Matyáš Lerch

Sur une relation ayant rapports avec la théorie de la fonction gamma

Bulletin int. de l'Ac. Prague 2 (1895), 214–218

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501482

Sur une relation ayant rapports avec la théorie de la fonction gamma.

Note de **M. Lerch.** *)

Il s'agit d'obtenir un développement de la fonction

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2x\pi(v+n)}}{v+n},$$

où son caractère multiforme serait mis en évidence La série n'est convergente que pour les valeurs de x dont la partie réelle n'est pas négative. Je suppose qu'elle est positive et en représentant par $\varphi(x)$ sa valeur, j'observe que sa dérivée $\varphi'(x)$ s'exprime sous forme finie

$$\varphi'(x) = -\frac{2\pi e^{-2vx\pi}}{1-e^{-2x\pi}}. \tag{1}$$

Cela étant je me rapelle la formule bien connue

$$\frac{2\pi i\, e^{2zv\pi i}}{e^{2z\pi i}-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2kv\pi i}}{z-k}, \quad (0<v<1),$$

dont il résulte que pour les valeurs réelles, positives et moindre que un de la quantité v la fonction $\varphi'(x)$ est donnée par la série

$$\varphi'(x) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2kv\pi i}}{x+ki}.$$

En intégrant, il vient

$$\varphi(x) = A - \log x - \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2kv\pi i} \log\frac{x+ki}{ki},$$

où il faut, dans la somme $\sum'$, exclure le terme infini $k=0$; dans cette formule A représente la constante d'intégration qu'il faut trouver et la quantité $\log\frac{x+ki}{ki}$ est définie d'une manière univoque comme la détermination principale du logarithme. Pour trouver la constante A reprenons l'équation que nous venons d'obtenir

$$A = \varphi(x) + \log x + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2kv\pi i} \log\frac{x+ki}{ki}$$

et passons à la limite pour $x=0$. On a évidemment

$$A = \lim_{x=0} \{\varphi(x) + \log x\},$$

*) Cette note n'est qu'un petit extrait de notre mémoire Nouvelles études sur les séries Malmsténiennes (III$^{\text{me}}$ volume, 1894, N° 28) dont nous nous reservons de donner l'analyse en commun avec d'autres recherches parues dans les Mémoires de l'Académie.

et en employant l'équation qui résulte de (1)

$$\varphi(x) = 2\pi \int_x^\infty \frac{e^{2x\pi(1-v)}}{e^{2x\pi}-1}\, dx = \int_{2x\pi}^\infty \frac{e^{z(1-v)}\, dz}{e^z - 1},$$

il s'ensuit

$$A = \lim_{x=0} \left\{ \log x + \int_{2x\pi}^\infty \frac{e^{z(1-v)}\, dz}{e^z-1} \right\}.$$

Cette limite se transforme à cause de l'identité

$$\int_{2x\pi}^\infty \frac{dz}{e^z-1} + \log(1 - e^{-2x\pi}) = 0$$

comme il suit

$$A = \lim \left\{ \log \frac{x}{1-e^{-2x\pi}} + \int_{2x\pi}^\infty \frac{e^{z(1-v)}-1}{e^z-1}\, dz \right\},$$

de la sorte qu'on a

$$A = -\log 2\pi + \int_0^\infty \frac{e^{z(1-v)}-1}{e^z-1}\, dz$$

ou bien

$$A = -\log 2\pi + \Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}.$$

Nous aurons donc la formule cherchée

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^\infty \frac{e^{-2x\pi(v+n)}}{v+n} = -\log 2\pi + \Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)} - \log x$$
$$- \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2kv\pi i} \log \frac{x+ki}{ki},$$

dans laquelle la quantité réelle v remplit la condition $0 < v < 1$, et x doit être positive dans sa partie réelle. Si nous remplaçons x par la quantité $\eta + \xi i$, où $0 < \xi < 1$, on obtient en passant à la limite pour $\eta = 0$

$$(3) \qquad \sum_{n=0}^\infty \frac{e^{-2\xi\pi i(v+n)}}{v+n} = -\log 2\pi + \Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)} - \frac{\pi i}{2}$$
$$- \log \xi - \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2kv\pi i} \log \frac{\xi + k}{k},$$

les conditions étant $0 < \xi < 1$, $0 < v < 1$.

