1+\dfrac{\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}\,a+\dots}{1-\dfrac{\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}\,a+\dots}=2\,a\,D_y\,\frac{\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}$$

$$+\alpha_1a^2+\alpha_2a^3+\dots$$

(c) $$D_x\log\frac{\wp(x)-\wp(a-y)}{\wp(x)-\wp(a+y)}=2\,a\,D_x\,\frac{\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}+\dots$$

(d) $$D_y\log\frac{\wp(a)-\wp(a-y)}{\wp(a)-\wp(a+y)}=D_y\log\frac{1-a^2\wp(y)+\dots}{1-a^2\wp(y)+\dots}$$

$$=\beta_1a^2+\beta_2a^3+\dots;$$

konečně bude

(e) $$\frac{\wp'(a)}{\wp(a+y)-\wp a}=\frac{2}{a}\,\frac{1-c_1a^4+\dots}{1-a^2\wp(y)+\dots}=\frac{2}{a}+2\wp(y)\,a+\dots$$

Výsledek porovnání součinitelů při a jest pak

$$(14)\qquad \wp(x+y)=\frac{1}{2}D_x\frac{\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}+\frac{1}{2}D_y\frac{\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}+\wp(y),$$

kterýžto vzorec lze též psáti

$$(14^a)\qquad \wp(x+y)=\wp(y)-\frac{1}{2}D_y^2\log\Big[\wp(x)-\wp(y)\Big]$$
$$-\frac{1}{2}D_{xy}^2\log\Big[\wp(x)-\wp(y)\Big].$$

Vyměnímeli x a y, vyjde

$$\wp(x+y)=\wp(x)-\frac{1}{2}D_x^2\log\Big[\wp(x)-\wp(y)\Big]-\frac{1}{2}D_{xy}^2\log\Big[\wp(x)-\wp(y)\Big];$$

přičtemeli k předešlému výsledku, obdržíme

$$\wp(x+y)=\frac{\wp(x)+\wp(y)}{2}-\frac{1}{4}\Big(D_x^2+2D_{xy}^2+D_y^2\Big)\log\Big[\wp(x)-\wp(y)\Big]$$

čili ve formě symbolické

$$(15)\qquad \wp(x+y)=\frac{\wp(x)+\wp(y)}{2}-\frac{1}{4}\Big(D_x+D_y\Big)^2\log\Big[\wp(x)-\wp(y)\Big].$$

Abychom ji přetvořili, vypočtěme

$$\Big(D_x^2+D_y^2\Big)\log\Big[\wp(x)-\wp(y)\Big]=\frac{\wp''(x)-\wp''(y)}{\wp(x)-\wp(y)}-\frac{\wp'(x)^2+\wp'(y)^2}{\big(\wp(x)-\wp(y)\big)^2}.$$

Z rovnice

$$\wp'(x)^2=4\wp^3(x)-g_2\wp(x)-g_3$$

plyne differencováním

$$\wp''(x)=6\wp^2(x)-g_2,$$

a tedy náš výraz zní

$$\Big(D_x^2+D_y^2\Big)\log\Big[\wp(x)-\wp(y)\Big]=6\wp(x)+6\wp(y)-\frac{\wp'(x)^2+\wp'(y)^2}{\big[\wp(x)-\wp(y)\big]^2}.$$

Dále jest

$$D_{xy}^2\log\Big[\wp(x)-\wp(y)\Big]=\frac{\wp'(x)\wp'(y)}{\big[\wp(x)-\wp(y)\big]^2},$$

a tedy bude podle posledních dvou vzorců

$$\left(D_x^2 + 2\,D_{xy}^2 + D_y^2\right) \log \left[\wp(x) - \wp'(y)\right]$$
$$= 6\,\wp(x) + 6\,\wp(y) - \left[\frac{\wp'(x) - \wp'(y)}{\wp(x) - \wp(y)}\right]^2.$$

Následkem toho vzorec (15) bude

$$(15^*) \qquad \wp(x+y) = \frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(x) - \wp'(y)}{\wp(x) - \wp(y)}\right]^2 - \wp(x) - \wp(y);$$

toť addiční věta funkce $\wp u$.

