František Balada; Eduard Čech; a kol.

Geometria pre 3. triedu gymnázií

Štátne nakladateľstvo, Bratislava, 1952, 82 s.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/501419`

GEOMETRIA

PRE III. TRIEDU GYMNÁZIÍ

ŠTÁTNE NAKLADATEĽSTVO BRATISLAVA

GEOMETRIA

PRE III. TRIEDU GYMNÁZIÍ

1952

ŠTÁTNE NAKLADATEĽSTVO BRATISLAVA

Schválilo Povereníctvo školstva, vied a umení výnosom zo dňa 3. apríla 1951, číslo 6063/51-II/2, ako učebnicu pre III. triedu gymnázií v prvom vydaní.
Názov originálu:
Matematika pro III. třídu gymnasia, Praha 1951.
Autori:
František Balada, Dr Eduard Čech, Josef Holubár, Dr Hruša, Dr Marta Chytilová, Dr Vanda Janová, Dr Josef Koenig, Dr Emil Mastný, Dr Karel Rössler, Dr Antonín Srb, Dr Josef Šimek, Antonín Tuláček, Rudolf Zelinka.
Preložili: K. Hlučil, M. Pecíková.
Recenzovali: Dr J. Horecký, A. Dubec.

Úvodné poznámky*

V geometrii v tretej triede rozšíri sa pred vami okruh, v ktorom možno použiť matematiku, o pohyb vyjadrený prostriedkami analytickej geometrie. Vieme, že všetko skutočné je v pohybe, preto použiteľnost matematiky na pohyb podstatne rozširuje jej použiteľnosť na riešenie reálnych a praktických úloh.

V analytickej geometrii zachycujeme matematicky pohyb, a preto táto časť matematiky je najspôsobilejšia na praktické aplikovanie dialektiky, na zámerné skúmanie priebehu a podmienok určitého deja, vyjadreného funkciou. Na rozdiel od dosiaľ používaných učebníc je látka restringovaná. Spracovanie učiva je v súhlase s moderným vedeckým poňatím na vektorovom podklade, i keď sa o vektoroch výslovne nehovorí. Všímame si najmä tie vzťahy, ktoré sú nezávislé od polohy súradnicových osí. Pri odvodzovaní sa používajú aj komplexné čísla a geometrické príbuznosti. Geometrické úvahy sa neviažu na pevný súradnicový systém, ale naopak, sústavu si volíme vhodne podľa úlohy, ktorá sa má riešiť. Pritom sa nehovorí o transformácii súradníc preto, aby sa pozornosť žiaka neodvádzala od štúdia geometrických vzťahov riešenej úlohy.

Obšírna je najmä časť o smerových uhloch priamok v rovine a o výpočte veľkosti uhlov. Je dôležité, aby si žiaci uvedomili, že ide o uhol polpriamok a nemerali uhly bez predbežného určenia, o ktorý z uhlov pri polpriamkach ide. V podstate sa používajú dva tvary rovníc priamok, čo tiež pomáha sústrediť pozornosť žiakov na jadro úlohy. Štúdium niektorých kvadratických funkcií je prípravou pre odvodenie pojmu derivácie.

V tretej časti učebnice zakľučujú sa vaše vedomosti z goniometrie ich použitím na široký a dôležitý okruh riešenia úloh o trojuholníku a aplikáciou týchto na riešenie zememeračských a iných úloh.

Vyučovanie analytickej geometrie sa má viesť tak, aby si žiaci

---

* Poznámka: Prečítaj si aj úvod k aritmetike pre III. triedu gymnázií.

osvojili jej metódu. Pri vyučovaní vôbec máme klásť dôraz na pochopenie princípov a na ich osvojenie. Nemá sa zanedbať ani numerické počítanie, ale tomuto už nevenujeme toľko času ako doteraz.

Takto vidíme, ako matematika, postavená na materialistických základoch našich smyslových skúseností, rozvinutá správnymi logickými úvahami, odhaľuje složité kvantitatívne spoločenské vzťahy medzi silami a hmotnými útvarmi, ktoré nás obklopujú. Pomocou matematiky a zákonov dialektiky budeme vedieť tieto sily a hmotné zdroje lepšie poznať a využiť na výstavbu socialistickej spoločnosti a jej hospodárskej základne.

I. ZÁKLADY ANALYTICKEJ GEOMETRIE.

1. Súradnice bodu na priamke.

Už v predchádzajúcej triede sme začali sústavne sledovať vzťahy medzi aritmetikou a geometriou. Tieto vzťahy budeme teraz sledovať ešte podrobnejšie a dôkladnejšie. Tzv. **analytická geometria,** ktorá tvorí podstatnú čiastku učiva tejto triedy, má úlohu nahradiť každý geometrický pojem určitým aritmetickým pojmom, a tým previesť geometrické úlohy na úlohy počtové. Rozoznávame rovinnú a priestorovú analytickú geometriu; na gymnáziu sa preberá len rovinná analytická geometria. Základy rovinnej analytickej geometrie sú v najužšej súvislosti s náukou o komplexných číslach a s ich geometrickým znázornením, ktoré sa preberajú v 2. triede v hodinách aritmetiky. Pre správne pochopenie analytickej geometrie bude však účelné prebrať si jej základné pojmy znova, i keď tu ide o poznatky vlastne už známe.

Obr. 1.

Obr. 2.

V celej analytickej geometrii predpokladáme, že bola zvolená určitá **dĺžková jednotka,** takže všetky dĺžky vyjadrujeme nepomenovanými číslami. Pri rysovaní v sošite volíme za jednotku obyčajne 1 cm, pri rysovaní na tabuli 1 dm.

Najprv si pohovoríme o tom, ako je možné pomocou tzv. **súradnice** číselne vyjadriť polohu ľubovoľného bodu na danej priamke *r*. Pre ďalšie obzvlášť dôležitý je prípad, že priamka *r* je alebo vodorovná (obr. 1.) alebo svislá (obr. 2.). Na priamke *r* si zvolíme určitý bod *P*, ktorý nazveme **začiatkom.** Na priamke *r* zvolíme určitý smysel; začiatok *P* rozdelí potom priamku *r* na kladnú čiastku, obsahujúcu body, ktoré vo zvolenom smysle nasledujú za bodom *P*, a na zápornú čiastku, obsahujúcu body, ktoré vo zvolenom smysle predchádzajú pred bodom P. Keď je priamka vodorovná, volíme smysel skoro vždy tak, že **kladná čiastka leží napravo od začiatku;** keď je priamka svislá, volíme smysel skoro vždy tak, že **kladná čiastka leží nad začiatkom.** Keď je na priamke r zvolený začiatok P a keď je zvolený smysel priamky r, môžeme pomocou jeho súradnice číselne vyjadriť polohu každého bodu A na priamke r; **pod súradnicou bodu A na priamke r rozumieme reálne číslo $\pm d$, pričom $d = PA$ je merné číslo vzdialenosti bodu A od začiatku. Znamienko plus platí, ak bod A leží na kladnej čiastke priamky r, znamienko mínus, ak bod A leží na zápornej čiastke priamky r. Ak bod A splynie so začiatkom P, je jeho súradnica rovná nule. Každý bod A priamky r má určitú súradnicu a obrátene každé reálne číslo určuje na priamke r jediný bod A, ktorého súradnica je rovná danému číslu.** Na obraze 1 a 2 sú vyznačené tie body A_1, A_2, ktorých súradnice sú rovné číslam $+1$, -2.

Aby každý bod A priamky r mal určitú súradnicu, musí byť zvolený tak začiatok P, ako aj smysel priamky r. Je dôležité vedieť, aký vplyv majú tieto voľby na hodnotu súradnice. Ak predovšetkým pri nezmenenom začiatku zmeníme smysel priamky r, potom ak je x pôvodná súradnica a x' zmenená súradnica toho istého (ľubovoľného) bodu A, je jasné, že platí

$$x' = -x. \tag{1}$$

Aby sme vyšetrili, aký vplyv má (pri nezmenenom smysle) voľba začiatku P, predpokladajme, že začiatok bol zvolený ľubovoľne a zvoľme na priamke r ľubovoľne dva rozličné body A_1, A_2, ktorých súradnice označíme x_1, x_2. Predpokladajme predbežne, že vo zvolenom smysle leží bod A_1 pred bodom A_2; nech je $d = A_1A_2$ vzájomná vzdialenosť obidvoch bodov A_1, A_2. Vzhľadom na tieto body môže mať začiatok P pätorakú polohu; jednotlivé možnosti sú vyznačené (pre vodorovnú priamku r, čo, pravda, nie je podstatné) v obr. 2a až 2e. V prípade obr. 2a je $x_1 = 0$, $x_2 = d$; v prípade obr. 2b je $x_1 = -d$, $x_2 = 0$. V obidvoch prípadoch je teda

$$x_2 - x_1 = d. \tag{2}$$

Obr. 2a.

Obr. 2b.

Ten istý vzťah (2) je správny aj v ostatných troch prípadoch. Lebo v prípade obr. 2c sú x_1, x_2 kladné čísla a je $x_2 = x_1 + d$, teda $x_2 - x_1 = d$; v prípade obr. 2d sú x_1, x_2 záporné čísla a je $|x_1| = |x_2| + d$, alebo $-x_1 = -x_2 + d$; v prípade obr. 2e číslo x_1 je záporné a číslo x_2 je kladné a je $|x_1| + x_2 = d$, alebo $-x_1 + x_2 = d$, t. j. zase $x_2 - x_1 = d$.

Obr. 2c.

Obr. 2d.

Obr. 2e.

Vzorec (2) platí iba vtedy, keď vo zvolenom smysle leží bod A_1 pred bodom A_2. Keď naopak leží bod A_2 pred bodom A_1, potom namiesto (2) máme $x_1 - x_2 = d$ alebo

$$x_2 - x_1 = -d. \tag{3}$$

Ak oba body A_1, A_2 splynú, je $d = 0$, $x_1 = x_2$ a platia obidva vzorce (2), (3).

Zo vzorcov (2), (3) plynie, že kým súradnica x jedného bodu A na priamke r je závislá od voľby začiatku P, **rozdiel $x_2 - x_1$ súradníc x_1, x_2 dvoch bodov priamky r je nezávislý od voľby začiatku a závisí iba od zvoleného smyslu priamky r**; pri zmene smyslu priamky rozdiel $x_2 - x_1$ zmení znamienko. **Absolútna hodnota $(x_2 - x_1)$ je rovná vzdialenosti bodov A_1A_2, a je teda nezávislá od voľby začiatku a zároveň nezávislá od voľby smyslu priamky r.**

Použijeme predchádzajúcu úvahu na to, aby sme dokázali, že ak dva rôzne body A_1, A_2 priamky r majú súradnice x_1, x_2, potom stred úsečky A_1, A_2 má súradnicu

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{4}$$

Obe úsečky $\overline{SA_1}$, $\overline{SA_2}$ čo do absolútnej hodnoty sú si rovné, teda

$$|x - x_1| = |x - x_2|\,,$$

ale majú opačný smysel, teda

$$x - x_1 = -(x - x_2).$$

Z tejto rovnice ľahko vypočítame, že platí vzorec (4).

Cvičenie.

V cvičeniach analytickej geometrie je začiatok sústavy súradníc označený P. V cvičeniach 1 až 8 ide o body, ktoré ležia na priamke r, ktorá má určený smysel a začiatok bod P a je na nej zvolená jednotka miery; ak je x_1 súradnica bodu A_1 priamky r, píšeme stručne $A_1 \equiv (x_1)$.

1. Určite vzdialenosť $\overline{A_1A_2}$ bodov A_1, A_2 priamky r a rozhodnite, či poriadok A_1A_2 je súhlasný alebo nesúhlasný so zvoleným smyslom na priamke r. Riešte úlohy pre tieto body (ku každej úlohe načrtnite obrázok):

   a) $A_1 \equiv (0); A_2 \equiv (\sqrt{2})$; b) $A_1 \equiv (5); A_2 \equiv (0)$; c) $A_1 \equiv (0)$; $A_2 \equiv (-3)$; d) $A_1 \equiv (-6); A_2 \equiv (0)$; e) $A_1 \equiv (2 - \sqrt{3})$; $A_2 \equiv (\sqrt{3})$; f) $A_1 \equiv (5\sqrt{3})$; $A_2 \equiv (2\sqrt{3})$; g) $A_1 \equiv (-7\sqrt{5})$; $A_2 \equiv (-2\sqrt{5})$; k) $A_1 \equiv (-2)$; $A_2 \equiv (-2\sqrt{2})$; i) $A_1 \equiv \left(-\frac{3}{5}\right)$; $A_2 \equiv \left(\frac{3}{4}\right)$; j) $A_1 \equiv (4)$; $A_2 \equiv (-0{,}3)$.

2. Na priamke r sú dané body $A_1 \equiv (x_1)$, $A_2 \equiv (x_2)$. Určite súradnicu x_0 bodu Q tak, aby:

   a) $x_0 = \frac{3}{4} \cdot \overline{A_1A_2}$; b) $x_0 = -\frac{3}{4} \cdot \overline{A_1A_2}$; c) $\overline{A_2Q} = \frac{2}{3} \cdot \overline{A_1A_2}$ (sú dve možnosti); d) $\overline{A_1Q} = \frac{3}{2} \cdot \overline{A_1A_2}$; pričom A_1A_2, A_1Q sú dve opačné polpriamky; e) bod Q leží na predĺžení úsečky $\overline{A_1A_2}$ za bodom A_2 a $\overline{A_1Q} = m \,.\, A_1A_2$, kde m je dané číslo.
   Numerické výpočty urobte pre $x_1 = 7$, $x_2 = -5$, $m = 3$.

3. Ktoré podmienky splňujú súradnice x vnútorných bodov A úsečky $\overline{A_1A_2}$, ležiacich na priamke r, ak súradnice x_1, x_2 bodov A_1, A_2 sú korene rovnice $x^2 - 2x - 15 = 0$? Ak sú A, A' dva také body, je $\overline{AA'} < \overline{A_1A_2}$. Dokážte!

4. Na priamke r sú dané body $P' \equiv (-6)$, $A_1 \equiv (3)$, $A_2 \equiv (-4)$, $A_3 \equiv (-9)$; určite súradnice týchto bodov, ak začiatok súradníc premiestime do bodu P' a ak sa smysel na priamke r a) zmenil; b) nezmenil na opačný.

5. Určite bod $M \equiv (m)$, ak pre jeho vzdialenosť $v = \overline{MN}$ od bodu $N \equiv (n)$ platí rovnica $16v^2 - 6v - 1 = 0$. Koľko je takýchto bodov M a v akom poriadku nasledujú?

6. Dokážte, že poloha stredu $S \equiv (x)$ úsečky $\overline{A_1A_2}$, ležiaca na priamke r nezávisí: a) od voľby začiatku, b) od smyslu priamky r. Dané je $A_1 \equiv (x_1)$, $A_2 \equiv (x_2)$.

7. Vyjadrite podmienky, ktoré splňuje súradnica x_0 bodu Q, ktorý leží s bodmi $A_1 \equiv (x_1)$, $A_2 \equiv (x_2)$ na priamke r, ak bod Q leží a) vnútri úsečky $\overline{A_1A_2}$, b) na predĺžení úsečky $\overline{A_1A_2}$ cez bod A_1, c) na predĺžení úsečky cez bod A_2.
Čo treba predpokladať o číslach x_1, x_2?

8. Nech sú $A_1 \equiv (x_1)$, $A_2 \equiv (x_2)$ dva rôzne body a $S \equiv (x)$ stred úsečky $\overline{A_1A_2}$, ktoré ležia na priamke r. Dokážte!
a) Ak leží bod $Q \equiv (x_0)$ vnútri úsečky $\overline{A_1A_2}$, potom platí:

$$\overline{SQ} = \frac{1}{2}(\overline{QA} - \overline{QB}) .$$

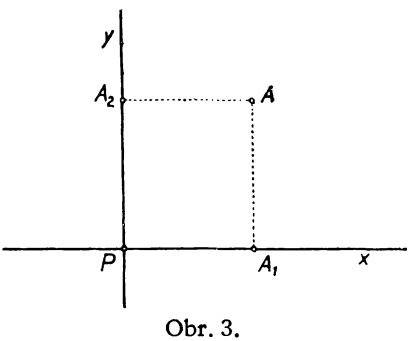
b) Ak bod $Q \equiv (x_0)$ leží na predĺžení úsečky, potom platí:

$$\overline{SQ} = \frac{1}{2}(\overline{QA} + \overline{QB}).$$

Dokážte aj planimetricky. (Sostrojte bod Q súmerne sdružený s bodom Q podľa stredu súmernosti S.)

2. Pravouhlé súradnice bodu v rovine.

Aby sme číselne vyjadrili polohu ľubovoľného bodu v rovine, zavedieme si **sústavu súradníc**, ktorá sa skladá z dvoch navzájom kolmých priamok; na každej z nich je zvolený určitý smysel. Tieto dve priamky sa nazývajú **prvou a druhou súradnicovou osou** alebo aj **x-ovou a y-ovou osou.** Priesečík P obidvoch súradnicových osí sa nazýva **začiatkom** súradnicovej sústavy. Obyčajne volíme x-ovú os vodorovne a jej **kladný** smysel zľava doprava, y-ovú os svisle a jej **kladný** smysel zdola nahor (obr. 3).



Obr. 3.

Keď je teraz daný ľubovoľný bod A v rovine, vedieme ním jednak kolmicu na x-ovú os, ktorej pätu označíme A_1, jednak kolmicu na y-ovú os, ktorej pätu označíme A_2. Bod A_1 nazveme **prvým priemetom** a bod A_2 **druhým priemetom** bodu A. Na každej z obidvoch súradnicových osí máme daný začiatok P a máme na nej zvolený určitý smysel, preto bod A_1 má na prvej súradnicovej osi určitú súradnicu

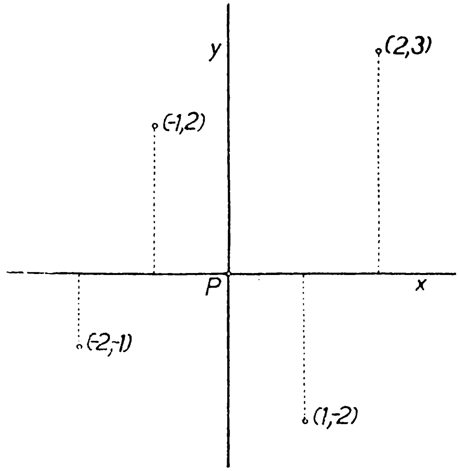
$$x = \pm \overline{PA_1}, \qquad (1)$$

bod A_2 má na druhej súradnicovej osi určitú súradnicu

$$y = \pm \overline{PA_2}. \qquad (2)$$

Pritom v (1) platí znamienko plus, ak bod A_1 leží napravo od začiatku, totiž ak bod A leží napravo od y-ovej osi, a znamienko mínus, ak bod A_1 leží naľavo od začiatku, totiž ak bod A leží naľavo od y-ovej osi; ak bod A leží na y-ovej osi, splynie bod A_1 so začiatkom a máme $x = 0$. Podobne v (2) platí znamienko plus, ak bod A_2 leží nad začiatkom, totiž ak bod A leží nad x-ovou osou a znamienko mínus, ak bod A_2 leží pod začiatkom, totiž ak bod A leží pod x-ovou osou. Ak leží bod A na x-ovej osi, splynie bod A_2 so začiatkom a máme $y = 0$. Pri zvolenej súradnicovej sústave bod A jednoznačne určuje hodnoty obidvoch súradníc x, y podľa vzorcov (1), (2); obrátene, ak poznáme obidve súradnice x, y, je nimi jednoznačne určená poloha bodu A v rovine, lebo súradnica x jednoznačne určuje polohu bodu A_1 na x-ovej osi, súradnica y jednoznačne určuje polohu bodu A_2 na y-ovej osi; tým je však určená aj poloha bodu A, lebo A je priesečík priamky uvedenej bodom A_1 kolmo na x-ovú os s priamkou vedenou bodom A_2 kolmo na y-ovú os. Čísla x, y sa menujú **súradnicami bodu** A v rovine; číslo x sa menuje **prvou súradnicou** alebo x-**ovou súradnicou**, prípadne úsečkou (latinsky abscisa) bodu A; číslo y sa menuje **druhou súradnicou** alebo y-**ovou súradnicou**, prípadne poradnicou (latinsky ordinata) bodu A. Názvy úsečka (abscisa) a poradnica (ordinata), ktoré nebudeme používať, bolo tu potrebné uviesť z historických dôvodov, lebo sa dodnes často vyskytujú v matematickej literatúre. Ale najmä názov úsečka pre pojem celkom odlišný od úsečky v smysle elementárnej geometrie je veľmi nevhodný a neúčelný. V nasledujúcom budeme písať $A \equiv (x, y)$ (znak $\equiv$ je znakom totožnosti), aby sme naznačili, že bod A má súradnice x, y. Na obr. 4 sú význačené body $(2, 3)$; $(-1, 2)$; $(-2, -1)$; $(1, -2)$.

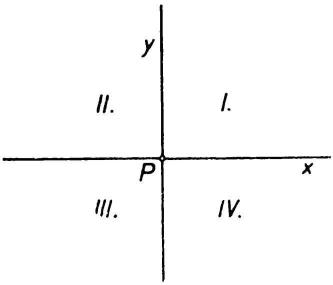
V matematickej literatúre o analytickej geometrii je zakoreneným zvykom označovať prvú súradnicu písmenom x, druhú súradnicu písmenom y, pričom rôzne body sa rozlišujú indexami, t. j. zvykne sa hovoriť o bodoch (x_0, y_0); (x_1, y_1); (x_2, y_2) atď.



Obr. 4.

Keď si zvolíme v rovine určitú polohu obidvoch súradnicových osí a smysel každej osi, je podľa predchádzajúceho poloha každého bodu roviny jednoznačne určená hodnotami obidvoch súradníc a obrátene, obidve súradnice ľubovoľného bodu sú jednoznačne určené polohou tohto bodu. V matematickej literatúre sa uvádzajú aj mnohé iné spôsoby na číselné určenie polohy ľubovoľného bodu v rovine pomocou dvoch číselných údajov, ale tieto iné spôsoby nie sú súčiastkou gymnaziálneho učiva. Zvykne sa hovoriť o súradniciach aj pri týchto iných spôsoboch. Súradnice v tu opísanom smysle sa potom určitejšie označujú názvom **pravouhlé súradnice**. Budeme však nakrátko hovoriť len súradnice, lebo iné súradnice ako pravouhlé nebudeme používať.

Na prvej súradnicovej osi ležiace body majú druhú súradnicu rovnú nule; body ležiace na druhej súradnicovej osi majú prvú súradnicu rovnú nule. Každá z obidvoch súradnicových osí delí rovinu na dve polovice: x-ová os delí rovinu na hornú a dolnú polovicu, pričom bod (x, y) leží na hornej polovici, keď $y > 0$, na dolnej, keď $y < 0$; y-ová os delí rovinu na pravú a ľavú polovicu, pričom bod (x, y) leží na pravej polovici, keď $x > 0$, na ľavej polovici, keď $x < 0$. Príležitostne si všimneme aj rozdelenia roviny na štyri čiastky obidvoma súradnicovými osami súčasne. Tieto štyri čiastky roviny sa obyčajne nazývajú **kvadrantmi** a o prvom až štvrtom kvadrante sa hovorí v poradí, označenom rímskymi číslicami na obr. 5.



Obr. 5.

Z definície súradníc je ďalej zrejmé:

I. Ak

$$x' = x, \quad y' = -y, \tag{3}$$

je bod (x', y') súmerným obrazom bodu (x, y) podľa x-ovej osi.

II. Ak

$$x' = -x, \quad y' = y,$$

je bod (x', y') súmerným obrazom bodu (x, y) podľa y-ovej osi. (4)

III. Ak

$$x' = -x, \quad y' = -y,$$

je bod (x', y') súmerným obrazom bodu (x, y) podľa začiatku P.

Ďalej si dokážeme, že ak je c ľubovoľné číslo odlišné od nuly a ak platia vzťahy

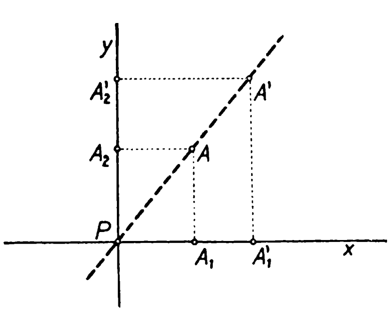
$$x' = cx, \quad y' = cy,$$

je bod (x', y') obrazom bodu (x, y) pri rovnoľahlosti (P, c), t. j. pri rovnoľahlosti so stredom P a koeficientom c. (V učebnici pre I. tr. str. 75.) Lebo (obr. 6a pre $c > 1$, obr. 6b pre kladné $c < 1$, obr. 6c pre $c < 0$) keď je $A' \equiv (x' \; y')$ obrazom bodu $A \equiv (x, y)$, tak obrazmi priemetov A_1, A_2 bodu A sú A'_1, A'_2 priemety bodu A' a keďže pri rovnoľahlosti sa každá zodpovedná dĺžka násobí číslom (c), je $\overline{PA'}_1 = (c)\,\overline{PA}_1$, $\overline{PA'}_2 = (c)\,\overline{PA}_2$, totiž $(x') = (c) \cdot (x)$, $(y') = (c) \cdot (y)$ a z pravidiel pre znamienka súradníc bodu ľahko zistíme, že vo všetkých prípadoch platí vzorec (5).

