Matyáš Lerch
Úvahy z počtu integrálního

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 5 (1896), č. 23, 1–16

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501495

Úvahy z počtu integrálního.

Sdílí M. Lerch.

Předloženo dne 24. dubna 1896.

I.

Zavedemeli do dvojnásobného integrálu

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x^2+y^2, xy)\, dx\, dy$$

proměnné u, v pomocí substituce $x^2+y^2=v$, $2xy=u$, obdržíme vzorec

$$(1) \qquad \int_0^\infty \int_0^\infty f(x^2+y^2, xy)\, dx\, dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty du \int_u^\infty f\left(v, \frac{u}{2}\right) \frac{dv}{\sqrt{v^2-u^2}}.$$

Volímeli zde $f(\xi, \eta) = e^{-a\xi}\eta^{s-1}$, kde a i s má realnou část kladnou, vznikne

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a(x^2+y^2)} x^{s-1} y^{s-1}\, dx\, dy = \frac{1}{2^s}\int_0^\infty u^{s-1}\, du \int_u^\infty e^{-av} \frac{dv}{\sqrt{v^2-u^2}}.$$

Levá strana splývá se čtvercem integrálu

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} x^{s-1}\, dx,$$

ehož hodnota zní

$$\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{a^{\frac{s}{2}}},$$

a tedy nacházíme vzorec

$$(2) \qquad \int_0^\infty u^{s-1}\, du \int_u^\infty \frac{e^{-av}\, dv}{\sqrt{v^2-u^2}} = \frac{2^s\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2}{4a^s}.$$

Chceme ukázati, že rovnice tato platí také v případě ryze pomyslného a, jeli realná část s obsažena v mezích 0 a $\frac{1}{2}$. Položme za tím účelem $a = ci$ a rozložme výraz

$$\text{(a)} \qquad \int_0^\infty u^{s-1}\,du \int_u^\infty \frac{e^{-civ}\,dv}{\sqrt{v^2-u^2}} = J$$

v část realnou a pomyslnou

$$J = \int_0^\infty u^{s-1}\,du \int_u^\infty \frac{\cos cv\,dv}{\sqrt{v^2-u^2}} - i \int_0^\infty u^{s-1}\,du \int_u^\infty \frac{\sin cv\,dv}{\sqrt{v^2-u^2}},$$

předpokládajíce k vůli stručnosti s realným.

Znamenámeli na okamžik

$$\varphi(z) = \int_z^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x^2-z^2}}, \qquad \psi(z) = \int_z^\infty \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x^2-z^2}},$$

bude lze náš integrál psáti

$$J = \int_0^\infty u^{s-1}\,\varphi(|cu|)\,du - i\,\text{sgn.}\,c \int_0^\infty u^{s-1}\,\psi(|cu|)\,du,$$

takže vše záleží na tom, jak se funkce $\varphi(z)$ a $\psi(z)$ chovají na místech $z = 0$ a $z = \infty$; neboť funkce ty na ostatních místech jsou konečny a spojity, a od chování jich na koncích integračních $z = 0$ a $z = \infty$ závisí existence integrálu.

Zabývejme se především integrálem $\varphi(z)$. Možno jej psáti

$$\varphi(z) = \int_z^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x^2-z^2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x^2+z^2}} \qquad \text{pro } 0 < z < \frac{\pi}{2}.$$

Druhá část je patrně konečná pro $z = 0$, i zbývá jen studovati část první. Tu obdržíme částečnou integrací

$$\int_z^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x^2-z^2}} = -\log z \,.\, \cos z + \int_z^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,.\, \log\left(x + \sqrt{x^2-z^2}\right) dx.$$

Odtud plyne, že funkce $u^{s-1}\varphi(|cu|)$ v případě $s > 0$ jest schopnou integrace od bodu $u = 0$. Podobně se to ukáže při $u^{s-1}\psi(|cu|)$.

Abychom vyšetřili povahu funkce $\varphi(z)$ pro veliká z, užijme vzorce

$$\varphi(z)=\int_0^\infty \frac{\cos(x+z)\,dx}{\sqrt{x}+2z\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\cos z}{\sqrt{2z}}\int_0^\infty \sqrt{\frac{2z}{2z+x}}\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}-\frac{\sin z}{\sqrt{2z}}\int_0^\infty \sqrt{\frac{2z}{2z+x}}\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}},$$

a odtud patrno, že funkce $\varphi(z).\sqrt{z}$ zůstává konečnou pro $z=\infty$; podobně se to ukáže pro funkci $\psi(z)\sqrt{z}$. Odtud ale patrno, že integrály

$$\int_0^\infty u^{s-1}\,\varphi(|cu|)\,du\,,\qquad \int_0^\infty u^{s-1}\,\psi(|cu|)\,du$$

konvergují absolutně za podmínky $0<s<\frac{1}{2}$.

