Eduard Čech

Geometria. Pomocná kniha pre 1. triedu stredných škôl

Štátne nakladateľstvo, Bratislava, 1949, 80 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501411

EDUARD ČECH

GEOMETRIA

POMOCNÁ KNIHA
PRE I. TRIEDU STREDNÝCH ŠKÔL

Čkm 270	ŠTÁTNE NAKLADATEĽSTVO V BRATISLAVE
Po Kčs 15.–	

EDUARD ČECH

GEOMETRIA

POMOCNÁ KNIHA PRE I. TRIEDU STREDNÝCH ŠKÔL

Schválilo Povereníctvo školstva, vied a umení výnosom zo dňa 9. augusta 1949, č. 55.546/49-II/1, ako pomocnú knihu pre I. triedu stredných škôl v prvom vydaní.

1 9 4 9

ŠTÁTNE NAKLADATEĽSTVO V BRATISLAVE

§ 1. Rysovanie priamok.

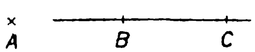
Myslená **čiara** nemá hrúbku. Preto čiary, ktoré rysujeme v sošite, musia byť tenké. V geometrii pracujeme iba tvrdou ceruzou. Ceruza musí byť stále dobre ostrúhaná.

Čiary sú **priame** a **krivé.** Nás budú zaujímať teraz len čiary priame. Rysujeme ich podľa **lineára.** Pre geometriu je vhodný **trojuholníkový lineár.**

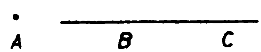
Slovom **priamka** označujeme neohraničenú priamu čiaru. Slovom **úsečka** označujeme priamu čiaru, ohraničenú na oboch stranách.

Musíte sa naučiť správne používať slov priamka, úsečka a mnoho iných slov, s ktorými sa neskoršie soznámite. Aby ste mali dobrý prehľad, urobte si malý sošitok, ktorý budete volať slovníkom. Pri každom paragrafe tejto učebnice je skupina úloh na cvičenie. Prvá úloha je vždy rovnaká: zapísať do slovníčka každý nový spôsob vyjadrovania sa, ktorý sa v tom paragrafe vyskytol. Každé nové vyjadrenie zapíšte do slovníčka perom a pripojte vždy na vysvetlenie malý obrázok ceruzou a od ruky (bez lineára). Jednotlivé nové vyjadrenia oddeľujte zreteľnými medzerami.

Bod nemá rozmery, len určitú polohu. Body budeme značiť veľkými tlačenými písmenami. Dajte si záležať na tomto **popisovaní bodov.** Umiesťujte písmená tam, kam patria. Píšte písmená len také veľké, aby sa daly zreteľne čítať. Navyknite písať písmená rovnakej veľkosti, rovnakého tvaru a smeru.



Obr. 1a.



Obr. 1b.

Bod na danej priamke znázorníme, ak priamku pretneme kratučkou úsečkou. (Robíme to od ruky.) Bod, ktorý nie je na danej priamke, znázorníme krížikom, t. j. dvoma kratučkými úsečkami, ktoré sa v ňom pretnú. Prečo to robíme ako na obr. 1a a nie ako na obr. 1b?

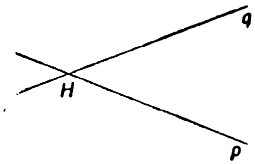
Vyjadrujeme sa: Bod **leží** na priamke. Priamka **prechádza** bodom. Priamku **rysujeme** alebo **sostrojujeme.**

Priamky a krivé čiary označujeme **malými písmenami.** Na obr. 2 máme narysované dva priamky *p* a *q*. Všimnite si, ako sú umiestené písmená *p* a *q*! Prečo ich píšeme až na okraj narysovanej časti priamky? Bod *H* na obr. 2 sa volá **priesečník** priamok *p* a *q*. Vyjadrujeme sa i takto: priamky *p* a *q* sa **pretínajú** v bode *H*.

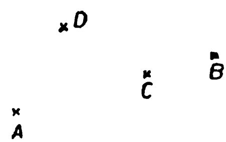
Jedným daným bodom prechádzajú rozličné priamky. Ale d v o m a danými bodmi *A* a *B* už prechádza iba j e d i n á priamka. I keď na obr. 3 nie je narysovaná priamka, ktorá prechádza bodmi *A* a *B*, môžeme si túto priamku p r e d s t a v i ť. Bod *D* by určite na nej neležal, ale bod *C* asi áno. (Presvedčte sa priložením lineára.)

Vyjadrujeme sa: **Priamka je určená dvoma bodmi.** Vysvetlite, čo to znamená.

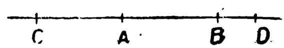
Často priamku označujeme pomocou bodov, ktoré na nej ležia. Napr. priamku na obr. 4 môžeme označiť: priamka *CABD* alebo



Obr. 2.



Obr. 3.



Obr. 4.

priamka *DBAC*. Píšeme a menujeme teda jednotlivé body priamky vždy **poporiadku.** Môžeme tiež povedať, že je to priamka *CAB* alebo že je to priamka *BA*; nemôžeme ale povedať, že je to priamka *ABCD*, alebo priamka *CBA*.

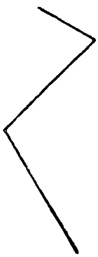
Na priamke *AB* na obr. 4 **ohraničujú** body *A*, *B* úsečku, ktorú nazývame: úsečka *AB* (alebo tiež: úsečka *BA*). Hovoríme, že *A* a *B* sú **koncové body** úsečky *AB*.

Priamka *AB* sa skladá z troch častí: a to z úsečky *AB*, z **predĺženej úsečky** *AB* za bod *A* a z predĺženej úsečky *AB* za bod *B*. Na obr. 4 je bod *C* na predĺženej úsečke *AB* za bodom *A* a bod *D* na predĺženej úsečke *AB* za bodom *B*.

Priamka *AB* sa volá **spojnica** bodov *A* a *B*. Keď rysujeme priamku *AB*, hovoríme, že rysujeme (sostrojujeme) spojnicu bodov *A* a *B*, alebo stručne hovoríme, že **spojujeme** bod *A* s bodom *B*.

Čiara na obr. 5 nie je priama. Hovoríme, že je to čiara **lomená**. Ako by ste vysvetlili vlastnými slovami (bez ukazovania na obrazec), čo je to lomená čiara?

Zvoľte si v sošite dva body A a B (nie príliš blízko pri sebe). Máte sostrojiť ich spojnicu. Vezmite lineár do ľavej ruky a pohybujte ním zľahka, až ho umiestite do správnej polohy. V tejto polohe pridržte pevne ľavou rukou lineár a tým aj sošit. Do pravej ruky vezmite teraz ceruzu a rysujte. Ceruzu držte pevne, ale netlačte ju do papiera; rysovanie nie je rytie. Ceruza je pri rysovaní veľmi mierne naklonená dopredu a neopiera sa o hornú, ale o d o l n ú hranu lineára. Rysujeme voľným pohybom a vždy jedným ťahom celú priamku. Zvyčajne rysujeme z ľava na pravo. Lineár sa dá priložiť k sostrojovanej priamke s jej jednej alebo s druhej strany. Prikladajte lineár tak, aby priamka, ktorú máte rysovať, nedostala sa do tieňa lineára.



Obr. 5.

Keď máte danú úsečku p r e d l ž i ť, priložte lineár tak, aby sa dotýkal celej už narysovanej časti priamky. Veľmi k r á t k u úsečku je ťažko presne predĺžiť.

Celá priamka je neohraničená a nedá sa do sošitu narysovať. Ale keď máte spojiť dva dané body A a B, n e r y s u j t e n i k d y i b a ú s e č k u AB, a l e p r i a m u č i a r u, k t o r á n a o b e s t r a n y p r e s a h u j e ú s e č k u AB. Keď si na to hneď navyknete, pri složitejších úlohách budete len zriedka musieť predlžovať už narysované čiary a zvýšite presnosť.

Obrazce v sošite majte úhľadné a presné, lebo i to má vplyv na váš prospech. Rysujte obrazce veľké, väčšie, ako sú v tejto učebnici. Okrem sošitu majte na hodinách geometrie vždy niekoľko listov čistého papiera.

Okrem rysovania je dôležité í kreslenie. Pravda, obrazce kreslené nebudú presné, ale m u s i a b y ť ú h ľ a d n é. Priame čiary snažte sa kresliť priamymi.

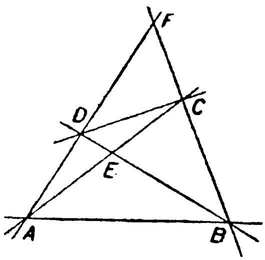
Cvičenie k § 1.

1. Zapíšte do slovníčka: Priama čiara, krivá čiara, lomená čiara. Priamka AB, úsečka AB. Priamka p je spojnicou bodov H a K. Body

E, F, a *G* ležia na priamke *t*. Priamky *r, s* a *u* prechádzajú bodom *P*. Bod *R* je na predĺženej úsečke *ST* za bodom *S*. Úsečka má dva koncové body. Priamky *a* a *c* sa pretínajú v bode *B;* bod *B* je priesečníkom priamok *a* a *c*. Priamka *RSTU* alebo priamka *UTSR*.

2. Z koľkých úsečiek sa skladajú písmená **A, E, N**? Ktoré iné písmená sa skladajú len z úsečiek? Napíšte písmená. složené z dvoch, potom z troch a napokon zo štyroch úsečiek.

3. Zvoľte si v sošite dva body *A* a *B* (ďalej od seba). Spojte ich dva razy, prikladajúc lineár vždy z inej strany. Body spojujte pozorne, aby priamka, ktorú rysujete, presne prechádzala i bodom *A* i bodom *B*. Keď máte dobrý lineár, musia sa obe spojnice úplne kryť. Urobte takúto skúšku i so svojím trojuholníkom, a to so všetkými troma jeho hranami. Pre každú hranu zvoľte si vždy iné body *A* a *B*.



Obr. 6.

4. Sostrojte na voľnom liste papiera obrazec, podobný obr. 6, ale oveľa väčší. Najprv si zvolte body *A, B, C* a *D* v takej polohe, aby celý obrazec vošiel na list. Potom prepichnite papier v bodoch *A, B, C* a *D* a urobte si rovnaký obrazec na druhej strane papiera. Keď ste presne rysovali, musia body *E* a *F* na jednej strane papiera presne splynúť s bodmi *E* a *F* na jeho druhej strane. Presvedčte sa o tom prepichnutím v bodoch *E* a *F*. Ak body nesplynú, opakujte pokus na novom liste papiera a rysujte pozornejšie.

5. Zvoľte si päť bodov a rozhodnite kreslením, koľko majú spojníc. Popíšte spojnice malými písmenami. Z kresby musí byť zrejmé, ku ktorej spojnici to ktoré písmeno patrí.

Úlohy 6 a 7 čítajte pomaly a pozorne. Pri čítaní kreslite si predbežný obrázok, a to na voľnom papieri a dosť veľký. Nesmiete čítať celú úlohu naraz, ale po malých čiastkach a postupne si obrázok doplňujte. Až potom rysujte (lineárom) do sošitu.

6. Zvoľte si priamku *ABC* a priamku *DEF*. (Voľte ich tak, aby sa preťaly až v myslenom predĺžení sošitu.) Priesečník priamok *AE* a *BD* označte *X*. Priesečník priamok *BF* a *CE* označte písmenom *Y* a priamok *AF* a *CD* písmenom *Z*. Spojte *X* s *Y*. Zapíšte, čo pozorujete.

7. Zvoľte body *A, B, C, D* a *E* tak, aby *AEB* a *CED* boly priamky. (Ako to urobíte?) Na úsečke *AC* zvoľte bod *F*. Na úsečke *BC* zvoľte bod *G*. Priesečník priamok *AE* a *DF* označte *H*. Priesečník priamok *BE* a

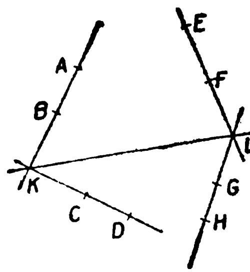
DG označte *K*. Priesečník priamok *CH* a *EF* označte *X*. Priesečník priamok *CK* a *EG* označte *Y*. Priesečník priamok *AX* a *BY* označte *Z*. Zapíšte, čo pozorujete.

8. Opakujte úlohu 6 v inej polohe.

9. Opakujte úlohu 7 v inej polohe.

10. Sostrojte obrazec, podobný obr. 7 (ale väčší). Vedeli by ste popísať jednou vetou všetko, čo ste sostrojili?

Priesečník *K* priamok *AB* a *CD* sme spojili s priesečníkom *L* priamok *EF* a *GH*.



Obr. 7.

§ 2. Meranie a prenášanie dĺžok.

Dĺžku úsečky *AB* označíme $\overline{AB}$. Nájdeme ju meradlom. Každý žiak musí mať svoje meradlo. Priložíme meradlo tak, aby sa jeho začiatok kryl napr. s bodom *A*; dĺžku potom čítame pri bode *B*. Dĺžku vyjadrujeme buď v **centimetroch**, alebo **milimetroch**.

Ako viete, je napr.

37 mm = 3,7 cm = 3 cm 7 mm.

Posledný spôsob písania sa málo užíva, lebo je zdĺhavý.

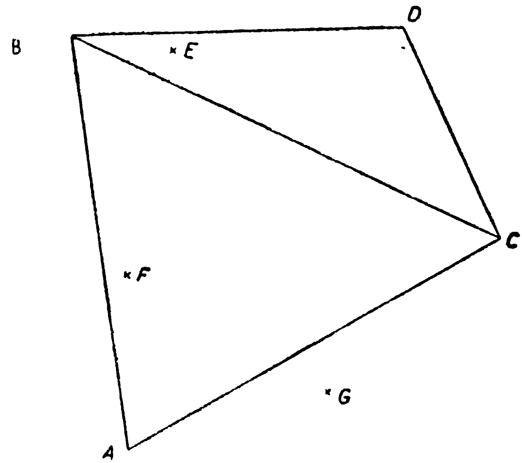
Poznáte i väčšie **dĺžkové jednotky**: dm, m, km.

Vzdialenosť dvoch bodov *A* a *B* je vlastne dĺžka úsečky *AB*.

Narysujte priamku *p* a zvoľte na nej bod *C*. Máte **naniesť** na ňu od bodu *C* dĺžku 37 mm. Najprv správne priložíte k nej meradlo. Potom pridržíte meradlo pevne ľavou rukou, dobre si všimnete miesto toho bodu na priamke *p*, ktorý je vzdialený 37 mm od bodu *C* a na tom mieste urobíte veľmi jemnú bodku. Po odložení meradla si označíte miesto, v ktorom ste urobili bodku, obvyklou priečnou úsečkou; bodka musí pri tom zmiznúť bez stopy. Nájdený bod potom označte *D*. Na priamke *p* je okrem bodu *D* ešte jeden bod *E*, vzdialený 37 mm od bodu *C*. Bod *E* nájdeme podobne, ako sme našli bod *D*. Urobte to. Aká veľká musí byť vzdialenosť $\overline{DE}$? Premerajte.

Často sa stáva, že dĺžka, ktorú máme naniesť, nie je daná číselne, ale že je to vzdialenosť $\overline{AB}$ daných bodov *A* a *B*. V takom prípade nikdy nepoužívame meradla. Môžeme použiť kružidlo; o tom sa zmienime v nasledujúcom paragrafe. Stačí však i prúžok papiera. Priložíme ho najprv k priamke *AB* a priečnymi čiaročkami vyznačíme na ňom polohu bodov *A* a *B*. Potom priložíme prúžok k danej priamke *p* a vyznačíme na nej polohu bodu *D* najprv jemnou bodkou a potom priečnou úsečkou.

Tak isto použijeme pomocný prúžok papiera, keď dĺžka, o ktorú ide, je síce predpísaná číselne, ale má sa nanášať niekoľko ráz.



Obr. 8.

Časť obr. 8 je trojuholník *ABC*. Body *A, B* a *C* sú **vrcholmi** trojuholníka *ABC*. Úsečky *AB, BC* a *CA* sú **stranami** trojuholníka *ABC*. Ktorá strana je najdlhšia? Odpovedzte a až potom sa presvedčte o správnosti svojej odpovede. Ktorá strana je najkratšia? Ktorý trojuholník vidíte ešte na obr. 8? Pomenujte jeho strany.

Trojuholník je plocha. Všetky tri strany trojuholníka dovedna tvoria č i a r u (lomenú), ktorá sa volá **obvod** trojuholníka. Na obr. 8 je bod *F* v trojuholníku *ABC* a body *D, E* a *G* sú mimo trojuholníka *ABC*.

Nevšímajte si bodov *E, F* a *G*. Celý obr. 8 je **štvoruholník** *ABDC*. Vymenujte jeho vrcholy a strany. Úsečka *BC* je jedna z oboch uhlopriečok štvoruholníka *ABDC*. Druhá uhlopriečka *AD* nie je na obrazci vyznačená.

Vrcholy štvoruholníka píšeme vždy **poporiadku.** Hovoríme, že máme na obrazci 8 štvoruholník *BDCA* alebo *BACD,* nie však štvoruholník $ABCD$ alebo $BADC$. Prečo sme toto nespomínali pri trojuholníku?

Dĺžku obvodu trojuholníka ABC (namiesto d ĺ ž k a o b v o d u hovoríme stručne **obvod**) môžeme zistiť tak, že odmeriame všetky strany a výsledky sčítame. Ale výhodnejšie sa sčituje **graficky** (od gréckeho slova g r a f e i n, ktoré znamená písať alebo rysovať): narysujeme pomocnú priamku $HKLM$, nanesieme na ňu (pomocou prúžku papiera)

$$\overline{HK} = \overline{AB},\ \overline{KL} = \overline{BC},\ \overline{LM} = \overline{CA}, \text{ potom}$$

odmeriame $\overline{HM}$ a dostaneme hľadaný obvod. Prečo je tento spôsob lepší? Tak isto nájdeme i obvod $\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DC} + \overline{CA}$ štvoruholníka $ABDC$.

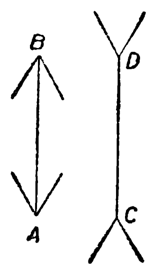
Iste sami prídete na to, ako sa **graficky odčituje**, napr. $\overline{AB} - \overline{CD}$, a **graficky násobí**, napr. $3 \,.\, \overline{AB}$ alebo $4 \,.\, \overline{CD}$.

Narysujte **päťuholník.** Popíšte jeho vrcholy ľubovoľnými písmenami. Vymenujte vrcholy, ako idú správne za sebou. Vymenujte ich v inom správnom poradí. Opakujte to so **šesťuholníkom**.

Cvičenie k § 2.