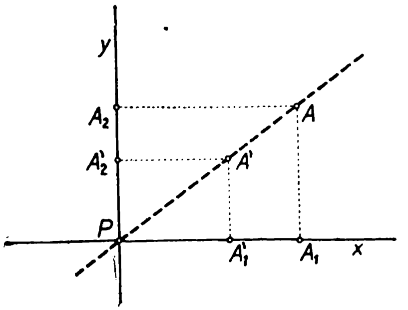
Poznámka 1. V analytickej geometrii je poloha bodu $A \equiv (x, y)$ určená pravouhlými súradnicami x, y, t. j. dvoma reálnymi číslami. Namiesto dvojice reálnych čísel môžeme použiť aj jedno komplexné číslo $x + iy$, ktoré nazveme komplexnou súradnicou bodu A.

Komplexné súradnice sme používali v 2. triede na hodinách aritmetiky.

Poznámka 2. Pre pochopenie predpísanej látky z analytickej geometrie sa nevyhnutne vyžaduje rysovanie obrázkov s určitými

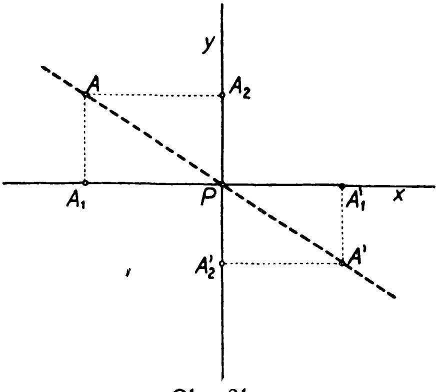


Obr. 6a.



Obr. 6c.

číselnými údajmi; na druhej strane však tiež treba, aby práca spojená s približným určením polohy bodu na základe číselne predpísaných súradníc a obrátene s približným určením veľkosti súradníc narysovaného bodu nebola zdĺhavá, lebo nesmie odvrátiť pozornosť od zásadne dôležitých poznatkov. Preto sa niekedy odporúča používať pri analytickej geometrii sošit so štvorcovaným papierom. To však nie je vhodné, lebo veľké množstvo vytlačených čiar značne sťažuje prehľadnosť obrázka. Omnoho lepšie je pracovať s nelinkovaným sošitom a používať štvorcovanú (polcentimetrovú alebo milimetrovú) podložku.



Obr. 6b.

Cvičenie.

V ďalších cvičeniach analytickej geometrie značí $A \equiv (x; y)$ bod A, súradnice ktorého sú x, y. Potom $(x_1; y_1)$ $(x_2; y_2)$ značí priamku alebo úsečku určenú bodmi $A_1 \equiv (x_1;\ y_1)$, $A_2 \equiv (x_2;\ y_2)$. Ďalej $A \equiv x + iy$ značí bod $A \equiv (x;\ y)$, pričom x a y sú reálne čísla.

9. Nech je $(x;\ y)$ daný bod, ktorý neleží na súradnicových osiach a nech sú m a n dve ľubovoľné reálne čísla. Ktoré podmienky musia splniť čísla m, n, ak bod $x + m$, $y + n$ má ležať v tom istom kvadrante ako bod $(x;\ y)$?

10. $(x;\ y)$, $(x';\ y')$ sú dva rôzne body.
a) Čo teda platí o ich súradniciach?
b) Čo platí o súradniciach týchto bodov, ak prvý bod má väčšiu vzdialenosť od osi y než druhý?
c) Čo platí o súradniciach bodu $(x';\ y')$, ak leží od bodu $(x;\ y)$ 1. „napravo", 2. „nahor"? Vysvetlite tieto vzťahy!

11. Načrtnite v rovine sústavu súradníc so začiatkom P a vyznačte v nej body $(x,\ y)$, o ktorých platí:
a) $2 \leq x \leq 5$; $y \geq 1{,}5$; b) $-5 < x \leq 2$; $y \leq -1{,}5$;
c) $x = 6$; $2 < y \leq 8$; d) x, y sú celé čísla; e) $-3 < x < 0$; $0 < y < 4$;
f) $x = y$; g) $x = -y$.

12. Čo je geometrické miesto bodov $(x;\ y)$, keď platí:
a) $y = 0$; x je ľubovoľné; b) $x = 0$; y je ľubovoľné;
c) $x = -5$; $4 < y \leq 6$?

13. Ako poznáte, že bod $(x;\ y)$ leží: a) vnútri v niektorom z nepárnych kvadrantov I alebo III? b) vnútri v niektorom z párnych kvadrantov II alebo IV?

14. Určite čísla a, b, keď viete, že body $2a + 3;\ 3b - 5$, $2a + 3;\ 5b + 7$ sú súmerne združené a) podľa začiatku súradníc P; b) podľa x-ovej osi; c) podľa y-ovej osi.

15. Použitím súradníc bodu dokážte, že súmerný obraz $\acute{U}'$ útvaru U podľa stredu v začiatku P sústavy súradníc dostaneme aj takto: Určíme obraz U_x útvaru U podľa osi x a potom obraz U_0 útvaru U_x podľa osi y; Tak je $U_0 \equiv U'$. Môžeme tiež najprv určiť obraz U_y útvaru U podľa osi y a potom obraz U' útvaru U_y podľa osi x.

16. Body $A \equiv (-3;\ 4)$, $B \equiv (2;\ 5)$, $C \equiv (-2;\ -3)$ sú vrcholy trojuholníka ABC. Určite obraz $A'B'C'$ trojuholníka ABC pri rovnoľahlosti $(P,\ c)$, t. j. ak splýva stred rovnoľahlosti so začiatkom P sústavy súradníc a ak je $c \neq 0$ koeficient rovnoľahlosti. Voľte a) $c = \frac{5}{3}$, b) $c = -\frac{5}{3}$.
Aký je vzťah medzi obidvoma trojuholníkmi $A'B'C'$, ktoré dostanete v tejto úlohe? Naznačte aj konštruktívne riešenie úlohy.

17. Ak je $A \equiv x + iy$ ľubovoľný bod roviny, tak bod $A' \equiv c\,(x + iy)$ je jeho obraz pri rovnoľahlosti $(P,\ c)$. Dokážte! Môže byť $A \equiv P$?

18. Na priamke PX, kde $P \equiv (0{,}0)$, $X \equiv (x,\ y)$, určite bod $X' \equiv (x',\ y')$ tak, aby a) $\overline{PX'} = c\overline{PX}$, kde $c > 0$; b) $\overline{XX'} = m\overline{PX}$, kde $m > 0$.

Volte $X \equiv (-3{,}4)$, $c = \frac{7}{2}$, $m = \frac{2}{3}$.

19. Použitím rovnoľahlosti dokážte, že body $(-3; 4)$, $(6; -9)$, $(0; 0)$ neležia na jednej priamke.
Ako musíte zmeniť niektorú súradnicu druhého bodu, aby vždy tri body ležaly na jednej priamke?

3. Zmena začiatku. Vzdialenosti a smerové uhly.

V predchádzajúcom sme sa rozhodli pre jednoznačne určené smery súradnicových osí. Naproti tomu voľba začiatku je (a nevyhnutne musí byť) neurčitá. Vplyv zmeny začiatku na súradnice je vyjadrený nasledujúcou vetou, ktorú môžeme považovať za základnú vetu analytickej geometrie:

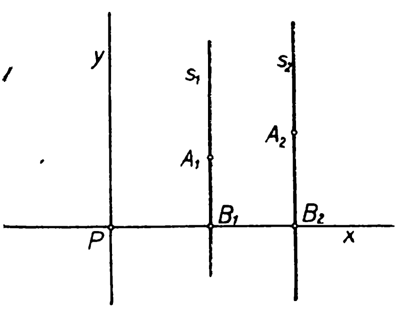
Keď sú $A_1 \equiv (x_1, y_1)$, $A_2 \equiv (x_2, y_2)$ akékoľvek dva body, sú rozdiely ich súradníc

$$x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1 \tag{1}$$

nezávislé od voľby začiatku.

Dôkaz stačí urobiť pre rozdiel $x_2 - x_1$, lebo dôkaz pre rozdiel $y_2 - y_1$ je úplne rovnaký.

Označme (obr. 7) s_1, s_2 svislé priamky (rovnobežky s y-ovou osou) vedené bodmi A_1, A_2. Priamky s_1, s_2 sú nezávislé od voľby začiatku. Ak sú B_1, B_2 priesečíky priamok s_1, s_2 s x-ovou osou, sú čísla x_1, x_2 súradnice bodov B_1, B_2 na x-ovej osi a podľa článku 1 je $(x_2 - x_1)$ vzájomná vzdialenosť bodov B_1, B_2, ktorá je zrejme rovná vzájomnej vzdialenosti rovnobežných priamok s_1, s_2. Je teda absolútna hodnota čísla $x_2 - x_1$ nezávislá od voľby začiatku. To isté však platí aj o znamienku čísla $x_2 - x_1$, lebo napr. $x_2 - x_1 > 0$ znamená, že bod B_2 leží napravo od bodu B_1 alebo že priamka s_2 leží napravo od priamky s_1; podobne $x_2 - x_1 < 0$ znamená, že priamka s_2 leží naľavo od priamky s_1, podobne $x_2 - x_1 = 0$ znamená, že obe priamky s_1, s_2 splývajú.



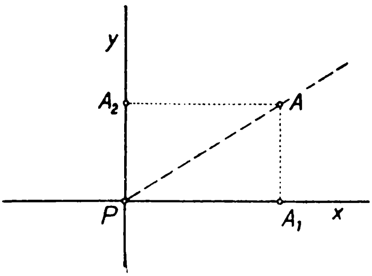
Obr. 7.

Ak bod P' má podľa začiatku P súradnice a, b, potom bod A, ktorý má podľa začiatku P súradnice x, y, má podľa začiatku P' súradnice x', y', kde

$$x' = x - a, \quad y' = y - b. \tag{2}$$

Lebo ak v základnej vete (vzorec 1) zvolíme za bod A_1 bod P', za bod A_2 bod A, tak rozdiely (1) podľa začiatku P budú $x - a$, $y - b$; tie isté rozdiely podľa začiatku P' budú $x' - 0$, $y' - 0$, totiž x', y'; z toho však plynú práve vzorce (2).

Vzdialenosť bodu $A \equiv (x, y)$ od začiatku sa rovná výrazu $\sqrt{x^2 + y^2}$.



Obr. 8.

Dôkaz. Ak bod A neleží ani na jednej z obidvoch súradnicových osí (obr. 8) a ak A_1 A_2 sú obidva priemety bodu A, je PA_1AA_2 obdĺžnik so stranami $\overline{A_2A} = \overline{PA_1} = x$, $\overline{PA_2} = \overline{A_1A} = y$ a podľa Pytagorovej vety je teda $\overline{PA} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Tým je veta dokázaná pre $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Keďže však

$$\sqrt{x^2 + 0^2} = |x|, \quad \sqrt{y^2 + 0^2} = |y|,$$

je veta správna, aj keď $y = 0$, alebo $x = 0$.

Vzájomná vzdialenosť bodov $A_1 \equiv (x_1, y_1)$, $A_2 \equiv (x_2, y_2)$ rovná sa výrazu

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{3}$$

Dôkaz: Keďže výraz (3) je nezávislý od voľby začiatku, stačí vykonať dôkaz pre prípad, že začiatok je v bode A_1, t. j. že $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. Ale v tomto prípade plynie veta z predchádzajúcej vety.

Teraz budeme definovať **smerový uhol priamky p**. Predpokladáme, že na priamke p je zvolený určitý smysel. Pojmu uhol dávame ten význam, ktorý bol podrobne vysvetlený v učebnici pre 2. triedu na str. 56 a nasl., teda berieme ohľad aj na smysel smerového uhlu. **Smerový uhol φ priamky p je uhol, ktorého vrchol je v začiatku P, ktorého prvé rameno je kladná čiastka x-ovej osi**

a ktorého druhé rameno je súhlasne rovnobežné s priamkou p. Číslo vyjadrujúce veľkosť uhlu φ (v oblúkovej miere) nie je jednoznačne určené; ak je φ_0 jedna možná hodnota veľkosti uhlu φ, sú všetky možné hodnoty uhlu φ dané výrazom

$$\varphi = \varphi_0 + 2n\pi;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4}$$

Jednoznačne sú určené čísla $\cos \varphi$, $\sin \varphi$. Z definície funkcií sinus a kosinus, podaných v učebnici pre 2. triedu na strane 60, plynie, že bod s komplexnou súradnicou $\cos \varphi + i \sin \varphi$ alebo bod

$$(\cos \varphi, \sin \varphi) \tag{5}$$

leží na druhom ramene smerového uhlu vo vzdialenosti od začiatku rovnajúcej sa jednej.

Predpokladajme teraz, že priamka p prechádza začiatkom P a je určená ďalším svojím bodom $A \equiv (x, y)$, pričom nech sa udaný smysel rovná smyslu PA. Potom je druhé rameno smerového uhlu polpriamka PA, ktorá teda obsahuje bod (5). Keď písmenom r označíme dĺžku úsečky $\overline{PA}$, je bod A obrazom bodu (5) pri rovnoľahlosti (P, r), takže podľa vzorca (5) článku 2 je

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi\,. \tag{6}$$

Nech sú teraz $A_1 \equiv (x_1, y_1)$, $A_2 \equiv (x_2, y_2)$ dva rôzne body, nech je r ich vzájomná vzdialenosť a φ nech je smerový uhol priamky A_1, A_2. Potom bude

$$x_2 - x_1 = r \cos \varphi, \quad y_2 - y_1 = r \sin \varphi\,. \tag{7}$$

Dôkaz: Ak bod A_1 je začiatkom sústavy, platí rovnica (7) na základe rovnice (6), avšak čísla r, φ sú nezávislé od voľby začiatku a podľa základnej vety [(1) v článku 3] platí to isté o ľavých stranách rovníc (7), takže rovnice (7) platia všeobecne. Ak je priamka daná dvoma bodmi, môžeme vypočítať jej smerový uhol φ na základe rovníc (7). Môžeme najprv určiť r podľa (3) a potom máme

$$\cos \varphi = \frac{x_2 - x_1}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y_2 - y_1}{r}\,. \tag{8}$$

Na výpočet čísel $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ treba teda najprv určiť odmocninu (3).

V analytickej geometrii obyčajne nepočítame ani cos φ ani sin φ, ale tg φ. Podľa rovníc (7) alebo (8) je

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,. \tag{9}$$

Číslo tg φ sa menuje smernicou priamky. Treba si však všimnúť, že číslo tg φ nie je definované, ak cos $\varphi = 0$, t. j. **priamky rovnobežné s y-ovou osou nemajú smernice.**

Pojem smerového uhlu priamky p závisí od smyslu priamky p. Ak jednému z obidvoch možných smyslov priamky prislúcha uhol φ, potom jedna z hodnôt smerového uhlu prislúchajúcich opačnému smyslu je $\varphi + \pi$. Vieme (učebnica pre 2. triedu, str. 63), že $\cos(\varphi + \pi) = -\cos\varphi$, $\sin(\varphi + \pi) = -\sin\varphi$, takže čísla cos φ, sin φ obidve zmenia znamienka pri zmene smyslu priamky. To je v súhlase so vzorcami (7), lebo zmena smyslu zodpovedá výmene obidvoch bodov $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$. Pretože je $\operatorname{tg}\varphi = \sin\varphi : \cos\varphi$, **smernica priamky je tá istá pri obidvoch možných smysloch,** čo je zas potvrdenie vzorca (9).

Smernicu priamky najčastejšie označujeme písmenom k; podľa (9) máme teda vzorec

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{10}$$

pre smernicu priamky určenej dvoma bodmi. Pripomeňme si znovu, že priamky rovnobežné s osou x-ovou nemajú smernicu. Pre takú priamku x-ová súradnica všetkých jej bodov má konštantnú (stálu) hodnotu, t. j. máme $x_2 = x_1$, $x_2 - x_1 = 0$ a zlomok na pravej strane rovnice (10) nemá smyslu. Pre priamku rovnobežnú s osou x-ovou zase y-ová súradnica všetkých jej bodov je konštantná (stála) hodnota, t. j. máme $y_2 = y_1$, $y_2 - y_1 = 0$ a zlomok na pravej strane rovnice (10) rovná sa nule. **Smernica priamky rovnobežnej s osou x-ovou je rovná nule.** Keď však priamka nie je rovnobežná ani s jednou súradnicovou osou, tak dva rozličné body priamky nemôžu súhlasiť ani v x-ovej, ani v y-ovej súradnici, t. j. v rovnici (10) je $x_2 - x_1 \neq 0$, $y_2 - y_1 \neq 0$; priamka má smernicu a táto smernica je rôzna od nuly. Pre $x_2 > x_1$ alebo $x_2 - x_1 > 0$ je pri kladnom k aj $y_2 - y_1 > 0$ alebo $y_2 > y_1$, pri zápornom k $y_2 - y_1 < 0$ alebo $y_2 < y_1$. Preto teda

ak má priamka kladnú smernicu, smysel od ľavej strany k pravej je na nej súčasne smyslom zdola nahor. Ak má však priamka zápornú smernicu, tak smysel od ľavej k pravej strane je na nej súčasne smyslom shora nadol.

Cvičenie.

20. Určite nové súradnice vrcholov trojuholníka ABC, kde $A \equiv (-5;\ 4)$, $B \equiv (4;\ 1)$, $C \equiv (3;\ -2)$, ak je nový začiatok bod: a) $(-5;\ 0)$, b) $(0;\ -2)$, c) $(4;\ 1)$, d) stredný bod úsečky $\overline{AC}$.
21. Nech je $X' = x' + iy'$ ľubovoľný bod a $A = a + ib$ určitý bod roviny. Tak bod $X = x + iy$, kde $x = x' + a$, $y = y' + b$ je obrazom súčtu komplexných čísel $x' + iy'$, $a + ib$. Bod X vznikne posunutím bodu X' o vektor so začiatočným bodom v bode P a koncovým bodom v bode $P' = a + ib$. Ak rovnako posunieme bod P do novej polohy P' a s ním aj súradnicové osi x, y do novej polohy x', y', bude mať v novej sústave bod X tie isté súradnice $x'y'$, ktoré mal bod X' v pôvodnej sústave; je teda $x' = x - a$, $y' = y - b$, čím sú znova dokázané vzťahy (2). Vykonajte podrobne!
22. Ako treba zvoliť nový začiatok P' sústavy súradníc, aby bod $(u;\ v)$: a) padol na novú os x'? b) padol na novú os y'? c) mal v novej sústave súradnice $x' = 0$, $y' = 0$?
23. Určite vzdialenosti začiatku P sústavy súradníc od týchto bodov: $(-3;\ 4)$, $(12;\ -5)$, $(0;\ -9)$, $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\ ;\ \frac{1}{2},\right)(-1;\ 1)$.
24. Určite druhú súradnicu bodu $A \equiv (x;\ y)$, ak $\overline{PA} = 5$ a ak a) $x = -4$; b) $y = -1$; c) $x = 0$; d) $x = -5$; e) $y = 6$; V ktorom prípade nemá úloha riešenie?
25. Vypočítajte dĺžky úsečiek určených dvojicami bodov: a) $(-3;\ 7)$, $(-3;\ -2)$, b) $(9;\ 0)$, $(6;\ -5)$, c) $(0;\ -3)$, $(0;\ 4)$.
26. a) Na osi x určite bod X tak, aby $\overline{XM} = 5$, ak bod $M \equiv (3;\ 3)$. b) Na osi y určite bod Y tak, aby $\overline{YM} = 13$, ak bod $M \equiv (-6;\ -5)$.
27. Úsečka $(7;\ 3)$, $(-2;\ 1)$ je základňou rovnoramenného trojuholníka, ktorého tretí vrchol leží: a) na osi x, b) na osi y. Určite jeho súradnice.
28. Body $A_1 \equiv (x_1;\ y_1)$, $A_2 \equiv (x_2;\ y_2)$ určujú nenulovú úsečku. Nech sú A_1', A_2' pravouhlé priemety daných bodov na osi X a A_1'', A_2'' pravouhlé priemety daných bodov na osi y.

    a) Určite súradnice bodov A_1', A_2', A_1'', A_2''. Kedy je $A'_1 \equiv A_2$ a kedy $A_1'' \equiv A_2''$? Môžu nastať obidva prípady súčasne?

    b) Nech je $S \equiv (x;\ y)$ stred úsečky $\overline{A_1A_2}$ a S', S'' jeho pravouhlé priemety na osi súradníc. Vieme, že $\overline{SS'}$, $\overline{SS''}$ sú stredné priečky v lichobežníkoch $A_1A_2A_1'A_2'$ a $A_1A_2A_2''A_1''$, pokiaľ, pravda, nie je $A_1' \equiv A_2'$ alebo $A_1'' \equiv A_2''$. Pretože môžete určiť súradnice bodov S', S'' zo súradníc bodov A', A_2', resp. bodov A_1'', A_2'', určite tým aj súradnice bodu S'. Podrobne prediskutujte!

29. Vieme, že uhly φ, φ' považujeme za rovnaké, ak sa ich veľkosti líšia o celistvý násobok uhlu 2π. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich uhlov považujeme za rovnaké:

a) $11\,\pi;\ -3\,\pi;\ -5\,\pi;$ b) $\frac{3}{2}\pi;\ -\frac{9}{2}\pi;\ 2\pi - \frac{7}{2}\pi;$

c) $2 - \pi;\ 3\,\pi + 2;\ 4\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\pi\right);\ 4 - 3\,\pi.$

30. Narysujte v rovine sústavu súradníc a ľubovoľnú priamku MN, ktorej smysel je MN. Ak je φ jej smerový uhol, vyšetrite graficky hodnoty $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ (napr. okolo bodu M opíšte kružnicu s polomerom $r = 1$ dm a vyznačte písmenom K jej priesečík s polpriamkou MN; veľkosť priemetov úsečky $\overline{MK}$ na súradnicové osi x a y opatrené vhodnými znamienkami sú hľadané hodnoty).

31. Bod $J \equiv (\cos\varphi; \sin\varphi)$ určuje priamku PJ, ktorej smysel je PJ a ktorej smerový uhol je φ alebo $\varphi + 2n\pi$ (kde $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ atď.). Naproti tomu bod $J' \equiv (\cos\varphi', \sin\varphi')$, kde $\varphi' = \varphi + \pi$ určuje opačný smysel PJ' na priamke PJ; tento smysel zodpovedá smerovému uhlu φ priamky PJ. Dokážte!

32. Na základe výsledku predchádzajúcej úlohy narysujte v rovine, v ktorej ste zvolili sústavu súradníc, priamku MN, ktorá prechádza bodom $M \equiv (-3; 2)$ a ktorej smerový uhol φ vyhovuje podmienke: a) $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\sin\varphi < 0$; b) $\cos\varphi = -1$; c) $\cos\varphi < 0$; $\sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; d) $\sin\varphi =$

$$= -1;\ \text{e) } \sin\varphi = -0{,}8.$$

V ktorom prípade nie je úloha jednoznačná?

33. Daný bod A určuje priamku aj čo do smyslu. Určite hodnoty $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ smerového uhlu φ priamky PA; ak je:
a) $A \equiv (-12; 5)$, b) $A \equiv (-8; 6)$, c) $A \equiv (1; -1)$, d) $A \equiv (-6; 0)$, e) $A \equiv (0; 3)$.

34. Priamka je aj čo do smyslu určená poriadkom MN daných bodov M, N, nech je φ jej smerový uhol. Určite hodnoty $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ a $\operatorname{tg}\varphi$, ak je: a) $M \equiv (2; 3)$, $N \equiv (6; 6)$, b) $M \equiv (2; 3)$, $N \equiv (-10; -2)$, c) $M \equiv (-2; 6)$, $N \equiv (4; -2)$, d) $M \equiv (-4; 9)$, $N \equiv (6; 9)$.

35. Ak je $\varphi' = \varphi + \pi$, je $\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg}\varphi$ a obidva body $T' \equiv (1; \operatorname{tg}\varphi')$ $T \equiv (1; \operatorname{tg}\varphi)$ splývajú. Nie je teda možné pomocou smernice $\operatorname{tg}\varphi$ priamky PT vyjadriť obidva jej smysly. Porovnajte s úlohou 31 a vysvetlite.

36. Narysujte súradnicové osi, bod $M \equiv (-4; 3)$ a priamku r, ktorá prechádza týmto bodom a ktorej smernica k má hodnotu: a) $\frac{3}{4}$; b) $-\frac{3}{2}$; c) 3; d) -2; e) 0.
Pre ktorú priamku, prechádzajúcu bodom M, nie je možné udať smernicu?

37. Body $M \equiv (3, -4)$, $N \equiv (-1, 2)$ a $P \equiv (1; y)$ ležia v jednej priamke. Určite smernicu tejto priamky tak použitím bodov M, N, ako aj použitím bodov M, P; porovnaním obidvoch výsledkov ľahko určíte neznámu súradnicu y bodu P.

38. Dané sú body $R \equiv (3; 4)$, $S \equiv (-1; 2)$, $T \equiv (1; 3)$, $U \equiv (-5; 0)$,
a) ak je φ smerový uhol priamky RS, použitím hodnôt $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ sa má dokázať, že body T, U tiež ležia na tejto priamke. Urobte to!
b) Ak je O stred úsečky $\overline{TU}$, rozhodnite o poriadku bodov O, R, S, T, U.
c) Ktorú čiastku predchádzajúcich prípadov a), b) môžeme riešiť použitím smernice priamky?