Cette équation conduit directement au développement de la fonction $D \log \Gamma(v)$ et par conséquent à la dérivée de la série de Kummer.

Pour ce but multiplions les deux membres de l'équation (3) par $e^{2x v\pi i}$ et posons pour abréger $\frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)} = \psi(v)$; dans l'équation qui résulte,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2n\xi\pi i}}{v+n} = e^{2v\xi\pi i}\left(-\log 2\pi\xi - \frac{\pi i}{2} + \Gamma'(1) - \psi(v)\right)$$
$$- \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2v\pi i(k+\xi)} \log \frac{k+\xi}{k},$$

remplaçons v par v_0 et retranchons membre à membre; il vient

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\xi\pi i}\left(\frac{1}{v+n} - \frac{1}{v_0+n}\right)$$
$$= -\left(\log 2\pi\xi - \Gamma'(1) + \frac{\pi i}{2}\right)\left(e^{2v\xi\pi i} - e^{2v_0\xi\pi i}\right)$$
$$-\left(\psi(v)\, e^{2v\xi\pi i} - \psi(v_0)\, e^{2v_0\xi\pi i}\right)$$
$$- \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' e^{2v\pi i(k+\xi)} \log \frac{k+\xi}{k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' e^{2v_0\pi i(k+\xi)} \log \frac{k+\xi}{k}$$
$$-\left(e^{2v\pi i(\xi-1)} - e^{2v_0\pi i(\xi-1)}\right) \log \frac{\xi-1}{-1},$$

où nous avons préparé le deuxième membre de la sorte que *les sommes* $\sum''$ *ne contiennent ni le terme* $k=0$, *ni le terme* $k=-1$.

En passant à la limite pour $\xi = 1$ il s'ensuit

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{v+n} - \frac{1}{v_0+n}\right) = -\left(\log 2\pi - \Gamma'(1) + \frac{\pi i}{2}\right)\left(e^{2v\pi i} - e^{2v_0\pi i}\right)$$
$$- \psi(v)\, e^{2v\pi i} + \psi(v_0)\, e^{2v_0\pi i}$$
$$- \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' e^{(2k+2)v\pi i} \log \frac{k+1}{k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' e^{(2k+2)v_0\pi i} \log \frac{k+1}{k}.$$

Le premier membre étant $\psi(v_0) - \psi(v)$ on en déduit que la quantité

$$\{\psi(v) - \Gamma'(1)\}\left(e^{2v\pi i} - 1\right) + \left(\log 2\pi + \frac{\pi i}{2}\right) e^{2v\pi i}$$
$$+ \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' e^{(2k+2)v\pi i} \log \frac{k+1}{k}$$

ne change pas, lorsqu'on remplace v par v_0; elle est donc constante et en posant pour abréger

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' e^{(2k+2)v\pi i} \log \frac{k+1}{k} = S(v),$$

on obtient la quantité

$$\text{(a)}\qquad \{\psi(v)-\Gamma'(1)\}\,(e^{2v\pi i}-1)+\left(\log 2\pi+\frac{\pi i}{2}\right)e^{2v\pi i}+S(v)$$

en y substituant $v=\frac{1}{2}$.