11. Zapíšte do slovníčka: Dĺžka $\overline{AB}$ úsečky AB alebo vzdialenosť bodov A a B. Trojuholník má tri vrcholy a tri strany. Štvoruholník má štyri vrcholy a štyri strany. Päťuholník má päť vrcholov a päť strán. Šesťuholník má šesť vrcholov a šesť strán. Štvoruholník má dve uhlopriečky. Obvod trojuholníka. Obvod štvoruholníka. Grafické sčítanie úsečiek. Grafické odčítanie úsečiek. Grafické násobenie úsečky číslom. Čiary a plochy.

12. Narysujte si vedľa seba dve presne rovnako dlhé úsečky AB a CD. Pripojte ďalšie úsečky, ako je na obr. 9. Aký klam pozorujete?



Obr. 9.

Úlohy 13 až 19 sa týkajú obr. 8. Každý žiak meria samostatne a zapíše svoj výsledok do sošitu. Potom sa porovnávajú výsledky celej triedy.

13. Odmerajte strany trojuholníka ABC.
14. Odmerajte strany trojuholníka BCD.
15. Nájdite graficky obvod trojuholníka ABC.
16. Nájdite graficky obvod trojuholníka BCD.
17. Nájdite graficky obvod štvoruholníka $ABDC$.
18. Nájdite graficky najprv súčet a potom rozdiel oboch uhlopriečok štvoruholníka $ABDC$.

19. Nájdite graficky dĺžku $3 \cdot AC - 2 \cdot AB$.

20. Naneste na priamku úsečky $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, všetky po 11 mm dlhé. Ktoré úsečky vo vašom obrazci musia byť rovnako dlhé ako AC? Premerajte! Opakujte s úsečkou AD. Aká dlhá musí byť úsečka AF? Premerajte.

21. Zvoľte si bod S a veďte ním dve priamky. Na jednu z nich naneste $\overline{AS} = \overline{SB} = 57$ mm; na druhú naneste $\overline{CS} = \overline{SD} = 36$ mm. Spojte a odmerajte AC, AD, BC, BD. Zapíšte, čo pozorujete.

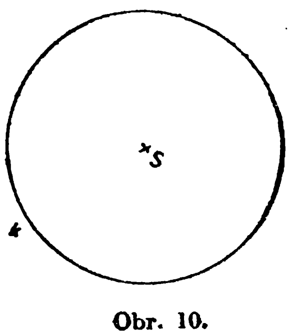
22. Zvoľte si na obvode štvoruholníka $ABCD$ dva body H a K tak, aby neboly oba na tej istej strane štvoruholníka. Na čo rozdelí úsečka HK štvoruholník $ABCD$? Je niekoľko rozličných výsledkov podľa toho, ako si zvolíme body H a K. Naznačte jednotlivé možnosti rozličnými obrazcami od ruky.

23. Narysujte si päťuholník $HKLMN$. Rozmýšľajte, koľko má asi uhlopriečok. Potom ich všetky narysujte.

24. Narysujte si šesťuholník $ABCDEF$. Koľko je uhlopriečok, ktoré rozdelia šesťuholník na dva štvoruholníky? Vymenujte ich všetky a jednu z nich narysujte. Ako tie rozdelia šesťuholník? Koľko je všetkých uhlopriečok dovedna?

§ 3. Rysovanie kružníc.

Najdôležitejšia krivá čiara je **kružnica** (na obr. 10). V n ú t r o kružnice je plocha, ktorá sa volá **kruh.** Pamätajte si: k r u ž n i c a j e č i a r a, k r u h j e p l o c h a; zámena týchto dvoch slov sa v škole pokladá za veľkú chybu. V kružnici okrem iných bodov je najmä jej stred. Na obr. 10 je kružnica označená písmenom k a jej stred je označený písmenom S (začiatočným písmenom slova stred). Spojnice stredu kružnice s jednotlivými bodmi kružnice, nazývame **polomermi** kružnice. Všetky polomery kružnice sú rovnako dlhé; **dĺžka polomeru** (voláme ju stručne p o l o m e r o m) kružnice sa veľmi často značí písmenom r. Je to začiatočné písmeno latinského slova **rádius**, ktoré znamená práve polomer.



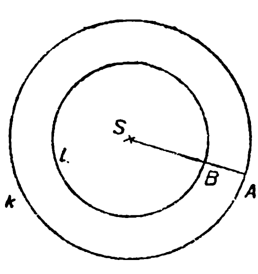
Obr. 10.

Všetky body kružnice k majú od stredu S kružnice k rovnakú vzdialenosť r. Aké vzdialenosti so zreteľom k polomeru majú od stredu S body vo vnútri k? Aké vzdialenosti so zreteľom k polomeru majú od stredu S body, ktoré sú mimo kružnice k?

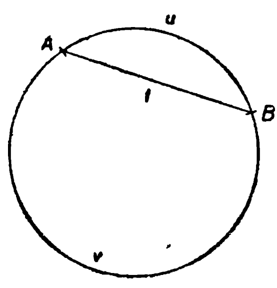
Kružnicu rysujeme **kružidlom.** Keď máme narysovať kružnicu, ktorá má daný polomer r a stred v danom bode S, najprv roztvoríme kružidlo tak, aby kovový hrot a hrot ceruzy maly vzdialenosť r. Prv než začneme rysovať, presvedčíme sa, či sme kružidlo správne roztvorili. (Je to dôležité najmä vtedy, keď je polomer veľmi malý alebo veľmi veľký.) Keď sme kružidlo správne roztvorili, zapichneme jemne kovový hrot do stredu S a rysujeme pravou rukou pomaly jedným ťahom celú kružnicu. Kružidlo je pri rysovaní veľmi mierne naklonené vo smere rysovania, obyčajne rysujeme vo smere pohybu hodinových ručičiek. Hrot kružidla je v bode S len jemne zapichnutý, nesmie teda prepichnúť papier. Aby kružidlo nevykĺzlo, môžeme ho pri bode S zľahka pridržovať ľavou rukou. Pravá ruka drží kružidlo hore (za hlavicu); musíme totiž dbať, aby sme zachovali pevné roztvorenie ramien.

Na obr. 11 sú dve **sústredné** kružnice k a l. Plocha medzi obidvoma sústrednými kružnicami sa volá **medzikružie.** Medzikružie má všade rovnakú **šírku** ($\overline{AB}$ na obr. 11). Ako sa vypočíta šírka medzikružia?

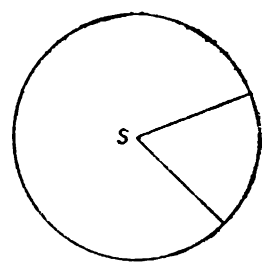
Kružnica sa **sostrojuje** alebo sa **rysuje.**



Obr. 11.



Obr. 12.



Obr. 13.

Keď na kružnici zvolíme dva body A a B, rozdelí sa kružnica na dva **oblúky** (u a v na obr. 12). Úsečka AB sa volá **tetiva** (t na obr. 12). K jednému oblúku patrí jediná tetiva, k jednej tetive patria dva oblúky. Odkiaľ sú vzaté názvy oblúk a tetiva? Kruh je tetivou rozdelený na dve plochy, ktoré sa volajú **kruhové úseky.**

Tiež dvoma polomermi môžeme kruh rozdeliť na dve plochy (viď obr. 13). Tieto plochy nazývame **kruhovými výsekmi.**

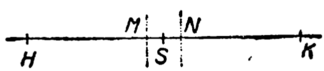
Tetiva, ktorá prechádza stredom, volá sa **priemer.** Všetky priemery kružnice sú rovnako dlhé. **Dĺžka priemeru** (stručne hovoríme priemer) sa často označuje písmenom d. Je to začiatočné písmeno gréckeho slova diametros, ktoré znamená priemer.

Platí $$d = 2r,\ r = \tfrac{1}{2}d,$$

t. j. priemer je dvojnásobkom polomeru, polomer je polovicou priemeru.

Priemer rozdelí kruh na dva **polkruhy.** Koncové body priemeru rozdelia kružnicu na dve **polkružnice.**

Keď máme sostrojiť kružnicu **nad priemerom** HK, musíme najprv úsečku HK **rozpoltiť** alebo, ako sa hovorí, nájsť jej **stred** S; ten bude stredom kružnice. Rozpoltiť úsečku môžeme **skusmo.** Vyznačíme si najprv bod M, ktorý sa nám od oka zdá ako stred úsečky HK a nanesieme $\overline{KN} = \overline{HM}$ (na obr. 14). Úsečka MN bude veľmi krátka (oveľa kratšia ako na obr. 14) a ľahko už nájdeme od oka jej stred S, ktorý je súčasne stredom úsečky HK. Vysvetlite prečo.



Obr. 14.

Priečky, označujúce body M a N (bodkované na obr. 14), rysujeme veľmi tenké a veľmi krátke, aby ich bolo sotva vidno. Prirodzene, nepopisujeme ich. (Na obr. 14 sú tieto body len pre porozumenie výkladu označené písmenami.)

Keď je dĺžka priemeru vyjadrená číselne, vtedy polomer nezisťujeme od oka alebo rysovaním, ale ho vypočítame.

Iný spôsob, ako rozpoltiť úsečku HK, je tento. Priložíme priamy prúžok papiera k danej úsečke a vyznačíme si body, ktoré sa kryjú s bodmi H a K. Potom prúžok v polovici složíme tak, aby sa oba vyznačené body kryly. Preložený prúžok papiera potom znovu priložíme v pôvodnej polohe k úsečke HK a vyznačíme si ten bod S, kde bol papier složený.

Prenášanie úsečiek pomocou prúžku papiera sme popísali v § 2. Okrem prúžku papiera môžeme k tomu istému cieľu použiť i kružidlo. Sami popíšte ako. S tým súvisí malá úprava rozpoltenej úsečky (viď obr. 14). Roztvoríme kružidlo na dĺžku, ktorá tvorí asi polovicu dĺžky HK a narysujeme s týmto polomerom malé oblúčky zo stredov H a K. Tak dostaneme zasa body M a N a kratučkú úsečku MN znovu skusmo rozpoltíme.

Rozdelili by ste úsečku skusmo na tri rovnaké diele?

Zapamätajte si ešte toto: Keď máte narysovať kružnicu, ktorá nemá stred v danom bode, ale ktorý si máte zvoliť ľubovoľne, vždy si najprv vyznačte stred. Stáva sa totiž často, že pri rysovaní ďalších čiar musíme poznať polohu stredu.

Cvičenie k § 3.

25. Zapíšte do slovníčka: Kružnica a kruh. Stred kružnice. Polomer r a priemer d. Polkružnica a polkruh. Oblúk, tetiva a kruhový úsek. Bod vo vnútri kružnice; bod na kružnici, bod mimo kružnice. Stred úsečky. Rozpoltiť úsečku. Sústredné kružnice. Medzikružie. Šírka medzikružia. Kruhový výsek.

26. Aký je priemer kružnice, keď je polomer:
a) 4 cm; b) 9 mm; c) 47 mm; d) 32 mm; e) 1,5 cm; f) 6,3 cm; g) 5 dm; h) 2 m 5 dm?

27. Aký je polomer kružnice, keď je priemer:
a) 6 cm; b) 48 cm; c) 54 mm; d) 3,6 mm; e) 7 cm; f) 43 mm; g) 5 dm; h) 1 m; i) 3 m 4 cm?

28. Zvoľte bod S a sostrojte tri sústredné kružnice s polomermi 3 cm, 4 cm, 53 mm. Neprepichli ste papier v bode S? Narysujte bodom S priamku $ABCSDEF$. (Body A, B atď. sú na sostrojených kružniciach.) Vypočítajte (zpamäti), aké veľké musia byť vzdialenosti

$$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CS}, \overline{SD}, \overline{DE}, \overline{EF}.$$

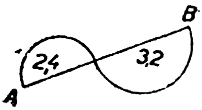
Zapíšte a premerajte. Opakujte meranie s inou voľbou priamky. (Rysujte ju, pravda, zasa stredom S.)

V úlohách 29 až 33 máte sostrojiť obrazce takého tvaru, aké sú v učebnici, ale väčšie. Veľkosť vašich obrazcov je predpísaná číslami, udanými pri obrazcoch v knihe. Udané miery rozumieme v centimetroch, ale znak cm je vynechaný. Stručne hovoríme, že na obr. 15 až 19 **jednotkou je 1 cm.**

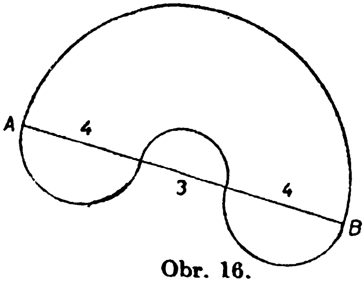
Pri každej z týchto úloh si vypočítajte dĺžku $\overline{AB}$ a kontrolujte ju meraním vo svojom obrazci.

30.

29.

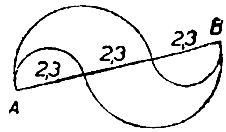


Obr. 15.



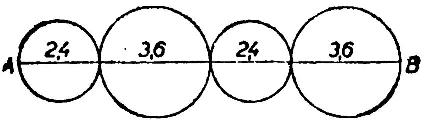
Obr. 16.

31.



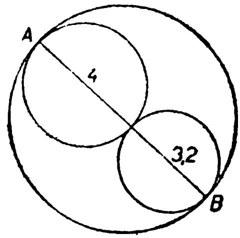
Obr. 17.

32.



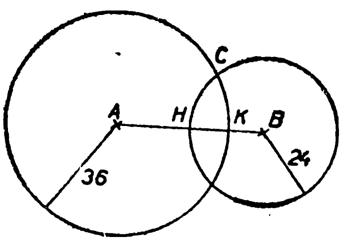
Obr. 18.

33.



Obr. 19.

34. Sostrojte medzikružie o šírke 27 mm tak, aby priemer kružnice bol 42 mm. Presvedčte sa meraním, že vaše medzikružie má všade správnu šírku. Narysujte stredom S priamku $ABSCD$. (Body A, B, C, D sú na sostrojených kružniciach.) Aké dlhé musia byť úsečky AC a BD? Zapíšte a premerajte.



Obr. 20.

35. Sostrojte dve kružnice tak, aby vzdialenosť stredov bola presne 5 cm. Prvá kružnica má mať polomer 3 cm, druhá 4 cm. Narysujte spoločnú tetivu AB. Zmerajte $\overline{AB}$ a zapíšte, čo ste namerali.

Úlohy 36 a 37 sa vzťahujú na obr. 20, v ktorom je jednotkou 1 mm.

36. Aká musí byť dĺžka $\overline{AB}$, aby bolo $\overline{HK} = 14$ mm? Aký bude potom obvod trojuholníka ABC? Sostrojte.

37. Aká musí byť dĺžka $\overline{HK}$, aby trojuholník ABC mal obvod 11 cm? Sostrojte.

38. Narysujte kružnicu k zo stredu S s polomerom 27 mm. Zvoľte si štyri body A, B, C a D na kružnici k. Sostrojte zo stredu A, B, C a D

kružnice tak, aby prechádzaly bodom S. Aké veľké musia byť ich polomery?

39. Zvoľte si bod A a narysujte ním kružnicu k s polomerom 5 cm. (Ako si teda musíte zvoliť stred S kružnice k?) Nájdite na kružnici k body B a C tak, aby obe tetivy AB a AC maly dĺžku presne 8 cm. Sostrojte priemer AD kružnice k. Odmerajte tetivy DB a DC a zapíšte, čo ste namerali.

40. Zvoľte si trojuholník ABC (dostatočne veľký). Nájdite stred H strany AB a stred K strany AC. Označte P priesečník priamok CH a BK. Odmerajte dĺžky $\overline{PB}$, $\overline{PK}$, $\overline{CP}$, $\overline{PH}$. Zistili ste, či $\overline{BP} = 2 \,.\, \overline{PK}$, $\overline{CP} = 2 \,.\, \overline{PH}$?

41. Opakujte cvičenie 5, 16 a 17 (str. 9), ale nepoužívajte prúžok papiera, ale kružidlo.

§ 4. Konštrukcia trojuholníka.

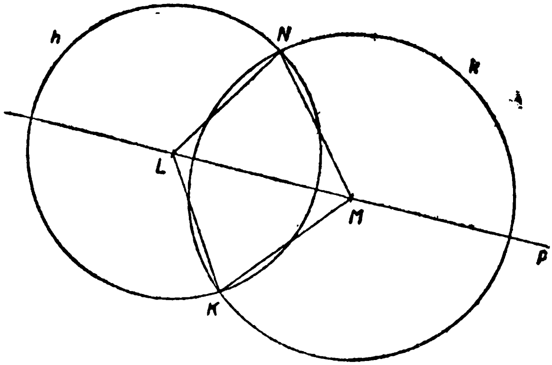
Slovo **konštrukcia** pochádza z latiny. V geometrii sa ho často užíva. Znamená s o s t r o j e n i e.

Sostrojíme trojuholník LMN tak, aby jeho strany maly dĺžky

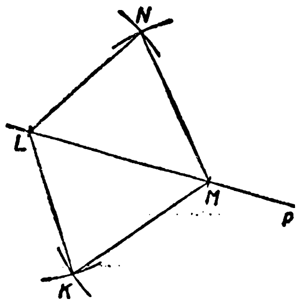
$$\overline{LM} = 6\,\text{cm},\ \overline{LN} = 48\,\text{mm},\ \overline{MN} = 53\,\text{mm}.$$

Narysujte najprv (asi uprostred sošita) priamku p a na nej dva body L a M, vzdialené od seba 6 cm. Máte už dva vrcholy L a M a jednu stranu LM trojuholníka LMN. Kde musí byť tretí vrchol N? Pretože má byť $\overline{LN} = 48$ mm, musí bod N ležať na kružnici h, narysovanej zo stredu L polomerom 48 mm. Sostrojte kružnicu h. Pretože má byť $\overline{MN} = 53$ mm, musí bod N ležať na kružnici k, narysovanej zo stredu M polomerom 48 mm. Sostrojte kružnicu k. Kružnice h a k sa pretnú vo dvoch bodoch. Zvoľte a označte jednu z nich N. Narysujte úsečky LN a MN a máte žiadaný trojuholník LMN. Úlohu splňuje nielen trojuholník LMN, ale i trojuholník LMK, ktorý dostanete, keď namiesto bodu N vezmete druhý priesečník K kružníc h a k.

Obyčajne nerysujeme v tejto úlohe celé kružnice h a k ako na obr. 21a, ale iba malé oblúky v blízkosti priesečníkov, ako má obr. 21b.



Obr. 21a.

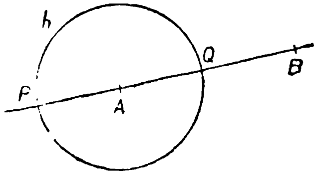


Obr. 21b.