4. Výpočet uhlov.

Vypočítame najprv uhol*

$$\alpha = \widehat{A_1PA_2}, \tag{1}$$

ktorého vrchol je v začiatku P a ktorého ramená prechádzajú bodmi $A_1 \equiv (x_1, y_1)$, $A_2 \equiv (x_2, y_2)$, ktorých súradnice poznáme. Ak sú r_1, r_2 vzdialenosti

$$\overline{PA_1} = r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2},\ \overline{PA_2} = r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \tag{2}$$

a ak sú φ_1, φ_2 smerové uhly priamok PA_1, PA_2 (v smysle od P k A_1, resp. k A_2), máme podľa vzorca (6) článku 3

$$x_1 = r_1 \cos \varphi_1,\ y_1 = r_1 \sin \varphi_1,$$
$$x_2 = r_2 \cos \varphi_2,\ y_2 = r_2 \sin \varphi_2,$$

alebo s použitím komplexných čísel

$$\begin{aligned} x_1 + iy_1 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \\ x_2 + iy_2 &= r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \end{aligned} \tag{3}$$

ako aj

$$x_1 - iy_1 = r_1 (\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1). \tag{4}$$

---

* Nepíšeme $\sphericalangle A_1PA_2$, ale $\widehat{A_1PA_2}$, aby sme naznačili, že ide o uhol v tom smysle, ako bol popísaný v učebnici pre 2. triedu.

Z bodu $(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1)$ vznikne však bod $(\cos\varphi_2, \sin\varphi_2)$ otočením v kladnom smysle o uhol α. Preto je [v učebnici pre 2. triedu vzorec (9) na str. 63].

$$\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1).$$

Ak vynásobíme na obidvoch stranách číslom $(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)$ a ak si všimneme, že

$$(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1) = \cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1 = 1,$$

dostaneme

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = (\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

takže podľa rovníc (3) a (4) je

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = \frac{(x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2)}{r_1 r_2}.$$

Keďže však

$$(x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_1y_2 - x_2y_1),$$

máme nakoniec

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{r_1r_2}, \quad \sin\alpha = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{r_1r_2}. \tag{5}$$

Ak

$$x_1y_2 - x_2y_1 = 0, \tag{6}$$

je $\sin\alpha = 0$, t. j. obidve ramená $PA_1\,PA_2$ alebo splynú, alebo sú polpriamky opačného smeru, lebo uhol $\alpha = 0$ alebo $\alpha = \pi$; ktorý z týchto dvoch prípadov nastane, závisí od znamienka čísla $\cos\alpha$, t. j. od znamienka čísla $x_1x_2 + y_1y_2$, lebo čísla r_1r_2 sú istotne kladné. Ak však

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0, \tag{7}$$

je $\cos\alpha = 0$ a uhol α je pravý; $\alpha = \pm\frac{1}{2}\pi$, t. j. z ramena PA_1 vznikne rameno PA_2 otočením o pravý uhol v kladnom alebo v zápornom smysle; ktorý z obidvoch prípadov nastane, závisí od znamienka čísla $\sin\alpha$, t. j. od znamienka čísla $x_1y_2 - x_2y_1$.

Ak neplatí vzťah (7), je $\cos\alpha \neq 0$ a jestvuje $\operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha : \cos\alpha$; podľa rovníc (5) je

$$\operatorname{tg} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 x_2 + y_1 y_2} . \tag{8}$$

Ak $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, t. j. ak ani jedna z obidvoch priamok PA_1 PA_2 nie je svislá, môžeme do predchádzajúcich vzorcov zaviesť smernice

$$k_1 = \frac{y_1}{x_1}, \quad k_2 = \frac{y_2}{x_2} \tag{9}$$

týchto priamok. Bude teda

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_1 x_2 (1 + k_1 k_2),$$

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = x_1 x_2 (k_2 - k_1),$$

takže podmienka (7) pre kolmosť dvoch priamok bude

$$1 + k_1 \, k_2 = 0 \tag{10}$$

a rovnica (8) nadobudne tvar

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} . \tag{11}$$

Dôležité je mať na pamäti, že všade v predchádzajúcom znamená α uhol, o ktorý treba otočiť v kladnom smysle (proti pohybu ručičiek hodín) pollúč PA_1, aby prešiel v pollúč PA_2. Tento uhol α je určený (v oblúkovej miere) až na násobky 2π; ak chceme mať α jednoznačne definované, môžeme napr. žiadať, aby bolo

$$-\pi < \alpha \leqq \pi. \tag{12}$$

Na určenie veľkosti uhlu α nestačí poznať hodnotu $\operatorname{tg}\alpha$, t. j. nestačí vzorec (8) alebo (11), lež treba vedieť ešte, aké znamienko má $\sin\alpha$ alebo $\cos\alpha$ $\Big($lebo keď poznáme jedno z týchto dvoch znamienok, poznáme aj druhé na základe vzťahu $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Big)$. Keďže je $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, podľa vzťahu (5) má $\sin\alpha$ to isté znamienko ako čitateľ a $\cos\alpha$ to isté znamienko ako menovateľ zlomku na pravej strane rovnice (8). [O zlomku na pravej strane rovnice (11) platí to isté, ak $x_1x_2 > 0$, t. j. ak majú obidve čísla x_1, x_2 rovnaké znamienka. Ak majú však čísla x_1, x_2 rôzne znamienka, má $\sin\alpha$ opačné znamienko než čitateľ a $\cos\alpha$ opačné znamienko než menovateľ zlomku na pravej strane rovnice (11). Uhol α je totiž ostrý alebo tupý podľa toho, či je $\cos\alpha > 0$ alebo $\cos\alpha < 0$; teda α uhol je ostrý, ak má $1 + k_1k_2$ to isté znamienko ako x_1x_2, uhol α je tupý, ak $1 + k_1k_2$ má opačné znamienko ako x_1x_2.]

V predchádzajúcom sme preberali uhol $\widehat{A_1PA_2}$, ktorého vrchol je v začiatku. Zo základnej vety analytickej geometrie plynie, že ak ide o uhol $\alpha = A_1A_0A_2$ s ľubovoľným vrcholom A_0, pričom

$$A_0 \equiv (x_0, y_0), \quad A_1 \equiv (x_1, y_1), \quad A_2 \equiv (x_2, y_2),$$

všetky vzorce tohto článku ostanú v platnosti, ak do nich namiesto x_1, y_1, x_2, y_2 dosadíme $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, $x_2 - x_0$, $y_2 - y_0$.

Cvičenie.

39. Podobne ako v texte na str. 21 určite uhol $\alpha = \widehat{A_1PA_2}$, kde $A_1 \equiv$ $\equiv -3 - 4i$, $A_2 \equiv -12 + 5i$ tým, že určíte jednotkové číslo $\cos\alpha +$ $+ i\sin\alpha$, o ktorom by platilo

$$\frac{-3-4i}{PA_1} \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{-12+5i}{PA_2} \, .$$

Pritom sa obmedzte na a) $0 \leq \alpha < 2\pi$, b) $-\pi < \alpha \leq \pi$.

40. Predchádzajúcu úlohu 39 riešte s použitím a) vzorcov (5) na str. 22, b) vzorca (11) na str. 23.

41. Dané sú body $A \equiv (3; -6)$, $B \equiv (6; -3)$, $C \equiv (1; 2)$. a) Dokážte, že $\triangle ABC$ je pravouhlý a rozhodnite, ktorý uhol je pravý. Udajte rôzne spôsoby riešenia.
b) O ktorý uhol treba v kladnom smysle otočiť polpriamku BA okolo bodu B, aby prvý raz splynula s polpriamkou BC? Rozhodnite, či v tomto uhle leží vnútro trojuholníka ABC.

42. Viete, že uhly trojuholníka sú duté. Podľa toho ľahko určíte uhly trojuholníka ABC, keď $A \equiv (-2; 1)$, $B \equiv (-1; 1)$, $C \equiv (-3; 2)$.

43. Určite uhol, o ktorý treba otočiť priamku p_1, aby sa aj čo do smyslu kryla s priamkou p_2. Smysly priamok sú udané bodmi $(\cos\varphi_1; \sin\varphi_1)$, $(\cos\varphi_2; \sin\varphi_2)$.

44. Nech sú φ_1, φ_2 smerové uhly priamok p_1, p_2. Smysly týchto priamok určujú polpriamky PA_1, PA_2, kde $A_1 \equiv (\cos\varphi_1; \sin\varphi_1)$, $A_2 \equiv (\cos\varphi_2, \sin\varphi_2)$. Určite uhol α, o ktorý treba otočiť priamku p_1, aby bola súhlasne rovnobežná s priamkou p_2, ak je:

a) $A_1 \equiv \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3};\ \sin\varphi_1 > 0\right)$, $A_2 \equiv \left(\frac{1}{2};\ \sin\varphi_2 < 0\right)$;

b) $A_1 \equiv \left(\cos\varphi_1 > 0; -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $A_2 \equiv \left(\cos\varphi_2 < 0; -\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$;

c) $A_1 \equiv \left(-\frac{4}{5};\ \sin\varphi_1 > 0\right)$, $A_2 \equiv \left(-\frac{12}{13};\ \sin\varphi_2 < 0\right)$.

45. Vieme, že keď otočíme danú polpriamku AB o uhol $\frac{\pi}{3}$ je súhlasne rovnobežná s polpriamkou CD. Je dané: $A \equiv (\sqrt{2};\ 0)$, $B \equiv (0; -\sqrt{2})$, $C \equiv (5;\ 5)$, $D \equiv (x;\ 2)$. Určite súradnicu x bodu D.

46. Nech sú φ_1, φ_2 smerové uhly polpriamok PA_1, PA_2, kde $A_1 \equiv (\cos\varphi_1 = -\frac{3}{5};\ \sin\varphi_1 < 0)$, $A_2 \equiv (\cos\varphi_2;\ \sin\varphi_2)$.

Určite bod A_2 tak, aby $\widehat{A_1PA_2}$ bol: a) $\frac{1}{2}\pi$; b) $\frac{3}{2}\pi$; c) $\frac{5}{6}\pi$; d) 0; e) π.

47. Predchádzajúcu úlohu 46 riešte použitím vzorca (11) na str. 23.

5. Rovnica priamky.

Nech je priamka p najprv svislá (rovnobežná s osou y). Priamka p pretne x-ovú os v bode, ktorého súradnica na x-ovej osi nech je c. Pre každý bod (x, y) na priamke p je potom

$$x = c \tag{1}$$

a naopak každý bod, pre ktorý platí rovnica (1), leží na priamke p. Hovoríme, že rovnica (1) je **rovnica priamky rovnobežnej s osou** y.

Nech je teraz p taká priamka, ktorá nie je rovnobežná s y-ovou osou. Priamka p má teda určitú smernicu, ktorú označme k. Predpokladajme najprv, že priamka p prechádza začiatkom P. Potom platí pre každý bod (x, y) priamky p, ktorý sa líši od začiatku P, rovnica

$$\frac{y}{x} = k, \tag{2}$$

ktorú môžeme písať aj v tvare

$$y = kx; \tag{3}$$

rovnica (3) platí pre každý bod priamky p, aj pre začiatok P. Obrátene každý bod (x, y), pre ktorý platí rovnica (3), leží na priamke

p. Lebo ak sú dané dve čísla x, y tak, že $y = kx$, preto, že priamka p nie je rovnobežná s osou y, musí na priamke ležať bod (x, Y), ktorého prvá súradnica sa rovná danému číslu x. Pretože však bod (x, Y) leží na priamke p, musí byť $Y = kx$; ale keďže platí $y = kx$, musí byť $y = Y$, t. j. body (x, y), (x, Y) splynú a to znamená, že bod (x, y) leží na priamke p. Hovoríme, že rovnica (3) je **rovnica priamky, ktorá prechádza začiatkom a má smernicu** k.

Predpokladajme teraz, že priamka p so smernicou k prechádza bodom (x_1, y_1), ale neprechádza začiatkom. Keby sme začiatok posunuli do bodu (x_1, y_1), ostala by hodnota smernice nezmenená a rovnica priamky by bola

$$y' = kx',$$

kde x', y' sú zmenené súradnice bodu (x, y). Avšak medzi pôvodnými súradnicami x, y ktoréhokoľvek bodu a jeho zmenenými súradnicami x', y' platia (v rovnici [2] čl. 3) vzťahy

$$x' = x - x_1, \quad y' = y - y_1,$$

teda

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{4}$$

je **rovnica priamky, ktorá prechádza daným bodom** (x_1, y_1) **a má smernicu** k.

Ak $x_1 = 0$, leží bod $(x_1, y_1) = (0, y_1)$ na osi y. Ak označíme $y_1 = q$, dostaneme z rovnice (4) rovnicu priamky, ktorá má smernicu k a ktorá pretína os y v bode (o, q) v tvare

$$y = kx + q. \tag{5}$$

Teraz ľahko určíme rovnicu priamky p, ktorá prechádza dvoma danými bodmi (x_1, y_1), (x_2, y_2), ktoré, pravda, musia byť rôzne. Sú dva možné prípady. Ak po prvé obidve čísla x_1, x_2 sú rovné tomu istému číslu c, priamka p je rovnobežná s osou y a má rovnicu (1). Ak po druhé čísla x_1, x_2 sú rôzne, má priamka p smernicu

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{6}$$

a jej rovnica je (4), kde za k má sa dosadiť hodnota (6).

Každá priamka p je alebo rovnobežná s osou y, takže má rovnicu tvaru (1), alebo má určitú smernicu k a pretne os y v určitom bode $(0, q)$ a vtedy má rovnicu tvaru (5). A obrátene každá rovnica tvaru (1) alebo (5) je rovnicou určitej priamky: rovnica (1) je rovnica priamky, ktorá prechádza bodom $(c, 0)$ rovnobežne s osou y; rovnica (5) je rovnica priamky, ktorá prechádza dvoma rôznymi bodmi $(0, q)$, $(1, k + q)$. Rovnice (1) a (5) môžeme písať aj v tvare

$$1 \cdot x + 0 \cdot y - c = 0; \quad -k \cdot x + 1 \cdot y - q = 0.$$

Sú to teda zvláštne prípady **lineárnej rovnice**, ak pod lineárnou rovnicou rozumieme vzťah medzi súradnicami x, y tvaru

$$ax + by + c = 0, \tag{7}$$

kde a, b, c sú určité čísla (konštanty) a aspoň jedno z obidvoch čísel a, b je rôzne od nuly. Obrátene **každá lineárna rovnica je rovnica určitej priamky**. Predpokladajme, že je daná rovnica (7). Ak je v nej $b = 0$, musí byť $a \neq 0$; rovnica (7) znie teda $ax + c = 0$ a dá sa upraviť na tvar $x = \frac{-c}{a}$; je to teda rovnica priamky, ktorá prechádza bodom $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ rovnobežne s osou y. Ak $b \neq 0$, môžeme rovnicu (7) upraviť na tvar

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

t. j. na tvar rovnice (5). Tým je naše tvrdenie dokázané. Súčasne vidíme, že „priamka (7)", t. j. priamka určená rovnicou (7), má smernicu

$$k = -\frac{a}{b}, \tag{8}$$

ak je $b \neq 0$. Ak však $b = 0$ (teda $a \neq 0$), priamka (7) je rovnobežná s osou y, a nemá smernicu. Dôležité je vedieť, kedy určujú dve lineárne rovnice

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \tag{7'}$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \tag{7''}$$

tú istú priamku. Ak je tomu tak, sú zodpovedajúce koeficienty obidvoch rovníc priamo úmerné, t. j. jestvuje také číslo s, že platia vzťahy

$$a_2 = sa_1, \; b_2 = sb_1, \; c_2 = sc_1. \tag{9}$$

Keďže aspoň jedno z čísel a_2, b_2 musí byť rôzne od nuly, je potrebné, aby aj $s \neq 0$ a rovnicu (7'') môžeme písať v tvare

$$s\,(a_1x + b_1y + c_1) = 0,$$

z čoho je jasné, že rovnica (7'') má úplne rovnaký význam ako rovnica (7'), takže obidve rovnice určujú tú istú priamku. Obrátene ak dve lineárne rovnice (7') (7'') určujú tú istú priamku, sú ich koeficienty úmerné.

Dôkaz I.: Nech je najprv $b_1 = 0$, takže priamka (7') je rovnobežná s osou y. Keďže priamka (7'') splýva s priamkou (7'), musí byť aj $b_2 = 0$. Potom však musí byť $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, teda môžeme určiť číslo $s \neq 0$ tak, že $a_2 = sa_1$. Rovnice (7'), (7'') znejú potom

$$a_1x + c_1 = 0, \quad sa_1x + c_2 = 0$$

a dajú sa upraviť na tvar

$$x = -\frac{c_1}{a_1}, \; x = -\frac{c_2}{sa_1}.$$

Keďže obe rovnice určujú tú istú priamku, musí platiť

$$-\frac{c_2}{sa_1} = -\frac{c_1}{a_1}, \quad \text{teda } c_2 = sc_1,$$

t. j. platia všetky tri rovnice (9).

II. Nech je v druhom prípade $b_1 \neq 0$, takže priamka (7') nie je rovnobežná s osou y. Keďže priamka (7'') splýva s priamkou (7'), je aj $b_2 \neq 0$. Môžeme teda určiť číslo $s \neq 0$ tak, že $b_2 = sb_1$. Rovnice (7'), (7'') sa potom dajú písať v tvare

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}, \quad y = \frac{a_2}{sb_1}x - \frac{c_2}{sb_1}.$$

Pretože obidve priamky splývajú, majú jednak tú istú smernicu, teda

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{sb_1} \quad \text{t. j. } a_2 = sa_1,$$

jednak pretínajú os y v tom istom bode $(0, q)$, teda

$$-\frac{c_1}{b_1} = -\frac{c_2}{sb_1}, \quad \text{t. j.} \quad c_2 = sc_1.$$

Teda platia všetky tri rovnice (9).

Nakoniec sa niekoľkými slovami zmieňme o tom, ako sostrojíme priamku p danú lineárnou rovnicou

$$ax + by + c = 0. \tag{7}$$

Ak je $b = 0$, môžeme rovnicu (7) upraviť na tvar

$$x = -\frac{c}{a};$$

priamka je rovnobežná s osou y a jej priesečík s osou x vieme sostrojiť. Ak je po druhé $a = 0$, môžeme rovnicu (7) upraviť na tvar

$$y = \frac{c}{b};$$

priamka p je rovnobežná s osou x a jej priesečík s osou y vieme sostrojiť. Ak je po tretie $a \neq 0$, $b \neq 0$, ale $c = 0$, potom znie rovnica (7) $ax + by = 0$. Priamka p prechádza začiatkom sústavy a okrem toho na pr. bodom $(b_1, -a)$ a bodom $(-b, a)$. Ak ležia tieto body mimo nákresu, môžeme zvoliť namiesto nich jeden z bodov $\left(\frac{1}{2}b, -\frac{1}{2}a\right)$ alebo $\left(\frac{1}{3}b, -\frac{1}{3}a\right)$ atď. Ak leží bod $(b, -a)$ príliš blízko začiatku, sostrojíme namiesto neho bod $(2b, -2a)$ alebo $(3b, -3a)$ atď. Nech je po štvrté $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Priamka p nie je rovnobežná ani s jednou súradnicovou osou, a neprechádza začiatkom sústavy, pretína teda obidve súradnicové osi v dvoch rôznych bodoch, ktoré stačí sostrojiť. Priesečík priamky p s osou x je bod $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$; dostaneme ho, ak do rovnice (7) dosadíme $y = 0$ a potom vypočítame x. Priesečík priamky p s osou y je bod $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$; dostaneme ho, ak do rovnice (7) dosadíme $x = 0$ a potom vypočítame y. Môže sa stať, že niektorý z obidvoch priesečíkov priamky p so súradnicovými osami padne mimo nákresu alebo že oba priesečíky sú si tak blízko, že je ťažké pomocou nich priamku sostrojiť. Pomôžeme si tým, že si vypočítame súradnice nejakého iného bodu priamky tak, že vhodne zvolíme jednu z obidvoch súradníc x, y a druhú potom vypočítame z rovnice (7). Napr. pri priamke $5x - 6y + 1 = 0$ priesečíky so súradnicovými osami sú $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{6}\right)$, a nie sú veľmi vhodné na konštrukciu. Ale ak zvolíme napr. $x = 1$, vypočítame z rovnice priamky $y = 1$ a ak zvolíme ešte $x = -2$, vypočítame z rovnice $y = -\frac{3}{2}$; priamku sostrojíme výhodne ako spojnicu bodov $(1, 1)$, $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$.

Cvičenie.

48. Narysujte geometrické miesto bodov (x, y), ktorých súradnice splňujú rovnice:
a) $y = +x$; b) $y = -x$; c) $y = |x|$; d) $y = kx$; e) $y = |kx|$;
f) $y = k|x|$; g) $y = |k|x$; h) $y = \frac{1}{2}(x + |x|)$. Urobte všade diskusiu.

49. Bod $M = x + iy$ môžeme napísať v tvare $M = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde $r \geqq 0$. a) Čo je geometrické miesto bodov M, ak je φ konštantné a $r \geqq 0$ nadobúda všetky možné hodnoty?
b) Čo je geometrické miesto bodov $N = t(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde $t \leqq 0$? (Porovnajte s bodom $N' = r(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$, kde $r = |t|$ a $\varphi' = \varphi + \pi$.)
c) Čo je geometrické miesto bodov $N = t(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde t nadobúda všetky reálne hodnoty?
(Uvažujte o rovnoľahlosti bodov $y \equiv (\cos\varphi; \sin\varphi)$ a bodu N vzhľadom na stred rovnoľahlosti P.)

50. Napíšte rovnicu priamky prechádzajúcej začiatkom sústavy súradníc a bodom a) $(3; 4)$, b) $(-3; 2)$, c) $(-6; -8)$; d) $(1{,}5; -1)$. Vysvetlite, ako na prvý pohľad poznáte, či niektoré z týchto priamok splývajú.

51. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $(-2; 3)$ a a) ktorej smernica $k = -\frac{2}{3}$; b) ktorej smernica $k = 0$; c) ktorej smerový uhol je $\frac{7}{4}\pi$.

52. Ktorý smerový uhol $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ môžete prisúdiť priamke s rovnicou a) $y = -x + 2$; b) $y = -4$; c) $x = -2$?

53. Narysujte sústavu súradníc a ľubovoľnú priamku a napíšte rovnicu priamky.

54. Určite, v ktorých bodoch pretína priamka MN súradnicové osi a osi kvadrantov, ak: a) $M \equiv (2; 3)$, $N \equiv (6; 6)$, b) $M \equiv (-3; 4)$; $N \equiv (1{,}5; -2)$, c) $M \equiv (-4; 9)$, $N \equiv (6; 9)$, d) $M \equiv (-5; 2)$, $N \equiv (-5; -3)$.

55. Rozhodnite, ktorý z bodov $H \equiv (-1; y_1)$, $K \equiv (x_2; -3)$ môže ležať na priamke MN z príkl. 54; prečo úloha nemá v niektorých prípadoch riešenie?

56. Rozhodnite, ktoré z bodov $(7; 6)$, $(0; 0)$, $(-2; 1)$ ležia na priamke MN z príkl. 54a).

57. Dokážte, že na priamke s rovnicou $3x - 2y + 14 = 0$ leží bod $M \equiv (-2; 4)$. Vynásobte rovnicu tejto priamky ľubovoľným číslom (napr. $s = -3$) a dokážte, že súradnice bodu M tak isto vyhovujú novej rovnici. Aký geometrický dôsledok z toho plynie?

58. Je daná priamka s, ktorej rovnica je $ax + by + c = 0$. Ak $P' \equiv (m; n)$ je nový začiatok sústavy súradníc, akú rovnicu má priamka v novej sústave súradníc?

59. Určite neznáme konštanty m, n v rovnici $(3 - m)x + 12y + 2 - n = 0$, ak viete, že priamka určená touto rovnicou je totožná s priamkou o rovnici $y = \frac{2}{3}(x + 2)$.

60. Priamka prechádza bodom $M \equiv (4; 3)$ a má smernicu k. Napíšte jej rovnicu a určite priesečíky X, Y priamky so súradnicovými osami. Určite hodnotu k tak, aby $\triangle PXY$ mal obsah 3.

61. Dokážte: Priamka, ktorá prechádza bodom $M \equiv (x_1; y_1)$ a ktorej smernica je k, prechádza aj bodom $(x_1 + 1; y_1 + k)$ a bodom $(x_1 + n, y_1 + nk)$, kde $n \neq 0$ je ľubovoľné číslo.
Použite tento vzťah na narysovanie priamky určenej bodom M a smernicou k.

62. Narysujte priamku, ktorá má rovnicu:
a) $4x + 3y + 10 = 0$; b) $5x + 3y = 9$; c) $\frac{2}{3}x - \frac{5}{2}y = 0$;
d) $\frac{2}{3}y - 5 = 0$; e) $\frac{2}{3}x + 4 = 0$.

63. Určite konštantu c v rovnici: $3x + 4y + c = 0$, keď viete, že priamka vyjadrená touto rovnicou prechádza bodom: a) $(-5; 4)$; b) $(0; 0)$.

64. Ak priamka s rovnicou $ax + by + c = 0$ prechádza bodom (x_1, y_1), môžeme písať jej rovnicu v tvare $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$.

a) Dokážte aj obrátenú vetu.

b) Čo teda platí o rovnici priamky, ktorá prechádza bodom $(0; 0)$?