Integrál J tedy existuje, i zbývá jen ukázati, že platí vztah

$$\lim_{a=0}\int_0^\infty u^{s-1}\,du\int_u^\infty \frac{e^{-civ}(e^{-av}-1)\,dv}{\sqrt{v^2-u^2}}=0\,.$$

Poněvadž výraz

$$\Phi(u)=\int_u^\infty e^{-civ}(e^{-av}-1)\frac{dv}{\sqrt{v^2-u^2}}$$

lze psáti

$$\Phi(u)=\frac{1}{\sqrt{2u}}\int_0^\infty e^{-ciu-cix}(e^{-au-ax}-1)\sqrt{\frac{2u}{2u+x}}\frac{dx}{\sqrt{x}},$$

bude možno určiti M tak veliké, aby bez ohledu na a integrál

$$\int_M^\infty u^{s-1}\,\Phi(u)\,du$$

byl menší než předepsaná libovolně malá veličina; určíli se po té a tak malé, aby v mezích $0<u\leq M$ byla funkce $\Phi(u)$ dosti malou, bude také lze docíliti pro integrál

$$\int_0^M u^{s-1}\,\Phi(u)\,du$$

hodnoty malé, a tedy bude

$$\lim_{a=0}\int_0^\infty u^{s-1}\,\Phi(u)\,du=0\,.$$

Tudíž platí vztah

$$\lim_{a=0}\int_0^\infty u^{s-1}\,du\int_u^\infty e^{-av-civ}\frac{dv}{\sqrt{v^2-u^2}}=\int_0^\infty u^{s-1}\,du\int_u^\infty e^{-civ}\frac{dv}{\sqrt{v^2-u^2}},$$

čímž dokázáno, že rovnice (2) platí též pro ryze pomyslná a a pro veličiny realné s v mezích 0 a $\frac{1}{2}$, aneb pro veličiny komplexní s, jichž realná část je v těchto mezích.

Volímeli tedy $a=ci$, $c>0$, obdržíme

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}\int_0^\infty u^{s-1}\,du\int_u^\infty\frac{\cos cv\,dv}{\sqrt{v^2-u^2}}&=\frac{2^s\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2\cos\frac{s\pi}{2}}{4c^s},\\ \int_0^\infty u^{s-1}\,du\int_u^\infty\frac{\sin cv\,dv}{\sqrt{v^2-u^2}}&=\frac{2^s\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2\sin\frac{s\pi}{2}}{4c^s}.\end{aligned}\right.$$

V těchto vzorcích lze se omeziti na případ $c=1$, aniž se činí újma obecnosti. Užijemeli známého vzorce

$$(4)\qquad \int_u^\infty\frac{\sin v\,dv}{\sqrt{v^2-u^2}}=\frac{\pi}{2}J(u),$$

ve kterém $J(u)$ značí Fourierovu a Besselovu t. zv. funkci cylindrickou

$$J(u)=1-\frac{u^2}{2^2}+\frac{u^4}{2^2.4^2}-\frac{u^6}{2^2.4^2.6^2}+\frac{u^8}{2^2.4^2.6^2.8^2}-\ldots,$$

vychází z druhého ze vzorců (3) tvar

$$(5)\qquad \int_0^\infty J(u)\,u^{s-1}\,du=\frac{2^s\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2\sin\frac{s\pi}{2}}{2\pi};$$

ten dokázán pro $0<\text{Real.}\,s<\frac{1}{2}$, avšak v případě realného s konverguje integrál ještě v mezích $0<s<\frac{3}{2}$.

Pro $s=1$ máme odtud známý vzorec

$$\int_0^1 J(u)\,du=1;$$

differencujemeli pak vůči s a klademeli po té $s = 1$, obdržíme vzorec *Weberův* *)

$$\int_0^\infty J(u) \log u \, du = \Gamma'(1) - \log 2 . \tag{6}$$

Vzorec (3) lze též vyvinouti ze vzorce Lipschitzova **)

$$\int_0^\infty e^{-\alpha u} J(u) \, du = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} , \tag{7}$$

násobíli se $\alpha^{-s} d\alpha$ a integruje od $\alpha = 0$ do $\alpha = \infty$; tak se obdrží důkaz vzorce (5) pro případ $0 < \text{Real. } s < 1$.

Z (5) dále plyne

$$\int_0^\infty \frac{J(au) - J(bu)}{u} u^s \, du = \frac{2^s \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2 \sin\frac{s\pi}{2}}{2\pi} \left(\frac{1}{a^s} - \frac{1}{b^s}\right) ,$$

a přejdemeli zde k limitě pro $s = 0$,

$$\int_0^\infty \frac{J(au) - J(bu)}{u} \, du = \log \frac{b}{a} . \tag{8}$$

Pravá strana vzorce (5) začíná svůj mocninový rozvoj členy

$$\frac{1}{s} + \Gamma'(1) + \log 2 ;$$

abychom obdrželi mocninový rozvoj levé strany, rozložme integrál (5) ve dva

$$\int_0^\omega J(u) u^{s-1} \, du + \int_\omega^\infty J(u) u^{s-1} \, du ,$$

a nahraďme první z nich řadou

$$\frac{\omega^s}{s} + \sum_{\nu=1}^\infty (-1)^\nu \frac{\omega^{2\nu+s}}{4^\nu (\nu!)^2 (2\nu + s)} .$$

Tak shledáme, že rozvoj integrálu (5) začíná členy

$$\frac{1}{s} + \left[\log \omega + \sum_{\nu=1}^\infty \frac{(-1)^\nu \omega^{2\nu}}{2\nu (2 . 4 . 6 \ldots 2\nu)^2}\right] + \int_\omega^\infty J(u) \frac{du}{u} ;$$

---

*) Journal für die reine u. angew. Mathematik, sv. 75. Jiný důkaz podán autorem v Monatshefte für Mathematik u. Physik, I. ročník.