Teraz si narysujte na list papiera trojuholník ABC s takými veľkými stranami, aké má trojuholník ABC v učebnici na obr. 8 (str. 8). Nepoužívajte číselných hodnôt dĺžok strán, ale dĺžky prenášajte z obr. 8 kružidlom. Urobte to celkom tri razy. Najprv začnite konštrukciu so stranou AB, potom so stranou BC a napokon so stranou CA. Miesto voľte tak, aby vaše trojuholníky nezasahovaly jeden do druhého. Vystrihnite si všetky tri trojuholníky a presvedčte sa, že ich môžete položiť na seba tak až sa presne kryjú. Presvedčte sa tiež, že každým vystrihnutým trojuholníkom sa dá presne zakryť trojuholník ABC z učebnice.

Narysujte si v sošite úsečku AB, 58 mm dlhú. Budeme sa teda zaujímať o trojuholníky ABC, ktoré majú dva vrcholy A a B všetkým spoločné. Strana AB bude mať pri všetkých našich trojuholníkoch rovnakú dĺžku $\overline{AB} = 58$ mm. Ale tiež strana AC bude pri všetkých trojuholníkoch, o ktoré sa budeme zaujímať, rovnako dlhá a to $\overline{AC} = 27$ mm. Naproti tomu dĺžka $\overline{BC}$ sa bude od trojuholníka k trojuholníku meniť.

Kde musí ležať vrchol C? Pretože poznáme bod A a pritom má byť $\overline{AC} = 27$ mm, musí bod C ležať na kružnici h so stredom A



Obr. 22.

a s polomerom 27 mm. Narysujte si kružnicu h. Priamka AB pretne kružnicu h v dvoch bodoch. Označte ich P a Q ako na obr. 22. (Teda Q je bližšie k B, ako je P.) Môžeme si zvoliť bod C ľubovoľne na kružnici h?

Nie celkom, pretože bod C nesmie prejsť ani do polohy P, ani do polohy Q. Ináč je poloha bodu C na kružnici h ľubovoľná.

Body P a Q rozdelia h na dve polkružnice. Sledujte pohyb bodu C po jednej z týchto polkružníc od polohy Q do polohy P. Presvedčte sa meraním, že dĺžka BC stále vzrastá. Presvedčte sa, že je to tiež pravda, keď sa bod C pohybuje po druhej polkružnici od polohy Q do polohy P. Teda či si už zvolíme bod C v ktorejkoľvek dovolenej polohe, rozhodne bude dĺžka BC väčšia ako BQ a menšia ako $\overline{BP}$, čo píšeme

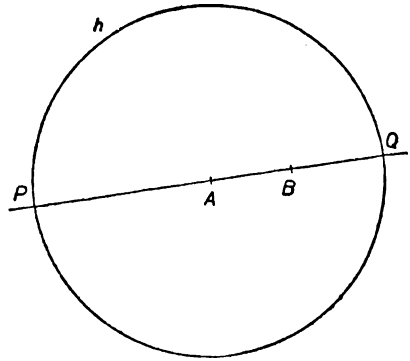
$$\overline{BC} > \overline{BQ}, \overline{BC} < \overline{BP}.$$

Z obrazca vidíte, že

$$\overline{BQ} = \overline{AB} - \overline{AQ} = 31 \text{ mm}, \overline{BP} = \overline{AB} + \overline{AP} = 85 \text{ mm}.$$

Teda dĺžka $\overline{BC}$ strany BC trojuholníka ABC je p o p r v é menšia ako súčet 85 mm dĺžok strán AB a AC a p o d r u h é je BC väčšia ako rozdiel 31 mm dĺžok strán AB a AC. V týchto medziach si môžeme dĺžku BC ľubovoľne zvoliť. Teda nemôžeme si zvoliť ani $\overline{BC} = 3$ cm (je to príliš málo), ani $\overline{BC} = 9$ cm (je to príliš mnoho), ale môžeme si zvoliť napr. $\overline{BC} = 5$ cm.

Naše číselné údaje boly $\overline{AB} = 58$ mm, $\overline{AC} = 27$ mm, teda $\overline{AB} > \overline{AC}$. Zvoľme si teraz opačne $\overline{AB} = 27$ mm, $\overline{AC} = 58$ mm, teda $\overline{AB} < \overline{AC}$. Dostaneme trochu iný obrazec (viď obr. 23), ale prídeme zasa tou istou cestou k rovnakému výsledku. U r o b t e t o p o d r o b n e. Preberte tiež p o d r o b n e prípad, kedy $\overline{AB} = \overline{AC}$, napr. $\overline{AB} = 45$ mm, $\overline{AC} = 45$ mm.



Obr. 23.

Povieme si výsledok, ktorý si musíme dobre zapamätať. (Precvičíme si ho na niekoľkých príkladoch.) *Dĺžky všetkých troch strán trojuholníka si nesmieme zvoliť celkom ľubovoľne. Môžeme si zvoliť ľubovoľne dĺžky dvoch strán. Dĺžka tretej strany nesmie byť ani príliš veľká, ani príliš malá. Tretia strana musí byť kratšia, ako súčet prvých dvoch strán. Tretia strana musí byť dlhšia, ako rozdiel prvých dvoch strán. V týchto medziach sa môže ľubovoľne zvoliť tiež dĺžka tretej strany.*

Trojuholník, ktorý má všetky tri strany *nerovnako* dlhé, volá sa **rôznostranný.**

Keď sú dve strany trojuholníka rovnako dlhé, hovoríme, že je to trojuholník **rovnoramenný.** Tým dvom stranám, ktoré sú rovnako dlhé, hovoríme najčastejšie **ramená** a tretia strana sa potom volá **základňa.**

Trojuholník, ktorý má všetky tri strany rovnako dlhé, volá sa trojuholník **rovnostranný.**

Cvičenie k § 4.

42. Zapíšte do slovníčka: Konštrukcia znamená sostrojenie. Rôznostranný trojuholník. Rovnoramenný trojuholník, ramená, základňa. Rovnostranný trojuholník. 17 $<$ 24 znamená, že číslo 17 je menšie ako číslo 24. 24 $>$ 17 znamená, že číslo 24 je väčšie ako číslo 17.

43. Opíšte tieto trojice dĺžok:

a)	24 mm,	37 mm,	41 mm.	b)	24 mm,	47 mm,	7 cm.
c)	24 mm,	57 mm,	90 mm.	d)	34 mm,	21 mm,	12 mm.
e)	1 dm,	2 cm,	3 mm.	f)	1 dm,	74 mm,	26 mm.

Pri každej trojici zapíšte, či môže znamenať dĺžky troch strán trojuholníka. (Píšte iba Áno alebo Nie.)

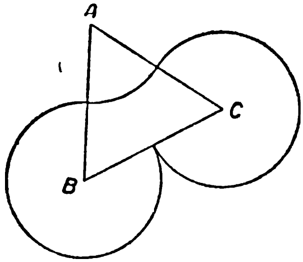
44. Dve strany trojuholníka majú dĺžky 97 mm a 46 mm. Dĺžku tretej strany nepoznáme. Čo môžete povedať o obvode trojuholníka?

45. Opakujte s dĺžkami 4 m 37 cm a 6 m 58 cm.

46. Opíšte tieto dvojice dĺžok:

a) 37 cm, 57 cm.	b) 42 cm, 35 cm.
c) 5 dm, 32 cm.	d) 47 cm, 3 dm.
e) 1 dm, 368 mm.	f) 83 mm, 125 cm.

Pri každej dvojici skúmajte, či môže znamenať dĺžky dvoch strán trojuholníka s obvodom 1 m. (Zapíšte len alebo dĺžku tretej strany, alebo slovo Nie.)



Obr. 24.

Obr. 25.

47. Zvoľte si ľubovoľný trojuholník ABC. Sostrojte rovnostranné trojuholníky ABH, BCK, CAL tak, aby nezasahovaly do trojuholníka ABC. Spojte CH, AK, BL a zapíšte, čo pozorujete. Odmerajte $\overline{CH}$, $\overline{AK}$, $\overline{BL}$ a zapíšte, čo pozorujete

48. Opakujte znovu s tým rozdielom, že teraz rovnostranné trojuholníky ABH, BCK, CAL budú zasahovať do trojuholníka ABC.

49. Sostrojte obrazec podobný obr. 24. Trojuholník ABC je rovnostranný. Na obr. sú oblúky kružníc, ktoré majú mať všetky polomer 26 mm.

50. Zvoľte dĺžku $\overline{AB} = 42$ mm. Sostrojte všetky rovnoramenné trojuholníky so základňou AB a s dĺžkou ramena 34 mm. Sostrojte ďalej všetky rovnoramenné trojuholníky s dĺžkou základne 34 mm, ktoré majú jedno rameno v polohe AB. Koľko trojuholníkov budete celkom sostrojovať?

51. Opakujte úlohu 50, ale vymeňte medzi sebou dĺžky 42 mm a 34 mm.

52. Zvoľte dĺžku $\overline{AB} = 4$ cm. Kde musí ležať stred kružnice s polomerom 3 cm, ak má táto kružnica prechádzať obidvoma bodmi A a B? Koľko je takýchto kružníc? Sostrojte ich.

53. Sostrojte obrazec, podobný obr. 25. Má byť $\overline{HK} = 32$ mm, dve kružnice majú mať polomer 32 mm a tretia má mať polomer 43 mm.

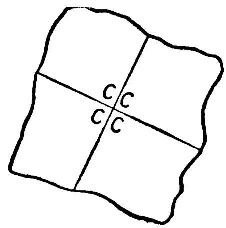
§ 5. Rysovanie kolmíc.

Vezmite list papiera. Môžete si na ňom ľahko urobiť celkom presnú priamku bez ceruzy a bez lineára. Stačí, keď papier ostro prehnete. Presvedčte sa lineárom, že ste naozaj dostali priamku. Označte si ju p.

Teraz složte papier znovu, ale tak, aby sa vám časť priamky p, ktorá je na hornom papieri, presne kryla s tou časťou priamky p, ktorá je na dolnom papieri. Dostali ste novú priamku, ktorú označte q. Keď sme papier preložili pozdĺž priamky q, mali sme presne nad sebou dve časti priamky p. Presvedčte sa, že tiež opačne, keď složíte papier pozdĺž priamky p, budete mať presne nad sebou dve priamky q. Dve priamky, ktoré sú v takej polohe ako priamky p a q, volajú sa **priamky navzájom kolmé.** Hovorí sa tiež, že priamky p a q **stoja na sebe kolmo.** Stručne sa to zapisuje takto:

$$p \perp q \text{ alebo } q \perp p.$$

Priesečník priamok p a q označte písmenom C. Napíšte C štyri razy ako je na obr. 26. Teraz rozstrihnite papier pozdĺž priamky p i pozdĺž priamky q. Dostanete štyri kusy papiera, ktoré môžete položiť na seba tak, že sa v blízkosti bodu C všetky presne kryjú. Urobte to. Hovoríme, že máme štyri **pravé uhly.** Bod C je **vrcholom** týchto pravých uhlov.



Obr. 26.

Vezmite nový list papiera a urobte si na ňom prehnutím priamku a. Prepichnite papier vo dvoch bodoch: v bode B, ktorý si zvoľte na priamke a, v bode C, ktorý si zvoľte mimo priamky a. Prehnutím papiera si ľahko urobíte dve priamky kolmé na priamku a tak, že prvá z nich (označte ju b) prechádza bodom B a druhá (označte ju c) prechádza bodom C. Priamka c pretne priamku a v bode, ktorý označte P. Hovoríme, že sme

vztýčili v bode B kolmicu b na priamku a a že sme

spustili s bodu C kolmnicu c na priamku a.

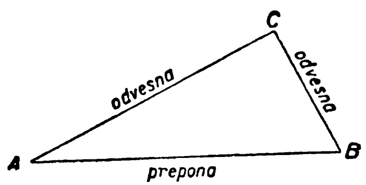
Bod P sa volá **päta** kolmice, spustenej s bodu C na priamku a. Prečo práve päta?

Keď trojuholník ABC má dve strany AC a BC na seba kolmé (viď obr. 27), hovoríme, je že to **trojuholník pravouhlý.** Strana AB, teda tá strana, ktorá je oproti pravému uhlu, volá sa **prepona** pravouhlého trojuholníka. Strany AC a BC, teda tie strany, ktoré sú pri pravom uhle, volajú sa **odvesny** pravouhlého trojuholníka.

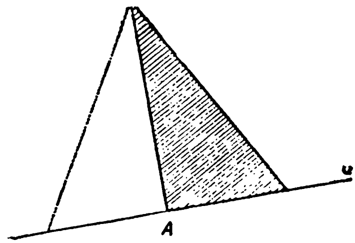
Váš trojuholníkový lineár je pravouhlý a dá sa teda použiť k rysovaniu kolmíc. Keď máme napr. na priamke a vztýčiť kolmicu v bode A, ktorý sme si zvolili na priamke a, môžeme to vykonať tak (viď obr. 28), že priložíme trojuholníkový lineár tak, aby vrchol pravého uhla bol v polohe A a aby sa jedna odvesna kryla s priamkou a. Žiadanú kolmicu potom môžeme rysovať pozdĺž druhej odvesny.

Dôležité je vyskúšať si, či váš lineár je skutočne pravouhlý. Preto priložte lineár ešte raz v polohe, naznačenej na obr. 28 bodkovanou čiarou a rysujte kolmicu znovu. Keď máte lineár správny, musia obe kolmice splynúť. Kto nemá na svojom lineáre presný pravý uhol, musí si kúpiť nový lineár.

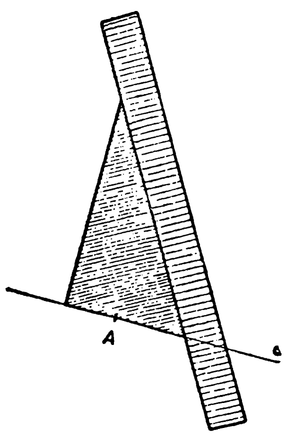
Popísaný spôsob vztyčovania kolmíc je síce jednoduchý, ale má tú chybu, že práve v blízkosti päty musíme kolmicu predlžovať, čo



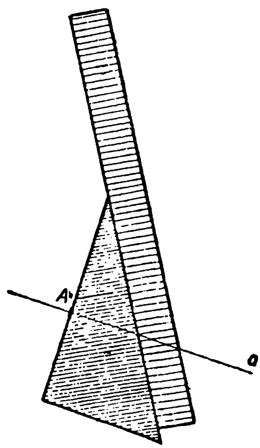
Obr. 27.



Obr. 28.

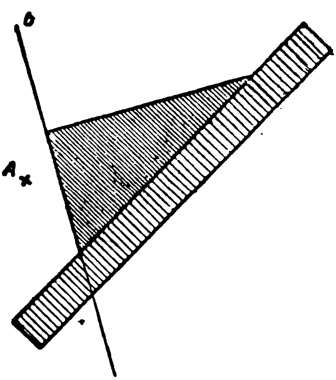


Obr. 29a.

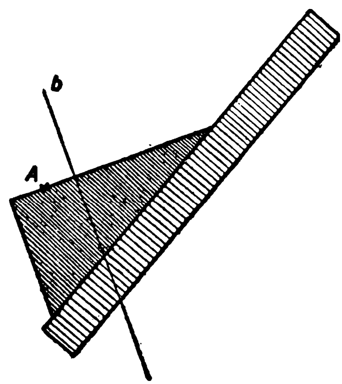


Obr. 29b.

je na úkor presnosti. Preto nebudeme tento spôsob vôbec používať a precvičíme si iný spôsob, ktorý je len o niečo složitejší. Potrebujeme k nemu okrem trojuholníkového lineára s presným pravým uhlom ešte **pomocný lineár,** ktorý nemusí (ale môže) byť trojuholníkový. Keď máme opäť v bode *A*, ktorý sme si zvolili na priamke *a*, vztýčiť na túto priamku kolmicu, umiestime trojuholníkový lineár tak, ako je na obr. 29a. Pozor, aby sa jedna odvesna skutočne presne kryla s priamkou *a*! Potom pridržíme trojuholníkový lineár pevne ľavou rukou a pravou pri-



Obr. 30a.



Obr. 30b.

sunieme k prepone pomocný lineár. Pravou rukou potom pridržíme pevne pomocný lineár a ľavou posunujeme zľahka trojuholníkový lineár až do polohy, v ktorej (viď obr. 29b) druhá odvesna prechádza bodom *A*. Potom pritisneme trojuholníkový lineár pevne ľavou rukou, pravú ruku uvoľníme*) a rysujeme žiadanú kolmicu. Podobne si počíname (viď obr. 30), keď máme s bodu *A* spustiť kolmicu na priamku *b*.

Zvoľte si priamku *b* a mimo nej bod *A*. Spusťte s bodu *A* kolmicu na priamku *b* a jej pätu označte *P*. Odmerajte vzdialenosť $\overline{AP}$. Zvoľte si na priamke *b* ešte aspoň tri body *B, C, D* a presvedčte sa, či dĺžky *AB, AC, AD* sú väčšie ako dĺžka $\overline{AP}$. Päta kolmice,

*) Teda najprv pritisneme ľavou rukou a až potom uvoľníme pravú. Prečo?

spustenej s bodu A na priamku b, je zo všetkých bodov priamky b najbližšie k bodu A. Preto dĺžka $\overline{AP}$ volá sa **vzdialenosť bodu A od priamky b**.

Každá odvesna pravouhlého trojuholníka je kratšia ako prepona. Prečo?

Cvičenie k § 5.

54. Zapíšte do slovníčka: $a \perp b$ znamená, že priamky a a b stoja na sebe kolmo. Vztýčiť kolmicu na priamku p v bode H. Spustiť kolmicu na priamku p s bodu K. Päta kolmice. Prepona a odvesny pravouhlého trojuholníka. Priamky navzájom kolmé tvoria štyri pravé uhly. Vzdialenosť bodu od priamky. Vrchol pravého uhla.

55. Zvoľte priamku $ABCD$ a vo všetkých štyroch bodoch A, B, C a D vztýčte na ňu kolmice. Majú všetky vaše kolmice rovnaký smer?

56. Opakujte cvičenie 55 pri inej polohe priamky $ABCD$.

57. Zvoľte priamku p a mimo nej štyri body A, B, C a D tak, aby priamka p oddeľovala body A a B od bodov C a D. So všetkých štyroch bodov A, B, C a D spusťte na priamku p kolmice. Majú všetky vaše kolmice rovnaký smer?

58. Opakujte cvičenie 57 pri inej polohe priamky p.

59. Zvoľte si dve priamky a a b a mimo nich bod C. Zmerajte vzdialenosti bodov C od priamok a a b.

60. Sostrojte si rovnostranný trojuholník ABC so stranou 4 cm. Zvoľte si dva body P a Q v trojuholníku ABC. Sostrojte vzdialenosti bodu P od všetkých strán trojuholníka ABC a všetky tri vzdialenosti graficky sčítajte. To isté urobte s bodom Q. Keď ste presne rysovali, musia sa oba vaše súčty rovnať. Presvedčte sa.