65. Čo súdite o vzájomnej polohe priamok o rovniciach:

a) $y = kx + q$; $y = kx + q'$?

b) $y = kx + q$; $y = -\frac{1}{k}x + q'$, kde $k \neq 0$? Čo bude, keď $q = q'$?

c) $ax + by + c = 0$; $ax + by + c' = 0$?

d) $ax + by + c = 0$; $bx - ay + c' = 0$?

e) $ax + by + c = 0$; $a'x + b'y + c' = 0$, pričom je $a' = sd$, $b' = sb$, kde $s \neq 0$. Kedy tieto priamky navzájom splývajú?

66. Napíšte rovnicu priamky prechádzajúcej bodom $(3; 5)$ a a) rovnobežnej, b) kolmej na priamku s rovnicou $2x + 7y + 3 = 0$. (Úlohu môžete riešiť použitím výsledkov z predchádzajúceho príkladu 65.)

6. **Parametrické vyjadrenie úsečky.**

Nech je daný bod $A_0 \equiv (x_0, y_0)$ nesplývajúci so začiatkom. Pomocou rovnoľahlosti (P, t) so stredom v začiatku P a s koeficientom rovnoľahlosti t kladným a menším ako jednotka, dostaneme z bodu A_0 ľubovoľný bod (x, y), ležiaci vo vnútri úsečky $\overline{PA_0}$. Podľa vzorca (5) článku 2 je

$$x = tx_0, \; y = ty_0. \qquad (1)$$

Vzorec (1) vyjadruje súradnice ľubovoľného bodu vo vnútri úsečky $\overline{PA_0}$ na základe pomocnej veličiny t, ktorú nazývame parametrom. Aby sme dostali celé vnútro úsečky $\overline{PA_0}$, treba dať parametru t všetky možné hodnoty také, že

$$0 < t < 1. \qquad (2)$$

Hovoríme, že rovnice (1) spolu s podmienkou (2) dávajú parametrické vyjadrenie vnútra úsečky $\overline{PA_0}$. Parametrické vyjadrenie celej úsečky PA_0 (aj s obidvoma krajnými bodmi) dostaneme, ak podmienku (2) nahradíme podmienkou

$$0 \leqq t \leqq 1, \qquad (3)$$

lebo pre $t = 0$ dávajú rovnice (1) začiatok P, pre $t = 1$ dávajú rovnice (1) bod A_0. Ak koeficient rovnoľahlosti t prebieha všetky kladné čísla (teda nielen kladné čísla menšie ako jednotka), potom rovnice (1) spolu s podmienkou

$$t > 0 \tag{4}$$

sú parametrickým vyjadrením vnútra polpriamky PA_0. Podobne rovnice (1) spolu s podmienkou

$$t \geqq 0 \tag{5}$$

sú parametrickým vyjadrením celej polpriamky (aj s jej začiatkom P). Ak napokon v rovniciach (1) prebieha parameter t všetky reálne hodnoty $t > 0$, $t = 0$, $t < 0$, sú rovnice (1) parametrickým vyjadrením celej priamky PA_0.

Nech sú teraz

$$A_1 \equiv (x_1, y_1), \; A_2 \equiv (x_2, y_2)$$

dva ľubovoľne dané nesplývajúce body. Ľahko dokážeme, že rovnice

$$x = x_1 + t\,(x_2 - x_1), \; y = y_1 + t\,(y_2 - y_1) \tag{6}$$

sú parametrickým vyjadrením vnútra

úsečky $\overline{A_1A_2}$, ak $0 < t < 1$;

celej úsečky $\overline{A_1A_2}$, ak $0 \leqq t \leqq 1$;

vnútra polpriamky $\overline{A_1A_2}$, ak $t > 0$;

celej polpriamky $\overline{A_1A_2}$, ak $t \geqq 0$;

celej priamky A_1A_2, ak t prebieha všetky reálne čísla. Rovnice (6) môžeme písať v tvare

$$x - x_1 = t\,(x_2 - x_1), \; y - y_1 = t\,(y_2 - y_1).$$

V tomto tvare sa v nich vyskytujú iba rozdiely súradníc

$$x_2 - x_1, \; y_2 - y_1; \; x - x_1, \; y - y_1,$$

ktoré podľa základnej vety analytickej geometrie (článok 3, str. 15) sú nezávislé od voľby začiatku. Ak teda zvolíme začiatok v bode A_1, je $x = 0$, $y_1 = 0$ a rovnice (6) prejdú do rovníc (1) s tým celkom nepatrným rozdielom, že namiesto označenia x_0, y_0 máme teraz označenie x_2, y_2. Tým sú všetky vyslovené tvrdenia dokázané.

Nech je teraz

$$ax + by + c = 0 \tag{7}$$

rovnica priamky p, takže a, b, c sú konštanty, z ktorých dve prvé nie sú obidve rovné nule. Ak bod (x, y) leží na priamke p, je vyhovené rovnici (7). Ale ak bod (x, y) neleží na priamke p, nie je vyhovené rovnici (7), t. j. číslo

$$ax + by + c \tag{8}$$

je odlišné od nuly, teda je alebo kladné alebo záporné. Tým sme vedení k rozdeleniu tých bodov (x, y), ktoré neležia na priamke p, na dve triedy podľa toho, či číslo (8) je kladné alebo záporné. Ako najzrejmejšia sa nám naskytuje domnienka, že takto určené dve triedy bodov nie sú nič iného ako vnútra obidvoch polrovín určených priamkou p. Pomocou parametrického vyjadrenia úsečky ľahko dokážeme, že je to skutočne tak. Nech sú teda $A_1 \equiv (x_1, y_1)$, $A_2 \equiv (x_2, y_2)$ dva rôzne body, z ktorých ani jeden neleží na priamke p; potom obidve čísla

$$s_1 = ax_1 + by_1 + c, \quad s_2 = ax_2 + by_2 + c \tag{9}$$

sú rôzne od nuly. Máme dokázať, že keď obidve čísla s_1 a s_2 majú rovnaké znamienka, úsečka $\overline{A_1A_2}$ nemá nijaký spoločný bod s priamkou p, kým v prípade, keď čísla s_1, s_2 majú spoločné znamienka, úsečka $\overline{A_1A_2}$ pretne priamku p. Na to použijeme parametrické vyjadrenie (6), v ktorom $0 < t < 1$. Ide o to, či je možné určiť t tak, aby sa vyhovelo rovnici (7). Ak dosadíme do rovnice (7) hodnoty (6), dostaneme

$$ax_1 + at\,(x_2 - x_1) + by_1 + bt\,(y_2 - y_1) + c = 0,$$

čo môžeme ľahko uviesť na tvar

$$t\,(ax_2 + by_2 + c) + (1 - t)\,(ax_1 + by_1 + c) = 0,$$

alebo podľa rovníc (9) na tvar

$$(1 - t)\,s_1 + t\,s_2 = 0. \tag{10}$$

Pre $0 < t < 1$ sú obidve čísla t, $(1 - t)$ kladné; keď teda aj obidve čísla s_1, s_2 sú kladné, je ľavá strana rovnice (10) stále kladná a rovnici (10) nebude možné vyhovieť. Ak sú obidve čísla s_1, s_2 záporné, je ľavá strana v rovnici (10) stále záporná a zase nie je možné vyhovieť rovnici (10). Teda ak obidve čísla s_1, s_2 majú to isté znamienko, nemá úsečka $\overline{A_1A_2}$ nijaký spoločný bod s priamkou p. Ak je však z čísel s_1, s_2 jedno záporné a druhé kladné, je

$$\frac{s_2}{s_1} = -g,$$

kde g je kladné číslo a rovnicu (10) je možné uviesť na tvar

$$1 - t - gt = 0.$$

Táto rovnica má však koreň

$$t = \frac{1}{1+g}.$$

Je teda $0 < t < 1$, takže tento koreň určuje bod (6) úsečky $\overline{A_1A_2}$, ktorý leží na priamke p.

Cvičenie.

67. Napíšte parametrické vyjadrenie priamky PA, kde $P \equiv (0; 0)$, $A \equiv (3; 4)$ a určite, pre ktoré hodnoty parametra t leží bod (x, y) priamky PA vnútri v priamom páse, určenom rovnobežkami: a) $x = -8$, $x = -3$; b) $y = -3$, $y = 2$.

68. Napíšte parametrické vyjadrenie priamky MN, kde $M \equiv (-7; 1)$, $N \equiv (2; -3)$, a to tak, aby hodnota parametra $t = 0$ odpovedala bodu N a hodnote $t = 1$ odpovedal bod M.
Rozhodnite, ktorý z bodov $(20; -11)$, $(3; -2)$, $(11; 1)$ leží na danej priamke MN.

69. Narysujte ľubovoľnú priamku, ktorá pretína súradnicové osi a napíšte jej parametrické vyjadrenie.

70. Z rovnice (6) na str. 33 vylúčte parameter t. Ktorú rovnicu tak dostanete? Urobte diskusiu!

71. Rovnicu $y = kx + q$ môžeme považovať za jednu parametrickú rovnicu priamky, ak položíme $x = t$ alebo $x = -t$. Ktoré priamky nemôžeme vyjadriť takýmto spôsobom?

72. a) Nech sú m, n dve reálne konštanty, z ktorých aspoň jedna nie je nulová. Tak body $M \equiv (x, y)$ určené rovnicami a) $x = x_0 + mt$, $y = y_0 + nt$, kde $x_0 y_0$ sú dané konštanty a t premenný parameter, ležia na priamke určenej bodmi $A_0 \equiv (x_0, y_0)$, $A' \equiv (x_0 + m; y_0 + n)$. Dokážte! (Napíšte parametrické vyjadrenie priamky A_0A'.)

b) Ak zvolíme na priamke A_0A' smysel poradím A_0A' a keď označíme príslušný smerový uhol priamky φ, tak platí

$$\cos\varphi = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}\,, \quad \sin\varphi = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}\,.$$

Dokážte a vysvetlite smysel konštánt m, n.

c) Nech sú $t_1 < t_2$ dve ľubovoľné hodnoty parametra parametrického vyjadrenia priamky A_0A' a M_1M_2 k nim príslušné body priamky A_0A'. Dokážte, že poradia A_0A' a M_1M_2 určujú ten istý smysel na priamke. Z tohoto plynie, že ak rastie parameter t, pohybuje sa bod M vo smysle polpriamky A_0A.
(Vypočítajte hodnoty $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ smerového uhlu φ polpriamok A_0A' aj M_1M_2.)

d) Dokážte, že vzájomná vzdialenosť $\overline{M_1M_2}$ obidvoch bodov z predchádzajúcej úlohy c) je úmerná hodnote $(t_2 - t_1)$.

e) Ak o číslach m, n platí vzťah $m^2 + n^2 = 1$, je $m = \cos\varphi$, $n = \sin\varphi$, pričom φ je smerový uhol polpriamky A_0A'. Potom ak je M bod priamky príslušný parametru t, je $A_0M = |\,t\,|$. Dokážte a vysvetlite geometrický význam konštánt v parametrickom vyjadrení priamky:
$x = x_0 + t\cos\varphi$; $y = y_0 + t\sin\varphi$.

73. Napíšte parametrické vyjadrenie priamky, ktorá predchádza bodom $(-3;\ 2)$ a o jej smerovom uhle φ platí vzťah $\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \dfrac{4}{3}$.

74. Dokážte, že priamky p, q, ktorých parametrické vyjadrenie je

a) $x - x_1 + mt$, $y = y_1 + nt$ a $x = x_2 + mt'$, $y = y_2 + nt'$, sú navzájom rovnobežné.

b) $x = x_1 + mt$, $y = y_1 + nt$ a $x = x_2 - nt'$, $y = y_2 + mt'$, sú na seba kolmé. [Určite napr. smernice priamok použitím bodov, príslušných hodnotám 0 a 1 parametra, alebo použite vzťah (7) na str. 34.]

75. Parametrické vyjadrenie priamky p je $x = -3 + 3t$, $y = 4 + 4t$ a priamky q je $x = 8 + 5t'$, $y = -12t'$.

a) Znázornite obidve priamky (za jednotku voľte 5 mm).

b) Dokážte, že priamky nie sú rovnobežné a určite súradnice ich priesečíka A_0.

c) Určite na priamke p bod A_1 pre $t = 1$ a na priamke q bod A_2 pre $t' = 1$ a vypočítajte veľkosť uhlu $\widehat{A_1A_0A_2}$.

76. Planimetrické poučky môžeme dokázať používaním analytickej geometrie, pričom si vhodne volíme súradnicovú sústavu. To iste nemá nijaký vplyv na všeobecnosť výsledku. Dokážte tak známu poučku: ťažnice trojuholníka ABC pretínajú sa v jednom bode T. Ak je A_0 stred strany BC, potom deliaci pomer $(AA_0T) = -2$. [Voľte napr. $A \equiv (-2m;\ 0)$, $B \equiv (2m;\ 0)$, $C \equiv (p,\ q)$, kde $p > 0$, $q > 0$ a napíšte parametrické

rovnice priamok AA_0, BB_0, CC_0, kde $A_0B_0C_0$ sú stredy strán BC, CA, AB.]
Použite výsledok príkladu 72d.

7. Vzdialenosť bodu od priamky.

Nech je daná priamka p lineárnou rovnicou

$$ax + by + c = 0. \tag{1}$$

Potom spojnica začiatku P s bodom (a, b) je kolmá na priamku p. Všimnime si ponajprv, že bod (a, b) je zaiste rôzny od začiatku P, lebo v rovnici priamky nemôžu byť oba koeficienty a, b rovné nule.

Dôkaz. I. Ak $b = 0$, je priamka p rovnobežná s osou y a bod $(a, b) \equiv (a, 0)$ leží na osi x, ktorá je kolmá na priamku p.

II. Ak je $a = 0$, je priamka p rovnobežná s osou x a bod $(a, b) \equiv \equiv (0, b)$ leží na osi y, ktorá je kolmá na priamku p.

III. Nech je nakoniec $a \neq 0$, $b \neq 0$. Priamka p má smernicu $k = \frac{-a}{b}$. Spojnica začiatku P s bodom (a, b) má smernicu $k' = \frac{b}{a}$. Je teda $1 + kk' = 0$, takže obidve priamky sú navzájom kolmé [pozri vzorec (10) v článku 4].

Kolmica k na priamku p vedená zo začiatku P má teda parametrické vyjadrenie

$$x = ta, \; y = tb. \tag{2}$$

Rovnica (2) udáva súradnice päty kolmice k na priamke p, ak t určíme tak, aby bola splnená rovnica (1), z čoho vyplýva podmienka

$$t\,(a^2 + b^2) + c = 0, \quad \text{alebo } t = \frac{-c}{a^2 + b^2}. \tag{3}$$

Ak je d vzdialenosť začiatku P od priamky p, platí $d^2 = x^2 + y^2$, kde bod (x, y) je päta kolmice k na priamku p, teda za x a y treba dosadiť hodnoty z rovníc (2) a (3).

Teda

$$d^2 = t^2\,(a^2 + b^2) = \frac{c^2}{(a^2 + b^2)^2} \cdot (a^2 + b^2) = \frac{c^2}{a^2 + b^2},$$

a keďže d nie je záporné, platí

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \,. \tag{4}$$

Vzdialenosť začiatku P od priamky (1).

Hľadajme teraz vzdialenosť ľubovoľného bodu (x_1, y_1) od priamky (1). Ak namiesto pôvodných súradníc x, y zavedieme nové súradnice x', y' so začiatkom v danom bode (x_1, y_1), potom podľa vzorca (2) článku 3 je $x' = x - x_1$, $y' = y - y_1$ alebo

$$x = x' + x_1, \; y = y' + y_1.$$

Ak dosadíme tieto hodnoty súradníc x, y do rovnice (1), dostaneme po malej úprave

$$ax' + by' + c' = 0,$$

kde

$$c' = ax_1 + by_1 + c.$$

Keď teraz použijeme vzorec (4) s tou zmenou, že namiesto c dáme c', dostaneme výsledok

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \,,$$

ktorý **vyjadruje vzdialenosť bodu** (x_1, y_1) **od priamky** $ax + by + c = 0$.

Všimnime si, že podľa článku 6 výraz $ax_1 + by_1 + c$ je kladný vo vnútri v jednej z oboch polrovín, tvorených priamkou (1) a záporný vo vnútri druhej z týchto polrovín.

Cvičenie.

77. Je daná priamka l s rovnicou $5x + 4y + 7 = 0$ a body $Q_1 \equiv (-3; 2)$, $Q_2 \equiv (-1; 3)$, $Q_3 \equiv (-2; 1)$, $Q_4 \equiv (1; -4)$.
Rozhodnite, ktoré dvojice daných bodov sú priamkou l oddelené, ktoré ležia v tej istej polrovine vyťatej priamkou l a ktoré z bodov ležia na priamke l.

78. Dokážte známe vlastnosti lichobežníka $ABCD$, kde je $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; stredná priečka je úsečka, ktorá spojuje stredy ramien lichobežníka a je a) rovnobežná s jeho základňami, b) je rovná polovičnému súčtu základní, c) leží vnútri lichobežníka.
(Lichobežník je vypuklý štvoruholník; taký štvoruholník sa skladá

z tých bodov, ktoré ležia v oporných polrovinách. Volte vhodné umiestenie bodov A, B, C, D vzhľadom na súradnicové osi x, y.)

79. Body $A \equiv (2; 3)$, $B \equiv (-3; -1)$, $C \equiv (4; -4)$ sú vrcholy trojuholníka ABC.
a) Dokážte, že nielen body $M \equiv (1; 2)$, $N \equiv (-1; 1)$, ale aj celá úsečka $\overline{MN}$ leží vnútri trojuholníka ABC.
b) Použitím parametrického vyjadrenia priamky MN rozhodnite, ktoré jej body neležia mimo trojuholníka ABC.
(Viete, že $\triangle ABC$ je spoločnou čiastkou polrovín ABC, BCA, CAB.)

80. Ktoré body úsečky $(-5; 3)$ $(7; 0)$ ležia vnútri v priamom páse, určenom rovnobežkami $y = x + 3$ a $y = x - 2$?

81. Dané sú priamky p_1, p_2 o rovniciach $4x - 3y + 12 = 0$, $2x + y - 6 = 0$. Určite veľkosť toho zo štyroch dutých uhlov, ktoré svierajú tieto priamky, v ktorom leží začiatok P sústavy súradníc.
(Určite veľkosť uhlu $\sphericalangle A_1A_0A_2$, kde A_0 je priesečík obidvoch priamok, bod A_1 leží na priamke p_1 v polrovine p_2P a bod A_2 leží na priamke p_2 v polrovine p_1P.)

82. Určite vzdialenosť bodov $A \equiv (4; -2)$, $K \equiv (-3; 2)$, $L \equiv (0; -1)$ od priamky p o rovnici $8x - 15y - 11 = 0$ a rozhodnite, ktoré dva z daných bodov priamka neoddeľuje.

83. Určite veľkosť výšok v trojuholníku s vrcholmi $A \equiv (5; 2)$, $B \equiv (-2; 1)$, $C \equiv (1; 5)$.

84. Priamky, ktoré majú rovnicu $ax + by + c = 0$, $ax + by + c' = 0$, sú rovnobežné. Dokážte, že ich vzájomná vzdialenosť je rovná hodnote:
$$\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$
Urobte výpočet pre priamky s rovnicami $3x - 4y + 10 = 0$, $8y - 15 - 6x$.

85. Určite geometrické miesto bodov $(x_0; y_0)$, ktoré majú od priamky s rovnicou $12x + 5y - 52 = 0$ vzdialenosť 3.

86. Určite rovnicu priamky prechádzajúcej bodom $H \equiv (5; 2)$, ktorá má od bodu $L \equiv (-3; 1)$ vzdialenosť 4. (Napíšte rovnicu priamky prechádzajúcej bodom H a určite jej vzdialenosť od bodu L; sú dve možnosti.)

II. POUŽITIE ANALYTICKEJ GEOMETRIE.

8. Lineárna celistvá funkcia.

Už zo strednej školy vieme, že veličina y je **funkciou** inej veličiny x **(nezávisle premenná).** Tak isto vieme zo strednej školy, čo je **grafické znázorňovanie** alebo stručne graf funkcie. Ak pre každú hodnotu nezávislej premennej x zobrazíme bod

(x, y), ktorého prvou súradnicou je zvolená hodnota x a ktorého druhou súradnicou y je príslušná hodnota funkcie, tak všetky tieto body (x, y) vyplnia čiaru, ktorú nazývame grafom alebo grafikónom študovanej funkcie. Pomocou grafikónu názorne zachytíme dôležité vlastnosti funkcie. Podrobne budeme študovať funkcie a ich grafikóny až v 4. triede. V tejto triede sa obmedzíme na lineárnu (v tomto článku) a na kvadratickú (v článku 10) celistvú funkciu. **Lineárna celistvá funkcia** má tvar

$$y = ax + \mathrm{b}, \tag{1}$$

kde a, b sú dané čísla (konštanty). V 4. triede budeme preberať okrem iných **lineárnu lomenú funkciu**, ktorá má tvar

$$x = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Z článku 5 vieme, že **grafikón lineárnej celistvej funkcie** (1) **je priamka, ktorá nie je rovnobežná s osou y a že aj obrátene každá priamka, ktorá nie je rovnobežná s osou y, je grafikónom určitej lineárnej celistvej funkcie.** Priamka rovnobežná s osou y zrejme nemôže byť grafikónom nijakej funkcie. Aj geometrický význam obidvoch konštánt a, b v rovnici (1) je nám známy; grafikón funkcie (1) je priamka, ktorá má smernicu a a ktorá pretína os y v bode $(0, b)$.

Ak je $a = 0$, je funkcia (1) konštanta; jej grafikón je priamka rovnobežná s osou x. Niekedy je účelné nepočítať konštanty medzi lineárne funkcie.

Keď vylúčime konštanty, sú možné ešte dva prípady podľa toho, či číslo a je kladné alebo záporné. Aký geometrický význam majú tieto dva prípady, o tom sme sa už zmienili na konci článku 3, ale bude účelné vrátiť sa k tomu ešte teraz. Nech je daná ľubovoľná funkcia, ktorá nemusí mať tvar (1). Ak si zvolíme určitú hodnotu x_1 nezávisle premennej a keď vyznačíme príslušnú hodnotu funkcie y_1, máme na grafikóne určitý bod (x_1, y_1). Ak je ďalej x ktorákoľvek iná hodnota nezávisle premennej a ak je y príslušná hodnota funkcie, potom rozdiel $x - x_1$ (ktorý môže byť kladný alebo záporný) sa nazýva **prírastkom nezávisle premennej** a rozdiel $y - y_1$ (ktorý môže byť kladný, záporný alebo rovný nule), sa nazýva **prírastkom funkcie.**

Podiel

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} \tag{2}$$

budeme nazývať **pomerným prírastkom funkcie.** Geometrický význam premenného prírastku (2) je nám známy: je to smernica priamky spojujúcej obidva body grafikónu (x_1, y_1), (x, y). Ak skúmaná funkcia nie je lineárnou celistvou funkciou, hodnota pomerného prírastku (2) závisí od toho, ako boly zvolené obidve hodnoty x_1, x nezávisle premennej. Naproti tomu pri lineárnej celistvej funkcii (1), ktorej grafikón je priamka, pomerný prírastok je konštanta

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = a \tag{3}$$

a rovná sa smernici tej priamky, ktorá je grafikónom funkcie.

Dôležité sú rastúce a klesajúce funkcie. Pri **stúpajúcej funkcii** so zväčšením nezávisle premennej sa vždy súčasne zväčší aj hodnota funkcie a so zmenšením nezávisle premennej sa vždy súčasne zmenší aj hodnota funkcie. Ináč povedané rastúca funkcia má tú vlastnosť, že kladnému prírastku nezávisle premennej zodpovedá vždy kladný prírastok funkcie a zápornému prírastku nezávisle premennej zodpovedá vždy záporný prírastok funkcie. Teda *pri rastúcej funkcii je pomerný prírastok* (2) *vždy kladný* a obrátene, *ak pomerný prírastok je vždy kladný*, nech hocako zvolíme hodnoty x_1, x nezávislej premennej, *je funkcia rastúca.*

Pri **klesajúcej funkcii** *naopak* so zväčšením nezávisle premennej sa vždy súčasne zmenší hodnota funkcie a so zmenšením nezávisle premennej sa vždy súčasne zväčší hodnota funkcie. Prírastok klesajúcej funkcie má vždy opačné znamienko než prírastok nezávisle premennej. Pomerný prírastok pri klesajúcej funkcii je vždy záporný; obrátene ak pomerný prírastok (2) je vždy záporný, nech hocako zvolíme obidve rôzne hodnoty x_1, x nezávisle premennej, je funkcia klesajúca.

Z rovnice (3) teda plynie: **Lineárna celistvá funkcia (1) je rastúca funkcia, ak $a > 0$, a je klesajúca funkcia, ak $a < 0$.**

Cvičenie.

87. Je daná funkcia a) $y = \frac{3}{2}x - 5$; b) $y = -\frac{3}{4}x + 2$, c) $y = -\frac{4}{5}$.

a) Znázornite túto funkciu graficky.

b) Aký je prírastok funkcie, keď prírastok nezávisle premennej nadobúda niektorú z týchto hodnôt: ± 1; ± 2; $\pm 3 \ldots \pm m$, kde $m > 0$? Aký je príslušný pomerný prírastok?

88. Určite pomerné prírastky z predchádzajúceho príkladu 87 a rozhodnite, ktorá z tam uvedených funkcií je a) rastúca, b) klesajúca.