**) Journal f. d. reine u. angew. Mathem., sv. 56.

porovnáním nacházíme výsledek

$$(9)\qquad \Gamma'(1)+\log 2=\log\omega+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}\omega^{2\nu}}{2\nu(2.4.6\ldots 2\nu)^2}+\int_{\omega}^{\infty}J(u)\frac{du}{u}.$$

Uvažujme nyní výraz

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2\sin\frac{s\pi}{2}$$

pro veličiny $s=a+ix$, kde a a x jsou realné, a sice $a>0$. Ze vzorce Stirlingova

$$\log\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z-z+\log\sqrt{2\pi}+\left(\frac{1}{z}\right),$$

kde $\left(\frac{1}{z}\right)$ značí veličinu, která pro veliká z je velmi malá, vychází nejprve, že realná část veličiny $\log\Gamma\left(\frac{a+ix}{2}\right)$ zní

$$\frac{a-1}{2}\log\sqrt{\frac{a^2+x^2}{4}}-\frac{x}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\log\sqrt{2\pi}-\frac{a}{2}+\left(\frac{1}{x}\right),$$

a odtud plyne, že bude

$$\left|\Gamma\left(\frac{a+ix}{2}\right)^2\sin\frac{a+ix}{2}\pi\right|=c_x(a^2+x^2)^{\frac{a-1}{2}}$$

kde c_x je konečno pro $x=\pm\infty$. Odtud plyne, že integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{v}\right)^{a+ix}\Gamma\left(\frac{a+ix}{2}\right)^2\sin\frac{a+ix}{2}\pi\,\frac{dx}{a+ix}$$

existuje, jakmile $a<1$, značíli v veličinu realnou a kladnou.

Znamenejme tedy literami a a v dvě kladné realné veličiny, z nichž prvá jest obsažena v mezích $0<a<1$, položme ve vzorci (5) $s=a+ix$, násobme $\frac{1}{2\pi}\frac{1}{v^{a+ix}}\frac{dx}{a+ix}$ a integrujme od $-\infty$ do $+\infty$.

I obdržíme tak rovnici

$$\lim_{N=\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N}\frac{dx}{a+ix}\int_{0}^{\infty}J(u)\left(\frac{u}{v}\right)^{a+ix}\frac{du}{u}$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{v}\right)^{a+ix}\Gamma\left(\frac{a+ix}{2}\right)^2\sin\frac{a+ix}{2}\pi\,\frac{dx}{a+ix},$$

kterou lze psáti

$$\text{(b)}\quad \left\{\begin{aligned} &\lim_{N=\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty J(u)\frac{du}{u}\int_{-N}^{N}\left(\frac{u}{v}\right)^{a+ix}\frac{dx}{a+ix} \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{v}\right)^{a+2ix}\Gamma\left(\frac{a}{2}+ix\right)^2 \sin\pi\left(\frac{a}{2}+ix\right)\frac{dx}{\frac{a}{2}+ix}.\end{aligned}\right.$$

O levé straně chceme ukázati, že splývá s integrálem

$$\text{(c)}\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty J(u)\frac{du}{u}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{u}{v}\right)^{a+ix}\frac{dx}{a+ix};$$

k tomu cíli bude třeba dokázati, že výraz

$$\delta = \int_0^\infty J(u)\frac{du}{u}\int_N^\infty\left(\frac{u}{v}\right)^{a+ix}\frac{dx}{a+ix} + \int_0^\infty J(u)\frac{du}{u}\int_{-\infty}^{-N}\left(\frac{u}{v}\right)^{a+ix}\frac{dx}{a+ix}$$

klesá s rostoucím N pod každou mez. Přetvořme oba integrály substitucí $u = ve^z$, i vznikne

$$\delta = 2\int_{-\infty}^{\infty} J(ve^z)e^{az}\,dz\int_N^\infty \frac{a\cos xz + x\sin xz}{a^2+x^2}\,dx\,.$$

Integrál δ pišme ve tvaru

$$\begin{aligned}\delta &= 2\int_{-\infty}^{\infty} J(ve^z)e^{az}\,dz\int_N^\infty\frac{a\cos xz}{a^2+x^2}\,dx \\ &\quad + 2\int_0^\infty\left[J(ve^z)e^{az} - J(ve^{-z})e^{-az}\right]dz\int_N^\infty\frac{x\sin xz}{a^2+x^2}\,dx\,.\end{aligned}$$