61. Zvoľte si dva body H a K (dostatočne vzdialené od seba). Bodom H narysujte dve ľubovoľné priamky a a b. Spusťte na ne kolmicu s bodu K. Päty týchto kolmíc označte A a B. Bodom K narysujte ľubovoľnú priamku c. Spusťte na ňu kolmicu s bodu H. Pätu tejto kolmice označte C. Napokon sostrojte kružnicu nad priemerom HK. Zapíšte, čo pozorujete.

62. Zvoľte si bod S a narysujte ním tri ľubovoľné priamky. Na prvú z nich naneste $AS = \overline{SB} = 35$ mm, na druhú $\overline{CS} = \overline{SD} = 35$ mm, na tretiu $\overline{ES} = \overline{SF} = 35$ mm. V bodoch A a B vztýčte kolmice na priamku AB. V bodoch C a D vztýčte kolmice na priamku CD. V bodoch E a F vztýčte kolmice na priamke EF. Potom sostrojte zo stredu S kružnicu s polomerom 35 mm. Zapíšte, čo pozorujete.

63. Zvoľte si kružnicu k (dostatočne veľkú) a na nej štyri body A, B, C a D. S bodu D spusťte kolmice: na priamku AB, na priamku BC

a na priamku CA. Päty týchto kolmíc označte X, Y a Z. Sostrojte spojnicu bodov X a Y. Zapíšte, čo pozorujete.

Každú z úloh 64 a 66 narysujte na osobitnom liste papiera (dosť veľkom). Potrebné priamky si urobte prehnutím papiera. Ceruzu používajte v týchto úlohách len na označenie a popis bodov. Kružnicu v úlohe 66, pravda, narysujte kružidlom.

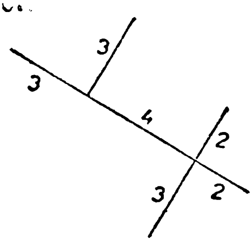
64. Urobte bez lineára úlohu 6 (str. 6).

65. Urobte bez lineára úlohu 7 (str. 6).

66. Urobte bez lineára úlohu 63.

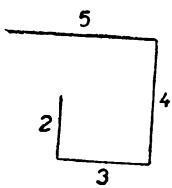
V úlohách 67 až 69 máte sostrojiť obrazce podľa obrazcov v učebnici. Jednotka 1 cm. V úlohe 69 je $CH \perp AB$, $BK \perp AC$, $AL \perp BC$.

67.



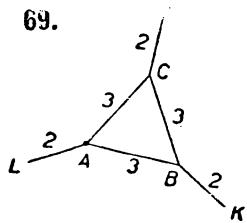
Obr. 31.

68.



Obr. 32.

69.



Obr. 33.

§ 6. Rysovanie rovnobežiek.

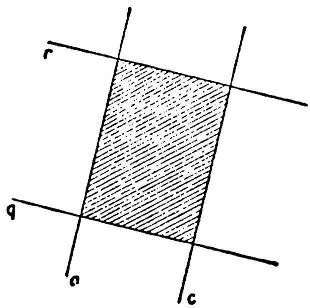
Vezmite list papiera a prehnutím si urobte priamku p. Ďalším prehýbaním papiera si urobte tri priamky kolmé na priamku p a označte ich a, b a c. Voľte ich tak, aby b bola medzi a a c. Hovoríme, že priamky a, b a c sú **navzájom rovnobežné** alebo že sú to **rovnobežky**. Keď chceme stručne zapísať, že priamky a a c sú navzájom rovnobežné, píšeme

$$a \parallel c \text{ alebo } c \parallel a.$$

Priamka p stojí kolmo na c. Urobte si prehnutím papiera ešte dve kolmice na priamku c a označte ich q a r. Voľte ich tak, aby p bola medzi q a r. Tiež priamky p, q a r sú navzájom rovnobežné. Všimnite si, že je napr. $a \perp q$. Ako sa o tom presvedčíte?

Zapíšte (značkou $\parallel$) všetky páry rovnobežiek. Zapíšte (značkou $\perp$) všetky páry kolmíc. Spolu musíte mať šesť párov rovnobežiek a deväť párov kolmíc.

Pruh, ohraničený dvoma rovnobežkami, napr. priamkami *a* a *c*, sa volá **priamy pás.** Pozorujte, že takýto pás má všade rovnakú šírku, ktorá sa tiež volá **vzdialenosť rovnobežiek** *a* a *c*. Túto šírku môžeme merať na každej spoločnej kolmici. Premerajte na kolmiciach *p*, *q* a *r*. Premerajte šírku pásu, ohraničeného rovnobežkami *q* a *r*. Ľubovoľný bod priamky *a* má od priamky *c* vzdialenosť, rovnajúcu sa vzdialenosti rovnobežiek *a* a *c*.



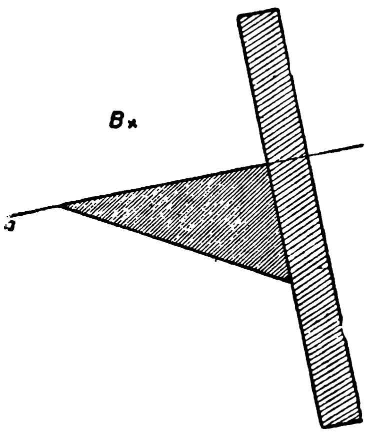
Obr. 34.

Plocha, ohraničená priamkami *a*, *c*, *q* a *r*, sa volá **obdĺžnik** (viď obr. 34). Vystrihnite si ho. Priamky *b* a *p* ho rozdeľujú na štyri menšie obdĺžniky (na obrazci nevyznačené).

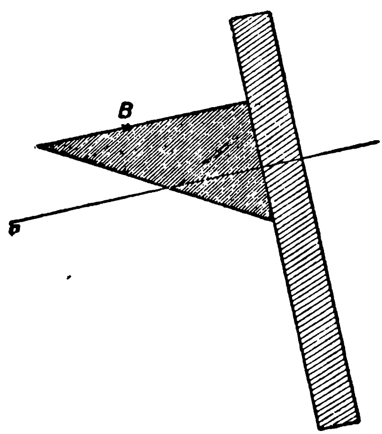
Obdĺžnik budeme neskoršie preberať podrobne.

Zvoľte si v sošite priamku *a* a mimo nej bod *B*. Bodom *B* prechádza jediná rovnobežka s priamkou *a*.

Aby sme ju narysovali, upotrebíme zasa trojuholníkový lineár a pomocný lineár (viď obr. 35).

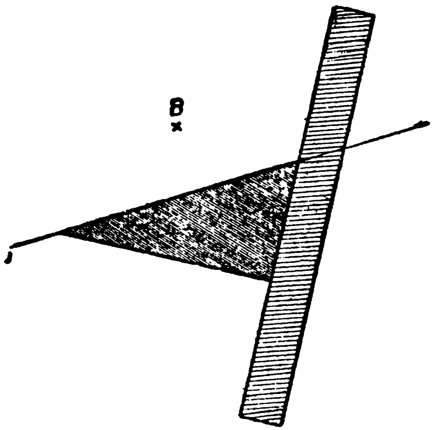


Obr. 35a.

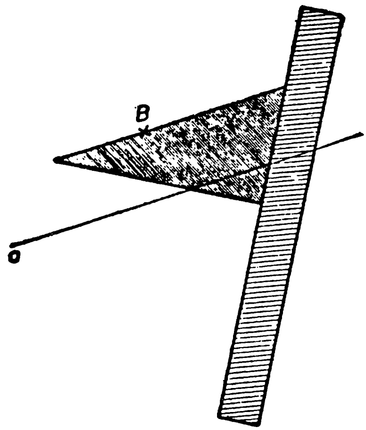


Obr. 35b.

Priložíme trojuholníkový lineár tak, aby sa jedna odvesna kryla s priamkou *a*. Potom ho pridržíme pevne ľavou rukou a pravou pri-sunieme k druhej odvesne pomocný lineár. Pravicou pritisneme pomocný lineár a ľavicou ľahko posunujeme trojuholníkový lineár až do polohy. naznačenej na obr. 35b. Potom pridržíme pevne ľavicou trojuholníkový lineár a rysujeme pozdĺž odvesny (ktorej?) žiadanú rovnobežku.



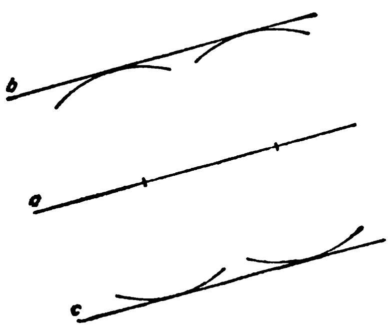
Obr. 36a.



Obr. 36b.

Môžeme rysovať i pozdĺž prepony (viď obr. 36).

Môže sa stať, že vzájomná poloha bodu B a priamky a je taká nepriaznivá, že nemôžeme žiadanú rovnobežku sostrojiť jedným posunutím lineára. Pomôžeme si tak, že prvým posunutím narysujeme rovnobežku c k priamke a, ktorá má priaznivejšiu polohu, a druhým posunutím rovnobežku s priamkou c, ktorá prechádza bodom B. Ale obyčajne nám stačí jedno posunutie, len musíme vhodne položiť lineár.



Obr. 37.

Zvoľte si asi v strede sošitu priamku a. Chceme sostrojiť v sošite obe rovnobežky b a c vo vzdialenosti 19 mm od priamky a. Môžeme to výhodne urobiť s pomocou jedného lineára a kružidla. Narysujte dve kružnice s polomerom 19 mm, ktoré majú stredy na priamke a. Žiadané rovnobežky potom dostaneme, keď priložíme lineár tak, aby sa d o t ý k a l oboch kružníc. Tieto kružnice nerysujte celé, je to zbytočné (viď obr. 37).

Cvičenie k § 6.

70. Zapíšte do slovníčka: $a \parallel b$ znamená, že priamky a a b sú navzájom rovnobežné. Dve rovnobežky ohraničujú priamy pás; vzdialenosť oboch rovnobežiek tvorí šírku pásu. Obdĺžnik.

71. Zvoľte priamku p a mimo nej štyri body A, B, C, a D tak, aby priamka p oddeľovala body A a B od bodov C a D. Každým zvoleným bodom narysujte rovnobežku s priamkou p.

72. Zvoľte si body S, A, B, C, D. Rysujte rovnobežky s priamkami SA a SB najprv bodom C, potom bodom D.

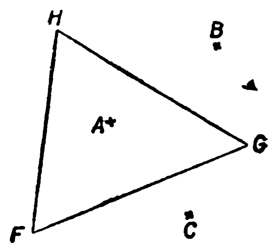
73. Opakujte úlohu 72 v inej polohe.

74. Zvoľte si dve rovnobežky (dostatočne vzdialené od seba) a presvedčte sa meraním na štyroch miestach, že sú všade rovnako od seba vzdialené.

75. Zvoľte si priamku a. Rysujte rovnobežky b, c, d a e s priamkou a tak, aby priamka a oddeľovala priamky b a c od priamok d a e; vzdialenosti priamok b, c, d a e od priamky a nech sú: 24 mm, 4 cm, 14 mm, 36 mm. Aká je vzdialenosť b od d, vzdialenosť b od e, vzdialenosť c od e? Premerajte tieto vzdialenosti (každú na inej kolmici).

76. Opakujte cvičenie 21 (str. 10) a pozorujte, či sa vám zdajú niektoré priamky v obrazci rovnobežné. Presvedčte sa posunutím lineára. Odmerajte vzdialenosti rovnobežiek.

77. Sostrojte rovnostranný trojuholník FGH so stranou 33 mm. Zvoľte si tri body A, B a C asi ako na obr. 38. Rysujte bodom A priamku $a \parallel FH$, bodom B priamku $b \parallel GH$, bodom C priamku $c \parallel FG$. Presvedčte sa meraním, či priamky a, b a c tvoria nový rovnostranný trojuholník.



Obr. 38.

78. Zvoľte si úsečku AB dlhú 5 cm. Určte bod C tak, aby bolo $\overline{AC} =$ 4 cm, $\overline{BC} =$ 63 mm. (Také body C sú dva, ale zvoľte si z nich len jeden.) Nájdite stred S úsečky AB. Rysujte bodom C rovnobežku r s priamkou AB. Na priamke r si určte bod H vo vzdialenosti 25 mm od bodu C. (Takéto body H sú zasa dva. Zvoľte si ten, pre ktorý sa úsečky AC a BH

pretnú.) Bodom S rysujte rovnobežku s priamkou AC a jej priesečník s priamkou r si označte K. Presvedčte sa, že

$$AH \parallel CS \parallel BK$$

a že

$$SH \parallel BC.$$

Odmerajte vzdialenosť rovnobežiek AH a BK. Vychádza všetkým žiakom rovnaká vzdialenosť?

79. Zvoľte si na priamke štyri body A, B, C a D tak, aby vzdialenosti AB, BC a CD boly všetky tri 26 mm. Bodom B si rysujte priamku (ľubovoľne) a určte si na nej bod K, vzdialený 37 mm od bodu B. (Sú dva takéto body K, ale zvoľte si len jeden.) Nájdite stred S úsečky BK a rysujte bodom S rovnobežku s priamkou $ABCD$. Túto rovnobežku si označte r. Všetky tri body A, C a D spojte s bodom K. Priesečníky týchto troch spojníc s priamkou r si označte poporiadku písmenami P, T a U. Odmerajte dĺžky PS, ST, TU. Zapíšte, čo ste namerali.

80. Zvoľte si štvoruholník $ABCD$ (dostatočne veľký). Nájdite stredy všetkých štyroch strán. Označte: H stred strany AB, K stred strany BC, L stred strany CD, M stred strany DA. Rysujte spojnice HK a LM. Ďalej rysujte spojnice HM a KL. Zapíšte, čo pozorujete.

§ 7. Kváder.

Každý predmet, ktorý vidíte v škole, doma alebo vonku, zaujíma určitú časť **priestoru.** V geometrii nás nezaujíma ani materiál, z ktorého je predmet vyrobený, ani jeho váha, teplota, farba a pod. V geometrii sústreďujeme pozornosť iba na časť priestoru, ktorú tento predmet zaujíma. Keď máme na mysli len geometrické vlastnosti predmetu, voláme ho **telesom.**

Väčšina telies má složitý a nepravidelný tvar. Ale sú niektoré jednoduché telesá, ktoré musíme nielen poznať, ale pomenovať a popísať. V tomto paragrafe budeme preberať len najjednoduchší a najčastejšie sa vyskytujúci tvar. Je to tzv. **kváder.** Zo začiatku budeme pri jeho popisovaní užívať školský drevený **model.** Musíte sa s kvádrom dobre soznámiť, aby ste neskoršie vedeli odpovedať na jednoduché otázky i keď nebudete mať model pred sebou a budete odkázaní len na vlastnú predstavu.

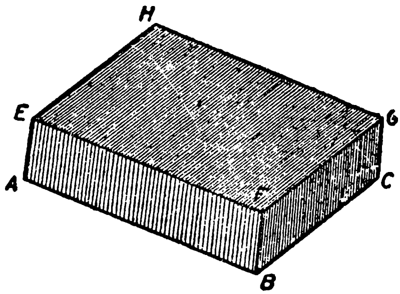
Obr. 39 predstavuje ten istý kváder v troch rozličných polohách.

Každé teleso má **vnútro a povrch**. Do vnútra dreveného modelu nevidíme. Ani povrch nevidíme naraz celý. Musíme meniť polohu kvádra (lebo svoju vlastnú polohu), aby sme uvideli celý povrch.

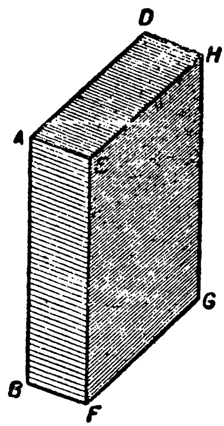
Povrch kvádra sa skladá zo šiestich jednoduchých plôch tvaru **obdĺžnika.** Slovo obdĺžnik už máme v slovníčku. Sú to **steny** kvádra.

Keď model kvádra položíme hoci na stôl, tak tá stena, na ktorej kváder spočíva, volá sa **dolná základňa** kvádra a protiľahlá stena sa volá **horná základňa** kvádra. Obe základne sú celkom rovnaké obdĺžniky. Ostatné štyri steny sa volajú **bočné** steny. Máme teda dve základne a štyri bočné steny, spolu šesť stien.

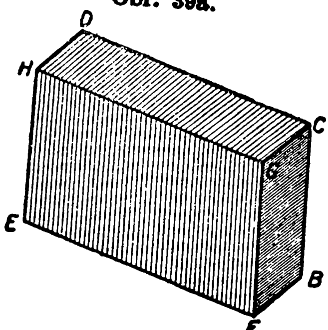
Hrany kvádra sú úsečky. Dolná základňa má štyri hrany, horná základňa ma ďalšie štyri hrany, a potom sú ešte štyri **hrany bočné.** Dovedna má kváder dvanásť hrán.



Obr. 39a.



Obr. 39b.



Obr. 39c.

Vrcholy kvádra sú body. Dolná základňa má štyri vrcholy, horná základňa tiež štyri. Dovedna má kváder osem vrcholov.

Venujme pozornosť jednej strane kvádra. Keď si zvolíme na nej kdekoľvek dva body a spojíme ich úsečkou, leží vždy celá táto úsečka na pozorovanej ploche. Skúšajte to lineárom.

Teraz si všetky úsečky, o ktorých sme práve hovorili, predstavme neobmedzene predĺžené. Vzniknú z nich priamky, ktoré vyplnia plochu, neobmedzenú vo všetkých smeroch. Taká plocha sa volá **rovina.** Dobrý obraz roviny nám predstavuje pokojná vodná hladina rybníka.

Dobre si pamätajte **základnú vlastnosť roviny:**

Keď si zvolíme na nej dva ľubovoľné body a spojíme ich priamkou, celá táto spojnica leží na rovine. Takúto vlastnosť nemá nijaká iná plocha, len práve rovina.

Plocha, ktorá sa dá rozšíriť v rovinu, volá sa **rovná** alebo **rovinná.** Každá iná plocha sa volá **zakrivená.** Pamätajte: čiara je priama alebo krivá, plocha je rovná alebo zakrivená.

Cvičenie k § 7.

81. Zapíšte do slovníčka: Kváder má šesť stien. Kváder má osem vrcholov. Kváder má dvanásť hrán. Kváder je teleso. Rovina. Rovná plocha a zakrivená plocha.