89. Pre ktorú hodnotu prírastku nezávisle premennej je prírastok funkcie $y = ax + b$ rovný pomernému prírastku?

V grafikónoch funkcií z príkladu 87 vyznačte také dva body (x, y) (x_1, y_1), pre ktoré je predchádzajúca požiadavka splnená. Koľkými spôsobmi sa to dá urobiť?

90. Znázornite funkciu $y = |x|$ a dokážte, že pomerný prírastok $\frac{y - y_1}{x - x_1}$;

a) je pre hodnoty $x \leqq 0$, $x_1 \geqq 0$ rovný 1,

b) je pre hodnoty $x \geqq 0$, $x_1 < 0$ rovný -1,

c) pre hodnoty $x \geq 0$, $x_1 \leq 0$ alebo pre hodnoty $x \leq 0$, $x_1 \geq 0$ nie je hodnota stála a môže nadobudnúť, ktorúkoľvek hodnotu medzi -1 a $+1$ včítane týchto hodnôt. Na grafikóne funkcie konštrukčne určite také dva body $(x; y)$, $(x_1; y_1)$, aby príslušný pomerný prírastok mal predpísanú hodnotu, napr. $\frac{3}{4}$ alebo $-\frac{3}{4}$. (Narysujte priamku s predpísanou smernicou.) Urobte aj numerické riešenie a diskusiu.

9. Sústava dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi.

Sústavu dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad (1)$$

môžeme riešiť graficky. Každá z obidvoch rovníc (1) sama osebe znamená priamku; tieto priamky si môžeme narysovať na základe ich rovníc. Ak sa obidve priamky pretínajú v bode (x, y), potom dvojica čísel x, y vyhovuje obidvom rovniciam a tvorí jediné riešenie sústavy (1). Môže sa však stať, že obidve priamky sú rovnobežné, a nemajú ani jeden spoločný bod; môže sa tiež stať, že obidve priamky splynú.

Takto dochádzame pomocou analytickej geometrie k všeobecnému výsledku o riešiteľnosti a počte riešení sústavy (1). Sú tu tri možné prípady; v prvom prípade má sústava (1) **jedno a len jedno riešenie**, v druhom prípade nemá sústava (1) **ani jedno riešenie**, v treťom prípade má sústava (1) **nekonečne mnoho riešení**.

Aby sme pre danú sústavu (1) zistili, ktorý z troch prípadov nastane, treba rozhodnúť, kedy sú obe priamky sústavy (1) rovnobežné. To nastane jednak vtedy, ak sú obidve priamky rovnobežné s osou y (teda nemajú smernice), totiž keď

$$b_1 = 0, \ b_2 = 0 \ , \tag{2}$$

jednak keď majú obidve priamky smernice, ktoré sú medzi sebou rovné, t. j. keď

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \ . \tag{3}$$

V obidvoch prípadoch platí rovnica

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \ . \tag{4}$$

Obrátene, ak platí rovnica (4), sú obidve priamky dané rovnicami (1) medzi sebou rovnobežné, t. j. platí buď rovnica (2), buď (3). Lebo ak platí rovnica (4), máme dve možnosti: alebo obe čísla b_1, b_2 sa rovnajú nule, alebo obidve tieto čísla sú rôzne od nuly. Keď je napr. $b_1 = 0$, tak sa v prvej rovnici (1) nevyskytuje y, a preto sa v nej vyskytuje x, teda máme $a_1 \neq 0$. Rovnica (4) pre $b_1 = 0$ dáva však $a_1 b_2 = 0$ a keďže $a_1 \neq 0$, musí byť $b_2 = 0$. Teda pre $b_1 = 0$ je aj $b_2 = 0$ a máme rovnice (2); podobne pre $b_2 = 0$ je aj $b_1 = 0$ a máme zase rovnice (2). Ak je však $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, z rovnice (4) ľahko usúdime na platnosť rovnice (3).

Teda v prípade platnosti rovnice (4) sústava rovníc (1) alebo nemá nijaké riešenie (rovnice si odporujú), alebo má nekonečne mnoho riešení (jedna z obidvoch rovníc je následkom druhej). Naproti tomu v prípade

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0 \tag{5}$$

sústava (1) má jediné riešenie. Toto riešenie sa skladá z dvoch čísel x, y, súradníc priesečíka $A \equiv (x, y)$ obidvoch rôznobežných priamok p_1, p_2, z ktorých je každá jednotlive určená jednou z obidvoch rovníc (1). Najčastejšie používaná metóda na určenie riešenia je už zo strednej školy známa **sčítacia metóda**. Pri tejto metóde — ako vieme — obidve rovnice sústavy (1) sa kombinujú a utvorí sa rovnica

$$r_1 (a_1x + b_1y + c_1) + r_2 (a_2x + b_2y + c_2) = 0 . \qquad (6)$$

Ak zvolíme akokoľvek čísla r_1, r_2 (nie obidve rovné nule), rovnica (6) znamená priamku, ktorá prechádza bodom A, pretože keď dosadíme za x, y súradnice bodu A, sú splnené obidve rovnice sústavy (1), a je teda splnená aj rovnica (6). Pri sčítacej metóde volíme čísla r_1, r_2 tak, aby z rovnice (6) vypadlo alebo x alebo y, t. j. tak, aby priamka určená rovnicou (6) bola rovnobežná s jednou zo súradnicových osí.

Cvičenie.

91. Rozhodnite beztoho, že by ste vykonali riešenie, ktoré z nasledujúcich sústav majú jediné riešenie, ktoré nemajú nijaké riešenie a ktoré majú nekonečne mnoho riešení:

a) $x = \dfrac{7+y}{2}$; $y = 2x - 5$; b) $2x - y = 8$; $4 - y = 2(2 + x)$;

c) $6(x + 1) + 5(1 - 3y) = 2$; $x + 2 = \dfrac{5y+1}{2}$.

92. Pre ktoré hodnoty reálnych čísel m, n, p sú dvojice priamok dané rovnicami: 1. rovnobežné nesplývajúce, 2. splývajúce, 3. rôznobežné:
a) $3x - 5y + 4 = 0$; $(2 - m)x - 3ny + 3 - p = 0$?
b) $5x - 7 = 0$; $(m - n)x + (m + n)y - m + p = 0$?

93. Čo usudzujete o vzájomnej polohe priamok daných rovnicami:
$(t + 1)x - 2ty - 2 = 0$,
ak parameter t nadobúda všetky reálne hodnoty?

94. Pre ktoré hodnoty čísel $r_1 r_2$ prechádza priamka, ktorá má rovnicu

$$r_1 (x + 2y - 5) + r_2 (3x - y + 1) = 0$$

a) začiatkom sústavy súradníc? b) bodom $(-3; 2)$?

95. Určite rovnicu priamky so smernicou $k = 2$, ak prechádza priesečíkom priamok s rovnicami

$$x - 5y + 1 = 0; \; 2x + 3y + 4 = 0.$$

96. Určite geometrické miesto m' obrazov bodov priamky m s rovnicou $x + 2y - 1 = 0$ v rovnoľahlosti (P, c), v ktorej bodu M priamky m zodpovedá bod $M' \equiv (3; 4)$.

97. Vypočítajte súradnice priesečíka K uhlopriečok štvoruholníka $ABCD$, kde $A \equiv (-4; 2)$, $B \equiv (1; -1)$, $C \equiv (5; -10)$, $D \equiv (-5; 3)$ a použitím pomerného prírastku lineárnej funkcie dokážte, že ten bod K

leží vo vnútri úsečiek $\overline{AC}$, $\overline{BD}$. Potom je isté, že ide o vypuklý štvoruholník. Toto zistenie môžete použitím oporných polrovín aj ináč dokázať.

98. Priesečíkom priamok $3x - 2y + 4 = 0$; $2x + y - 1 = 0$ prechádza priamka a) rovnobežná, b) kolmá na priamku s rovnicou $4x - 5y = 0$. Určite jej rovnicu.

99. Vyčiarkujte v rovine sústavy súradníc tú čiastku roviny, v ktorej ležia body $(x; y)$, ktoré vyhovujú nerovnosti (ak úlohe vyhovuje aj určitá ohraničujúca úsečka, narysujte ju silne):
a) $3x + 2y - 5 < 0$; $x - 2y + 1 > 0$;
b) $y + 3 \geqq 0$; $x + y - 5 < 0$; $4x - 5y + 10 \geqq 0$;
c) $x + 2y - 1 < 0$; $2x - 5y + 3 > 0$; $x + 2y - 5 \geqq 0$;
d) $x + y < 0$; $x - y > 0$; $x + 5y - 5 > 0$.

100. Sú dané funkcie $y - 3x - 2$; $y = 2x + 1$. Napíšte funkciu, ktorá je a) súčtom obidvoch funkčných hodnôt, b) rozdielom obidvoch funkčných hodnôt.
Potom dané funkcie a výslednú funkciu znázornite a všimnite si tie body, v ktorých grafikón výslednej funkcie pretína grafikóny daných funkcií alebo os x. Svoje pozorovania odôvodnite.
Čo je pomerný prírastok výslednej funkcie?

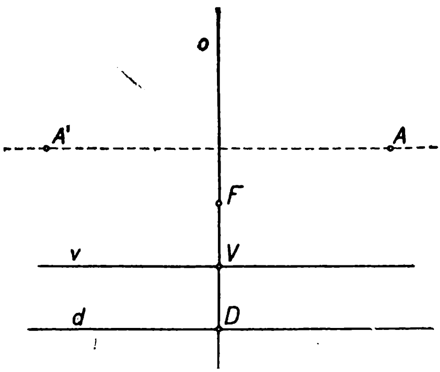
10. Parabola.

Funkcia

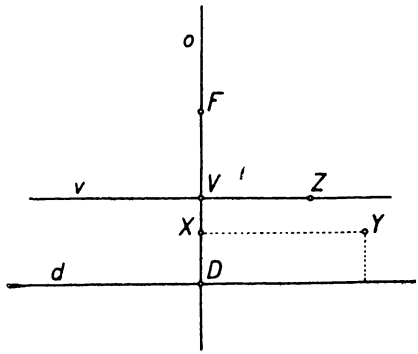
$$y = ax^2 + bx + c$$

sa nazýva **kvadratickou celistvou funkciou**, ak a, b, c sú také konštanty, že $a \neq 0$. (V prípade $a = 0$ by sme mali lineárnu celistvú funkciu.) V článku 12 si dokážeme, že grafikón kvadratickej celistvej funkcie je krivka tzv. parabola. **Parabola** vznikne takto: zvolíme ľubovoľný bod F a okrem toho priamku d, ktorá neprechádza bodom F. Parabola je krivka, ktorá sa skladá zo všetkých tých bodov, ktoré majú od bodu F a od priamky d rovnakú vzdialenosť. Bod F sa menuje **ohniskom paraboly** (latinsky focus, preto je zvykom označovať ho písmenom F); priamka d sa menuje určujúcou priamkou paraboly (latinský directrix, preto je zvykom označovať ju písmenom d).

V nasledujúcom budeme skúmať parabolu za predpokladu, že určujúca priamka d je vodorovná a ohnisko F leží nad priamkou d (obr. 9). Nech je o kolmica spustená z bodu F na priamku d; nech D je päta tejto kolmice a V nech je stred úsečky $\overline{FD}$; ďalej nech je *v* rovnobežka s priamkou *d* vedená bodom *V*. Ak *A′* je súmerný obraz ľubovoľného bodu *A* podľa osi *o*, majú oba body *A*, *A′* rovnakú vzdialenosť od priamky *d*, preto ak bod *A* leží na parabole, platí to isté o bode *A′*. Teda parabola je súmerná podľa osi *o*, a preto priamka *o* sa nazýva **osou paraboly.** Bod *V* leží zrejme na parabole; nazýva sa **vrcholom paraboly.** Okrem bodu *V* neleží na osi *o* ani jeden bod paraboly, lebo ak bod *X* leží na osi *o*, je jeho vzdialenosť od priamky *d* rovná $\overline{XD}$; ak teda bod *X* leží nad bodom, t. j. vo vnútri polpriamky *VF*, je $\overline{XD} > \overline{XF}$ a *X* neleží na parabole; ak



Obr. 9.

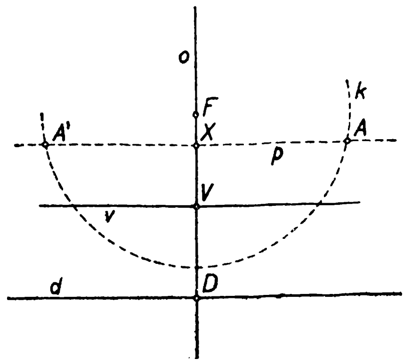


Obr. 10.

bod *X* leží pod bodom *V*, t. j. vo vnútri polpriamky *VD*, je $\overline{XD} < \overline{XF}$, a zasa *X* neleží na parabole.

Skúmajme teraz body, ktoré neležia na osi *o*! Predovšetkým ani jeden bod *Y* ležiaci pod priamkou *v* nemôže ležať na parabole. Lebo (obr. 10) nech *X* je päta kolmice, spustenej z bodu *Y* na priamku *o*. Vzdialenosť bodu *Y* od priamky *d* sa rovná vzdialenosti bodu *X* od priamky *d* alebo úsečke $\overline{XD}$, ktorá je menšia než $\overline{XF}$, ktorá je zas menšia než $\overline{YF}$. Teda vzdialenosť bodu *Y* od priamky *d* je menšia ako vzdialenosť bodu *Y* od bodu *F*, bod *Y* nemôže ležať na parabole. Podobne (obr. 10) ani jeden bod *Z* priamky *v* okrem bodu *V* neleží na parabole, lebo vzdialenosť bodu *Z* od priamky *d* sa rovná $\overline{VD}$, teda sa rovná úsečke $\overline{VF}$, ktorá je menšia než $\overline{ZF}$. Priamka *v* sa menuje **vrcholovou dotyčnicou** paraboly.

Naproti tomu na každej vodorovnej priamke *p*, ktorá pretína os o v bode X ležiacom nad bodom V, sú dva body paraboly. Lebo (obr. 11 a, b) vzdialenosť každého bodu priamky p od priamky d sa rovná úsečke $\overline{XD} = r$, ktorá je väčšia než $\overline{XF}$, t. j. väčšia než vzdialenosť bodu F od priamky p, ktorá je teda sečnou kružnice k, opísanej okolo bodu F polomerom r; kružnica k pretne teda priamku p vo dvoch bodoch A, A', ktoré zrejme ležia na parabole.

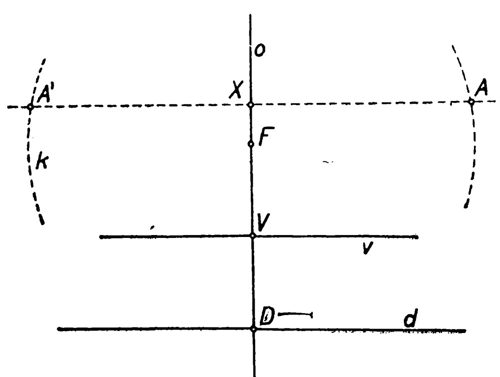


Obr. 11 a.

Z toho vidieť, ako je možné sostrojiť ľubovoľný počet bodov paraboly (obr. 12). Veďme nad priamkou v rad priamok $p_1, p_2, p_3 \dots$ s ňou rovnobežných a na každej z nich sostrojme na nej ležiace body paraboly ako priesečíky tejto priamky s kružnicou opísanou okolo bodu F polomerom rovným vzdialenosti tejto priamky od priamky d. Spojením sostrojených bodov dostaneme približný priebeh čiastky paraboly.

Jednoduché vlastnosti paraboly, ktoré sme si v predchádzajúcom odvodili **synteticky**, t. j. priamou geometrickou úvahou, môžeme si dokázať aj **analyticky**, t. j. pomocou súradníc a výpočtom. Za tým účelom označme si písmenom p vzdialenosť bodu F od priamky d. Úsečka p sa nazýva **parametrom** paraboly. Vrcholovú dotyčnicu v zvolíme za os x, priamku o za os y. Pre bod F máme $F \equiv \left(0, \frac{1}{2}p\right)$; priamka d má rovnicu

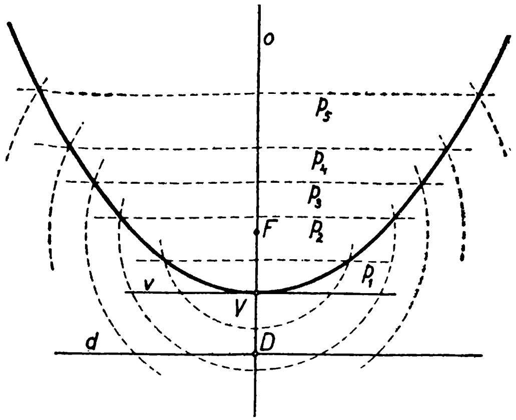
$$y = -\frac{1}{2}p.$$



Obr. 11 b.

Vzdialenosť ľubovoľného bodu (x,y) od priamky d_2

sa rovná $\left(y + \frac{1}{2} p\right)$ a druhá mocnina tejto vzdialenosti sa rovná $\left(y + \frac{1}{2} p\right)^2$; druhá mocnina vzdialenosti bodu (x, y) od bodu F sa rovná $x^2 + \left(y - \frac{1}{2} p\right)^2$. Teda pre každý bod (x, y) na parabole je splnená rovnica



Obr. 12.

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2} p\right)^2 = \left(y + \frac{1}{2} p\right)^2 \tag{1}$$

a obrátene každý bod (x, y), ktorého súradnice vyhovujú rovnici (1), leží na parabole. Teda rovnica (1) je **rovnicou paraboly** v neupravenom tvare. Ľahkou úpravou ju uvedieme na tvar

$$2py = x^2 \quad \text{alebo} \quad y = \frac{1}{2p} \cdot x^2 . \tag{2}$$

Z rovnice (2) vidieť, že ak bod (x, y) leží na parabole, platí to isté o bode $(-x, y)$, ktorý je podľa článku 2 súmerným obrazom bodu (x, y) podľa osi o. Ďalej je z rovnice (2) zrejmé, že bod $V \equiv (0, 0)$ leží na parabole, že pre všetky ostatné body paraboly je $y > 0$, t. j. že všetky ostatné body paraboly ležia nad vrcholovou dotyčnicou v. Nakoniec vidieť z rovnice (2), že každá vodorovná priamka, ležiaca nad vrcholovou dotyčnicou v, pretína parabolu vo dvoch bodoch; lebo rovnica takejto priamky je $y = c$, kde c je kladné číslo a z rovnice (2) určíme dve príslušné hodnoty súradnice $x = \pm \sqrt{2pc}$.

Poznámka. Pri odvodení rovnice (2) sme predpokladali, že ohnisko leží nad určujúcou priamkou. Ale ak sostrojíme osovú súmernosť s osou v, dostaneme novú parabolu, ktorej ohnisko $F' \equiv \equiv \left(0, -\frac{1}{2} p\right)$ leží pod novou určujúcou priamkou d', ktorej rovnica je $y = \frac{1}{2} p$. Rovnica novej paraboly je (pozri vzorec [3] článku 2)

$$-2py = x^2 \quad \text{alebo} \quad y = -\frac{1}{2p} x^2 . \qquad (3)$$

Cvičenie.

101. Narysujte vrcholovú dotyčnicu v paraboly a v jednej z obidvoch polrovín vyťatých priamkou v zvoľte vo vzdialenosti 1,5 ohnisko F.
a) Narysujte body paraboly, ktoré majú od vrcholovej dotyčnice vzdialenosti: 0; 1; 1,5; 3.
b) Zvoľte sústavu súradníc tak, aby os y prechádzala ohniskom F a napíšte rovnicu paraboly. (Sú dve možnosti.)
c) Vypočítajte súradnice bodov paraboly, ktoré ste sostrojili v úlohe a).
d) Na parabole leží bod $M \equiv (6; y)$; vypočítajte jeho súradnicu y.
Úlohu riešte aj konštrukčne. (Ak bod $D_1 \equiv [6; 1{,}5]$ uvažujte o $\triangle MFD$.)

102. Načrtnite ohnisko a určujúcu priamku paraboly, ktorá má rovnicu: a) $4y = x^2$; b) $3x^2 + 5y = 0$; c) $7x^2 - 2y = 0$.

103. Určite súradnice bodu paraboly, ktorá má rovnicu: $8y = x^2$, ktorého vzdialenosť od ohniska paraboly je 20.

104. Nech sú dané odvesny pravouhlého trojuholníka ABC; každú z nich rozdeľte na n rovnakých dielov. Tak na odvesne $\overline{AC}$ dostanete body v poradí $A\, A_1\, A_2 \ldots C$ a na odvesne $\overline{CB}$ body v poradí $C\, C_1\, C_2\, C_3 \ldots B$. Označte X_k priesečík priamky AC_k s kolmicou vztýčenou v bode A_k na priamku AC.
Dokážte, že body X_k a body A, B ležia na parabole, ktorá má priamku AC za vrcholovú dotyčnicu. (Polpriamku AC zvoľte za kladnú polos x; určite súradnice bodu X_k a vylúčte číslo n).

105. Na základe výsledku predchádzajúceho príkladu narysujte body paraboly o rovnici $y = \frac{3}{4} x^2$.

11. Kvadratická celistvá funkcia.

Už v článku 10 sme povedali, že kvadratická celistvá funkcia má tvar

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad (1)$$

kde a, b, c sú konštanty a $a \neq 0$. Začneme zvláštnym prípadom, keď $b = c = 0$, vtedy

$$y = ax^2. \qquad (2)$$

Zo vzorcov (2) a (3) článku 10 je zrejmé, že grafikón funkcie (2) je parabola, ktorej osou je os y a ktorej vrcholovou dotyčnicou je os x

a že obrátene každá taká parabola je grafikónom funkcie tvaru (2), pričom parameter paraboly sa určí zo vzťahu

$$a = \pm \frac{1}{2p}, \; p > 0, \tag{3}$$

teda $p = \frac{1}{2a}$. Ohnisko je $F \equiv \left(\pm \frac{1}{2} p; 0\right) \equiv \left(\frac{1}{4a}; 0\right)$; určujúca priamka má rovnicu $y = \mp \frac{1}{2} p$ alebo $x + 4ay = 0$.

Majme teraz parabolu s vodorovnou určujúcou priamkou a s parametrom p, pričom vrchol paraboly je v bode $V \equiv (m, n)$. Keď premiestime začiatok do bodu V a keď označíme písmenami x', y' nové súradnice bodu (x, y), bude rovnica paraboly v nových súradniciach tvaru $y' = ax'^2$, kde číslo a je určené vzorcom (3) so znamienkom plus, ak je ohnisko nad určujúcou priamkou, so znamienkom mínus, ak je ohnisko pod určujúcou priamkou. Avšak podľa vzorca (2) článku 3 platí $x' = x - m$; $y' = y - n$; v pôvodnej sústave bude mať rovnica paraboly tvar

$$y - n = a(x - m)^2 \tag{4}$$

alebo

$$y = ax^2 - 2amx + am^2 + n, \tag{4'}$$

ktorá rovnica je už tvaru (1). Teda každá parabola s vodorovnou určujúcou priamkou je grafikónom určitej kvadratickej celistvej funkcie. Obrátene grafikón každej kvadratickej celistvej funkcie (1) je parabola s vodorovnou určujúcou priamkou a s osou rovnobežnou s osou y. Aby sme to dokázali, treba iba zistiť, že pri daných a, b, c, pričom $a \neq 0$, môžeme vždy určiť m, n tak, aby funkcia (1) bola totožná s funkciou (4'). Podmienky pre m, n sú teda

$$-2am = b, \quad am^2 + n = c$$

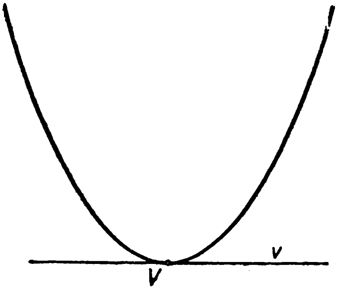
a vyhovieme im tak, že položíme

$$m = -\frac{b}{2a}, \quad n = -\frac{D}{4a}, \tag{5}$$

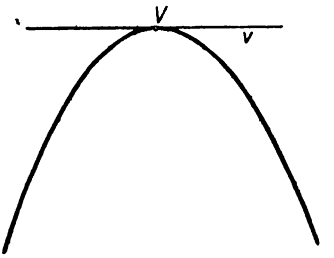
kde

$$D = b^2 - 4ac. \tag{6}$$

Vrchol paraboly je bod (m, n), kde čísla m, n sú dané vzorcami (5). Parameter je daný podmienkami (3). Ohnisko paraboly leží nad (pod) určujúcou priamkou, ak číslo a je kladné (záporné). Rovnica vrcholovej dotyčnice paraboly je $y = -\frac{D}{4a}$. Pri kladnom a (obr. 13a) leží celá parabola okrem vrcholu nad vrcholovou dotyčnicou, pri zápornom a (obr. 13b) leží celá parabola okrem vrcholu pod vrcholovou dotyčnicou. To znamená aritmeticky, že pre $a > 0$ funkcia (1) nadobúda pre $x = -\frac{b}{2a}$ minimum (**minimum**, lat. najmenšie, znamená najmenšiu hodnotu



Obr. 13a.