Užijeli se tu vzorce

$$\int_N^\infty\frac{x\sin xz}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\cos Nz}{z(a^2+N^2)} + \frac{1}{z}\int_N^\infty\frac{\cos xz\,dx}{a^2+x^2} - \frac{2}{z}\int_N^\infty\frac{x^2\cos xz}{(a^2+x^2)^2}\,dx\,,$$

jenž se obdrží částečnou integrací, vychází tvar

$$\vartheta = 2\int_{-\infty}^{\infty} J(v e^z)\, e^{az}\, dz \int_N^{\infty} \frac{a \cos xz}{a^2 + x^2}\, dx$$

$$+ \frac{2}{a^2 + N^2}\int_0^{\infty} \frac{J(ve^z)\, e^{az} - J(ve^{-z})\, e^{-az}}{z} \cos Nz\, dz$$

$$+ 2\int_0^{\infty} \frac{J(ve^z)\, e^{az} - J(ve^{-z})\, e^{-az}}{z}\, dz \int_N^{\infty} \frac{\cos xz\, dx}{a^2 + x^2}$$

$$- 4\int_0^{\infty} \frac{J(ve^z)\, e^{az} - J(ve^{-z})\, e^{-az}}{z} \int_N^{\infty} \frac{x^2 \cos xz}{(a^2 + x^2)^2}\, dx\,.$$

Předpokládámeli $0 < a < \frac{1}{2}$, konvergují integrály

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(ve^z)\, e^{az}\, \Phi(z)\, dz\,, \qquad \int_0^{\infty} \frac{J(ve^z)\, e^{az} - J(ve^{-z})\, e^{-az}}{z}\, \Psi(z)\, dz\,,$$

absolutně, jakmile jinak libovolné funkce $\Phi(z)$ a $\Psi(z)$ jsou konečny pro $z = \pm\infty$. Poněvadž pak

$$\left| \int_N^{\infty} \frac{a \cos xz}{a^2 + x^2}\, dx \right| < \int_N^{\infty} \frac{a\, dx}{a^2 + x^2} = \operatorname{arctg} \frac{a}{N}\,,$$

$$\left| 2\int_N^{\infty} \frac{x^2 \cos xz}{(a^2 + x^2)^2}\, dx \right| < 2\int_N^{\infty} \frac{x^2\, dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{N} + \frac{N}{a^2 + N^2}\,,$$

máme vzhledem k poslední okolnosti

$$|\,\vartheta\,| < 2 \operatorname{arctg} \frac{a}{N} \int_{-\infty}^{\infty} |\, J(ve^z)\,|\, e^{az}\, dz$$

$$+ \left(\frac{2}{a^2 + N^2} + \frac{6}{a} \operatorname{arctg} \frac{a}{N} + \frac{4N}{a^2 + N^2} \right) \int_0^{\infty} \left| \frac{J(ve^{az})\, e^{az} - J(ve^{-az})\, e^{-az}}{z} \right| dz\,,$$

a odtud je zřejmo, že bude

$$\lim_{N=\infty} \vartheta = 0\,.$$

XXIII.

Tím dokázáno, že výraz (c) splývá s levou stranou rovnice (b), jakmile $0 < a < \frac{1}{2}$; za této podmínky tedy platí rovnice

$$\int_0^\infty J(u)\frac{du}{u}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{u}{v}\right)^{a+ix}\frac{dx}{a+ix}$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{v}\right)^{a+2ix}\Gamma\left(\frac{a}{2}+ix\right)^2\sin\pi\left(\frac{a}{2}+ix\right)\frac{dx}{\frac{a}{2}+ix}.$$

Vzpomenemeli tu vzorce

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k^{a+ix}\frac{dx}{a+ix}=\begin{cases}0 & \text{pro} \quad k<1,\\ 1 & \text{pro} \quad k>1,\end{cases}$$

najdeme, že výraz na levé straně našeho výsledku má hodnotu

$$\int_v^\infty J(u)\frac{du}{u},$$

a že tedy platí vztah

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{v}\right)^{a+2ix}\Gamma\left(\frac{a}{2}+ix\right)^2\sin\pi\left(\frac{a}{2}+ix\right)\frac{dx}{\frac{a}{2}+ix}=\int_v^\infty J(u)\frac{du}{u}.$$

Zaměnímeli v za $2v$, a za $2w$, obdržíme jej ve tvaru

$$(10) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi(w+ix)\,.\,\Gamma(w+ix)^2}{(w+ix)\,v^{w+ix}}\,dx=4\pi^2\int_{2v}^{\infty}J(x)\frac{dx}{x},$$

při čemž mají býti splněny podmínky $v>0$, $0<w<\frac{1}{4}$. Levá strana je však funkcí spojitou proměnné w, i když tato obdrží hodnoty komplexní, a sice takové, aby realná část byla mezi nullou a půlí. Tudíž znějí existenční podmínky rovnice (10) takto:

$$(10^a) \qquad v>0, \qquad 0<\text{Real.}\, w<\frac{1}{2}.$$

II.