Vaša trieda má tvar kvádra. Tento kváder majte na mysli pri úlohách 82 až 91. Zopakujte si tieto úlohy doma s iným kvádrom, napr. so škatuľou od topánok.

82. Ukážte jeden vrchol kvádra. Koľko stien z neho vychádza? Ukážte ich. Má kváder nejaký vrchol, ktorý neleží ani na jednej z týchto stien? Ukážte.

83. Opakujte úlohu 82 znovu, ale teraz začnite tým vrcholom, ktorým ste prv skončili.

84. Ukážte jeden vrchol kvádra. (Teraz ukážte nejaký iný, než ktorým ste začali v úlohách 82 a 83.) Koľko hrán z neho vychádza? Ukážte ich. Koľko je hrán, ktoré nepretnú ani jednu z ukázaných hrán? Ukážte ich. Odkiaľ vychádzajú?

85. Opakujte úlohu 84 znovu, ale začnite nejakým vrcholom, ktorým ste dosiaľ ešte nezačali, ani neskončili. Koľko je takýchto vrcholov?

86. Ukážte jednu hranu kvádra. Ukážte steny, ktoré z nej vychádzajú. Má kváder nejakú hranu, ktorá je celá (i so svojimi vrcholmi) okrem každej z ukázaných stien? Ukážte.

87. Ukážte znovu obe hrany z úlohy 86: tú, ktorou ste začali, i tú, ktorou ste skončili. Uvažujte o jednotlivých stenách kvádra a všímajte si pri každej stene, v akej je polohe k tým dvom hranám. Rozdelia sa vám steny do troch skupín po dvoch stenách?

88. Tie dve hrany, ktorými ste začali v úlohe 87, nie sú obe na rovnakej stene, ale sú medzi sebou rovnobežné. Viete ukázať iný príklad takýchto dvoch hrán? Koľko je spolu takýchto párov hrán?

89. Ukážte jednu stenu kvádra. Ukážte tie ďalšie steny, ktoré prvú stenu pretnú. Ostáva ešte nejaká stena?

90. Ukáže jednu stenu kvádra. Ukážte tie hrany, ktoré neležia na zvolenej stene: najprv tie, ktoré z tejto steny vychádzajú, potom ostatné.

91. Ukážte jednu hranu kvádra. Hľadajte hrany, ktoré s ukázanou hranou nemajú spoločný vrchol, ani nie sú s ňou rovnobežné. Koľko ich je?

V úlohách 92 až 95 doplňte ústne vynechané čísla.

92. Na jednej stene kvádra leží ... vrcholov. Kváder má ... stien; to dáva spolu .... krát ..., t. j. ... vrcholov. Ale kváder má len ... vrcholov. Koľko ráz sme teda počítali každých vrchol? Prečo?

93. Z jedného vrcholu kvádra vychádza ... stien. Kváder má ... vrcholov; to dáva spolu ... krát ..., t. j. ... stien. Koľko ráz sme teda počítali každú stenu? Prečo?

94. Na jednej stene kvádra leží ... hrán. Kváder má ... stien; to dáva spolu ... krát ..., t. j. ... hrán. Ale kváder má len ... hrán. Koľko ráz sme teda počítali každú hranu? Prečo?

95. Z jedného vrcholu kvádra vychádza ... hrán. Kváder má ... vrcholov; to dáva spolu ... krát ..., t. j. ... hrán. Ale kváder má len ... hrán. Koľko ráz sme teda počítali každú hranu? Prečo?

96. Sostavte sami ešte dve úlohy, podobné úlohám 92 až 95. Jedna začína: Na jednej hrane kvádra leží ... vrcholov. Druhá začína: Jednou hranou kvádra prechádza ... stien.

Úlohy 97 až 100 máte riešiť bez modelu, pozerajúc sa na obr. 39. Neviditeľný vrchol na obr. 39a je vrchol *D*. Neviditeľný vrchol na obr. 39b je vrchol *C*. Neviditeľný vrchol na obr. 39c je vrchol *A*.

97. Predstavte si, že kváder sme premiestili z polohy, naznačenej na obr. 39a do polohy, naznačenej na obr. 39. Stena *ABCD* bola základná stena a teraz je to bočná stena. Podľa tohto vzoru hovorte o ostatných piatich stenách.

98. Opäť si predstavte, že kváder sme premiestili z polohy na obr. 39a do polohy 39b. Hrana *AB* bola základná hrana a teraz je to bočná hrana. Podľa tohto vzoru hovorte o ostatných jedenástich hranách.

99. Opakujte úlohy 97 a 98 pri premiestení z polohy na obr. 39b do polohy na obr. 39c.

100. Opakujte úlohy 97 a 98 pri premiestení z polohy na obr. 39c do polohy na obr. 39a.

§ 8. Svislá a vodorovná poloha.

Keď držíme pokojne niť, zaťaženú závažím, niť nám znázorňuje **svislú priamku.** Svislé priamky sú navzájom rovnobežné. Každá rovina, v ktorej ležia svislé priamky, sa volá **svislá rovina.**

Pokojná hladina vodná nám znázorňuje **vodorovnú rovinu.** Každá priamka, ktorá leží v nejakej vodorovnej rovine, volá sa **vodorovná priamka.**

Keď nie je priamka alebo rovina vodorovná alebo svislá, volá sa **šikmá.**

Čo je olovnica? Čo je vodováha (libela)?

Keď hovoríme o svislých a vodorovných priamkach v sošite alebo v knihe, máme na mysli určitú polohu sošitu alebo knihy. Ukážte ktorú?

Postavme školský model kvádra na vodorovnú podložku. Umiestime ho tak, aby jedna bočná stena bola priamo pred vami (viď obr. 42). Hovoríme, že kváder je v **priečelnej polohe.** Všetky štyri bočné hrany sú svislé. Všetky základné hrany sú vodorovné. Štyri z nich smerujú zľava doprava, ostatné štyri smerujú odpredu dozadu.

Cvičenie k § 8.

101. Zapíšte do slovníčka: Priamky svislé, vodorovné a šikmé. Roviny svislé, vodorovné a šikmé. Priečelná poloha kvádra.

102. Vymenujte v triede nejaké vodorovné a svislé priamky a roviny.

103. Kúsok kriedy má tvar kvádra. Držte ho tak, aby jedna hrana bola vodorovná. Koľko hrán musí mať vodorovnú polohu? Musí niektorá hrana byť svislá? Musí niektorá stena byť vodorovná? Musí niektorá stena byť svislá?

104. Predstavte si dve svislé roviny, ktoré sa pretínajú v priamke. Čo môžete tvrdiť o tejto priamke?

105. Opakujte úlohu 104 s tým rozdielom, že len jedna rovina je svislá a druhá vodorovná.

106. Držte ceruzu šikmo. Môžete ňou preložiť vodorovnú rovinu? Môžete ňou preložiť svislú rovinu?

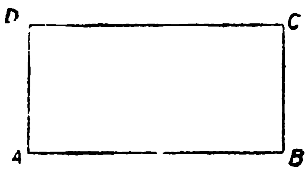
107. Roztvorte kružidlo do pravého uhlu. Najskôr držte jedno rameno svisle; druhé rameno musí byť vodorovné?

Teraz držte jedno rameno vodorovne; musí byť druhé rameno svislé? Napokon držte jedno rameno šikmo, môže byť druhé rameno vodorovné alebo svislé?

108. Umiestite si model kvádra do priečelnej polohy. Všimnite si určitého vrcholu, hoci predného horného ľavého vrcholu. O tomto vrchole môžete povedať: Z predného horného ľavého vrcholu vychádzajú tri hrany; jedna vedie k prednému hornému pravému vrcholu, druhá vedie k prednému dolnému ľavému vrcholu a tretia vedie k zadnému hornému ľavému vrcholu. Podľa tohto vzoru hovorte i o ostatných siedmich vrcholoch.

§ 9. Obdĺžnik.

Vieme už, čo je to **obdĺžnik.** Na obr. 40 máme obdĺžnik *ABCD.* Obdĺžnik má štyri vrcholy a štyri strany. Je to teda štvoruholník, ale štvoruholník zvlášť jednoduchého tvaru. Tá vlastnosť, ktorou sa obdĺžnik líši od obecného štvoruholníka, znie: Z každého vrcholu vychádzajúce dve strany stoja na sebe kolmo.



Obr. 40.

Je teda napr. na obr. 40

$$AD \perp AB, \quad BC \perp AB,$$

teda obe priamky *AD* i *BC* stoja kolmo na priamku *AB* a teda

$$AD \parallel BC,$$

t. j.: Dve protiľahlé strany obdĺžnika sú rovnobežné.

Teda pri obdĺžniku *ABCD* je

$$AD \parallel BC, \quad AB \parallel CD.$$

Keď v nejakom štvoruholníku *ABCD* je $AD \parallel BC$ a tiež $AB \parallel CD$, musí to byť obdĺžnik? Obr. 41 ukazuje, že nemusí.

Vráťme sa k obdĺžniku *ABCD* (obr. 40). Vzdialenosť rovnobežiek *AD* a *BC* môžeme zmerať na spoločnej kolmici *AB,* ale môžeme ju zmerať tiež na spoločnej kolmici *CD.* Teda

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD},$$

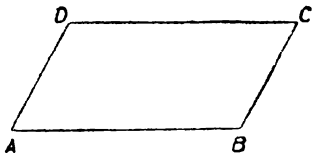
slovami: **D v e   p r o t i ľ a h l é   s t r a n y   o b d ĺ ž n i k a   s ú   r o v - n a k o   d l h é.**

Teda pri obdĺžniku $ABCD$ je

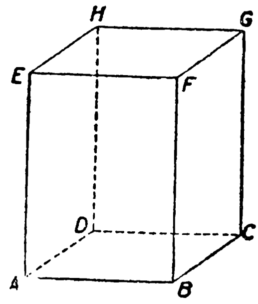
$$\overline{AB} = \overline{CD}, \quad \overline{AD} = \overline{BC}.$$

Keď v nejakom štvoruholníku $ABCD$ je $\overline{AB} = \overline{CD}$ a tiež $\overline{AD} = \overline{BC}$, m u s í to byť obdĺžnik? Zasa obr. 41 ukazuje, že nemusí.

Často sa vyskytujú obdĺžniky, ktoré majú dve strany svislé; ostatné dve strany m u s i a ale byť vodorovné. Ukážte v triede štyri takéto



Obr. 41.



Obr. 42.

obdĺžniky. Obr. 40 predstavuje práve obdĺžnik v takej polohe. Vodorovným stranám AB a CD hovoríme **základne** obdĺžnika (AB je d o l n á základňa, CD je h o r n á základňa) a svislým stranám AD a BC hovoríme **výšky** obdĺžnika. Spoločná dĺžka $\overline{AB} = \overline{CD}$ oboch základní sa volá **dĺžka** obdĺžnika a slovom **výška** značíme často spoločnú dĺžku $\overline{AD} = \overline{BC}$ oboch svislých strán (výšok). Tiež sa často hovorí o **šírke** obdĺžnika.

Obr. 42 predstavuje kváder v polohe priečelnej. Pri stenách $ABFE$ a $CDHG$ hovoríme o dĺžke a o výške, pri stenách $ABCD$ a $EFGH$ hovoríme o dĺžke a šírke, pri stenách $BCGF$ a $ADHE$ hovoríme o šírke a o výške.

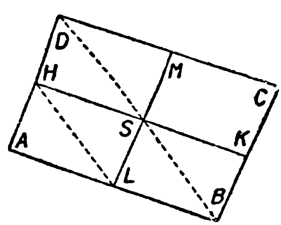
Spolu sú teda dve vzdialenosti v obdĺžniku, ktoré musíme poznať. Výhodný je spoločný názov **rozmery** pre tieto dve vzdialenosti. Tento názov sa hodí pre obdĺžnik v akejkoľvek polohe, kým názvy „dĺžka a výška“ alebo „dĺžka a šírka“, alebo „šírka a výška“ sú vhodné pre obdĺžniky vo zvláštnych polohách.

O b d ĺ ž n i k   m á   d v a   r o z m e r y. Tiež pri kvádri hovoríme a rozmeroch, pravda: **K v á d e r   m á   t r i   r o z m e r y.** Keď je kváder v *polohe priečelnej*, rozmery kvádra sa volajú: *dĺžka* (vodorovne zľava doprava), *šírka* (vodorovne odpredu dozadu), *výška* (svisle).

Sostrojte si v sošite obdĺžnik s rozmermi 7 cm a 5 cm. Najprv narysujte priamku AB a naneste na ňu $AB = 7$ cm. V bodoch A a B vztýčte kolmice na priamku AB a naneste na ne dĺžky $\overline{AD} = \overline{BC} = 5$ cm. (Musíte obe dĺžky nanášať na rovnakú stranu priamky AB.) Ostáva len spojiť CD. Premerajte, či je presne $\overline{CD} = 7$ cm. Presvedčte sa, či aj pri vrcholoch C a D máte pravé uhly.

Opakujte tú istú konštrukciu (s tými istými rozmermi) na list papiera. Obdĺžnik, ktorý ste narysovali na list papiera, vystrihnite a presvedčte sa, či sa dá položiť na obdĺžnik $ABCD$, ktorý máte v sošite, tak, že sa oba obdĺžniky presne kryjú. Také dva obrazce, ktoré možno premiestiť tak, aby sa presne kryly, volajú sa **shodné.** Teda: *Dva obdĺžniky s rovnakými rozmermi sú shodné.* Tiež dva kvádry s rovnakými rozmermi sú shodné, ale tu sa nedá tak ľahko urobiť skúška. Spomeňte si, že sme si v paragrafe 4 sostrojili na list papiera tri trojuholníky, ktoré sme potom položili na seba tak, že sa presne kryly, teda trojuholníky shodné. Shodné trojuholníky budú jednou z hlavných partií geometrického učiva vo vyšších triedach. Preto urobíte dobre, keď si už teraz budete pamätať: *Dva trojuholníky s rovnako dlhými stranami sú shodné.*

Na liste papiera si urobte (dostatočne veľký) obdĺžnik. To môžete urobiť celkom presne bez nástrojov, ako ste poznali v § 5. Obdĺžnik si vystrihnite a označte ho $ABCD$. Složte ho dvojakým spôsobom: raz tak, aby sa kryly strany AB a CD, druhý raz tak, aby sa kryly strany AD a BC. Tak dostanete úsečky HK a LM (viď obr. 43). Priamka HK je kolmá na priamky AD a BC. Priamka LM je kolmá na priamky AB a CD. Okrem toho H je stredom strany AD, K je stredom strany BC, L je stredom strany AB a M je stredom strany CD. Úsečky HK a LM sa preto volajú **stredné priečky** obdĺžnika $ABCD$;



Obr. 43.

stoja na sebe kolmo. Označte priesečník oboch stredných priečok písmenom S.

Vidíte, že stredné priečky rozdelia obdĺžnik $ABCD$ na štyri obdĺžniky. Vymenujte ich. Aké majú rozmery? Sú vo všetkých štyroch malých obdĺžnikoch rovnaké a preto sú tieto obdĺžniky shodné. Keď chceme, aby sa napr. obdĺžniky $ALSH$ a $HSMD$ kryly, stačí prehnúť papier pozdĺž priamky HSK. Ale obdĺžnik $ALSH$ môžeme premiestiť do polohy $HSMD$ ešte iným spôsobom. Stačí posunúť obdĺžnik $ALSH$ pozdĺž priamky LSM o dĺžku $\overline{LS}$. Priamka LH sa pri tom posunie do polohy SD. Z toho vidíme, že $SD \parallel LH$; okrem toho $\overline{SD} = \overline{LH}$.

Keď posunieme zasa obdĺžnik $ALSH$, ale teraz pozdĺž priamky HSK o dĺžku $\overline{HS}$, prejde $ALSH$ do polohy $LBKS$ a priamka LH sa posunie do polohy BS. Z toho vidíme, že $BS \parallel LH$; okrem toho $\overline{BS} = \overline{LH}$.

Kadiaľ teda prechádza rovnobežka s priamkou LH, vedená bodom S? Táto rovnobežka prechádza bodom D, i bodom B. Teda tri body D, S a B ležia na priamke. Presvedčte sa prehnutím papiera, že priamka BD skutočne prechádza bodom S. Okrem toho sme si všimli, že obe dĺžky $\overline{SD}$ i $\overline{BS}$ sú také dlhé ako $\overline{LH}$; sú teda obe rovnako dlhé, t. j. bod S je stredom uhlopriečky BD obdĺžnika $ABCD$. Samozrejme je bod S tiež stredom druhej uhlopriečky AC obdĺžnika $ABCD$. Presvedčte sa prehnutím papiera, že priamka AC prechádza bodom S. Ktoré ďalšie dve úsečky majú stred v bode S? Bod S sa volá **stred obdĺžnika** $ABCD$.

Pamätajte: Obe uhlopriečky obdĺžnika sú rovnako dlhé. Uhlopriečky obdĺžnika sa navzájom rozpoľťujú.

V zošite máte narysovaný obdĺžnik $ABCD$ rozmerov 7 cm a 5 cm. Narysujte si v ňom uhlopriečky a označte S ich priesečník. Presvedčte sa prúžkom papiera, že

$$\overline{SA} = \overline{SB} = \overline{SC} = \overline{SD}.$$

Sú teda všetky štyri vrcholy obdĺžnika $ABCD$ rovnako vzdialené od bodu S. Preto môžeme narysovať zo stredu S kružnicu k, ktorá prechádza všetkými vrcholmi. Narysujte kružnicu k. Hovoríme, že kružnica k je **opísaná** obdĺžniku $ABCD$. Hovoríme, že obdĺžnik $ABCD$

je vpísaný kružnici k. Odmerajte všetci polomer kružnice k. Je u všetkých vás rovnaký?

Keď obe uhlopriečky štvoruholníka sú rovnako dlhé, n e m u s í to byť obdĺžnik. Nakreslite príklad. Keď sa uhlopriečky štvoruholníka navzájom rozpolťujú, n e m u s í to byť obdĺžnik. Nakreslite príklad. Ale ak štvoruholník má obe uhlopriečky rovnako dlhé a ak sa okrem toho obe navzájom rozpolťujú, tak to m u s í byť obdĺžnik. To už patrí do vyšších tried, ale neuškodí, keď sa už teraz presvedčíme o tom na príklade. Zvoľte si teda bod S, rysujte ním dve priamky ľubovoľne, naneste na prvú $\overline{AS} = \overline{SB} = 43$ mm, na druhú $\overline{CS} = \overline{SD} = 43$ mm a sostrojte štvoruholník $ABCD$. Presvedčte sa priložením trojuholníkového lineára, že všetky štyri uhly sú pravé.

Cvičenie k § 9.