4.*) Poněvadž v našem případě $A = 0$, $B = 4$, zní definice funkce $\psi(x)$ daná vzorcem (3) takto:

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} 2\,\wp(x)\,dx.$$

Užijemeli rozvoje

$$\wp(x) = \frac{1}{x^2} + c_1 x^2 + c_2 x^4 + \ldots,$$

obdržíme

$$\psi(x) = 2\,\zeta(x_0) - 2\,\zeta(x),$$

při čemž kladeno

$$\zeta(x) = \frac{1}{x} - \frac{c_1}{3} x^3 - \frac{c_2}{5} x^5 \ldots,$$

takže

$$\wp(x) = -D_x \zeta(x).$$

Rovnice (8*) pak poskytne, zvolímeli $x_0 = a$:

$$4\,\zeta(a) - 2\,\zeta(a+y) - 2\,\zeta(a-y)$$
$$= D_a \log \frac{\left[\wp(x) - \wp(a+y)\right]\left[\wp(x) - \wp(a-y)\right]}{\left[\wp(a) - \wp(x+y)\right]\left[\wp(a) - \wp(x-y)\right]}$$

čili

$$\zeta(a+y) + \zeta(a-y) - 2\,\zeta(a)$$
$$= \frac{1}{2} D_a \log \frac{\left[\wp(a) - \wp(x-y)\right]\cdot\left[\wp(a) - \wp(x-y)\right]}{\left[\wp(x) - \wp(a+y)\right]\cdot\left[\wp(x) - \wp(a-y)\right]}.$$

Zde pravá strana musí býti na x nezávislou, ano se x na levé straně nevyskytuje; abychom ji obdrželi, rozviňme podle mocností x. Zní

$$\frac{1}{2} D_a \log x^4 \frac{\left[\wp(a) - \wp(y) - \wp'(y)x - \ldots\right]\left[\wp(a) - \wp(y) + \wp'(y)x - \ldots\right]}{\left[1 - \wp(a+y)x^2 + \ldots\right]\cdot\left[1 - \wp(a-y)x^2 + \ldots\right]}.$$

*) Úvahy §§. 4–8 se v článku p. Hermitea nenacházejí.

Poněvadž $D_a \log x^4 = 0$, obdržíme stálý člen

$$\frac{1}{2} D_a \log \left[\wp(a) - \wp(y)\right]^2,$$

t. j. relace naše bude

$$\zeta(a+y) + \zeta(a-y) - 2\zeta(a) = D_a \log \left[\wp(a) - \wp(y)\right]. \tag{16}$$

Rozvineme-li obě strany podle mocností veličiny $a - y$, a porovnámeli členy stálé, vyjde

$$\zeta(2y) - 2\zeta(y) = \frac{1}{2} \frac{\wp''(y)}{\wp'(y)}. \tag{17}$$

Odtud plyne

$$\frac{\zeta(2^k y)}{2^k} - \frac{\zeta(2^{k-1}y)}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^{k+1}} \frac{\wp''(2^{k-1}y)}{\wp'(2^{k-1}y)};$$

sečtemeli tyto výsledky pro $k = 1, 2, 3 \ldots n$, obdržíme

$$\frac{\zeta(2^n y)}{2^n} - \zeta(y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \frac{\wp''(2^{k-1}y)}{\wp'(2^{k-1}y)}$$

čili

$$\zeta(2^n y) = 2^n \zeta(y) + \sum_{\alpha=0}^{n-1} 2^{n-\alpha-2} \frac{\wp''(2^\alpha y)}{\wp'(2^\alpha y)}. \tag{17^a}$$

Probíháli y konvergenční kruh příslušný k základnímu rozvoji

$$\zeta(y) = \frac{1}{y} - \frac{c_1}{3} y^3 - \frac{c_2}{5} y^5 - \cdots,$$

zůstává prvý člen na pravé straně rovnice (17^a) jednoznačným, a ostatní část pravé strany jest jednoznačná, poněvadž funkce $\wp(x)$ má v celé rovině povahu funkce racionalné. Probíháli však y kruh poloměru r, probíhá $2^n y = x$ kruh poloměru $2^n r$, a tedy jest dle (17^a) funkce $\zeta(x)$ v celé rovině jednoznačnou funkcí a má povahu funkce racionalnou; neboť lze vhodnou volbou n docíliti toho, že kterýkoli předepsaný bod v konečné vzdálenosti zapadne dovnitř kruhu poloměru $2^n r$. Zároveň je patrno z rovnice (17^a), že poly funkce $\zeta(x)$ jsou místa, kde některá z funkcí $\wp'(2^\alpha y)$ zmizí neb je nekonečnou, a že jsou vždy jen stupně prvního.