Ve své práci »*Z počtu integrálního*« *) uvedli jsme na konci vlastnosť integrálu

$$\overline{L}(w,s,\sigma)=\int_0^\infty\frac{x^s\,dx}{(w^2+2wx\cos\sigma\pi+x^2)\left(1+x^{\frac{1}{\sigma}}\right)}$$

*) Rozpravy Č. Ak., ročník II., čís. 9.

vyjádřenou vzorcem

$$w \sin s\sigma\pi \,.\, \bar{L}(w, s-1, \sigma) + \sin(s-1)\sigma\pi \,.\, \bar{L}(w, s, \sigma) = \frac{\pi\sigma}{1+w}.$$

Výsledku tomu lze uděliti jiný tvar, zavedeli se funkce

$$\text{(A)} \qquad L(w, s, \sigma) = \int_0^\infty \frac{x^s\, dx}{\left(w^2 + 2wx\cos\frac{\pi}{\sigma} + x^2\right)(1+x^\sigma)};$$

ta má pak vlastnosť

$$\text{(B)} \quad w \sin\frac{s\pi}{\sigma} L(w, s-1, \sigma) + \sin\frac{(s-1)\pi}{\sigma} L(w, s, \sigma) = \frac{\pi}{\sigma(w+1)},$$

jež připomíná různé vzorce z theorie funkcí elliptických

Ukážeme, že podobnou roli jako »perioda« 1 hraje tu veličina σ; vypočtěme za tím účelem hodnotu

$$L(w, s, \sigma) + L(w, s+\sigma, \sigma) = Q.$$

Ta patrně podle (A) rovná se integrálu

$$\int_0^\infty \frac{x^s\, dx}{w^2 + 2wx\cos\frac{\pi}{\sigma} + x^2} = Q,$$

jejž lze vyčísliti v zakončeném tvaru.

Neboť lze jej psáti

$$Q = \int_0^\infty \frac{x^s\, dx}{w\left(e^{\frac{\pi i}{\sigma}} - e^{-\frac{\pi i}{\sigma}}\right)} \left(\frac{1}{we^{-\frac{\pi i}{\sigma}} + x} - \frac{1}{we^{\frac{\pi i}{\sigma}} + x}\right),$$

a tedy rozložiti v součet integrálů

$$Q = \frac{1}{2wi\sin\frac{\pi}{\sigma}} \int_0^\infty \frac{x^s\, dx}{we^{-\frac{\pi i}{\sigma}} + x} - \frac{1}{2wi\sin\frac{\pi}{\sigma}} \int_0^\infty \frac{x^s\, dx}{we^{\frac{\pi i}{\sigma}} + x},$$

jež oba se určí pomocí vzorce

$$\int_0^\infty \frac{x^s\, dx}{g+x} = -g^s \frac{\pi}{\sin s\pi},$$

čímž se ukáže výsledek

$$Q = \frac{w^s e^{\frac{s\pi i}{\sigma}} - w^s e^{-\frac{s\pi i}{\sigma}}}{2wi\sin\frac{\pi}{\sigma}} \cdot \frac{\pi}{\sin s\pi},$$

čili

$$Q = \pi w^{s-1} \frac{\sin\frac{s\pi}{\sigma}}{\sin\frac{\pi}{\sigma}\sin s\pi}.$$

Hledaná vlastnosť funkce $L(w, s, \sigma)$ zní tedy

$$L(w, s, \sigma) + L(w, s+\sigma, \sigma) = \frac{\pi w^{s-1} \sin\frac{s\pi}{\sigma}}{\sin\frac{\pi}{\sigma} \sin s\pi}. \tag{C}$$

Z rovnic (B) a (C) je patrno, že má funkce $L(w, s, \sigma)$ komplexní proměnné s vůči rovnoběžníku period, jehož vrcholy jsou $0, 1, \sigma, \sigma+1$, dosti jednoduchý vztah, a tedy patrnou analogii s veličinami z theorie funkcí elliptických známými.

Zavedemeli do integrálu (A) integrační proměnnou e^x za x, obdržíme výraz

$$L(w, s, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(s+1)x}\, dx}{\left(e^{x+\frac{\pi i}{\sigma}} + w\right)\left(e^{x-\frac{\pi i}{\sigma}} + w\right)(e^{\sigma x}+1)},$$

který lze rozložiti ve dva

$$\frac{1}{2i\sin\frac{\pi}{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{sx}\, dx}{\left(e^{x-\frac{\pi i}{\sigma}} + w\right)(e^{\sigma x}+1)} \tag{A'}$$

$$- \frac{1}{2i\sin\frac{\pi}{\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{sx}\, dx}{\left(e^{x+\frac{\pi i}{\sigma}} + w\right)(e^{\sigma x}+1)}.$$

Oba tyto integrály jsou typu téhož jako integrál (13) ve IV. článku naší rozpravy *»Příspěvky k theorii funkcí elliptických, nekonečných řad a integrálů omezených«.**)