109. Zapíšte do slovníčka: Základňa a výška obdĺžnika. Rozmery obdĺžnika. Rozmery kvádra. Dĺžka, šírka, výška. Stredné priečky obdĺžnika. Kružnica, opísaná obdĺžniku. Obdĺžnik vpísaný kružnici. Shodné obdĺžniky.

110. Sostrojte obdĺžnik 72 mm dlhý a 54 mm široký. Opíšte mu kružnicu. Odmerajte a zapíšte polomer opísanej kružnice.

111. Zvoľte bod S (asi v strede zošitu) a rysujte ním ľubovoľne priamku p. Potom sostrojte obdĺžnik rovnako veľký ako v úlohe 110, ale tak, aby S bol stredom obdĺžnika a aby jedna stredná priečka ležala na priamke p. Sú dva takéto obdĺžniky? Sostrojte ich oba. Môžete oboma opísať rovnakú kružnicu?

112. Zvoľte si kružnicu s polomerom 52 mm a narysujte si dva ľubovoľné priemery ESF, GSH. Aký štvoruholník je $EGFH$? Odmerajte strany a presvedčte sa, že všetky jeho uhly sú pravé.

113. Zvoľte si priamku p a mimo nej bod H. Sostrojte obdĺžnik $HKLM$ (jeden vrchol je teda daný) tak, aby strana KL ležala na priamke p a merala 26 mm. Sú dva takéto obdĺžniky? Sostrojte oba.

114. Zvoľte zasa priamku p a mimo nej bod H. Zasa sostrojte obdĺžnik $HKLM$ tak, aby strana KL ležala na priamke p. Ale strana KL nech je teraz taká dlhá, aby obvod obdĺžnika $HKLM$ bol 20 cm. Sú dva takéto obdĺžniky. Sostrojte len jeden.

115. Zvoľte ešte raz priamku p a mimo nej bod H. Sostrojte obdĺžnik $CDEF$ tak, aby strana CD ležala na priamke p a merala 5 cm a aby bod H bol stredom obdĺžnika.

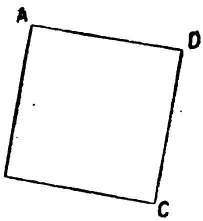
§ 10. Štvorec.

Obdĺžnik môže mať oba rozmery rovnaké (viď obr. 44). Vtedy sa volá **štvorec.**

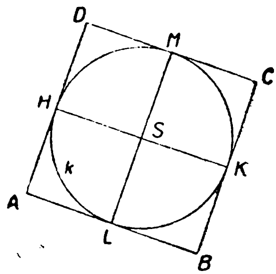
Keď má štvoruholník všetky strany rovnako dlhé, nemusí to byť štvorec. Nakreslite.

Pretože štvorec je zvláštny prípad obdĺžnika, platia o ňom všetky vlastnosti, ktoré sme poznali pri obdĺžniku. Opakujte ich.

Pretože sú stredné priečky obdĺžnika také dlhé ako strany, obe stredné priečky štvorca sú rovnako dlhé (a sú také dlhé ako strana štvorca).



Obr. 44.



Obr. 45.

Sostrojte si štvorec *ABCD* so stranou 6 cm. (Ako to urobíte?) Sostrojte obe stredné priečky *HSK* a *LSM* (viď obr. 45). Pretože je $\overline{SH} = \overline{SK} = \overline{SL} = \overline{SM} = 3$ cm (prečo?), sú všetky štyri body *H, K, L* a *M* na kružnici *k* so stredom *S* a polomerom 3 cm. Narysujte si kružnicu *k*. Všimnite si, že sa každá strana štvorca *ABCD* dotýka kružnice *k*. Hovoríme, že *k* je kružnica **vpísaná** štvorcu *ABCD.* Hovoríme, že štvorec *ABCD* je **opísaný** kružnici *k*. Sostrojte vo svojom obrazci tiež kružnicu opísanû štvorcu *ABCD.*

Do **obecného** obdĺžnika (t. j. takého, ktorý nie je štvorcom) sa nedá vpísať kružnica.

Pod ten list v sošite, na ktorom ste teraz rysovali, položte si list papiera. Prepichnutím si preneste body *A, B, C, D* zo sošitu na voľný papier. Sostrojte lineárom alebo prehnutím papiera i na voľnom papieri strany štvorca *ABCD* a vystrihnite si tento štvorec. Složte vystrihnutý štvorec pozdĺž uhlopriečky *BD*; teraz sa vrcholy *A* a *C* zasa presne kryjú. Takto sme sa presvedčili, že obe uhlopriečky štvorca stoja na sebe kolmo. (Okrem toho, pravda, je ešte $\overline{AS} = \overline{BS} = \overline{CS} = \overline{DS}$ ako v každom obdĺžniku.)

Na obrazci, ktorý máte v sošite (viď obr. 45), je *HLKM* tiež štvorec. Odmerajte všetky strany a presvedčte sa tiež trojuholníkovým lineárom, že všetky štyri uhly sú pravé. Priamky *HK* a *LM* na vašom obrazci stoja na sebe kolmo. Čím sú úsečky *HK* a *LM* vo štvorci *ABCD*? Čím sú vo štvorci *HLKM*?

Sostrojte si štvorec *EFGH* tak, aby dĺžka uhlopriečky bola 9 cm. Vysvetlite, ako vykonáte konštrukciu.

Kváder má tri rozmery, ale môže sa stať, že sú dva z nich rovnaké. V škole máme tiež takýto model. Keď je napr. dĺžka a šírka rovnaká, sú obe základne štvorce, ale všetky bočné steny sú obecné obdĺžniky. Všetky tieto štyri obdĺžniky sú shodné.

Keď sú všetky tri rozmery kvádra rovnaké, tak sa kváder volá **kocka.** V škole máme tiež model kocky. Všetky steny kocky sú štvorce.

Cvičenie k § 10.

116. Zapíšte do slovníčka: Štvorec. Kocka. Kružnica, vpísaná štvorcu. Štvorec, opísaný kružnici.

117. Sostrojte štvorec so stranou 69 mm a štvorec s uhlopriečkou 92 mm. Zapíšte, ktorý štvorec je väčší.

118. Sostrojte štvorec so stranou 53 mm a štvorec s uhlopriečkou 8 cm. Zapíšte, ktorý štvorec je väčší.

119. Opakujte cvičenie 112, str. 37, ale voľte $EF \perp GH$.

120. Sostrojte štvorec s uhlopriečkou 7 cm a vpíšte mu kružnicu.

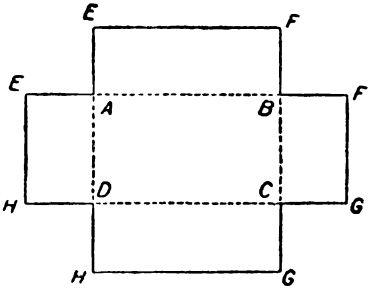
121. Sostrojte štvorec *ABCD* so stranou 3 cm. Sostrojte rovnostranné trojuholníky *ABF, BCG, CDH, DAK* tak, aby nezasahovaly do štvorca *ABCD*. Presvedčte sa, že *FGHK* je štvorec.

122. Opakujte cvičenie 121 s dvojnásobnou stranou štvorca, ale rovnostranné trojuholníky sostrojujte tak, aby nezasahovaly do štvorca.

123. Sostrojte rovnostranný trojuholník *ABC* so stranou 3 cm. Sostrojte štvorce *ABED, BCGF, CAKH* tak, aby nezasahovaly do trojuholníka *ABC*. Presvedčte sa, že trojuholníky *DFH* a *EGK* sú rovnostranné. Sú tieto dva trojuholníky shodné?

§ 11. Siete a modely.

Vezmime otvorenú (vnútornú) časť škatuľky od zápaliek a rozrežme ju pozdĺž bočných hrán. Potom môžeme vystrieť bočné steny a dostaneme rovnú plochu, naznačenú na obr. 46. Táto rovná plocha sa volá **sieť** otvorenej škatuľky.



Obr. 46.

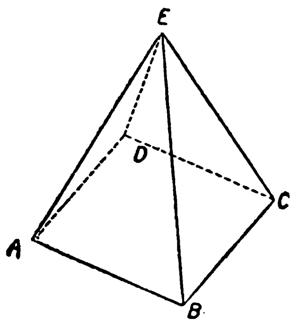
Prečo sú na obr. 46 niektoré písmená dva razy? Musia napr. obe úsečky, označené EA, byť rovnako dlhé? Prečo? Je napr. čiara $EABF$ priama? Prečo?

Narysujte sieť otvorenej škatuľky na tvrdšom papieri. Narežte jemne papier pozdĺž úsečiek, čiarkovaných na obr. 46. Potom postavte všetky steny a dostanete **papierový model** otvorenej škatuľky. Slepte bočné steny kúskami lepiacej pásky. Keď si chceme urobiť sieť a potom model zatvorenej škatuľky, musíme pripojiť k sieti otvorenej škatuľky ešte šiesty obdĺžnik. Koľkorakým spôsobom ho môžeme umiestiť? Naznačte jednotlivé možnosti malými obrazcami od ruky. Na každom obrazci označte vrcholy písmenami. Body, ktoré na modeli splynú, označujeme rovnako. Ktoré umiestenie šiestej steny pokladáte za najvýhodnejšie?

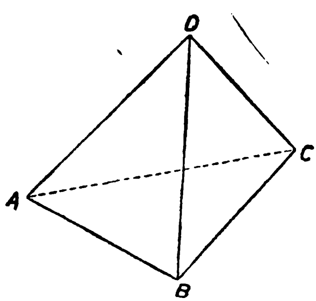
Cvičenie k § 11.

124. Zapíšte do slovníčka: Sieť kvádra.

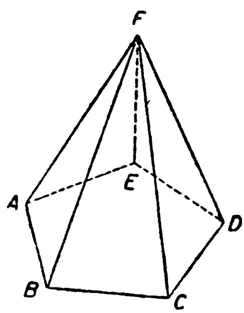
V úlohách 125 až 134 máte sostrojiť sieť telesa. Urobte si najprv malý obrazec od ruky a napíšte naň predpísané rozmery (jednotka 1 cm).



Obr. 47.



Obr. 48.



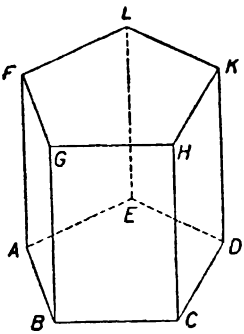
Obr. 49.

Až potom rysujte presnú sieť. Vrcholy označujte na sieti písmenami. Zhotovte si doma model jedného alebo dvoch z týchto telies podľa vlastnej voľby.

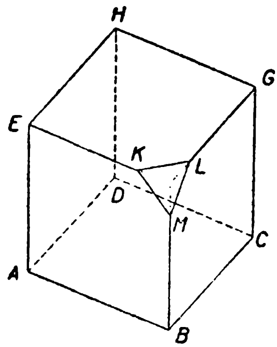
125. Zatvorená škatuľa dlhá 6 cm, široká 4 cm a vysoká 16 mm.

126. **Pravidelný štvorboký ihlan** (viď obr. 47). Základňa je štvorec so stranou 3 cm. Dĺžka bočných hrán je 4 cm.

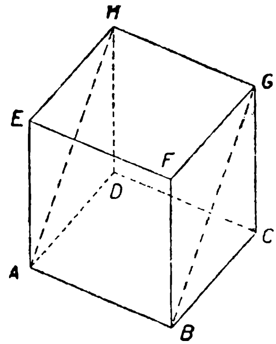
127. **Pravidelný štvorsten** (viď obr. 48). Dĺžka hrany je 5 cm. Všetky hrany sú rovnako dlhé.



Obr. 50.



Obr. 51.



Obr. 52.

128. **Pravidelný päťboký ihlan** (viď obr. 49). Dĺžka bočných hrán je 5 cm. Základňa je pravidelný päťuholník. Body *C, D, E, F* a *G* na obr. 8 (str. 8) sú vrcholy pravidelného päťuholníka takého veľkého, aká má byť vaša základňa. Preneste si tento päťuholník na sieť ihlanu, a to prepichnutím vo vrcholoch alebo s pomocou priesvitného papiera.

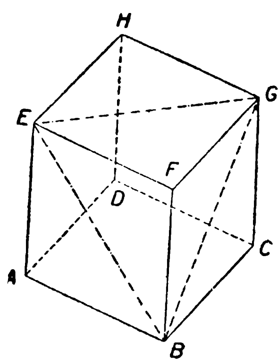
129. **Pravidelný päťboký hranol** (viď obr. 50). Dĺžka bočných hrán je 4 cm. Pravidelné päťuholníkové základne dostaneme tak isto ako v úlohe 128.

130. Kocka s hranou 5 cm má pri vrchole *F* odrezok *FKLM* (viď obr. 51). Je $\overline{FK} = \overline{FL} = \overline{FM} = 1$ cm. (Bod *F* nie je na obr. 51 vyznačený.)

131. Rovnako ako v úlohe 130 až na to, že teraz sú pri troch vrcholoch *E, F* a *G* rovnaké odrezky.

132. Rovnako ako v úlohe 130 až na to, že teraz sú rovnaké odrezky pri všetkých ôsmich vrcholoch kocky.

133. Kocka, naznačená na obr. 52, je pre-



Obr. 53.

rezaná pozdĺž obdĺžnika *ABGH,* takže sa rozpadne na dve telesá. Sostrojte siete oboch telies. Dĺžka hrany kocky je 4 cm.

134. Kocka, naznačená na obr. 53, je prerezaná pozdĺž trojuholníka *BEG,* takže sa rozpadne na dve telesá. Sostrojte siete oboch telies. Dĺžka hrany kocky je 4 cm.

§ 12. **Priemet kvádra.**

Je dôležité, aby ste sa naučili robiť si v sošite pekné náčrty jednoduchých telies. Nemôžeme, pravda, do sošitu narysovať presný tvar telesa, lebo v sošite môžeme mať iba **rovinné** obrazce. Ale predsa si môžeme ľahko urobiť náčrty, ktoré vystihnú hlavné vlastnosti telesa a často nám nahradia model. Dokonca majú takéto náčrty dve prednosti pred modelmi. Po prvé si ich môžeme urobiť veľmi rýchle a po druhé môžeme do nich ľahko vpisovať písmenká pre vrcholy. Budeme postupovať podľa určitých zásad, podľa ktorých boly i v učebnici zhotovené obrazy 39, 42, 47, 48, 49, 50, 51, 52 a 53. Obraz telesa, ktorý si podľa týchto zásad narysujeme, budeme volať **priemet** telesa. V tomto odseku si budeme všímať iba kváder.

Hlavné zásady sú dve:

(a) rovnobežné úsečky rysujeme rovnobežné,

(b) úsečky rovnako dlhé, ktoré sú obe na tej istej priamke alebo na dvoch rovnobežkách, rysujeme rovnako dlhé.

Naproti tomu uhly pravé sa nebudú vždy v priemete javiť ako uhly pravé a úsečky rovnako dlhé, ktoré nie sú rovnobežné, nebudú v priemete vždy rovnako dlhé.

Potom máme ešte dve vedľajšie zásady, z ktorých si zatiaľ uvedieme iba jednu:

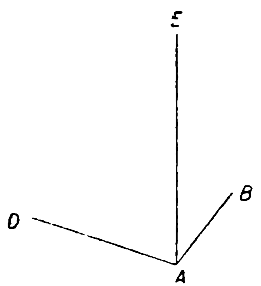
(c) svislé úsečky rysujeme svislé.

Naproti tomu vodorovné úsečky sa nebudú v priemete javiť vždy vodorovné.

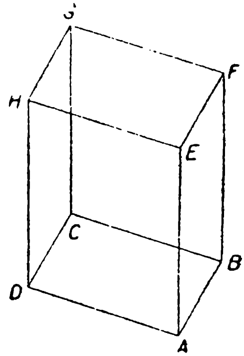
Narysujme si podľa týchto zásad priemet kvádra, ktorý spočíva na vodorovnej podložke. [Nebudeme rysovať priemet kvádra v obecnejšej (šikmej) polohe.] Najprv narysujeme jednu svislú hranu, označme ju *AE.* Podľa zásady (c) ju narysujeme svislú. Teraz narysujeme ešte obe vodorovné hrany *AB* a *AD,* vychádzajúce z vrcholu *A* (viď obr. 54a).

Až dosiaľ bolo všetko vlastne ľubovoľné až na to, že úsečku AE rysujeme svisle. Teraz však už dokončíme priemet celkom jednoznačne (viď obr. 54b) podľa zásad (a) a (b).

Najprv doplníme dolnú základňu $ABCD$. Podľa zásady (a) rysujeme $DC \parallel AB$, $BC \parallel AD$. Ale namiesto toho, aby sme takto určili polohu bodu C dvoma lineármi, môžeme určiť polohu bodu C kružidlom podľa zásady (b): keď narysujeme zo stredu D oblúk kružnice s polomerom $\overline{AB}$ a zo stredu B oblúk kružnice s polomerom $\overline{AD}$, pretnú sa tieto dva oblúky v bode C.

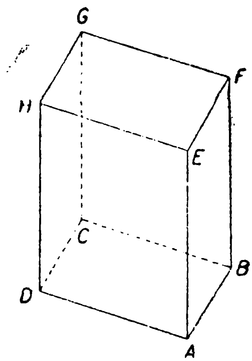


Obr. 54a.

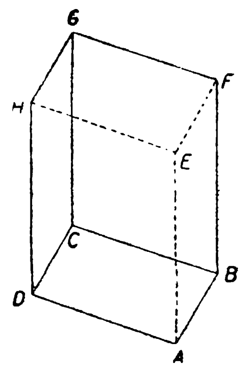


Obr. 54b.

Keď už máme dolnú základňu $ABCD$ a jednu bočnú hranu AE, ľahko dokončíme priemet. Rysujeme svislé priamky BF, CG, DH a nanesieme na každú z nich dĺžku $\overline{AE}$.



Obr. 54c.



Obr. 54d.

Nebolo podstatné, že sme na obr. 54a vyšli práve z troch hrán, ktoré vychádzajú z jedného vrcholu. Precvičíme si tiež iné možnosti.

Aby bol priemet ozaj názorný, môžeme sa riadiť ešte druhou vedľajšou zásadou:

(d) neviditeľné hrany čiarkujeme. Túto zásadu môžeme použiť vždy dvojím spôsobom. Na obr. 54c vidíte tzv. **pohľad shora**, pri ktorom je horná základňa viditeľná a dolná neviditeľná. Na obr. 54d vidíte tzv. **pohľad zdola**, pri ktorom je horná základňa neviditeľná a dolná viditeľná. Obyčajne rysujeme pohľad shora.