Or on a évidemment

$$\text{(b)}\qquad S(v)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{(2k+2)v\pi i}-e^{-2kv\pi i}\right)\log\frac{k+1}{k},$$

et en particulier

$$S\left(\tfrac{1}{2}\right)=-2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\log\frac{k+1}{k}.$$

Or l'identité

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\log\frac{k+1}{k}=\sum_{\nu=1}^{n}\log\frac{2\nu+1}{2\nu}-\sum_{\nu=1}^{n}\log\frac{2\nu}{2\nu-1}$$
$$=\log\prod_{\nu=1}^{n}\frac{4\nu^2-1}{4\nu^2}$$

donne évidemment

$$S\left(\tfrac{1}{2}\right)=-2\log\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4\nu^2}\right)=-2\log\frac{2}{\pi},$$

ou enfin

$$S\left(\tfrac{1}{2}\right)=2\log\frac{\pi}{2},$$

On a ensuite $\psi\left(\frac{1}{2}\right)-\Gamma'(1)=-2\log 2$, et la quantité (a) dans le cas de $v=\frac{1}{2}$ aura la valeur

$$4\log 2-\left(\log 2\pi+\frac{\pi i}{2}\right)+2\log\frac{\pi}{2}=\log 2\pi-\frac{\pi i}{2},$$

ce qui donne

$$\left(\psi(v)-\Gamma'(1)\right)(e^{2v\pi i}-1)+S(v)+\log 2\pi\,.\,(e^{2v\pi i}-1)$$
$$+\frac{\pi i}{2}(e^{2v\pi i}+1)=0.$$

Or l'équation (b) donne immédiatement

$$e^{-v\pi i}S(v)=2i\sum_{k=1}^{\infty}\sin(2k+1)v\pi\,.\log\frac{k+1}{k}$$

et la relation que nous venons d'obtenir prend la forme cherchée:

$$\text{(4)}\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\sin(2k+1)v\pi\,.\log\frac{k}{k+1}=\left(\log 2\pi-\Gamma'(1)\right)\sin v\pi$$
$$+\frac{\pi}{2}\cos v\pi+\frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}\sin v\pi.$$

Monsieur Hermite nous a communiqué une vérification de cette formule, laquelle nous avons l'honneur de reproduire ici. L'illustre géomètre a bien voulu présenter à l'Académie des sciences de Paris nos résultats plus généreux auxquels la formule (4) nous a montré la voie de parvenir et qui se rattachent à la différentiation des séries trigonométriques; une note plus étendue va paraître dans les Annales de l'Ecole Normale Supérieure. Je me reserve à une autre occasion de revenir sur d'autres conséquences auxquelles les équations (2) et (3) conduisent bien directement.

Extrait d'une lettre de M. Hermite.

Paris, le 7 Novembre 1894

. . . . J'ai vérifié comme il suit la formule de développement de $D_x \log \Gamma(x)$ que vous avez obtenue à ma grande joie,

$$D_x \log \Gamma(x) \sin \pi x + \frac{\pi}{2} \cos \pi x + [\log 2\pi - \Gamma'(1)] \sin \pi x$$
$$= \sum \log \frac{n}{n+1} \sin (2n+1) \pi x .$$

Et d'abord en multipliant par $2 \sin (2n+1) \pi x$, j'observe que l'intégrale du premier membre, de $x=0$ à $x=1$, se réduit à la quantité

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^1 2 \sin \pi x . \sin (2n+1) \pi x . d \log \Gamma(x) \\ & = \int_0^1 \cos 2 n \pi x \, d \log \Gamma(x) - \int_0^1 \cos (2n+2) \pi x \, d \log \Gamma(x) . \end{aligned} \right.$$

Mais on a la formule

$$D_x \log \Gamma(x) = \int_{-\infty}^0 \left(\frac{e^{xy}}{e^y - 1} - \frac{e^y}{y} \right) dy$$

et il suffit d'employer l'expression suivante

$$\int_0^1 \frac{\cos 2 n \pi x \, e^{xy}}{e^y - 1} dx = \frac{y}{y^2 + (2n\pi)^2}$$

et celle qui en résulte en changeant n en $n+1$, pour voir que le second membre de l'équation (1) est simplement

$$\int_{-\infty}^0 \left[\frac{y}{y^2 + (2n\pi)^2} - \frac{y}{y^2 + (2n+2 . \pi)^2} \right] dy .$$