Obr. 13b.

funkcie). Toto minimum sa rovná $-\frac{D}{4a}$. Pre $a < 0$ funkcia (1) nadobúda pre $x = -\frac{b}{2a}$ maximum (**maximum**, lat. najväčšie, znamená najväčšiu hodnotu funkcie). K tomuto rýdzo počtovému výsledku sme došli geometrickými úvahami, môžeme si ho však potvrdiť počtom. Na to vypočítame prírastok $y - y_1$ funkcie (1) príslušný prírastku $x - x_1$ nezávisle premennej. Z rovníc

$$y = ax^2 + bx + c; \quad y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$$

vypočítame

$$y - y_1 = a(x^2 - x_1^2) + b(x - x_1)$$

alebo

$$y - y_1 = (x - x_1)[a(x + x_1) + b]. \tag{7}$$

Ak bod $(x_1, y_1) \equiv (m, n)$ je vrchol paraboly, máme pre $a > 0$ dokázať, že pre každé $x \neq x_1$ číslo (7) je kladné. Avšak

$$a(x + x_1) + b = a(x - x_1) + (2ax_1 + b)$$

a keďže pre $x_1 = m = -\dfrac{b}{2a}$, je $2ax_1 + b = 0$, bude

$$y - y_1 = a(x - x_1)^2,$$

čo je skutočne kladné pre každé $x \neq x_1$. Podobne pre $a < 0$, $(x_1, y_1) \equiv (m, n)$ číslo $y - y_1$ je záporné pre každé $x \neq x_1$.

Vráťme sa ešte k rovnici (7) za predpokladu, že bod (x_1, y_1) je celkom ľubovoľný bod paraboly. Pre $x \neq x_1$ je

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = a(x + x_1) + b. \tag{8}$$

Výraz (8) je pomerný prírastok funkcie y. Geometricky znamená smernicu sečny paraboly, t. j. smernicu priamky, ktorá spojuje zvolený bod paraboly (x_1, y_1) s ktorýmkoľvek iným bodom (x, y) paraboly. Označme

$$k = 2ax_1 + b. \tag{9}$$

Smernica sečny prechádzajúcej zvoleným bodom (x_1, y_1) paraboly nie je nikdy rovná k; lebo vtedy by platilo

$$a(x + x_1) + b = 2ax_1 + b, \text{ teda } x = x_1,$$

čo nie je možné, lebo pre dva rôzne body (x_1, y_1), (x, y) na parabole musí byť $x \neq x_1$. Ale ak bod (x, y) na parabole je blízky zvolenému bodu (x_1, y_1), je aj číslo x blízke číslu x_1 a smernica (8) je blízka číslu (9). Preto priamka

$$y - y_1 = k(x - x_1), \tag{10}$$

ktorej smernica k je daná vzorcom (9), nie je síce sečnou paraboly, t. j. nemá s parabolou okrem bodu (x_1, y_1) ani jeden spoločný bod, ale je **limitou sečny** v tom smysle, že sečny, spojujúce bod (x_1, y_1) paraboly s bodmi paraboly dostatočne blízkymi bodu (x_1, y_1), majú smernice, ktoré sa líšia od čísla k o menej než ľubovoľne malé kladné predpísané číslo. Hovoríme, že priamka (10) je **dotyčnicou paraboly** v bode (x_1, y_1).

Podobnú úvahu môžeme urobiť aj pre grafikóny iných funkcií, než sú kvadratické celistvé funkcie. Smernica dotyčnice grafikónu funkcie sa menuje **deriváciou funkcie**. Teda kvadratická funkcia

(1) má pre $x = x_1$ deriváciu rovnú výrazu (9). Podrobnejšie sa budeme zaoberať deriváciami vo 4. triede.

Poznámka. Ak je bod (x_1, y_1) vrchol paraboly, je $x_1 = -\frac{b}{2a}$ a smernica (9) sa rovná nule; to znamená, že dotyčnica paraboly v jej vrchole je vodorovná priamka, prechádzajúca vrcholom, ktorú sme už v článku 10 nazvali vrcholovou dotyčnicou paraboly.

Cvičenie.

106. Vrchol paraboly s rovnicou $y = -2x^2 + 5x - 3$ môžeme určiť úpravou jej rovnice na rovnicu tvaru (4), ako vidieť z tohto výpočtu:

$$y + 3 - \frac{25}{8} = -2\left[x^2 - 2\left(\frac{5}{4}\right)x + \left(-\frac{5}{4}\right)^2\right],$$

teda $y - \frac{1}{8} = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2$;

vrchol $V \equiv \left(\frac{5}{4}; \frac{1}{8}\right)$, $\frac{1}{2}p = |-2|$, pričom parabola leží pod určujúcou priamkou.

Podobným spôsobom nájdite vrchol V, ohnisko F a rovnicu určujúcej priamky paraboly s rovnicou: a) $y = x^2 - 8x + 15$; b) $y = -x^2 + 9$; c) $y = -6x^2 - 11x + 10$; d) $y = -9x^2 + 12x + 4$.

107. Je daná parabola s rovnicou $y = 3x^2 - 5x - 2$.

a) ktoré z bodov $(0; -2)$, $(-1; 3)$, $(-2; 20)$ ležia na tejto parabole?

b) Body $(2; y_1)$, $(x_2; 10)$ ležia na danej parabole; určite ich druhú súradnicu. Vyšetrite hodnotu derivácie funkcie a napíšte rovnicu dotyčnice paraboly v jej danom bode.

108. Zvoľte nový začiatok P' súradnicovej sústavy tak, aby parabola z príkl. 107 mala rovnicu tvaru $y' = a x'^2$. Ktoré vzťahy platia medzi pôvodnými a novými súradnicami bodov roviny?

109. Na parabole s rovnicou $y = 3x^2 - 6x + 7$ je daný bod $A \equiv (x_1 = 2; y_1)$. Priamym výpočtom určite hodnotu pomerného prírastku $\frac{y - y_1}{x - x_1}$ v bode A pre hodnoty $x \neq x_1$. Odvoďte z toho podobne ako v texte učebnice hodnotu derivácie v bode A.

110. Body $M \equiv (x_1; y_1)$, $N \equiv (x_2; y_2)$ ležia na parabole, ktorá má rovnicu $y = ax^2 + bx + c$. Nech je $S \equiv (x'; y')$ stred úsečky MN.

a) Dokážte, že stredy S všetkých úsečiek $\overline{MN}$, ktoré sú navzájom rovnobežné, ležia na určitej priamke p rovnobežnej s osou paraboly.

b) Dokážte, že v priesečíku priamky p s parabolou je dotyčnica paraboly rovnobežná s priamkou MN.

(Použite vzťah (8) na str. 52.)

12. Kvadratická rovnica.

Z 1. triedy vieme, že kvadratická rovnica

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

s reálnymi koeficientmi a, b, c ($a \neq 0$) má dva rôzne reálne korene pre $D > 0$, jediný reálny koreň pre $D = 0$ a ani jeden reálny koreň pre $D < 0$, keď

$$D = b^2 - 4ac \tag{2}$$

znamená diskriminant rovnice (1). Veľmi dobrým príkladom pre súvislosť medzi algebrou a geometriou je zistiť, že uvedený aritmetický výsledok sa dá odvodiť z geometrických výsledkov článku 12. Pritom budeme pre určitosť predpokladať, že číslo a je kladné. Všimnime si funkciu

$$y = ax^2 + bx + c. \tag{3}$$

Vieme, že grafikón tejto funkcie je parabola s vrcholom

$$V \equiv \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right) \tag{4}$$

a vrcholová dotyčnica tejto paraboly má rovnicu

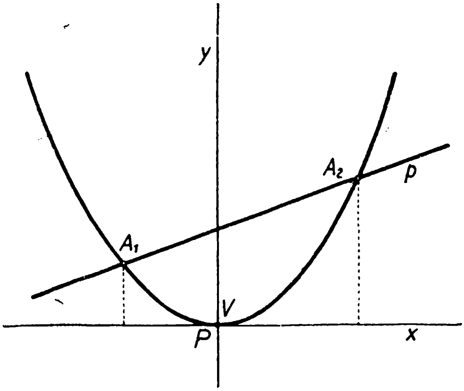
$$y = -\frac{D}{4a}. \tag{5}$$

Keďže číslo a je kladné, leží celá parabola, okrem vrcholu (4), nad vrcholovou dotyčnicou a každá vodorovná priamka ležiaca nad vrcholovou dotyčnicou má s parabolou dva spoločné body. Keď však porovnáme rovnice (1) a (3), vidíme, že ak x je koreňom rovnice (1), je bod $(x, 0)$ priesečíkom osi x s parabolou a obrátene. Os x je však vodorovná priamka, ktorá pre $D > 0$ leží nad vrcholovou dotyčnicou (5), a preto pretína parabolu vo dvoch bodoch $(x, 0)$ zodpovedajúcich dvom rozličným koreňom rovnice (1). Pre $D < 0$ leží pod vrcholovou dotyčnicou, a preto nemá s parabolou ani jeden spoločný bod v súhlase s tým, že rovnica (1) nemá ani jeden reálny koreň; pre $D = 0$ os x splýva s vrcholovou dotyčnicou a má s parabolou spoločný iba vrchol $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$ v súhlase s tým, že rovnica (1) má jediný koreň $x = -\frac{b}{2a}$.

Ak má kvadratická rovnica (1) reálne korene, je možné určiť tieto korene graficky tak, že narysujeme grafikón funkcie (3) a odmeriame súradnice jeho priesečíkov s osou x. Je však výhodnejšie postupovať ináč. Nech je pre určitosť $a > 0$. Narysujeme si (obr. 14) grafikón funkcie

$$y = ax^2 \qquad (6)$$

a grafikón lineárnej funkcie



Obr. 14.

$$y = -bx - c\,. \qquad (7)$$

Prvý grafikón je parabola v základnej polohe (s vrcholom v začiatku a s osou v osi y); druhý grafikón je priamka p. Ak je bod $A \equiv (x, y)$ priesečík paraboly s priamkou p, vyhovujú jeho súradnice obidvom rovniciam (6), (7) a z toho nasleduje, že jeho x-ová súradnica vyhovuje rovnici (1). T. j. x-ová súradnica priesečíka A priamky a paraboly je koreňom rovnice (1). Obrátene, ak je číslo x koreňom rovnice (1), vypočítame y z jednej z obidvoch rovníc (6), (7); tak sa vyhovie aj druhej z týchto rovníc a bod (x, y) je priesečík paraboly s priamkou p.

Pri tomto spôsobe stačí nám narysovať jednu parabolu a môžeme graficky určiť korene každej kvadratickej rovnice (1), v ktorej koeficient a má danú hodnotu pri ľubovoľnej hodnote koeficientov b, c. Pritom podmienka, že koeficient a musí mať danú hodnotu, nie je obmedzením, lebo rovnica $ax^2 + bx + c = 0$ má tie isté korene ako rovnica $rax^2 + rbx + rc = 0$, kde $r \neq 0$ a vhodnou voľbou činiteľa r nadobudne koeficient ra akúkoľvek nenulovú hodnotu.

Skúmajme priesečíky paraboly danej rovnicou (6) so všetkými priamkami, danými rovnicou tvaru

$$y = kx + q\,, \qquad (8)$$

kde smernica k je dané číslo, ale konštanta q sa mení od priamky ku priamke. Všetky takéto priamky sú rovnobežné medzi sebou, ale nie sú rovnobežné s osou paraboly. Ak je bod (x, y) priesečík paraboly (6) s priamkou (8), je číslo x koreňom kvadratickej rovnice

$$a x^2 - k x - q = 0 , \tag{9}$$

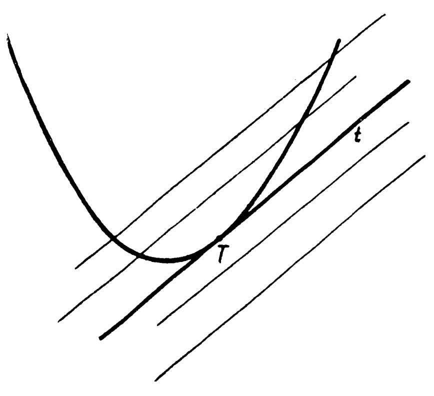
ktorej diskriminant sa rovná výrazu

$$k^2 + 4 a q . \tag{10}$$

Ak je hodnota čísla q práve taká, že pre ňu sa hodnota diskriminantu (10) rovná nule, má príslušná priamka (8) rovnicu

$$y = k x - \frac{k^2}{4 a} . \tag{11}$$

Z toho plynie, že jestvuje jedna a len jedna dotyčnica t paraboly, ktorá má predpísaný smer daný smernicou k; tento smer je ľubovoľný, pravda, s tou výhradou, že nie je smerom osi paraboly. Hodnota čísla q príslušná dotyčnici t je $q = -\frac{k^2}{4a}$; pre túto hodnotu q sa diskriminant rovná nule. Keďže však číslo a je kladné, diskriminant (10) sa zväčší, ak sa zväčší číslo q, a diskriminant (10) sa zmenší, ak sa zmenší číslo q. Preto pre $q > -\frac{k^2}{4a}$ diskriminant (10) je kladný, rovnica (9) má dva reálne rôzne korene a priamka (8) je **sečnou paraboly**; pretína ju v dvoch bodoch. Ak je však $q < -\frac{k^2}{4a}$, diskriminant (10) je záporný, rovnica (9) nemá reálne korene a priamka (8) nepretína parabolu (je **nesečnou paraboly**), nemá s ňou spoločný bod. Dotyčnica t delí (obr. 15) rovinu na dve polroviny; každá priamka rovnobežná s dotyčnicou t, ktorá leží v jednej z týchto polrovín (v tej, ktorá je nad dotyčnicou t), je sečnou paraboly, kým každá priamka rovnobežná s dotyčnicou t, ktorá leží v druhej polrovine, nemá spoločný bod s parabolou.



Obr. 15.

Cvičenie.

111. Napíšte rovnicu paraboly, ktorá pretína os x v bodoch $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$, pričom čísla x_1, x_2 sú korene rovnice:
a) $6x^2 + 5x - 6 = 0$; b) $-4x^2 + 18x - 9 = 0$; c) $2x^2 - 6x + 5 = 0$.
Koľko je takých parabol, ktoré vyhovujú danej podmienke? Narysujte niektoré z nich. Kde ležia ich vrcholy?
V úlohe c) sú hodnoty x_1, x_2 komplexné čísla. Aký to má geometrický význam? (Nepomýľte si komplexné súradnice so znázornením komplexných čísel!)

112. Rozhodnite bez vypočítania priesečíkov, ktoré z parabol v úlohe 106 majú s osou x dva spoločné body, alebo jediný, alebo nemajú s ňou spoločný bod.

113. Všetky paraboly s rovnicou $ry = ax^2 + bx + c$, kde $r \neq 0$ je ľubovoľné číslo, pretínajú os x v tých istých bodoch. Dokážte!

114. Pomocou paraboly s rovnicou $y = x^2$ alebo $y = \frac{1}{4}x^2$ a vhodnej priamky graficky určite korene rovnice:

a) $2x^2 - x - 10 = 0$; b) $x^2 + x - 6 = 0$;
c) $3x^2 - x - 6 = 0$; d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;
e) $2x^2 - 3x + 6 = 0$; f) $3x^2 - 2x - 9 = 0$.

115. Na parabole o rovnici $y = 3x^2 - 6x + 7$ je daný bod $A \equiv (x_1 = 2; y_1)$ (pozri úlohu 109). Bodom A sostrojte priamku t, ktorá má rovnicu $y = kx + q$ a určite hodnotu smernice tak, aby priamka t mala s parabolou len jeden spoločný bod A; napíšte rovnicu tej priamky. Vysvetlite, prečo je táto priamka dotyčnicou paraboly.

116. Je daná parabola $y = -x^2 - 2x + 3$. a) V rovnici $y = -4x + q$ priamky určite hodnotu čísla q tak, aby príslušná priamka t mala s parabolou jediný spoločný bod. Vysvetlite, prečo je táto priamka dotyčnicou paraboly. b) Dokážte, že priamka t rozdeľuje všetky priamky $s \parallel t$ na dve skupiny, z ktorých skupín každá leží v jednej z obidvoch polrovín vyťatých priamkou t. Priamky jednej skupiny sú sečnami paraboly a priamky druhej skupiny parabolu nepretínajú.

117. Hmotný bod bol vrhnutý z bodu P vodorovne vo smere PX rýchlosťou c a súčasne začne svislo padať nadol vo smere PY (bez odporu prostredia). a) Dokážte, že dráha bodu je polovica paraboly; táto parabola má priamku PX za vrcholovú dotyčnicu v a priamku PY za os. (Bod P zvoľte za začiatok sústavy súradníc; polpriamka PX udáva kladný smysel osi x a polpriamka PY udáva záporný smysel osi y. Pre body $(x; y)$ hľadanej dráhy platí: $x = ct$; $y = -\frac{1}{2}gt^2$, kde g značí gravitačné zrýchlenie a čas t je premenný parameter. Tieto rovnice pre x a y sú parametrickým vyjadrením paraboly, ktorej osou je os y a ktorej vrchol je v začiatku sústavy súradníc.

118. Pri podobnom umiestení sústavy súradníc ako v predchádzajúcom príklade riešte úlohu: Hmotný bod $M \equiv (x; y)$ bol vo svislej rovine vrhnutý zo začiatku P sústavy súradníc v okamihu $t = 0$ rýchlosťou c pod výškovým uhlom φ. a) Vyšetrite dráhu bodu M za predpokladu, že niet odporu prostredia. (Keď sa bod pohybuje najprv v I. kvadrante, platia vzťahy $x = ct \cos \alpha;\ y = ct \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$.) b) Určite dobu T a výšku l výstupu. c) Určite dĺžku vrhu, príslušnú dobu t' a uhol, pod ktorým bod M dopadne na os x.

13. Kružnica.

Keď je daný bod $S \equiv (m, n)$ a kladné číslo r, kružnica (S, r) so stredom S a s polomerom r sa skladá z tých bodov (x, y), ktorých vzdialenosť od stredu S sa rovná polomeru r. Teda ak bod (x, y) leží na kružnici (S, r), platí rovnica

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2 \tag{1}$$

a obrátene, ak platí rovnica (1), leží bod (x, y) na kružnici (S, r). Teda rovnica (1) je **rovnicou kružnice** (S, r). Rovnica (1) sa dá upraviť na tvar

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\,, \tag{2}$$

kde

$$a = -2m, \quad b = -2n\,, \tag{3}$$

$$c = m^2 + n^2 - r^2\,. \tag{4}$$

Obrátene, ak je daná rovnica tvaru (2), v ktorej a, b, c sú dané konštanty, hľadajme podmienky, aby bola rovnica (2) rovnicou kružnice. Za tým účelom sa snažíme určiť m, n, r z rovníc (3) a (4). Z rovníc (3) určíme vždy jednoznačne hodnoty m, n

$$m = -\frac{1}{2} a, \quad n = -\frac{1}{2} b\,, \tag{5}$$

potom upravíme rovnicu (4) na tvar

$$r^2 = \frac{1}{4} (a^2 + b^2 - 4c)\,. \tag{6}$$

Ak je

$$a^2 + b^2 - 4c > 0\,, \tag{7}$$

je možné kladné číslo r jednoznačne určiť z rovnice (6). Teda ak platí vzťah (7), je rovnica (2) rovnicou kružnice; súradnice stredu kružnice sú čísla (5) a polomer $r > 0$ sa určí z rovnice (6). Ale ak nie je splnená podmienka (7), nie je rovnica (2) rovnicou kružnice, a vôbec to nie je rovnica nijakej čiary. Lebo rovnicu (2) je možné v každom prípade upraviť na tvar

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\,(a^2 + b^2 - 4c)\,. \tag{8}$$

Ľavá strana rovnice (8) sa rovná nule, ak dosadíme za x, y súradnice bodu $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, a je kladná, ak dosadíme za x, y súradnice ktoréhokoľvek iného bodu roviny. Ak teda $a^2 + b^2 - 4c = 0$, vyhovujú rovnici (8) iba súradnice jediného bodu, t. j. bodu $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$, ale ak je $a^2 + b^2 - 4c < 0$, nie je možné tejto rovnici vyhovieť nijakými reálnymi hodnotami x, y.

Ak je daná akákoľvek kružnica, môžeme jej stred zvoliť za začiatok sústavy súradníc; rovnica kružnice má potom jednoduchý tvar

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{9}$$

Nech je daná ešte priamka lineárnou rovnicou

$$ax + by + c = 0. \tag{10}$$

Vieme už zo strednej školy, že vzájomná poloha kružnice (9) a priamky (10) môže byť trojaká: Priamka (10) je **sečnou kružnice** (má s ňou dva spoločné body), ak je jej vzdialenosť od začiatku P menšia než r; priamka (10) je **dotyčnicou kružnice** (má s ňou jeden spoločný bod), ak sa jej vzdialenosť od stredu kružnice P rovná polomeru kružnice r; priamka (10) je **nesečnou kružnice** (nemá s ňou ani jeden spoločný bod), ak je jej vzdialenosť od stredu kružnice P väčšia než polomer kružnice r. Je zaujímavé potvrdiť si správnosť týchto výsledkov metódou analytickej geometrie. Urobíme to za predpokladu, že priamka (10) nie je rovnobežná s osou y, t. j. že $b \neq 0$.

Máme skúmať počet priesečíkov danej kružnice s danou priamkou. To znamená, že máme skúmať počet reálnych riešení sústavy dvoch rovníc (9), (10) s dvoma neznámymi x, y. Každá z obidvoch rovníc sústavy znamená určitú čiaru [v našom prípade rovnica (9) znamená kružnicu, rovnica (10) znamená priamku]. Každé riešenie sústavy sa skladá z dvoch čísel x, y, ktoré sú súradnicami jedného priesečíka x, y obidvoch čiar a obrátene súradnice každého priesečíka obidvoch čiar tvoria jedno riešenie sústavy.

V našom prípade jedna z obidvoch rovníc, rovnica (10) danej sústavy je lineárna. V takomto prípade sa pri hľadaní riešenia postupuje tak, že sa z lineárnej rovnice vyjadrí jedna z obidvoch veličín x, y pomocou druhej; toto vyjadrenie dosadíme do nelineárnej rovnice a dostaneme jednu rovnicu s jednou neznámou, ktorú treba riešiť. Tento spôsob riešenia sústavy sa menuje **vylúčením jednej neznámej**; ak napr. použijeme lineárnu rovnicu na to, aby sme vyjadrili y pomocou x, vylúčime neznámu y a pre neznámu x dostaneme v našom prípade kvadratickú rovnicu, ktorú vieme riešiť. Tento spôsob riešenia sústavy dvoch rovníc s dvoma neznámymi, z ktorých rovníc jedna je lineárna, môžeme použiť aj v tom prípade, keď nelineárna rovnica má tvar

$$ux^2 + vxy + wy^2 + px + qy + s = 0,$$

kde veličiny u, v, w, p, q, s sú dané čísla.

Vráťme sa k sústave rovníc (9), (10). Keďže predpokladáme, že $b \neq 0$, môžeme vylúčiť neznámu y. Z rovnice (10) dostaneme

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}. \tag{11}$$

Keď tento výraz dosadíme do rovnice (9), dostaneme po ľahkej úprave kvadratickú rovnicu

$$(a^2 + b^2)x^2 + 2acx + c^2 - b^2r^2 = 0 \tag{12}$$

s diskriminantom

$$D = (2ac)^2 - 4(a^2 + b^2)(c^2 - b^2r^2),$$

ktorý ľahko uvedieme na tvar

$$D = 4b^2[(a^2 + b^2)r^2 - c^2]. \tag{13}$$

Podľa článku je

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (14)$$

vzdialenosť priamky (10) od začiatku. Ak je táto vzdialenosť menšia než r, je $\frac{c^2}{a^2 + b^2} < r^2$ alebo $c^2 < (a^2 + b^2)\,r^2$; diskriminant (13) je kladný a rovnica (12) má dva reálne korene x; ku každému x určíme y z rovnice (11) a dostaneme riešenie sústavy (9), (10). Teda táto sústava má dve reálne riešenia, priamka (10) má s kružnicou (9) dva priesečíky a je sečnou kružnice. Ak je vzdialenosť (14) väčšia než r, je diskriminant (13) záporný a priamka (10) je nesečnou kružnice (9).

Poznámka. Na riešenie sústavy (9), (10), v ktorej $r = 1$, môžeme urobiť riešenie goniometrickej rovnice tvaru

$$a \cos \varphi + b \sin \varphi + c = 0 \qquad (15)$$

s neznámou φ. Ak totiž zavedieme

$$x = \cos \varphi; \quad y = \sin \varphi, \qquad (16)$$

musí medzi x a y platiť vzťah

$$x^2 + y^2 = 1. \qquad (17)$$

Okrem toho musí medzi nimi platiť rovnica (15), ktorá podľa vzťahov (16) nadobudne tvar

$$ax + by + c = 0. \qquad (18)$$

Riešenie rovnice (15) je tým prevedené na riešenie sústavy (17), (18).

Cvičenie.

119. Napíšte rovnicu kružnice k so stredom S a s polomerom r, ak je: a) $S \equiv (0; 0)$, $r = 5$; b) $S \equiv (-15; -9)$, $r = 13$. Vyšetrite, ktorý z bodov $(-3; -4)$, $(-2; -9)$, $(4; -3)$ je bodom kružnice k.

120. Napíšte rovnicu kružnice so stredom S, ktorá prechádza daným bodom M beztoho, že by ste vypočítali polomer kružnice. Dané je: a) $S \equiv (-6; 8)$, $M \equiv (0; 0)$ b) $S \equiv (m; 2m)$, $M \equiv (4m; -2m)$, kde m je dané reálne číslo.