Pri úlohách o kvádri je dobre, keď sa naučíme označovať kváder tým, že označíme jednotlivé vrcholy za sebou v určitom poriadku. Píšeme najprv vrcholy dolnej základne, a to **poporiadku.** Potom píšeme vrcholy hornej základne, a to v rovnakom poriadku ako pri základni dolnej. Napr. kváder, ktorý sme práve zobrazovali, môžeme označiť *ABCDEFGH* alebo *BADCFEHG*, ale nesprávne je *AEBFCGDH* alebo *ABCDEHGF*.

Cvičenie k § 12.

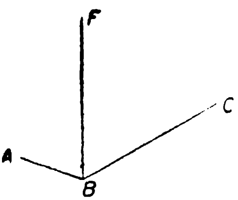
135. Zapíšte do slovníčka: Kváder *ABCDEFGH*. Priemet telesa. Pohľad shora. Pohľad zdola.

136. Vymenujte bočné hrany kvádra *LMRTUVAX*. Vymenujte základné hrany.

137. Vymenujte základné steny kvádra *AEDFGKLV*. Vymenujte bočné steny.

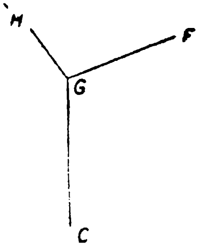
138. Pri kvádri *CDEFGHKL* vymenujte: ktoré hrany vychádzajú z vrcholu *C*, ktoré hrany vychádzajú z vrcholu *H*, ktoré steny vychádzajú

139.



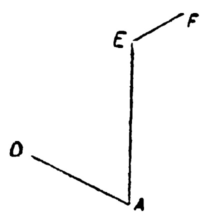
Obr. 55.

140.



Obr. 56.

141.

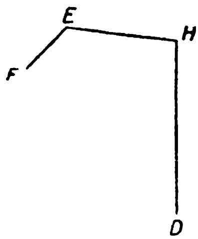


Obr. 57.

z vrcholu *E*, ktoré steny prechádzajú hranou *EF*, ktoré steny prechádzajú hranou *DH*.

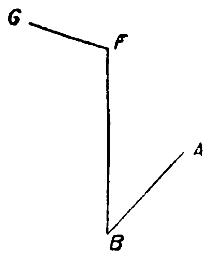
V úlohách 139 až 146 máte sostrojiť priemet kvádra *ABCDEFGH*. Časť priemetu, vyznačená v učebnici, má mať vo vašom priemete približne rovnaký tvar, ale váš obrazec má byť asi tri razy taký veľký.

142.



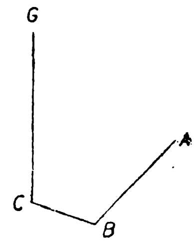
Obr. 58.

143.



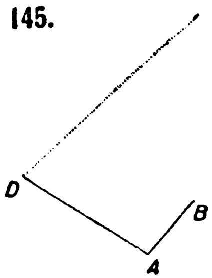
Obr. 59.

144.



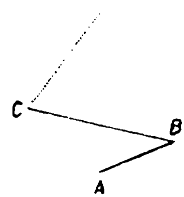
Obr. 60.

145.



Obr. 61.

146.



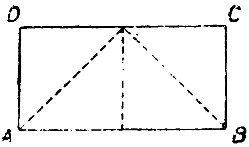
Obr. 62.

Potom doplníte priemet presnou konštrukciou. V úlohách 145 a 146 má bod *E* ležať niekde na priamke bodkovanej. Zásadu (d) použite za predpokladu, že ide o pohľad shora. Je dobre, keď si urobíte najprv na list papiera menší obrazec od ruky, na ktorom neprizeráte k viditeľnosti, ale na ktorom si tiež popíšete všetky vrcholy písmenami.

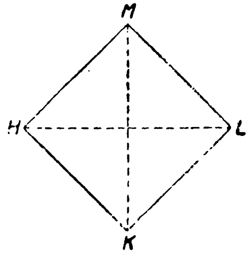
§ 13. Obsah štvorca a obdĺžnika.

Slovo **geometria** je gréckeho pôvodu (gé = zem, metrein = merať). Už z doterajšieho vyučovania vidno, že v geometrii ide aj o iné veci ako meranie. Preto sa už dnes tiež málo užíva slovenského názvu **merba** a hovorí sa radšej cudzie slovo, ktorého pôvodný úzky význam už necítime.

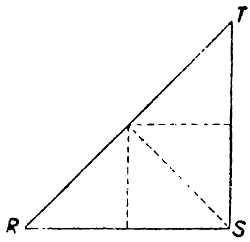
Jednako tvorí meranie dôležitú a najmä prakticky významnú časť geometrie. Dosiaľ sme merali iba dĺžky. Teraz si všimnime, ako sa meria veľkosť jednoduchých rovných plôch. Neskoršie budeme merať ešte veľkosť telies a uhly.



Obr. 63a.



Obr. 63b.

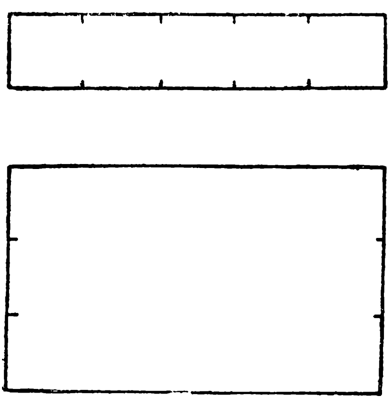


Obr. 63c.

Plochy, ktoré sú rovnako veľké, nemusia mať rovnaký tvar. Napr. obdĺžnik *ABCD* na obr. 63a, štvorec *HKLM* na obr. 63b a trojuholník *RST* na obr. 63c sú tvarove celkom odlišné. Ale môžeme ktorýkoľvek z nich rozstrihať pozdĺž čiarkovaných úsečiek a z kusov složiť druhý alebo tretí obrazec, takže majú všetky rovnakú veľkosť.

Dĺžku čiary môžeme merať v centimetroch, t. j. srovnávaním s dĺžkovou jednotkou 1 cm. Podobne veľkosť rovnej plochy alebo, ako sa zpravidla hovorí, jej **plošný obsah** (stručne **obsah**) meriame na štvorcové centimetre, t. j. srovnávaním s plošnou jednotkou 1 cm². Je to veľkosť štvorca so stranou 1 cm alebo, pravda, veľkosť akejkoľvek plochy iného tvaru, ale rovnako veľkej ako štvorec so stranou 1 cm.

Na obr. 64 máme dva obdĺžniky (základňa 5 cm dlhá); prvý má výšku 1 cm, druhý 3 cm. Na koľko štvorcov so stranou 1 cm sa dá rozdeliť prvý obdĺžnik? Na koľko kusov, rovnakých ako prvý obdĺžnik, dá sa rozdeliť druhý obdĺžnik? Aký je teda obsah prvého obdĺžnika? Aký je obsah druhého obdĺžnika?



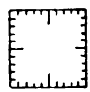
Obr. 64.

Vezmite list papiera, narysujte na ňom štvorec so stranou 8 cm a vystrihnite. Vystrihnutý štvorec složte po dĺžke presne v polovici a skladajte stále po dĺžke ešte dva razy. Keď rozviniete papier, vidíte štvorec, rozdelený na osem obdĺžnikov s rozmermi 8 cm a 1 cm. Opakujte trojité složenie, ale tento raz po šírke. Po rozvinutí máte celý štvorec rozdelený na štvorca so stranou 1 cm. Koľko je týchto malých štvorčekov? Aký je teda obsah celého papierového štvorca? Odstrihnite dva kusy tak, aby vám ostal štvorec so stranou 6 cm. Aj tento štvorec máte rozdelený na štvorčeky so stranou 1 cm. Aký je teda obsah štvorca so stranou 6 cm?

Dĺžkové jednotky sú: 1 mm, 1 cm, 1 dm, 1 m, dekameter = 10 m, hektometer = 100 m, 1 km. **Meniteľom** je 10: každá nasledujúca jednotka je desaťnásobkom predchádzajúcej jednotky.

Obsah štvorca, ktorého strana je dĺžková jednotka, tvorí príslušnú **plošnú jednotku.** Teda plošné jednotky sú: 1 mm^2, 1 cm^2, 1 dm^2, 1 m^2, štvorcový dekameter, štvorcový hektometer, 1 km^2. Dekameter a hektometer sa v praxi neužívajú, ale príslušných plošných jednotiek sa používa, ale s kratšími menami. Štvorcový dekameter sa volá **ár** (1 a), štvorcový hektometer sa volá **hektár** (1 ha).

Na obr. 65 je naznačené, aby by sa štvorec so stranou 1 cm mohol rozdeliť na štvorčeky so stranou 1 mm. Koľko by ich bolo? Meniteľom plošných jednotiek je sto. Teda



Obr. 65.

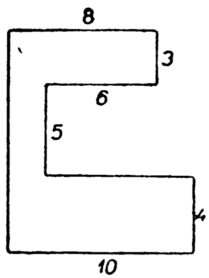
$$1\,cm^2 = 100\,mm^2,\quad 1\,dm^2 = 100\,cm^2,\quad 1\,m^2 = 100\,dm^2,$$
$$1\,a = 100\,m^2,\quad 1\,ha = 100\,a,\quad 1\,km^2 = 100\,ha.$$

Pamätajte si: Obsah obdĺžnika dostaneme, keď dĺžku násobíme výškou. Ale musíte vedieť pripojiť k tomuto základnému pravidlu ešte vysvetlenie: Dĺžka a výška musí byť daná v rovnakej dĺžkovej jednotke a obsah potom vyjde v príslušnej plošnej jednotke.

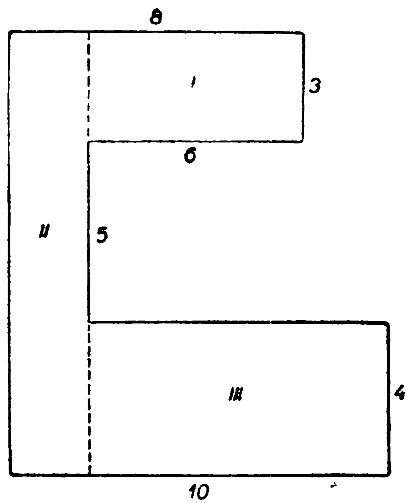
Keď nie je daná výška v takej jednotke ako dĺžka, musíme dávať pozor. Keď máme napr. obdĺžnik dlhý 7 cm a široký 32 dm a keď vypočítame $7 \times 32 = 224$, čo to znamená? Znamená to, že sa náš obdĺžnik dá rozdeliť na 224 menších obdĺžnikov s rozmermi 1 cm a 1 dm. Každý z týchto menších obdĺžnikov má obsah 10 cm^2 alebo 0,1 m^2. Teda daný obdĺžnik má obsah 2240 cm^2 alebo 22,4 m^2.

Umocniť číslo na druhú znamená násobiť ho samo sebou. Obsah štvorca dostaneme, keď dĺžku strany umocníme na druhú. Ktoré vysvetlenie musíte k tomu vedieť dodať?

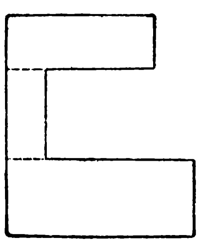
K obdĺžniku *ABCD* na obr. 63a si primyslime pripojený pozdĺž strany *CD* ešte jeden taký istý obdĺžnik. Dostaneme štvorec o dĺžke strany *AB* a obdĺžnik *ABCD* je polovicou tohto štvorca. Teda obsah obdĺžnika *ABCD* dostaneme, keď dĺžku $\overline{AB}$ umocníme na druhú a výsledok delíme dvoma. Štvorec *HKLM* na obr. 63b je rovnako veľký ako obdĺžnik *ABCD*. Dĺžka $\overline{AB}$ je rovnaká ako dĺžka $\overline{HL}$. Teda obsah štvorca *HKLM* dostaneme, keď dĺžku $\overline{HL}$ umocníme na druhú a výsledok delíme dvoma. Pretože *HL* je uhlopriečkou štvorca *HKLM*, máme toto pravidlo: Obsah štvorca dostaneme, keď dĺžku uhlopriečky umocníme na druhú



Obr. 66.



Obr. 67.


Obr. 68.

a výsledok delíme dvoma. Ako bude k tomu znieť potrebné vysvetlenie?

Ako sa počíta obsah iných plôch, ako je obdĺžnik (trojuholníkov, kruhu, atď.), to sa budeme sústavne učiť až neskoršie. Ale sú niektoré plochy, ktoré sa dajú ľahko rozložiť na obdĺžniky, takže už teraz vieme nájsť ich obsah. Urobíme si tri príklady.

Príklad 1. Nájdite obsah plochy, naznačenej na obr. 66 (jednotka 1 cm).

Riešenie: Najprv načrtneme do sošitu plochu danú podľa obr. 66, ale väčšiu (viď obr. 67).

Potom danú plochu rozložíme (viď čiarkované úsečky na obr. 67) na tri obdĺžniky *I, II, III.*

I má rozmery: 6; 3, teda obsah $6 \times 3 = 18$,

II má rozmery: $3+5+4=12$; $8-6=2$, teda obsah $12 \times 2 = 24$,

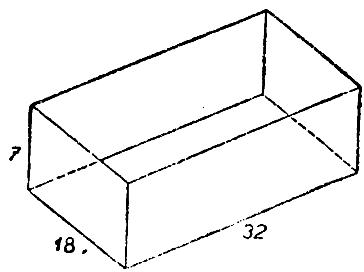
III má rozmery: $10-2=8$; 4, teda obsah $8 \times 4 = 32$, celkový obsah je $18+24+32=74$.

Daná plocha má obsah 74 cm². (Plošnú jednotku uvádzame až vo výsledku.)

Poznámka. Danú plochu bolo možno rozložiť na obdĺžniky aj inými spôsobmi. Jeden spôsob je naznačený na obr. 68. Urobte. Vychádza vám rovnaký výsledok ako pri prvom spôsobe?

Príklad 2. Otvorená škatuľa (bez veka) je 32 cm dlhá, 18 cm široká a 7 cm vysoká. Vonkajšok škatule je polepený bielym papierom. Koľko dm² papiera sa spotrebuje na polepenie?

Riešenie: (viď obr. 69). Počítame v cm a až výsledok premeníme na dm².



Obr. 69.

Obsah prednej a zadnej steny:

$$2 \times 32 \times 7 = 448.$$

Obsah bočných stien:

$$2 \times 18 \times 7 = 252,$$

obsah základne:

$$32 \times 18 = 576,$$

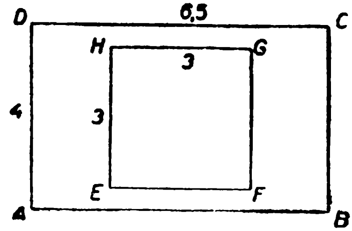
celkový obsah:

$$448 + 252 + 576 = 1276.$$

Na polepenie spotrebujeme 12,76 dm^2 papiera.

Príklad 3. V izbe 6,5 m dlhej a 4 m širokej leží trojmetrový štvorcový pokrovec. Vypočítajte obsah nepokrytej časti dlážky.

Riešenie (viď obr. 70). Naša plocha je rozdiel medzi obdĺžnikom $ABCD$ a štvorcom $EFGH$.



Obr. 70.

$ABCD$ má obsah:

$$6{,}5 \times 4 = 26,$$

$EFGH$ má obsah:

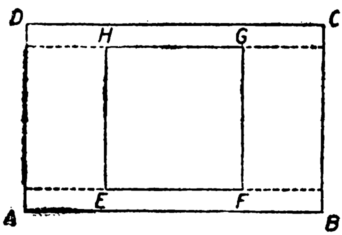
$$3 \times 3 = 9,$$

rozdiel:

$$26 - 9 = 17.$$

Obsah nepokrytej časti dlážky je 17 m^2

Poznámka. Mohli sme počítať i pomocou rozkladu na obdĺžniky (viď obr. 71). Urobte. Je odčítacia metóda rýchlejšia?



Obr. 71.

V § 7 sme si povedali, že súhrn všetkých šiestich stien kvádra sa volá povrch kvádra. Tiež celkový obsah všetkých stien sa volá povrch kvádra. Ako sa vypočíta povrch, keď máme rozmery napr. 5 m, 4 m a 3 m? Ako sa vypočíta povrch kocky, keď je dĺžka hrany napr. 7 cm?

Cvičenie k § 13.

147. Zapíšte do slovníčka: Obsah alebo plošný obsah. Umocniť číslo na druhú. Povrch kvádra. Plošné jednotky sú ...; meniteľ je sto.

V úlohách 148 až 150 vypočítajte obsah a vyjadrite ho v tej jednotke plošnej, ktorá je uvedená v zátvorke.

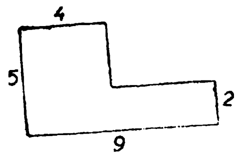
148. Obdĺžnik 48 cm široký a 1 m dlhý (dm^2).

149. Dlážka štvorcovej miestnosti 63 dm dlhej (m^2).

150. Brvno 3 m dlhé a 12 cm široké (dm^2).

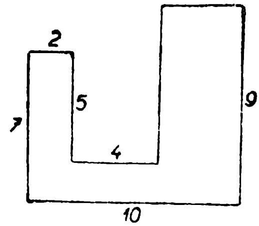
151. Okolo obdĺžnikovej záhrady 40 m širokej je 300 m dlhý plot. Aký je obsah záhrady?

152.



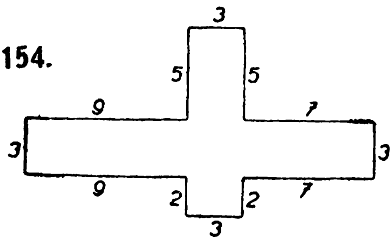
Obr. 72.

153



Obr. 73.

154.



Obr. 74.

V úlohách 152 až 154 máte nájsť obsah naznačenej plochy rozkladom na obdĺžniky. Kreslite vlastný obrazec a zapisujte postup. Jednotkou je 1 cm.

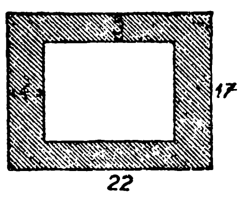
155. Obsah obdĺžnikového poľa 30 m širokého je 48 a. Aké dlhé je pole?

156. Štvorec so stranou 7 m a obdĺžnik široký 49 dm, sú rovnako veľké. Nájdite dĺžku obdĺžnika.

157. Presvedčte sa o správnosti svojich odpovedí na úlohy 117 a 118 (str. 39) tým, že vypočítate obsahy.

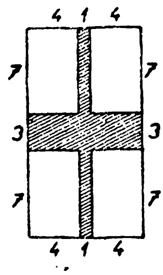
158. Sostrojte presne štvorec (dostatočne veľký). Odmerajte starostlivo dĺžku strany a dĺžku uhlopriečky. Vypočítajte obsah i na základe strany i na základe uhlopriečky. Súhlasia vám oba výsledky?