Z rovnice

$$\wp(x) = - D_x \zeta(x)$$

však plyne dle posledního výsledku, že funkce $\wp(x)$ v okolí svých polů x_0 bude tvaru

$$\frac{C}{(x - x_0)^2} + a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$$

Buď a_0 polem funkce $\zeta(a)$; zvolme y tak, aby ani $a_0 + y$ ani $a_0 - y$ nebylo polem této funkce; pak se v rovnici (16) na levé straně pouze poslední člen $-2\zeta(a)$ stává nekonečným pro $a = a_0$, a rozvoj levé strany podle mocností rozdílu $a - a_0$ bude začínati členem $-\frac{2C_0}{a - a_0}$, jestliže

$$\zeta(a) = \frac{C_0}{a - a_0} + \mathfrak{P}(a - a_0).$$

Pravá strana stane se nekonečnou pouze na místech, kde $\wp(a)$ jest nekonečné, a na místech, kde $\wp(a) = \wp(y)$. K těmto posledním nebude náležeti a_0, byloli y vhodně voleno. I zbývají jen místa první, t. j. poly funkce $\wp(a)$. V jich okolí bude existovati rozvoj tvaru

$$D_a \log\left[\wp(a) - \wp(y)\right] = -\frac{2}{a - a_0} + \mathfrak{P}(a - a_0),$$

a tedy plyne z rovnice (16), že naše konstanta $C_0 = 1$. To jest: funkce $\zeta(x)$ v okolí svých polů x_0 má rozvoj tvaru

$$\zeta(x) = \frac{1}{x - x_0} + \mathfrak{P}(x - x_0)$$

kde jako všude dříve $\mathfrak{P}(x - x_0)$ značí řadu mocnin tvaru

$$A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \dots$$

Pro funkci $\wp(x)$ pak vychází odtud rozvoj tvaru

$$\wp(x) = \frac{1}{(x - x_0)^2} + \mathfrak{P}_1(x - x_0),$$

čímž určena konstanta C, kterou nebylo z rovnice (17^a) snadno uhodnouti.

Buď nyní opět x_0 polem funkce $\wp(x)$ a v rovnici (14) přejděme k limitě pro $x = x_0$. Rovnice ta zní

$$\wp(x + y) = \wp(y) - \frac{1}{2}\,\frac{\wp'(x)\,.\,\wp'(y) - \wp'(y)^2}{\left[\wp(x) - \wp(y)\right]^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\wp''(y)}{\wp(x) - \wp(y)},$$

a pro $x = x_0$ vymizí oba poslední členové na pravé straně, takže vychází

$$\wp(y + x_0) = \wp(y).$$

Jeli tedy x_0 polem funkce $\wp(x)$, je zároveň její periodou.

Podle toho musí býti

$$\wp(y + x_0) = \frac{1}{y^2} + a_1 y^2 + a_2 y^4 + \dots,$$

t. j. je-li x_0 polem funkce $\wp(x)$, bude v jistém jeho okolí

$$\wp(x) = \frac{1}{(x - x_0)^2} + a_1(x - x_0)^2 + a_2(x - x_0)^4 + \dots$$

Z rovnice (15*) vznikne v případě $x = y$:

$$\wp(2x) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(x)}{\wp'(x)}\right)^2 - 2\wp(x). \tag{18}$$

Buď x_1 nullové místo funkce $\wp'(x)$; pak bude $\frac{\wp''(x)}{\wp'(x)}$ na místě $x = x_1$ nekonečné, kdežto $\wp(x_1)$ je konečné; tudíž bude $\wp(2x_1) = \infty$, a tedy $2x_1$ periodou.