Dokázaný tam vzorec (13) zní totiž

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2s x\pi i}\, dx}{(e^{2\pi i(v_1 x - w_1)} - 1)(e^{2\pi i(v_2 x - w_2)} - 1)}$$

$$= \frac{1}{v_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{2s\pi i}{v_1}(w_1+n)}}{e^{\frac{2\pi i}{v_1}(w_1 v_2 - w_2 v_1 + n v_2)} - 1} + \frac{1}{v_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{2s\pi i}{v_2}(w_2+n)}}{e^{\frac{2\pi i}{v_2}(w_2 v_1 - w_1 v_2 + n v_1)} - 1},$$

a sice znějí udané tam podmínky

$$\mathrm{Im.}\, v_1 < 0, \qquad \mathrm{Im}\, v_2 < 0, \qquad s = \xi_0 + \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2,$$

při čemž ξ_0 je kladné a ξ_1, ξ_2, w_1, w_2 jsou kladné ryzí zlomky. V integrálu tom pišme nyní $2\pi i v_1 x = z$, i obdrží hodnotu

$$\frac{1}{2 v_1 \pi i} \int_{(z)} \frac{e^{\frac{s}{v_1} z}\, dz}{(e^{z - 2w_1\pi i} - 1)(e^{\sigma z - 2w_2\pi i} - 1)},$$

---

*) Rozpravy Č. Ak., ročn. II., čís. 23, str. 28.
V následujícím tam po něm vzorci (18a) má pod prvním znamením Σ státi $n=0$ na místě chybného $n=1$.

při čemž kladeno $\sigma = \frac{v_2}{v_1}$. Integrační cestou (z) je zde na obě strany prodloužená přímka $(0 \dots i v_1)$. Nullová místa jmenovatele jsou

$$z = 2\pi i (k + w_1), \qquad z = \frac{2\pi i}{\sigma}(k + w_2),$$

kde k značí libovolné číslo celistvé. Chceme zaříditi volbu našich veličin tak, aby v oboru mezi cestou (z) a osou realnou nebyly obsaženy tyto body.

Poněvadž veličina $i v_1$ (za podmínky Im. $v_1 < 0$) má realnou část kladnou, neleží žádný z prvních bodů z v uvažovaném oboru, předpokládáli se w_1 realným. Volímeli rovněž w_2 realným, budou také všecky body

$$\frac{2\pi i}{\sigma}(k + w_2) = \frac{2\pi i v_1}{v_2}(k + w_2)$$

ležeti *zevně* oboru obsaženého mezi cestou (z) a osou realnou, pokud realná část zlomku $\frac{v_1}{v_2}$ jest kladnou, t. j. jeli Real. $\sigma > 0$. Volímeli ještě Real. $v_1 > 0$, bude integrand pro nekonečně velká z nekonečně malým, a tedy bude lze v posledním integrálu nahraditi cestu (z) osou realnou. Píšemeli mimo to na místě $\frac{s}{v_1}$ prostě s a klademeli $w_2 = \frac{1}{2}$, $w_1 = u + \frac{1}{2}$, obdržíme

$$\text{(D)} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{sx}\, dx}{(e^{x - 2u\pi i} + 1)(e^{\sigma x} + 1)} \\ \quad = - \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{(2u + 2n + 1) s\pi i}}{e^{(2u+2n+1)\sigma\pi i} - 1} - \frac{1}{\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{(2n+1)\frac{s\pi i}{\sigma}}}{e^{(2n+1)\frac{\pi i}{\sigma} - 2u\pi i} + 1}, \end{cases}$$

ve kterémžto vzorci se předpokládá

$$\text{Real. } \sigma > 0, \qquad s = \xi_1 + \xi_2 \sigma + \frac{\xi_0}{v_1}, \qquad (0 < \xi_1 < 1, \ 0 < \xi_2 < 1, \ \xi_0 > 0),$$

při čemž v_1 jest libovolná veličina hovící podmínkám Im. $v_1 < 0$, Im. $\sigma v_1 < 0$, Real. $v_1 > 0$.

Podmínky ty lze lépe takto charakterisovati:

$$\text{Real. } \sigma > 0, \qquad 0 < \text{Real. } s < \text{Real. } (\sigma + 1),$$

$$\text{Im. } s > 0, \qquad \text{Im. } \frac{s}{\sigma} = \text{Im. } \frac{\xi_1}{\sigma} + \text{Im. } \frac{\xi_0}{v_2}.$$

Z poslední nerovnosti plyne, že druhá řada v pravo vždy konverguje: neb buď jest Im. $\sigma < 0$, pak bude na jisto Im. $\frac{s}{\sigma} > 0$; aneb jest Im. $\sigma > 0$, a pak Im. $\frac{s-1}{\sigma} > 0$; v obou případech řada konverguje.

Vytknemeli pouze podmínky Real. $\sigma > 0$, Im. $\sigma > 0$, bude rovnice (D) správna, jakmile výrazy na obou stranách konvergují.

Při tom ovšem nelze ignorovati podmínku $-\frac{1}{2}<u<\frac{1}{2}$, která není nutnou. Integrál chová se pravidelně, pokud *u leží uvnitř pasu omezeného rovnoběžkama s osou pomyslnou, vedenýma body* $u=-\frac{1}{2}$ a $u=\frac{1}{2}$.