121. Čo je geometrické miesto bodov $x + iy$, o ktorých platí a) $|x + iy| = r$,

b) $|(x + iy) - (m + in)| = r$, kde x, y, m, n, r sú reálne čísla a m, n, r sú konštanty?

122. Sledujte svoje úsudky na rovniciach kružníc z predchádzajúceho príkladu.

123. Zistite stred a polomer kružnice o rovnici:
a) $x^2 + y^2 - 4x = 0$; b) $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$;
c) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$; d) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$.
V ktorom prípade kružnica nejestvuje? [Výpočty urobte tak, že danú rovnicu upravíte na tvar rovnice (1); porovnajte s príkladom 106.]

124. Ako poznáte z rovnice kružnice, že kružnica a) má stred na osi x, b) má stred na osi y, c) prechádza začiatkom sústavy súradníc.

125. Bod $M \equiv (x_0; y_0)$ leží a) vo vnútri, b) mimo kružnice $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, ak platí vzťah a) $x_0^2 + y_0^2 < r^2$; b) $x_0^2 + y_0^2 > r^2$ a obrátene. Dokážte!

126. Určite rovnicu kružnice prechádzajúcej bodmi $A \equiv (0; 1)$, $B \equiv (1; 1)$, $C \equiv (2; -2)$ a rozhodnite, či začiatok P sústavy súradníc leží vo vnútri kružnice.

127. Použitím analytickej geometrie dokážte, že kruh je konvexný útvar (zvoľte začiatok P sústavy súradníc v strede kružnice a skúmajte úsečku $[x_1; y_1]$ $[x_2; y_2]$, ktorej krajné body ležia v kruhu). Dokážte, že vtedy celá leží vo vnútri kruhu. Použite rovnice (6), str. 58).

128. Rozhodnite, za akých podmienok je priamka $ax + by + c = 0$ a) sečnou; b) dotyčnicou; c) nesečnou kružnice o rovnici $(x - m)^2 + (y - n)^2 - r^2 = 0$. [Pretvorte podmienku (14): Bod $P' \equiv (m; n)$ zvoľte za nový začiatok sústavy súradníc a napíšte rovnice obidvoch čiar.]

129. Kružnica 1 má rovnicu $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.
a) Na kružnici 1 leží bod $T \equiv (-1; 1)$. Predovšetkým sa presvedčte, že priamka o rovnici $y = 1$ pretína kružnicu v dvoch rôznych bodoch. Potom bodom T sostrojte priamku s o rovnici $y = bx + q$ a určite hodnotu smernice tak, aby priamka s mala s kružnicou jediný spoločný bod. Dokážte, že takto určená priamka je dotyčnicou kružnice.
b) Určite rovnicu priamky, ktorá má smernicu $-\frac{3}{4}$ a má s kružnicou 1 len jeden spoločný bod.

130. Predchádzajúci príklad riešte použitím parametrického vyjadrenia priamky.

131. Riešte goniometrickú rovnicu $a \cos \varphi + b \sin \varphi + c = 0$ metódou naznačenou v texte; dané je:
a) $a = 5; b = 5; c = -1$.
b) $a = 3, b = -4, c = -5$.
c) $a = b = 1, c = -2\sqrt{2}$.

131a. Určite podmienky riešiteľnosti goniometrickej rovnice (15) str. 61. Vysvetlite geometrický význam týchto podmienok.

III. TRIGONOMETRIA.

14. Sinová veta.

Goniometrické funkcie, s ktorými sme sa pri vyučovaní vždy znova stretali, sú veľmi dôležité preto, lebo sa vyskytujú pri štúdiu periodických javov vo fyzike. Pôvodne ich vymysleli pre výpočet základných prvkov trojuholníka (strán a, b, c, uhlov α, β, γ) na základe troch známych hodnôt z nich. Vzorce, na ktorých sú takéto výpočty založené, tvoria tzv. **trigonometriu** (slovo gréckeho pôvodu, značí náuku o meraní trojuholníka). Teraz sa soznámime s hlavnými trigonometrickými vzorcami.

Pripomeňme si najprv, že medzi vnútornými uhlami trojuholníka platí známy vzťah $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. (1)

Pretože $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, plynie z (1), že aspoň dva z uhlov α, β, γ sú ostré $\left(\text{menšie ako } \frac{1}{2}\pi\right)$. Tretí uhol je alebo ostrý, alebo pravý, alebo tupý. Ďalej si pripomeňme, že pre ostrý uhol φ sú čísla $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ kladné a menšie ako 1, pre pravý uhol $\frac{1}{2}\pi$ platí: $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$, $\sin\frac{1}{2}\pi = 1$. Pre tupý uhol φ platí:

$$\cos\varphi = -\cos(\pi - \varphi), \quad \sin\varphi = \sin(\pi - \varphi),$$

takže číslo $\cos\varphi$ je záporné, $\sin\varphi$ je kladné.

Jedným z najzákladnejších trigonometrických vzorcov je tzv. **sinová veta,** ktorá hovorí, že všetky tri zlomky

$$\frac{a}{\sin\alpha}, \quad \frac{b}{\sin\beta}, \quad \frac{c}{\sin\gamma} \tag{2}$$

sú navzájom rovnaké. Dokážeme si sinovú vetu týmto doplnkom: **Spoločná hodnota všetkých troch zlomkov** (2) **sa rovná** $2r$, **kde** r je polomer opísanej kružnice.

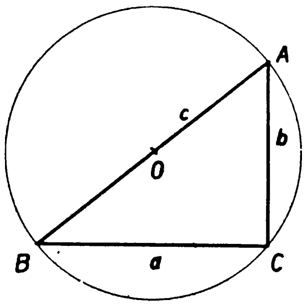
Skúmajme najprv pravouhlý trojuholník s preponou c, teda $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, $\sin\gamma = 1$. (Obr. 16.) Máme dokázať, že

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = c = 2r\,.$$

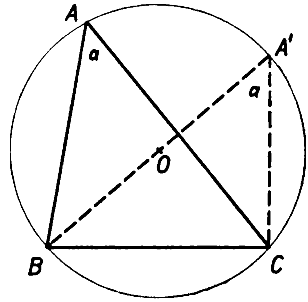
Podľa definície sinu ostrého uhlu $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\sin \beta = \frac{b}{c}$.
Okrem toho vieme už zo strednej školy, že stred kružnice opísanej pravouhlému trojuholníku je uprostred prepony, teda $c = 2r$. Týmto je pre pravouhlý trojuholník všetko dokázané.

Vezmime si teraz všeobecný prípad. Máme vlastne dokázať 3 vzorce

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2r, \frac{b}{\sin \beta} = 2r, \frac{c}{\sin \gamma} = 2r .$$



Obr. 16.



Obr. 17.

Ale tieto vzorce sa od seba líšia len označením a stačí teda dokázať prvý z nich. Pre $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ je už vzorec dokázaný. Keď je α uhol ostrý (obr. 17), vezmeme na pomoc bod A', ktorý na kružnici opísanej $\triangle ABC$ je protiľahlý bodu B. Podľa Táletovej vety má $\triangle A'BC$ pri vrchole C pravý uhol, okrem toho podľa vety o obvodových uhloch obidva trojuholníky $\triangle ABC$, $\triangle A'BC$ majú oproti spoločnej strane $a = BC$ rovnako veľký uhol α. Pretože veličiny a, α, r majú trojuholník $\triangle ABC$ a pravouhlý $\triangle A'BC$ spoločné a pretože pre pravouhlý $A'BC$ je vzorec $\frac{a}{\sin \alpha} = 2r$ správny, musí byť správny aj pre $\triangle ABC$.

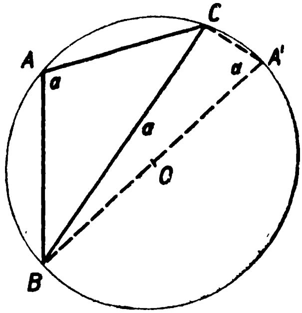
Keď je uhol α tupý (obr. 18), je dôkaz skoro rovnaký. V pravouhlom trojuholníku $A'BC$ pri vrchole A' nemáme teraz uhol α, ale $\alpha' = \pi - \alpha$, takže $\sin \alpha = \sin \alpha'$ a ináč dôkaz ostáva ten istý.

Keď chceme dokázať len sinovú vetu bez doplnku, čomu sa rovná spoločná hodnota všetkých troch zlomkov (2), môžeme postupovať iným spôsobom. Máme dokázať, že všetky tri zlomky (2) sú si navzájom rovné. Stačí však dokázať len jednu rovnosť

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}, \tag{3}$$

pretože rovnosti

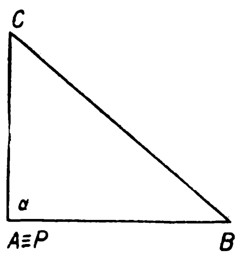
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}, \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$



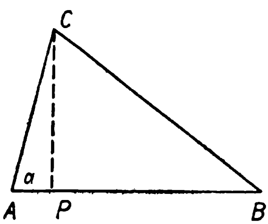
Obr. 18.

sú len formálne rôzne, t. j. líšia sa od rovnosti (3) len označením. Rovnosť (3) má však ten istý význam ako rovnosť $a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha$. Stačí teda dokázať, že

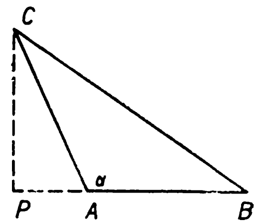
$$b \sin \alpha = v_c, \quad a \sin \beta = v_c, \tag{4}$$



Obr. 19a.



Obr. 19b.



Obr. 19c.

kde v_c značí výšku $\triangle ABC$ príslušnú k strane c. Obidve rovnosti (4) sú zase len formálne rôzne, a preto stačí dokázať len jednu z nich, teda

$$b \sin \alpha = v_c \,. \tag{5}$$

Označme P pätu výšky v_c, takže $v_c = \overline{CP}$ $\left(\text{obr. 19a pre } \alpha = \frac{1}{2}\pi,\right.$ $\left.\text{obr. 19b pre } \alpha < \frac{1}{2}\pi, \text{ obr. 19c pre } \alpha > \frac{1}{2}\pi\right)$.

V prípade obr. 19a je $\sin \alpha = 1$ a výška v_c splynie so stranou b, takže (5) je samozrejmé. V prípade obr. 19b máme v pravouhlom $\triangle ACP$ preponu b, odvesnu v_c a oproti nej uhol α, potom (5) vychádza z definície $\sin \alpha$ pre ostrý uhol α. Ten istý postup dá v prípade obr. 19c, že $b \cdot \sin\alpha = v_c$, kde α' je uhol pravouhlého $\triangle ACP$ proti odvesne CP, teda $\alpha' = \pi - \alpha$, teda $\sin\alpha' = \sin\alpha$ a tak (5) platí aj v tomto prípade.

Keď $\triangle$ značí plochu $\triangle ABC$, platí známy vzorec $\triangle = \frac{1}{2} c \cdot v_c$. Keď za v_c dosadíme zo vzorca (5) dostaneme

$$\triangle = \frac{1}{2} bc \sin\alpha. \tag{6}$$

Tak isto platia vzorce

$$\triangle = \frac{1}{2} ac \sin\beta, = \frac{1}{2} ab \sin\gamma,$$

ktoré sa len formálne líšia od (6).

Cvičenie.

V nasledujúcich príkladoch, pokiaľ nie je nič zvlášť poznamenané, sú: a, b, c strany, α, β, γ uhly trojuholníka, r, ϱ sú polomery jemu opísanej a vpísanej kružnice a $\triangle$ je jeho plocha.

132. V akom pomere sú strany $\triangle ABC$, keď platí:
a) $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5$, b) $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 3$,
c) $\sin\alpha = \frac{1}{5}\sqrt{10}$, $\sin\beta = \frac{1}{5}\sqrt{15}$?

133. Nech sú α' β' γ' δ' stredové uhly príslušné ku stranám $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$ tetivového štvoruholníka. Dokážte, že platí:
$a : b : c : d = \sin\frac{1}{2}\alpha' : \sin\frac{1}{2}\beta' : \sin\frac{1}{2}\gamma' : \sin\frac{1}{2}\delta'$.

134. Vypočítajte plochu rovnobežníka $ABCD$, keď je dané $a = AB$, $b = BC$, $\gamma = \sphericalangle BCD$.

135. Vo vypuklom štvoruholníku sú dané uhlopriečky $e = AC$, $f = BD$ a jeden ich uhol ω. Dokážte, že plocha štvoruholníka je $P = \frac{1}{2} ef \sin\omega$.

15. Kosinová veta. Základné úlohy o trojuholníku.

Okrem sinovej vety je v trigonometrii dôležitá aj veta kosinová, ktorú vyjadrujú vzorce

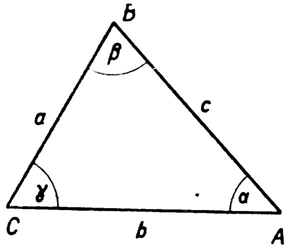
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma, \tag{1}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \tag{1'}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \tag{1''}$$

ktoré sú len formálne rôzne, preto stačí odvodiť len vzorec (1).

Keď $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, prejde vzorec (1) na známu Pytagorovu vetu: $c^2 = a^2 + b^2$. Kosinová veta sa dá dokázať rozličnými spôsobmi. Použijeme známe vzorce z analytickej geometrie. Umiestime $\triangle ABC$ (obr. 20.) tak, aby vrchol C bol v začiatku súradnicovej sústavy, aby bod A ležal na kladnej časti osi x, bod B nech leží nad osou x. Potom $C\ (0;\ 0)$, $A\ (b;\ 0)$ a podľa vzorca (6) článku 3 je $B\ (a \cos \gamma;\ a \sin \gamma)$. Vzdialenosť $c = \overline{AB}$ je daná vz. (3) článku 3, je teda



Obr. 20.

$$c^2 = (a \cos \gamma - b)^2 + (a \sin \gamma)^2 .$$

Pripomeňme si, že $\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1$, potom dostaneme po ľahkej úprave vzorec (1).

Použitím sinovej a kosinovej vety ľahko riešime základné úlohy o trojuholníku, ktoré zodpovedajú známym vetám sus, usu, sss, ssu o určenosti trojuholníka. Začneme vetami usu, ssu, pri ktorých vystačíme so sinovou vetou.

I. Podľa vety usu je $\triangle ABC$ určený, keď poznáme a, β, γ. Uhol α si určíme zo vzťahu $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Pomocou sinovej vety určíme potom strany b, c zo vzťahov: $b = a \dfrac{\sin \beta}{\sin \alpha}$; $c = a \dfrac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$.

II. Podľa vety ssu je $\triangle ABC$ určený, keď poznáme a, b, α, pritom $a > b$. Pre výpočet uhlu β máme zo sinovej vety

$$\sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha ,$$

pretože $a > b$, nie je b najväčšia strana, a preto β nie je najväčší uhol, je teda β uhol ostrý, ktorého veľkosť je jednoznačne daná, keď poznáme $\sin \beta$. Uhol γ vypočítame zo vzťahu $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ a konečne určíme c zo sinovej vety $c = a \dfrac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$, alebo $c = b \dfrac{\sin \gamma}{\sin \beta}$.
Dobre je na skúšku vypočítať c obidvoma spôsobmi.

III. Podľa vety sss je $\triangle ABC$ určený, keď poznáme a, b, c. Uhly α, β, γ môžeme určiť tak, že vypočítame ich kosiny podľa (1)

(1'), (1''). Skúškou správnosti je vzťah $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Prakticky je pohodlnejšie podľa kosinovej vety určiť len najväčší uhol (proti najväčšej strane) a ostatné počítať pomocou sinovej vety ako v II.

IV. Podľa vety sus je $\triangle ABC$ určený, keď poznáme a, b, γ. Najprv určíme c podľa kosinovej vety (1). Podľa sinovej vety je potom

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \sin \gamma , \quad \sin \beta = \frac{b}{c} \sin \gamma , \tag{2}$$

z čoho môžeme pomocou tabuliek vypočítať α, β. Treba si všimnúť ešte to, že ak poznáme $\sin \alpha$, je uhol α určený dvojznačne, dokiaľ nevieme, či je ostrý alebo tupý. Je však ostrý, ak neleží proti najdlhšej strane. Keď je napr. $a \geqq b$, je uhol β určite ostrý a je jednoznačne určený druhým zo vzorcov (2). Keď poznáme β, vypočítame α zo vzťahu $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ a prvý zo vz. (2) použijeme len na kontrolu správnosti. Keď uhol γ nie je ostrý, sú obidva uhly α, β určite ostré a môžeme použiť ktorýkoľvek zo vzorcov (2).

Násobenie a delenie potrebné pri výpočtoch podľa sinovej vety robíme obyčajne logaritmicky. Kosinová veta nie je však vhodná pre logaritmické počítanie, a preto sa v praxi pri úlohách III a IV používajú iné vzorce, ktoré poznáme v nasledujúcich článkoch.

Pre urýchlenie logaritmického počítania je vo vašich príručných tabuľkách okrem známej tabuľky hodnôt goniometrických funkcií aj tabuľka ich logaritmov, zaokrúhlených na 4 desatinné miesta a postupujúcich po 10'. Usporiadanie tabuľky je podobné úprave tabuľky pre goniometrické funkcie. Pretože pre každý ostrý uhol sú čísla $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$ menšie ako 1, sú ich logaritmy záporné. Aj čísla $\log \operatorname{tg} \alpha$ sú záporné pre všetky uhly $\alpha < \frac{1}{4}\pi$. Preto sú v tabuľke logaritmov goniometrických funkcií všetky uvedené logaritmy zväčšené o 10; na to treba dať pri počítaní pozor. Tabuľky môžeme použiť jednak na to, aby sme pre daný uhol určili logaritmy jeho goniometrických funkcií, jednak na to, aby sme zo známeho logaritmu niektorej goniometrickej funkcie určili uhol.

Hoci v tabuľke sú priamo udané hodnoty logaritmov goniometrických funkcií len pre uhly postupujúce po 10', môžeme interpoláciou určiť tieto logaritmy pre uhly postupujúce po 1'. Interpolácia sa robí podobne ako pri iných tabuľkách. Nebudeme sa tým už ďalej zaoberať. Upozorňujeme len na to, že väčšiu presnosť výpočtov pohodlnejšie dosiahneme presnejšími tabuľkami ako interpoláciou. Ale presnosť výsledkov závisí predovšetkým od presnosti merania tých veličín, ktoré boly dané a z ktorých počítame ďalšie. Nemá preto smyslu udávať veľkosť uhlov s väčšou presnosťou, ako je presnosť udania dĺžok. Dá sa dokázať, že ak sa obmedzíme na trojuholníky, ktoré nie sú príliš „ploché", presnejšie povedané, ktorých každý uhol je väčší ako 10^0, nemá smyslu udávať uhly presnejšie ako na $10'$, keď pri priamom meraní dlžok sa môžeme dopustiť chyby až $\frac{1}{2}$% meranej dĺžky. Keď sú všetky uhly trojuholníka väčšie ako 30^0, presnosť uhlov na $10'$ zodpovedá chybám meraných dĺžok, ktoré nedosiahnu $\frac{1}{8}$%.

Cvičenie.

136. V $\triangle ABC$ je dané a, b, γ. Nech A' je päta výšky v_1 spustenej z bodu A na stranu BC, označte $p = A'B$, $q = A'C$. Podľa Pytagorovej vety je $c^2 = v_1{}^2 + p^2$. Určite najprv hodnoty v_1, q a potom p. Nakoniec vypočítajte c^2. Odvodíte tak znova kosinovú vetu. Urobte diskusiu pre prípady: a) $\gamma = R$, b) $\gamma > R$, c) $\gamma < R$.

137. a) O výške v_1, ktorá prináleží vrcholu A trojuholníka ABC, platí $v_1 = b \sin \gamma = c \sin \beta$. Dokážte.

b) O pravouhlom priemete a' strany a $\triangle ABC$ do priamky AB platí: $a' = a \cos \beta$. Pritom priemet leží vo vnútri strany AB, keď je $\beta < \frac{1}{2}\pi$, a leží na predĺžení za bod B, keď $\beta > \frac{1}{2}\pi$; ako sa to prejavuje na hodnote $\cos \beta$? Čo prípad $\beta = \frac{1}{2}\pi$?

Príklady 138—141 podrobne prediskutujte.

138. Určite tretiu stranu trojuholníka, keď je dané:

a) $a = 5$, $c = 8$, $\beta = 60^0$, b) $b = 11$, $c = 24$, $\alpha = 120^0$.

139. Riešte trojuholník ABC, keď je dané:

a) $c = 300$, $\alpha = 30^0$, $\beta = 110^0$, b) $a = 3$, $b = 6$, $\beta = \frac{2}{3}$,

c) $a = 13$, $b = 15$, $\sin \alpha = 0{,}8$, d) $a = 60$, $b = 70$, $\gamma = 24^0$,

e) $b = 5$, $c = 6$, $\alpha = 140^0$, f) $a = 5$, $b = 9$, $c = 6$.

140. Šikmý kruhový kužeľ má podstavu so stredom S a s polomerom $r = 50$, vrchol je V. Nech VA a VB sú jeho najdlhšia a najkratšia strana. Vypočítajte objem kužeľa, keď $\sphericalangle VAB = \alpha = 40^0$, $\sphericalangle VBA = \beta = 110^0$.

16. Súčet a rozdiel sinov a kosinov.

Odvodíme si najprv výrazy pre $\sin\alpha \pm \sin\beta$, $\cos\alpha \pm \cos\beta$ (1) vo tvare súčinov vhodných pre logaritmovanie. Potom si odvodíme úpravu sinovej vety, aby sa hodila na riešenie trojuholníkov, určených podľa vety sus.

Keď sú φ_1 a φ_2 dva ľubovoľné uhly, platí známa Moivrova veta $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, ktorá zahrnuje dva vzorce

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\,, \tag{2}$$

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2\,. \tag{3}$$

Pretože $\sin(-\varphi_2) = -\sin\varphi_2$, $\cos(-\varphi_2) = \cos\varphi_2$, platí aj

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2\,, \tag{4}$$

$$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2\,. \tag{5}$$

Z (2) a (4) plynie

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\,, \tag{6}$$

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) - \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\,. \tag{7}$$

Z (3) a (5) plynie

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 2\sin\varphi_1\cos\varphi_2\,, \tag{8}$$

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) - \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 2\cos\varphi_1\sin\varphi_2\,. \tag{9}$$

Keď sú teraz α, β dva ľubovoľné uhly, určíme φ_1 a φ_2 z rovníc

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \alpha\,,\quad \varphi_1 - \varphi_2 = \beta\,,$$

ktoré dávajú

$$\varphi_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}\,;\qquad \varphi_2 = \frac{\alpha - \beta}{2}\,.$$

Vzťahy (6) až (9) nadobudnú teraz tvar

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\,, \tag{10}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\,, \tag{11}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\,, \tag{12}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\,. \tag{13}$$

Keď sú teraz a, b dve strany trojuholníka ABC, α, β protiľahlé uhly, sú čísla $\sin\alpha$, $\sin\beta$ kladné, takže $\sin\alpha + \sin\beta \neq 0$ a podľa (12) aj $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \neq 0$; okrem toho je $0 < \alpha + \beta < \pi$, teda $\frac{\alpha+\beta}{2}$ je uhol ostrý, a preto aj $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \neq 0$. Podľa (12) a (13) je

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Zo sinovej vety odvodíme tiež ľahko, že

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta},$$

takže dostávame vzorec

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}, \qquad (14)$$

ktorý sa volá **tangentovou vetou.** Miesto a, b, α, β môžeme písať aj napr. a, c, α, γ alebo b, c, β, γ. Pretože $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, je

$$\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$$

a vzorec (14) môžeme písať aj vo tvare

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}}. \qquad (15)$$

Keď teraz v trojuholníku ABC poznáme a, b, γ, je výhodnejšie miesto kosinovej vety použiť vetu tangentovú. Keď je $a > b$, vtedy $\alpha > \beta$. Z (15) plynie

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}.$$

Pretože $0 < \frac{\alpha - \beta}{2} < \frac{\pi}{2}$, je takto uhol $\frac{\alpha - \beta}{2}$ určený jednoznačne. Pretože poznáme aj

$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$, dostaneme

$$-\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Ešte máme určiť c, a to urobíme podľa sinovej vety

$$c = a\,\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}, \quad \text{alebo } c = b\,\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}.$$

Cvičenie.

141. Upravte výrazy: a) $\sin 75^0 + \sin 15^0$; b) $\sin 135^0 - \sin 15^0$; c) $\cos 240^0 - \cos 150^0$; d) $tg\, 70^0 + tg\, 20^0$.

142. Keď je $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, platí:
a) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$;
b) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4 \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma$;
c) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -4 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma - 1$;
d) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} + 1$.

143. Určite obvod trojuholníka ABC, keď je dané r, α, β. Výsledok upravte na tvar súčinu.

144. Určite objem a povrch telesa, ktoré vznikne rotáciou trojuholníka ABC okolo strany AB, keď je dané c, α, β. Výsledky upravte na tvar súčinu. Urobte diskusiu pre $\alpha \gtreqless \frac{1}{2}\pi$.