Místa x_1 snadně určíme. Neboť výraz

$$\wp'(x)^2 = 4\wp(x)^3 - g_2\wp(x) - g_3$$

vymizí pro ony hodnoty $x = x_1$, pro které $\wp(x_1)$ je kořenem rovnice třetího stupně

$$4\xi^3 - g_2\xi - g_3 = 0.$$

Kořeny ty znamenejme e_1, e_2, e_3, takže bude

$$\wp'(x)^2 = 4(\wp x - e_1)(\wp x - e_2)(\wp x - e_3). \tag{19}$$

Pro $\wp(x) = \xi$ máme rovnici

$$x = -\int_{\xi}^{\infty} \frac{d\zeta}{2\sqrt{(\zeta - e_1)(\zeta - e_2)(\zeta - e_3)}}.$$

Ježto $\wp'(x)$ vymizí pouze tehdy, je-li jedna z veličin $\wp(x) - e_\lambda$ nullou, musíme voliti $\xi = e_\lambda$, abychom obdrželi jednu z hodnot x_1; je-li e_1 největší z kořenů, volme $\xi = e_1$, načež integrál

$$\omega_1 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{d\zeta}{2\sqrt{(\zeta - e_1)(\zeta - e_2)(\zeta - e_3)}}$$

bude míti tu vlastnost, že $\wp'(-\omega_1) = 0$, a že tedy $2\omega_1$ jest periodou.

Nejmenší z kořenů e_1, e_2, e_3, které předpokládejme realnými, buď e_3; poněvadž $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, musí býti $e_3 < 0$; integrál

$$x = \int_{-\infty}^{\xi} \frac{d\zeta}{2\sqrt{(\zeta - e_1)(\zeta - e_2)(\zeta - e_3)}},$$

v němž $\xi \leqq e_3$, jest pomyslný a lze jej vyjádřiti řadou tvaru

$$x = \xi^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{5} a_1 \xi^{-\frac{5}{2}} + \ldots,$$

z níž obrácením vznikne

$$\xi = \frac{1}{x^2} + c_1 x^2 + c_2 x^4 + \ldots = \wp(x);$$

přejdeli tedy v integrálu ξ do e_3, obdržíme výraz

$$\omega_3 = i \int_{-\infty}^{e_3} \frac{d\zeta}{\sqrt{(e_1 - \zeta)(e_2 - \zeta)(e_3 - \zeta)}},$$

pro nějž $\wp'(\omega_3) = 0$, a tedy $2\omega_3$ bude periodou.

Pro funkci $\wp(u)$ nalezli jsme takto dvě periody $2\omega_1$ a $2\omega_3$, které nejsou v realném poměru.

Z rovnic

$$\wp(u + 2\omega_1) = \wp(u), \wp(u + 2\omega_3) = \wp(u)$$

snadně odvodíme

$$\wp(u + 2m\omega_1) = \wp(u), \wp(u + 2n\omega_3) = \wp(u),$$

kde m, n značí libovolná dvě čísla celistvá, kladná neb záporná, a odtud konečně

$$\wp(u + 2m\omega_1 + 2n\omega_3) = \wp(u),$$

takže $2m\omega_1 + 2n\omega_3$ je také periodou a polem funkce $\wp(u)$.

Z předcházejícího patrno, že veškery poly funkce $\wp u$ nemohou ležeti na téže přímce. Z polů funkce $\wp(u)$ jest jeden počátku nejbližší, t. j. má nejmenší prostý obnos; pol ten znamenejme $2\Omega_1$. Veďme přímku tímto bodem a počátkem, a z veškerých polů, které leží mimo tuto přímku, buď $2\Omega_3$ onen pol, pro který trojúhelník $(0, 2\Omega_1, 2\Omega_3)$ je největší. Ve tvaru

$$2m\Omega_1 + 2n\Omega_3, \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

je pak obsažen každý pol funkce $\wp(u)$.

Neb poněvadž poměr veličin Ω_1 a Ω_3 není realný, bude lze každou komplexní veličinu Ω uvésti na tvar

$$\Omega = \xi\Omega_1 + \eta\Omega_3,$$

kde ξ, η jsou veličiny realné; položme $\xi = m + \xi'$, $\eta = n + \eta'$, kde m, n jsou čísla celistvá, ξ', η' pak ryzí zlomky.