Uvnitř tohoto pasu dlužno předpokládati veličinu u; t. j. dlužno předpokládati

$$-\frac{1}{2}<\text{Real.}\,u<\frac{1}{2}.$$

To předeslavše, kladme u výrazu (A′) $w=e^{2v\pi i}$, čímž obdrží tvar

$$\frac{e^{-2v\pi i}}{2i\sin\frac{\pi}{\sigma}}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{sx}\,dx}{\left(e^{x-2v\pi i-\frac{\pi i}{\sigma}}+1\right)(e^{\sigma x}+1)}-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{sx}\,dx}{\left(e^{x-2v\pi i+\frac{\pi i}{\sigma}}+1\right)(e^{\sigma x}+1)}\right\};$$

tento lze vyčísliti pomocí vzorce (D) i obdržíme tak výsledek

$$2\pi i e^{-2v\pi i}\frac{\sin\frac{s\pi}{\sigma}}{\sin\frac{\pi}{\sigma}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{(2v+2n+1)s\pi i}}{e^{(2v+2n+1)\sigma\pi i}-1}-\frac{1}{\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{2ns\pi i}{\sigma}}}{e^{\frac{2n\pi i}{\sigma}-2v\pi i}+1}\right]-\frac{\pi e^{\frac{s\pi i}{\sigma}-2v\pi i}}{\sigma\sin\frac{\pi}{\sigma}(e^{-2v\pi i}+1)}$$

Za podmínky $\text{Real.}\,\sigma>0$, $\text{Im.}\,\sigma>0$, $-\frac{1}{2}<\text{Real.}\left(v\pm\frac{1}{2\sigma}\right)<\frac{1}{2}$ a za podmínek konvergenčních platí tedy vztah

$$\frac{\pi e^{\frac{s\pi i}{\sigma}}}{\sigma\sin\frac{s\pi}{\sigma}(e^{2v\pi i}+1)}+\frac{\sin\frac{\pi}{\sigma}}{\sin\frac{s\pi}{\sigma}}L(e^{2v\pi i},s,\sigma)$$
$$=2\pi i\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{2(s-1)v\pi i+(2n+1)s\pi i}}{e^{2v\sigma\pi i+(2n+1)\sigma\pi i}-1}-\frac{1}{\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{2ns\pi i}{\sigma}}}{e^{\frac{2n\pi i}{\sigma}}+e^{2v\pi i}}\right].$$

Vrátímeli se opětně k veličině $w=e^{2v\pi i}$, máme

$$\text{(E)}\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\pi e^{\frac{s\pi i}{\sigma}}}{\sigma\sin\frac{s\pi}{\sigma}.(1+w)}+\frac{\sin\frac{\pi}{\sigma}}{\sin\frac{s\pi}{\sigma}}L(w,s,\sigma)\\&\quad=2\pi i\left[\sum_{\lambda}\frac{w^{s-1}e^{\lambda s\pi i}}{w^{\sigma}e^{\lambda\sigma\pi i}-1}-\frac{1}{\sigma}\sum_{\mu}\frac{e^{\frac{\mu s\pi i}{\sigma}}}{e^{\frac{\mu\pi i}{\sigma}}+w}\right],\end{aligned}\right.$$

při čemž summační podmínky znějí

$$\lambda = 1, 3, 5, 7, \ldots; \qquad \mu = 2, 4, 6, 8, \ldots.$$

Symbol mnohoznačný w^σ tu vyjadřuje veličinu $e^{2\sigma v \pi i}$, kde $v = \frac{\log w}{2\pi i}$ má realnou část podrobenou podmínkám $-\frac{1}{2} < \text{Real.}\left(v \pm \frac{1}{2\sigma}\right) < \frac{1}{2}$, jež lze splniti toliko v případě $0 < \text{Real.}\frac{1}{\sigma} < 1$, načež znějí

$$-\frac{1}{2} + \text{Real.}\frac{1}{2\sigma} < \text{Real.}\, v < \frac{1}{2} - \text{Real.}\frac{1}{2\sigma}.$$

Odtud plyne

$$-\pi + \pi\, \text{Real.}\frac{1}{\sigma} < \text{Im.} \log w < \pi - \pi\, \text{Real.}\frac{1}{\sigma},$$

takže $\log w$ značí *hlavní větev* logarithmickou a w^s i w^σ hlavní hodnoty mocnin.