145. Použitím tangentovej vety riešte $\triangle ABC$ z príkladu 139d), e) a 140b).

17. Goniometrické funkcie polovičného uhlu.

Keď vo vzorci (2) 17. článku volíme $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\alpha}{2}$, kde α je ľubovoľný uhol, máme

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha. \tag{1}$$

Popri tom platí, ako vieme,

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1\,. \tag{2}$$

Z (1) a (2) plynie

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}\,, \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}\,. \tag{3}$$

Keď α je uhol trojuholníka, je $0 < \alpha < \pi$, teda $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, čísla $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$ sú kladné a z (3) plynie

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\,, \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\,, \tag{4}$$

ako aj

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\,. \tag{5}$$

Podľa kosinovej vety je však

$$2bc\,.\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2\,,$$

teda aj

$$2bc\,(1+\cos\alpha) = (b^2 + 2bc + c^2) - a^2\,,$$

$$2bc\,(1-\cos\alpha) = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)\,,$$

čiže

$$2bc\,(1+\cos\alpha) = (b+c)^2 - a^2\,, \tag{6}$$

$$2bc\,(1-\cos\alpha) = a^2 - (b-c)^2\,. \tag{7}$$

Položme teraz

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)\,,$$

takže $2s$ je obvod trojuholníka. Potom

$$s - a = \frac{1}{2}(b+c-a);\; s - b = \frac{1}{2}(a+c-b);\; s - c = \frac{1}{2}(a+b-c)\,.$$

Podľa známeho vzorca $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ je však

$$(b+c)^2 - a^2 = (a+b+c)(b+c-a) = 4s\,(s-a)\,,$$

$$a^2 - (b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c) = 4\,(s-b)(s-c)\,.$$

Potom zo (6) a (7) dostaneme

$$2bc\,(1+\cos\alpha) = 4s\,(s-a)\,,$$

$$2bc\,(1-\cos\alpha) = 4\,(s-b)\,(s-c)\,.$$

Podľa (4) a (5) je teda

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}}\,,\qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{bc}}\,,$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}}\,. \tag{9}$$

Podobne však aj

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s-b)}{ac}}\,,\qquad \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-c)}{ac}}\,,$$
$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-c)}{s\,(s-b)}}\,, \tag{9'}$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s-c)}{ab}}\,,\qquad \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{ab}}\,,$$
$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{s\,(s-c)}}\,. \tag{9''}$$

Keď poznáme strany a, b, c trojuholníka, určíme jeho uhly α, β, γ oveľa pohodlnejšie z týchto vzorcov ako z kosinovej vety.

Keď vo vzorci (3) článku 17 volíme $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\alpha}{2}$, máme:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha\,. \tag{10}$$

Vieme však, že plocha trojuholníka je daná vzorcom

$$\triangle = \frac{1}{2}\,bc\sin\alpha\,.$$

Podľa (9) a (10) je teda

$$\triangle = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} \tag{11}$$

a to je Herónov vzorec.

Cvičenie.

146. Uvažujte o uhle α, o ktorom platí $0 < \alpha < 2\pi$. Použitím vzorcov (3) určite hodnoty $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, keď je dané: a) $\sin\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\cos\alpha > 0$, b) $\cos\alpha = \frac{-3}{5}$, $\alpha > \pi$, c) $tg\,\alpha = 3\frac{3}{7}$, $\alpha > \frac{3}{2}\pi$.

V diskusi rozhodnite, či sú hľadané hodnoty určené jednoznačne.

147. Vyjadrite funkcie $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ pomocou funkcie $t = \operatorname{tg}\alpha$ a urobte diskusiu výsledkov. Pre $\cos\alpha$ deľte obidva vzťahy (1) a (2) na str. 72, 73. Pre $\sin\alpha$ použite vzťah 10 na str. 74, položte pred zátvorku $\dfrac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ a zaveďte t.

148. Trojuholník, ktorého strany a plocha sú vyjadrené racionálnymi číslami sa volá racionálny (aj Herónov). Dokážte, že $\triangle$ so stranami: a) $a = 4$, $b = 13$, $c = 15$, b) $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$ je racionálny.

149. Nech sú a, b, c strany, $2s$ obvod, $\triangle$ plocha, r, ϱ polomery kružnice opísanej a vpísanej $\triangle ABC$. Dokážte tieto poučky:

a) $\varrho = \frac{\triangle}{s}$ (Keď je S stred kružnice trojuholníku vpísanej, vyjadrite plochy $\triangle$: ABS, BCS, CAS pomocou a, b, c, ϱ.)

b) Nech C' je ten bod na priamke AB, v ktorom sa jej dotýka vpísaná kružnica. Potom platí $x = AC' = s - a$. [Použite vzorce (9), (11) a určite c pomocou a, b, x.]

c) Platí: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a}$.

d) Platí: $\triangle = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$, urobte podrobnú diskusiu pre: $\gamma \gtreqless \frac{1}{2}\pi$. Použite (6) na str. 73 a stredové uhly, ktorých vrchol 0 je stredom kružnice opísanej.

e) Platí: $r = \frac{abc}{4\triangle}$. Použite výsledok príkl. d) a sinovej vety!

18. Použitie trigonometrie.

Vzorce, ktoré si odvodíme v tomto článku, používajú sa na vypočítanie dĺžok a uhlov v rôznych geometrických útvaroch. Najprv musíme vyhľadať trojuholník, v ktorom sa vyskytuje neznáma dĺžka alebo uhol a ktorý je určený známymi prvkami. Tento trojuholník si na obrázku nápadnejšie vyznačíme, aby sme mali prehľad.

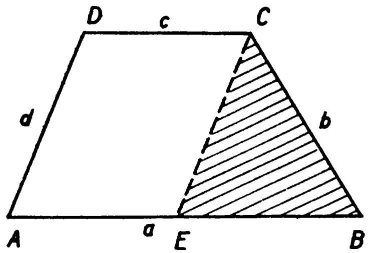
Príklad 1 (obr. 21). V lichobežníku $ABCD$ poznáme základňu $AB = a$, rameno $AD = d$ a uhly pri základni $\alpha = \sphericalangle BAD$, $\beta = \sphericalangle ABC$. Máme vypočítať rameno $BC = b$.

Riešenie. Priamka $CE \parallel DE$ oddelí $\triangle BCE$, v ktorom poznáme stranu $CE = d$ a dva uhly $\sphericalangle EBC = \beta$ a $\sphericalangle BEC = \alpha$. Podľa sinovej vety je

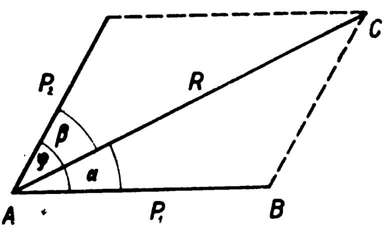
$$b = d \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Príklad 2. Sily P_1 a P_2 svierajú v spoločnom pôsobisku uhol φ. Aká veľká je ich výslednica a aké uhly s nimi sviera?

Riešenie. Sostrojíme a označíme obrázok (obr. 22). Hľadaná výslednica R je stranou AC trojuholníka ABC, ktorý je určený dvoma stranami $AB = P_1$, $BC = P_2$ a uhlom $\sphericalangle ABC = \pi - \varphi$,



Obr. 21.



Obr. 22.

ktorého kosinus je $-\cos \varphi$. Podľa kosinovej vety je

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \varphi.$$

Uhly α, β, ktoré sviera výslednica so silami P_1 a P_2, určíme podľa sinovej vety:

$$\sin \alpha = \frac{P_2 \sin \varphi}{R}, \qquad \sin \beta = \frac{P_1 \sin \varphi}{R}.$$

Príklad 3. Lietadlo letí z A do X vlastnou rýchlosťou c_1 (t. j. rýchlosť lietadla v pokojnom vzduchu). Podľa mapy je kurz AX daný uhlom φ_1. Vietor má smer φ_2 a rýchlosť c_2. Máme vypočítať uhol α, o ktorý sa musí os lietadla odkloniť od smeru trati, aby lietadlo udržalo kurz, a vypočítať jeho rýchlosť vzhľadom na zem.

Riešenie. Lietadlo koná súčasne 2 pohyby, ktorých rýchlosti sa skladajú pomocou rovnobežníka rýchlosti. Výsledná poloha lietadla po 1 hodine letu je tá istá, ako keby bolo konalo pohyby oddelene za sebou.

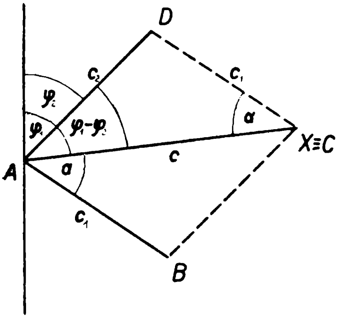
Sostrojíme a vyznačíme si náčrt (obr. 23). Hľadaný uhol α vypočítame z trojuholníka ACD, ktorý je určený stranami $c_1 = CD$,

$c_2 = AD$, a uhol $\varphi_1 - \varphi_2$ proti väčšej z nich, lebo $c_1 > c_2$. Podľa sinovej vety je

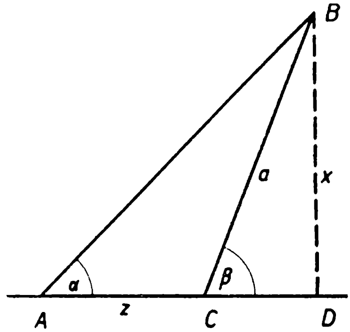
$$\sin \alpha = \frac{c_2 \sin (\varphi^1 - \varphi_2)}{c_1} .$$

Z toho istého trojuholníka sa určí aj hľadaná dĺžka c zasa zo sinovej vety

$$c = \frac{c_1 \sin \beta}{\sin (\varphi_1 - \varphi_2)} ,$$



Obr. 23.



Obr. 24.

kde $\beta = \pi - (\varphi_1 - \varphi_2 + \alpha)$, teda $\sin \beta = \sin (\varphi_1 - \varphi_2 + \alpha)$,

$$c = \frac{c_1 \sin (\varphi_1 - \varphi_2 + \alpha)}{\sin (\varphi_1 - \varphi_2)} .$$

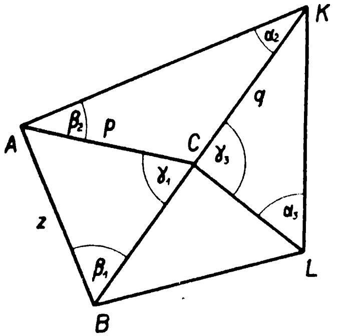
V predošlých príkladoch sa neznáma dĺžka alebo uhol vyskytovaly v trojuholníku, ktorý bol určený danými prvkami. V iných úlohách sa neznámy prvok vyskytuje v trojuholníku, ktorý nie je priamo určený, ktorého chýbajúci prvok sa dá vypočítať z pomocného trojuholníka.

Príklad 4. Aby zememerač zistil, o koľko je vrchol hory B (obr. 24) položený vyššie ako pozorovacie miesto A, odmeral vodorovnú vzdialenosť $\overline{AC} = z$ (základňu), ktorá leží s vrcholom hory v tej istej svislej rovine, a potom odmeral výškové uhly α, β, pod ktorými vidieť vrchol hory z krajných bodov A, B základne. Ako vypočíta výšku hory $x = BD$ nad pozorovacím miestom?

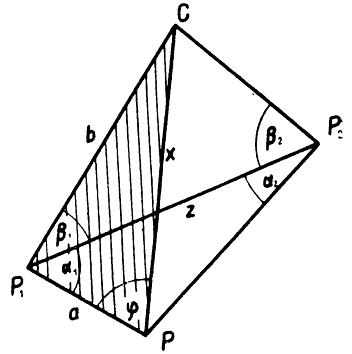
Riešenie. Hľadaná výška x je odvesnou pravouhlého $\triangle BCD$, v ktorom poznáme uhol β. Aby bol $\triangle BCD$ určený, treba poznať jeho preponu $a = \overline{BC}$, ktorá sa určí z pomocného $\triangle ABC$ sinovou vetou. Je

$$x = a \sin \beta, \quad a = \frac{z \sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)}, \quad \text{teda } x = \frac{z \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)}.$$

Príklad 5 (obr. 25). Vo vodorovnej rovine sú dané body A, B, C, K, L. Je daná vzdialenosť $z = \overline{AB}$ a všetky uhly vyznačené na obrazci. Treba určiť vzdialenosť $x = \overline{KL}$.



Obr. 25.



Obr. 26.

Riešenie. V $\triangle ABC$ poznáme uhly β_1, γ_1 a stranu z. Sinovou vetou určíme stranu p. Potom v $\triangle ACK$ poznáme uhly α_2, β_2 a stranu p. Sinovou vetou určíme stranu q. Konečne v $\triangle CKL$ poznáme uhly α_3, γ_3 a stranu q. Sinovou vetou určíme stranu x. Máme

$$p = \frac{z \sin \beta_1}{\sin \gamma_1}, \quad q = \frac{p \sin \beta_2}{\sin \alpha_2}, \quad x = \frac{q \sin \gamma_3}{\sin \alpha_3};$$

do druhej rovnice dosadíme za p z prvej rovnice a takto upravený výraz pre q dosadíme do tretej rovnice. Vyjde

$$x = \frac{z \sin \beta_1 \sin \beta_2 \sin \gamma_3}{\sin \gamma_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3}.$$

Neznáma dĺžka x bola spojená s danou dĺžkou z (základňou) reťazou trojuholníkov, z ktorých dva susedné majú vždy spoločnú stranu. Takýto spôsob určenia neznámej dĺžky sa volá trianguláciou. Používa sa preto, že priame meranie vzdialeností, najmä väčších, býva obťažné, zatiaľ čo priame meranie vodorovných uhlov je pomerne ľahké a presné.

Pri vypočítaní z sme mohli použiť aj $\triangle ACK$. Keď vypočítame x obidvoma spôsobmi, máme hneď aj skúšku správnosti.

Príklad 6 (obr. 26). Delo, postavené v pozícii D, sa má zacieliť na zakrytý cieľ C (medzi C a D je hustý les). Na to treba určiť vzdialenosť $x = CD$ a uhol φ. Preto sa zvolily dve pozorovateľne P_1, P_2, z ktorých vidieť delo aj cieľ. Odmerajú sa uhly α_1, α_2, β_1, β_2 i vzdialenosť $z = \overline{P_1P_2}$. Pre jednoduchosť predpokladáme, že všetky 4 body P_1, P_2, C, D ležia v tej istej rovine.

Riešenie. x je stranou trojuholníka P_1DC, v ktorom zatiaľ poznáme len uhol $\alpha_1 + \beta_1$. Jeho strana $a = \overline{P_1D}$ je však zároveň stranou $\triangle P_1P_2D$, v ktorom je daná strana $z = \overline{P_1P_2}$ a uhly α_1, α_2; vieme teda vypočítať stranu a. Podobne druhá strana $b = \overline{P_1C}$ trojuholníka CDP_1 je zároveň stranou $\triangle P_1P_2C$ tiež určeného stranou z a uhlami β_1, β_2, a preto aj b vieme vypočítať. Podľa sinovej vety je

$$a = \frac{z \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad b = \frac{z \sin \beta_2}{\sin(\beta_1 + \beta_2)} .$$

$\triangle CDP_1$ je teraz určený stranami a, b a sovretým uhlom $\alpha_1 + \beta_1$ a preto podľa kosinovej vety je

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha_1 + \beta_1) .$$

Cvičenie.

150. Nech je $\alpha = 144^0$ uhlom kosoštvorca a $\rho = 5$ polomerom kružnice kosoštvorcu vpísanej. Vypočítajte jeho plochu.

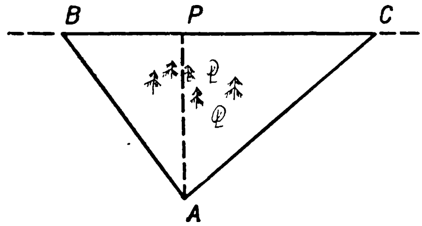
151. Vypočítajte rozmery obdĺžnika, ktorý má plochu $P = 562\ \mathrm{m}^2$ a jeden uhol jeho uhlopriečok je $\omega = 105^0$.

152. Nech sú a, b vzdialenosťami stredu 0 rovnobežníka od jeho dvoch susedných strán, α je jedným jeho uhlom. Určite dĺžku uhlopriečok a plochu rovnobežníka.

153. Plocha kruhového odseku s polomerom r, príslušného stredovému uhlu ω, je $P = \frac{1}{2} r^2 (\omega - \sin \omega)$. Dokážte. (Uvažujte $\omega \gtreqless \pi$.)

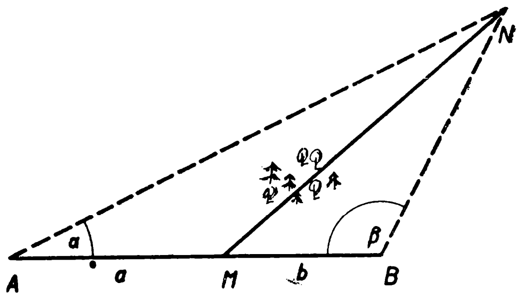
154. V kružnici narysujeme dve rovnobežné tetivy $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, z ktorých každá prislúcha tomu istému stredovému uhlu $\omega < \pi$. Vypočítajte plochu časti kruhu, ohraničenej danými rovnobežkami.

155. Máme určiť vzdialenosť $\overline{AP}$ bodu A od cesty $\overline{BC}$ (obr. 27) (kde $\overline{AP} \perp \overline{BC}$ a P je príslušná päta). Miesta A a P sú od seba oddelené lesíkom, takže z jedného na druhé nie je vidieť. Preto sa na ceste odmeria úsek $BC = 1{,}2\,\text{km}$, pričom je $\beta = \sphericalangle ABC = 50^0$ a $\gamma = \sphericalangle ACB = 37^0$. Určite AP.



Obr. 27.

156. Vypočítajte vzdialenosť $\overline{MN}$ (obr. 28) dvoch bodov M, N, medzi ktorými je prekážka, pre ktorú nie je miesto M viditeľné z miesta N. Preto sa odmeraly vzdialenosti $\overline{AM} = a$, $\overline{MB} = b$, ktoré ležia v jednej priamke a uhly $\alpha = \sphericalangle NAB$, $\beta = \sphericalangle NBA$; miesta A, B sú totiž viditeľné.



Obr. 28.

157. Vypočítajte vzdialenosť $\overline{MN}$ dvoch neprístupných bodov M, N (obr. 29). Na úsečke $\overline{MN}$ zvolíme vhodný bod B a mimo priamky MN bod A, z ktorého sú miesta M, B, N viditeľné. Odmeriame vzdialenosť $\overline{AB} = a$, uhly $\beta = \sphericalangle MBA$, $\alpha_1 = \sphericalangle MAB$, $\alpha_2 = \sphericalangle BAN$. Riešte numericky pre: $a = 300$ m, $\alpha_1 = 32^0$, $\alpha_2 = 39^0$, $\alpha = 112^0$.

158. Letec videl pod hĺbkovým uhlom $\alpha = 33^0$ na zemskom povrchu objekt 0, keď sa díval presne na sever. Keď preletel 3 km v rovnakej výške na západ, videl ten istý objekt v hĺbkovom uhle $\beta = 21^0$. Ako vysoko letel?

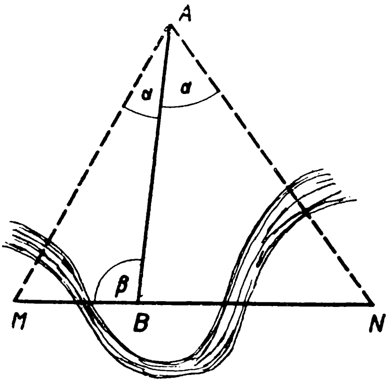
159. Z bodu M, ležiaceho medzi dvoma rovnako vysokými stožiarmi elektrického vedenia, vidíme vrchol prvého stožiaru pod výškovým uhlom 50^0 a vrchol druhého pod výškovým uhlom 14^0. Aká je vzdialenosť obidvoch stožiarov, keď stojíme vo vzdialenosti 8 m od prvého stožiaru.

160. Aby sme zistili neprístupnú vzdialenosť $\overline{XY}$ (obr. 30), odmerali sme vzdialenosť $d = \overline{AB}$ a uhly $\alpha = \sphericalangle YAB$, $\beta = \sphericalangle ABX$, $\gamma = \sphericalangle XAB$, $\delta = \sphericalangle ABY$. Riešte pre $a = 400$ m, $\alpha = 53^0$, $\beta = 42^0$, $\gamma = 86^0$, $\delta = 81^0$.

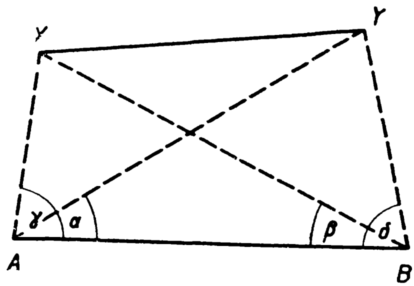
161. Na krajoch letišťa stoja dva svetelné stožiare A, B, pričom A je 500 m na západ od B. Lietadlo letí v kurze $\varphi = 120^0$ (merané od severu na východ cez juh). Pozorovateľ v lietadle vidí stožiar B v azimute $\varphi_2 = 190^0$

a stožiar A v azimute $\varphi_1 = 220^0$ (merané ako kurz). Ako ďaleko bude letún od miest A a B, keď sa dostane medzi obidva stožiare?

162. Po ceste ZV, ktorá vedie od západu na východ (obr. 31), pohybuje sa vojenský útvar rýchlosťou $c_1 = 54$ km za hod. Z letiska L, ktoré leží od cesty na juh, vzlietne lietadlo a letí v neznámom kurze φ^0. Lietadlo má za úlohu čo najskôr sa dostať do styku s útvarom. Vo chvíli štartu

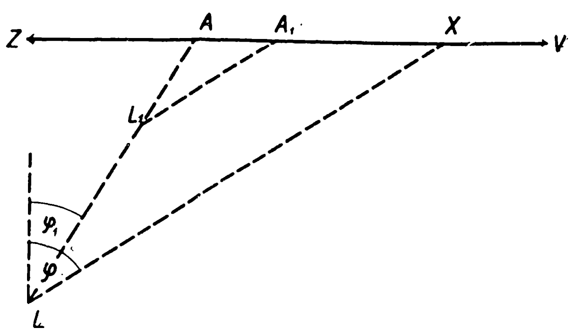


Obr. 29.



Obr. 30.

je útvar na mieste A, ktorého azimut φ_1 vzhľadom na letište L je a) 40^0, b) 320^0, pričom $\overline{LA} = 150$ km. Určite kurz lietadla a čas jeho letu k miestu stretnutia X, keď rýchlosť lietadla je $c_2 = 120$ km za hod. (Nech A_1 je bod na polpriamke AV



Obr. 31.

tak, že $AA_1 = c_1$ a L_1, bod na úsečke $\overline{LA}$ tak, že $\overline{A_1L_1} = c_2$; potom je $LX \parallel L_1A_1$.)

163. Zo začiatku A a konca B úseku $\overline{AB}$ priamej cesty stúpa táto od A ku B smerom ku kopcu C (stúpanie je $10\,\%$). Kopec C vidíme z miesta A a B pod výškovými uhlami $\alpha = 12^0$, $\beta = 30^0$, pričom body A, B, C ležia v tej istej svislej rovine. Vzdialenosť $\overline{AB} = 800$ m. Vypočítajte horizontálne vzdialenosti miesta C od miest A a B a výškové rozdiely jednotli-

vých miest. (Cesta má stúpanie $p\,^0/_0$, keď na 1 km stúpa o $10\,p$ metrov. Keď sú A', B' pravouhlé priemety bodov A, B do vodorovnej roviny, je $A'B'$ horizontálna vzdialenosť bodov A, B.)

164. Lietadlo L pozorovali súčasne z dvoch miest A a B, ktoré ležia v tej istej horizontálnej rovine π. Lietadlo vidieť z bodu A v azimute $\varphi_1 = 225^0$ pod výškovým uhlom $\alpha = 35{,}5^0$, z bodu B v azimute $\varphi_2 = 202{,}5^0$ a pod výškovým uhlom $\beta = 18{,}25^0$. Určite výšku $x = \overline{LC}$ lietadla nad rovinou π, kde C je jej päta v rovine π. $\overline{AB} = d = 5$ km.
Nech sú α', β', γ' uhly $\triangle ABC$. Použitím x vyjadrite $\overline{CA}$, $\overline{CB}$. Podľa sinovej vety je $\sin\alpha' = s : \overline{CB}$, $\sin\beta = s : \overline{CA}$. Odtiaľ určite hodnotu pomeru $\dfrac{\sin\alpha' + \sin\beta'}{\sin\alpha' - \sin\beta'}$; z tejto rovnice určite $\dfrac{1}{2}\,(\alpha' - \beta')$, keďže $\dfrac{1}{2}\,(\alpha' + \beta')$ poznáte.

OBSAH

GEOMETRIA

pre III. triedu gymnazií.

Vydalo Štátne nakladateľstvo v Bratislave. Šéfredaktor: Viktor Šándor. Redaktor publikácie: Elena Horná. Technický redaktor: Gita Pecíková. 301-16-521. Č. PiO 3246/52-III/1. Číslo publikácie: 200. Vydanie prvé. Náklad 10.000 výtlačkov. Rukopis zadaný 7. XII. 1951. Vytlačené v júni 1952. 5,25 PH, 4,129 AH. Papier 223-04, 61×86, 70 g. Tlačila Svoboda 05, n. p., Brno, nám. Rudé armády 13. Tlačené zo sadzby. Typ písma: Italian Old Style. Všeobecná daň 1 %. Strán 84. Cena broš. Kčs 20·—.

Po Kčs 20·—
Čkm. 778
301-16-521