I bude

$$\Omega = (m\Omega_1 + n\Omega_3) + \xi'\Omega_1 + \eta'\Omega_3.$$

Jeli 2Ω periodou, bude jí také výraz

$$2\Omega - (2m\Omega_1 + 2n\Omega_3),$$

t. j.

$$2\xi\Omega_1 + 2\eta\Omega_3 = 2\Omega'$$

bude polem funkce $\wp(u)$. Avšak tento bod leží uvnitř rovnoběžníka $(0, 2\Omega_1, 2\Omega_1 + 2\Omega_3, 2\Omega_3)$, a plocha trojúhelníka $(0, 2\Omega_1, 2\Omega)$ jím stanoveného jest menší než plocha trojúhelníka $(0, 2\Omega_1, 2\Omega_3)$; ale to se příčí podmínce, dle které byl bod $2\Omega_3$ určen. Kdyby $\eta' = 0$, pak by bod $2\Omega'$ byl blíže počátku než bod $2\Omega_1$, což vyloučeno.

Tudíž existují dvě periody $2\Omega_1$ *a* $2\Omega_3$ *funkce* $\wp(u)$, *ze kterých lze veškery ostatní periody složiti ve tvaru* $m \,.\, 2\Omega_1 + n \,.\, 2\Omega_3$; *takové dvě periody tvoří soustavu základní.*

Buď a libovolný bod roviny; rovnoběžník, jehož vrcholy jsou body $(a,\ a+2\Omega_1,\ a+2\Omega_1+2\Omega_3,\ a+2\Omega_3)$, sluje rovnoběžníkem period $2\Omega_1$, $2\Omega_3$.

Známeli hodnotu funkce $\wp(u)$ ve všech bodech rovnoběžníka period, známe ji v celé rovině, poněvadž každý bod roviny lze uvésti na tvar $x+2m\Omega_1+2n\Omega_3$, kde x náleží rovnoběžníku period.

Ze stran rovnoběžníka period dvě různoběžné (sousední) béřeme jemu za příslušné, druhé dvě za cizí. Při této konvenci pak platí věta, že funkce $\wp(u)$ v rovnoběžníku period obdrží každou danou hodnotu na dvou místech. Touto větou, jakož i jinými obecnými vlastnostmi funkcí o dvou periodách nehodláme se nyní zanášeti. Chceme jenom poznamenati, že funkce $\wp(x)$ má v rovnoběžníku period jediný pol a sice stupně druhého; ten jest zároveň jediným polem funkce $\zeta(x)$ a sice stupně prvního. Veškery tyto poly jsou tvaru

$$2m\Omega_1+2n\Omega_3\,,\ (m,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots);$$

na ostatních místech se obě funkce chovají pravidelně.

Funkce $\wp'(u)$ mizí na místech jednoho ze tří tvarů

$$(2m+1)\Omega_1+2n\Omega_3,\quad 2m\Omega_1+(2n+1)\Omega_3,\quad (2m+1)\Omega_1+(2n+1)\,\Omega_3$$

neboť dvojnásobky jich jsou poly funkce $\wp(u)$, kdežto místa sama poly nejsou. Hodnoty funkce $\wp(u)$ na místech těchto tří kategorií nemohou býti jiné než e_1, e_2, e_3, a sice nemohou dvě z nich býti stejné; neb kdyby na př. e_2 se nevyskytovalo mezi nimi, pak by řešení rovnice $\wp(\Omega)=e_2$, kterého lze doclíiti integrálem

$$\Omega=\int_{e_2}^{\infty}\frac{d\xi}{2\sqrt{(\xi-e_1)(\xi-e_2)(\xi-e_3)}}$$

vzatým po křivé cestě, vyvolalo periodu 2Ω, poněvadž tu $\wp'(\Omega)=0$: tu však musí pro určitá celistvá μ, ν

$$2\Omega=\mu\,.\,2\Omega_1+\nu\,.\,2\Omega_3,$$

a poněvadž Ω samo není periodou, musí aspoň jedno z čísel μ, ν býti lichým.

Můžeme tedy klásti

$$\wp(\Omega_1)=e_1\ ,\ \wp(\Omega_1+\Omega_3)=e_2\ ,\ \wp(\Omega_3)=e_3,$$

z čehož zároveň vychází, že Ω_1 jest jednou z hodnot integrálu

$$\int_{e_1}^{\infty}\frac{d\xi}{2\sqrt{(\xi-e_1)(\xi-e_2)(\xi-e_3)}},$$

t. j. hodnotou takového integrálu vzatého po určité cestě. (Pokračování.)