Mezi hodnotami w, které vyhovují udaným právě podmínkám, nacházejí se také veškery kladné hodnoty realné:

Rovnice (E) *platí pro hodnoty* σ, *pro něž* $\frac{1}{\sigma} = \xi - i\eta$, $0 < \xi < 1$, $\eta > 0$, *a pro hodnoty* w *obsažené uvnitř onoho úhlu sevřeného paprsky* $(0 \ldots -e^{\xi\pi i}.\infty)$ $(0 \ldots -e^{-\xi\pi i}.\infty)$, *v němž leží kladná část osy realné.*

Násobímeli obě strany rovnice (E) výrazem $\sin\frac{s\pi}{\sigma}$ a přejdemeli k mezím pro $s = \sigma$, obdržíme

$$\sin\frac{\pi}{\sigma} . L(w, \sigma, \sigma) - \frac{\pi}{\sigma(1+w)} = 0,$$

čili

$$\text{(F)} \qquad \int_0^\infty \frac{x^\sigma}{1+x^\sigma} \frac{dx}{w^2 + 2wx\cos\frac{\pi}{\sigma} + x^2} = \frac{\pi}{\sigma \sin\frac{\pi}{\sigma} . (1+w)}.$$

Jestliže však po provedeném násobení derivujeme vůči s a teprve potom klademe $s = \sigma$, obdrží se vztah

$$\text{(G)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\sigma}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^\sigma \log x}{1+x^\sigma} \frac{dx}{w^2 + 2wx\cos\frac{\pi}{\sigma} + x^2} \\ &= \frac{2\pi i}{\sin\frac{\pi}{\sigma}} \left[\frac{1}{2\sigma(1+w)} + \sum_\lambda \frac{w^{\sigma-1} e^{\lambda\sigma\pi i}}{1 - w^\sigma e^{\lambda\sigma\pi i}} + \frac{1}{\sigma} \sum_\mu \frac{1}{w + e^{\frac{\mu\pi i}{\sigma}}} \right] \end{aligned} \right.$$

Ve zvláštním případě $w = 1$ máme odtud

$$
\text{(H)}\quad \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\sigma \log x}{1+x^\sigma}\,\frac{dx}{1+2x\cos\frac{\pi}{\sigma}+x^2} \\[2ex] \qquad = \dfrac{2\pi i}{\sin\frac{\pi}{\sigma}}\left[\dfrac{1}{4\sigma}+\displaystyle\sum_\lambda \frac{e^{\lambda\sigma\pi i}}{1-e^{\lambda\sigma\pi i}}+\frac{1}{\sigma}\sum_\mu \frac{1}{1+e^{\frac{\mu\pi i}{\sigma}}}\right], \end{cases}
$$

$$
\left(\lambda = 1, 3, 5, \ldots;\quad \mu = 2, 4, 6, \ldots;\quad 0 < \mathrm{Real.}\frac{1}{\sigma} < 1\right).
$$

Se stanoviska theorie funkcí jest $L(w, s, \sigma)$ útvarem jednodušším než obě řady na pravé straně rovnice (E); neboť funkce $L(w, s, \sigma)$ chová se pravidelně i pro realná σ, což o řadách těch tvrditi nelze. Dlužno tedy považovati vzorce (E), (G) a (H) spíše jako transformační vlastnosti našich řad, nežli za rozvoje integrálů.

Budiž nám dovoleno při této příležitosti opraviti jeden ze vzorců podaných na poslední stránce naší rozpravy »*Z počtu integrálního*«.*)

Pro $u > 0$ a $s > 0$ platí vzorec (5)

$$
\int_0^\infty \sin\left(\frac{s\pi}{2} - ux\right)\frac{x^{s-1}\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-u},
$$

aneb

$$
\sin\frac{s\pi}{2}\int_0^\infty \cos ux\,.\,\frac{x^{s-1}\,dx}{1+x^2} - \cos\frac{s\pi}{2}\int_0^\infty \frac{\sin ux}{x}\,\frac{x^s\,dx}{1+x^2}
$$

Tento výraz chceme vymeziti pro $s = 0$. U prvního integrálu užijme rozkladu

$$
\int_0^\infty = \int_0^\omega + \int_\omega^\infty;
$$

první z těchto složek pomocí rozvoje

$$
\cos ux\,.\,\frac{x^{s-1}}{1+x^2} = x^{s-1} + c_1\,.\,x^{s+1} + c_2 x^{s+3} + \ldots
$$

se vyčíslí ve tvaru

$$
\int_0^\omega \cos ux\,.\,\frac{x^{s-1}\,dx}{1+x^2} = \frac{\omega^s}{s} + \frac{c_1\,\omega^{s+2}}{s+2} + c_2\frac{\omega^{s+4}}{s+4} + \ldots,
$$

*) Ročník II., číslo 9., řádek 9.

a odtud vychází

$$\lim_{s=0} \sin\frac{s\pi}{2}\int_0^{\omega}\cos ux\,\frac{x^{s-1}\,dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2},$$

a poněvadž jak patrno

$$\lim_{s=0} \sin\frac{s\pi}{2}\int_{\omega}^{\infty}\cos ux\,.\,\frac{x^{s-1}\,dx}{1+x^2}=0\,,$$

$$\lim_{s=0}\int_0^{\infty}\frac{\sin ux}{x}\,\frac{x^s\,dx}{1+x^2}=\int_0^{\infty}\frac{\sin ux}{x}\,\frac{dx}{1+x^2},$$

vychází

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ux}{x}\,\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-u}\right),$$

kterýžto vzorec musí nastoupiti na místo onoho, jenž na udaném místě podán v řádku 9. Stalo se omylem při korrektuře, že tam vynechán člen $\frac{\pi}{2}$.