159.



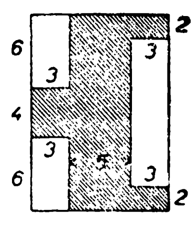
Obr. 75.

160.



Obr. 76.

161.



Obr. 77.

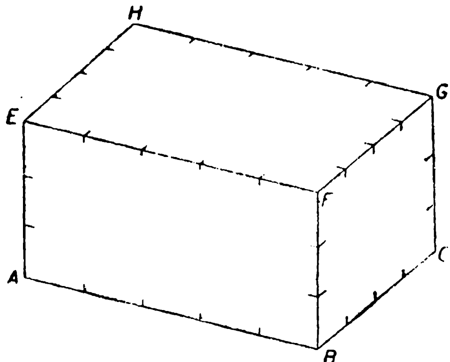
V úlohách 159 až 161 máte nájsť obsah čiarkovanej plochy odčítacím spôsobom. Jednotka 1 cm. Jednu úlohu riešte tiež rozkladom na obdĺžniky.

162. Fotografia s rozmermi 18 cm a 12 cm je nalepená na papier, ktorý má rozmery 24 cm a 18 cm. Vypočítajte obsah prázdneho pruhu.

163. Zatvorená debna 1 m dlhá, 35 cm široká a 6 dm vysoká je obitá plechom. Koľko dm² plechu sa spotrebuje?

§ 14. Objem kvádra a kocky.

Ako pri plochách meriame obsah, tak u telies meriame objem. Keď volíme za dĺžkovú jednotku 1 cm a za plošnú jednotku 1 cm^2, volíme za **priestorovú jednotku** 1 cm^3 (k u b i c k ý   c e n t i m e t e r). Je to objem kocky s hranou 1 cm alebo tiež objem telesa iného tvaru, ale rovnako veľkého ako kocka s hranou 1 cm.



Obr. 78.

Na obr. 78 máme znázornený kváder *ABCDEFGH* 5 cm dlhý, 4 cm široký a 3 cm vysoký. Nazvime ho stručne kváder **K**.

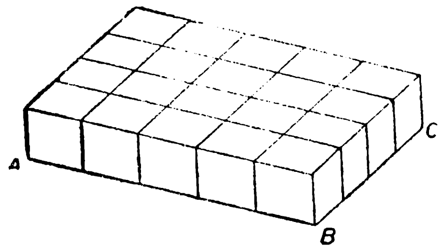
Vieme, že obdĺžnik *ABCD* sa dá rozložiť na 20 štvorcov so stranou 1 cm. Keď na každý z týchto štvorcov postavíme kocku, dostaneme kváder **L** (viď obr. 79a). Aký je teda objem kvádra **L**? Ale kváder **K** sa dá rozložiť na tri vrstvy (viď obr. 79b), z ktorých každá má tvar kvádra **L**. Aký je teda objem kvádra **K**?

Iným spôsobom sa dá kváder **K** rozložiť na štyri vrstvy **M** (viď obr. 80a, 80b).

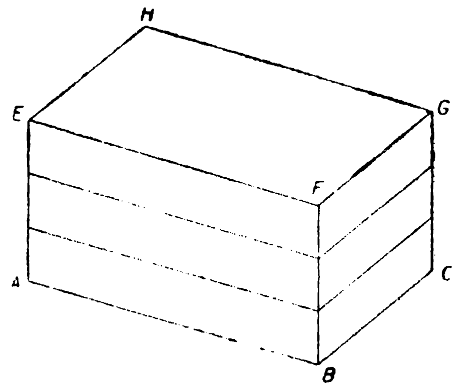
Ešte iným spôsobom sa dá kváder **K** rozložiť na päť vrstiev **N** (viď obr. 81a, 81b).

Všetky tri spôsoby vedú k rovnakému výsledku: o b j e m   k v á d r a   **K** je 60 cm^3.

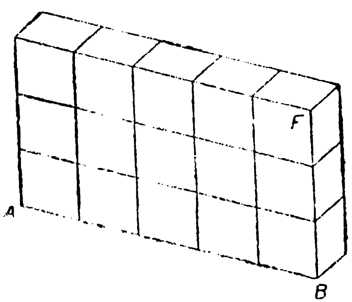
Pamätajte: O b j e m   k v á d r a   v y p o č í t a m e,   k e ď   z n á s o b í m e   m e d z i   s e b o u   v š e t k y   t r i   r o z m e r y. Pamätajte si tiež vysvetlenie: V š e t k y   t r i   r o z m e r y   m u s i a   b y ť   d a n é   v   r o v n a k ý c h   j e d n o t k á c h   d ĺ ž k o v ý c h   a   o b-



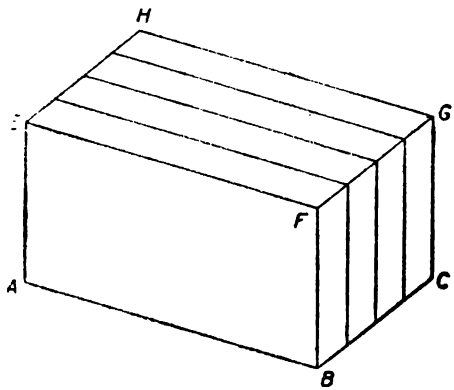
Obr. 79a.



Obr. 79b.



Obr. 80a.



Obr. 80b.

jem potom dostaneme v príslušnej jednotke priestorovej.

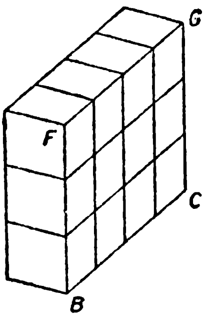
Umocniť číslo na tretiu znamená najprv umocniť ho na druhú a výsledok potom násobiť pôvodným číslom.

Objem kocky dostaneme, keď dĺžku hrany umocníme na tretiu. Aké k tomu patrí vysvetlenie?

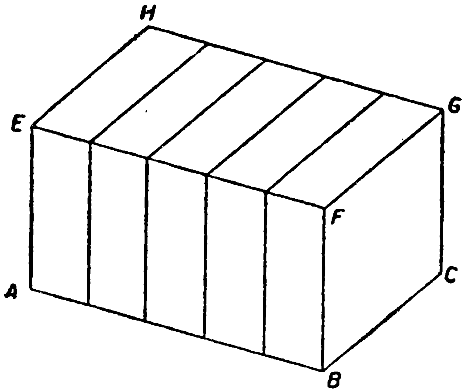
Kocka s hranou 1 dm má objem 1 dm^3. Pretože 1 dm = 10 cm a pretože desať umocnené na tretiu dáva tisíc, je 1 dm^3 = 1000 cm^3. Dĺžkovým jednotkám 1 mm, 1 cm, 1 dm, 1 m s meniteľom desať zodpovedajú **priestorové jednotky** 1 mm^3, 1 cm^3, 1 dm^3, 1 m^3 s meniteľom tisíc. Teda

1 cm^3 = 1000 mm^3, 1 dm^3 = 1000 cm^3, 1 m^3 = 1000 dm^3.

Pre prax je jednotka 1 cm^3 (tým skôr 1 mm^3) zpravidla príliš malá a jednotka 1 m^3 zasa je často príliš veľká. Zato 1 dm^3 je vhodná jednotka najmä na meranie objemu kvapalín (ale tiež drobného ovocia atď.). Pri takom meraní sa zpravidla miesto 1 dm^3 užíva názov liter (1 l).



Obr. 81a.



Obr. 81b.

Litrová nádoba nemáva tvar kocky, ale je taká veľká ako kocka s hranou 1 dm. Nie t v a r o m, ale v e ľ k o s ť o u súhlasí liter s kockou o hrane 1 dm. Väčšou jednotkou je h e k t o l i t e r (1 hl = 100 l), menšou jednotkou je d e c i l i t e r (1 l = 10 dl). 1 hl, 1 l a 1 dl sú miery **duté**. Geometricky, pravda, nie je rozdiel medzi mierami priestorovými a mierami dutými.

Cvičenie k § 14.

164. Zapíšte do slovníčka: Objem telesa. Umocniť číslo na tretiu. Priestorové jednotky . . .; meniteľ je tisíc. Miery priestorové a miery duté 1 l = 1 dm^3, 1 hl = 100 l = 100 dm^3, 1 m^3 = 10 hl, 1 l = 10 dl, 1 dl = 100 cm^3.

165. Aký objem má v n ú t r o otvorenej drevenej debny (bez veka) dlhej (zvonku) 6 dm, širokej (zvonku) 32 cm a vysokej 5 dm, keď je drevo 2 cm hrubé?

166. Aký oibjem má vnútro zatvorenej drevenej debny, keď sú vonkajšie rozmery 6 dm, 32 cm, 5 dm a keď je drevo 2 cm hrubé?

167. Aký je objem dreva pri debnách z úloh 165 a 166?

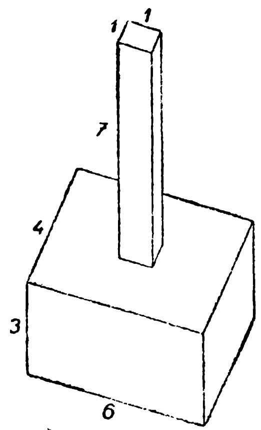
168. Aký je vnútorný p o v r c h debny z úlohy 166?

169. Vypočítajte objem telesa, znázorneného na obr. 82. Jednotka 1 cm.

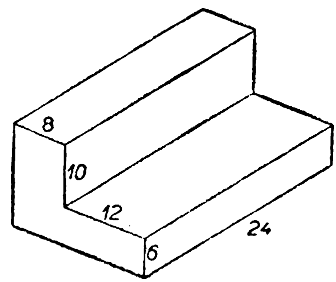
170. Nájdite povrch telesa z úlohy 169.

171. Koľko hl vody musí pretiecť do bazéna, ktorý je 25 m dlhý a 8 m široký a keď má hladina vodná vystúpiť o 18 cm?

172. Vypočítajte o b j e m telesa, znázorneného na obr. 83. Jednotka 1 dm.



Obr. 82.



Obr. 83.

173. Vypočítajte p o v r c h telesa z úlohy 172.

174. Vypočítajte najmenšie rozmery dreveného kvádra, z ktorého sa dá vyrezať teleso z úlohy 172. Koľko dreva sa musí odrezať?

§ 15. Vzájomná poloha priamok a rovín.

Keď máme na nejakej r o v i n e (napr. na rovine sošitu) dve priamky p a q, vtedy sú d v e možnosti: buď priamky p a q nemajú nijaký spoločný bod a sú r o v n o b e ž n é, alebo p a q majú jediný spoločný bod S. (Keď sú priamky p a q v sošite, môže sa stať, že bod S je neprístupný, t. j. že nevojde do sošitu). Dve priamky p a q, ktoré majú spoločný bod S, volajú sa **rôznobežné priamky**, stručne **rôznobežky.** Bod S sa volá p r i e s e č n í k oboch rôznobežiek; hovorí sa tiež, že priamky p a q sa p r e t í n a j ú v bode S.

Môžeme dvoma danými rovnobežkami vždy preložiť rovinu? Možno dvoma danými rôznobežkami preložiť vždy rovinu?

Dve priamky p a q, ktorými nemožno preložiť rovinu, volajú sa **mimobežné priamky**, stručne **mimobežky.** Ukážte v triede niekoľko párov mimobežiek.

V geometrii sa hojne užívajú písmená malej gréckej abecedy, najmä na označovanie rovín a uhlov. Nebudeme sa učiť celú grécku abecedu naraz. Teraz sa naučíme písať iba dve grécke písmená: ϱ (čítame ró) a σ (čítame sigma). Tieto dve písmená sa najčastejšie užívajú na označovanie rovín. Slovo rovina začína písmenom r, ktorému zodpovedá grécke písmeno ϱ. Písmeno σ nasleduje v gréckej abecede za písmenom ϱ.

Zvoľme si nejakú rovinu ϱ (hoci rovinu tabule). Keď priamka p je rovnobežná s niektorou priamkou, ležiacou v rovine ϱ, hovoríme, že *priamka* p *je* **rovnobežná** *s rovinou* ϱ.

Ukážte dve rovnobežky, ktoré sú rovnobežné s rovinou ϱ. Ukážte dve rôznobežky, obe rovnobežné s rovinou ϱ. Ukážte dve mimobežky, obe rovnobežné s rovinou ϱ.

Keď zvolíme v rovine ϱ bod S a rysujeme ním priamku p, ktorá neleží v rovine ϱ, vtedy priamka p má s rovinou ϱ spoločný iba bod S. Hovoríme, že priamka p je **rôznobežná** *s rovinou* ϱ. Bod S sa volá *priesečník priamky* p *s rovinou* ϱ; hovorí sa tiež, že sa priamka p a rovina ϱ *pretínajú* v bode S. Ukážte dve priamky rôznobežné s rovinou ϱ tak, aby obe priamky boly medzi sebou hoci rôznobežné.

Dve roviny ϱ a σ sú medzi sebou buď **rovnobežné** alebo **rôznobežné**: Ukážte niekoľko príkladov v triede. Dve rôznobežné roviny sa *pretínajú* v priamke, ktorá sa volá ich *priesečnica*.

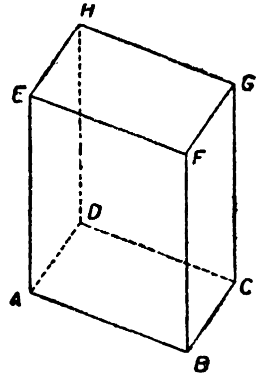
Namiesto aby sme značili rovinu gréckym písmenom, značíme ju ešte častejšie tak, že napíšeme za sebou niekoľko bodov, ktoré ležia v tejto rovine. Musíme zapísať aspoň tri body; prečo? Stačia *ktorékoľvek* tri body tejto roviny?

Zvoľme si rovinu ϱ (napr. stenu triedy, ktorá je pred vami) a mimo nej bod A. V rovine ϱ je jeden bod P, ktorý je zo všetkých bodov roviny ϱ najbližšie k bodu A. Spojme si body A a P priamkou p. V rovine ϱ si rysujme bodom P nejakú priamku q. Pretože je bod P najbližšie k A zo všetkých bodov roviny ϱ, je tým skôr bod P najbližšie k A zo všetkých bodov priamky q. Preto stoja priamky p a q na sebe kolmo. Hovoríme, že *priamka* p *stojí kolmo na rovinu* ϱ. Hovoríme tiež, že je p *kolmica spustená s bodu* A *na rovinu* ϱ a že bod P je pätou tejto kolmice. Priamka p je tiež kolmica vztýčená k rovine ϱ v bode P.

Keď spustíme s bodu A kolmicu p na rovinu ϱ a keď rysujeme pätou tejto kolmice na rovine ϱ ľubovoľnú priamku q, stoja tieto priamky na sebe kolmo.

Všimnime si model kvádra. Keď podržíme kváder tak, aby sa dotýkal podložky len jedným vrcholom, keď je teda tento vrchol zo všetkých ôsmich vrcholov najnižšie, vtedy protiľahlý vrchol kvádra je ten, ktorý je zo všetkých najvyššie.

Vymenujte dvojice protiľahlých vrcholov kvádra $ABCDEFGH$ (viď obr. 84).



Obr. 84.

Úsečka, ohraničená dvoma protiľahlými vrcholmi kvádra, volá sa **uhlopriečkou kvádra.** Určitejšie hovoríme **telesná uhlopriečka** na rozdiel od **uhlopriečok stenových**, t. j. od uhlopriečok jednotlivých stien. Koľko telesných uhlopriečok má kváder na obr. 84? Vymenujte ich. Koľko má stenových uhlopriečok? Vymenujte ich.

Všimnime si bližšie dvoch telesných uhlopriečok, napr. BH a CE. Vidíte, že bod B je zo všetkých bodov roviny $ABFE$ najbližšie k bodu C. Preto priamka BC je kolmá na rovinu $ABFE$ a päta tejto kolmice je B. Teda priamka BC stojí kolmo na každú priamku roviny $ABFE$, prechádzajúc bodom B. Najmä je $BC \perp BE$. Podobne sa presvedčíme, že $BC \perp CH$, ďalej že $EH \perp EB$ a konečne, že $EH \perp CH$. Čím je teda štvoruholník $BCHE$? Čo sú v ňom úsečky BH a CE? Čo vieme o uhlopriečkach obdĺžnika?

Výsledok: Všetky štyri telesné uhlopriečky sú rovnako dlhé a rozpolťujú sa navzájom. Majú teda spoločný stred S. Bod S sa volá stred kvádra $ABCDEFGH$.

Cvičenie k § 15.

175. Zapíšte do slovníčka: Dve priamky sú navzájom buď rovnobežné, alebo rôznobežné, alebo mimobežné. Rovnobežky, rôznobežky, mimobežky. Priamka rovnobežná s rovinou. Priamka rôznobežná s rovinou. Dve roviny sú navzájom buď rovnobežné alebo rôznobežné. Priesečník dvoch priamok, priesečník priamky s rovinou. Priesečnica dvoch rovín. Priamka kolmá na

rovinu. Vztýčiť kolmicu k rovine *ABC* v bode *A*. Spustiť kolmicu na rovinu *ABC* s bodu *D*. Päta kolmice. Protiľahlé vrcholy kvádra. Telesné uhlopriečky kvádra. Stenové uhlopriečky kvádra. Stred kvádra.

176. Napíšte dva riadky písmen ϱ a dva riadky písmen σ.

177. Naznačte dvoma ceruzami: dve rovnobežky, dve rôznobežky, dve mimobežky.

178. Naznačte ceruzou a sošitom rozličné vzájomné polohy priamky a roviny.

179. Držte ceruzu tak, aby sa opierala o sošit v bode *S*. Možno rysovať v sošite bodom *S* priamku kolmú na priamku, znázornenú ceruzou? Koľko je takýchto kolmíc?

180. Narysujte si starostlivo priemet kvádra a presvedčte sa, že i v priemete prechádzajú všetky štyri uhlopriečky jedným bodom, a že sa navzájom rozpolťujú.

181. Narysujte si vedľa seba tri rovnaké priemety kvádra *ABCDEFGH*. Vymenujte všetky štyri telesné uhlopriečky. Na jednom priemete vyznačte obdĺžnik, ktorý má uhlopriečky *BH* a *CE*, na druhom obdĺžnik s uhlopriečkami *BH* a *AG*, na treťom obdĺžnik s uhlopriečkami *BH* a *DF*.

Úlohy 182 a 188 sa týkajú kvádra *ABCDEFGH*. Pri každej úlohe si urobte náčrt priemetu kvádra a odpovedajte podľa predstavy o priemete. Pri každej úlohe nový obrazec. Ale všetky obrazy nech nie sú rovnaké.

182. Napíšte za sebou všetky hrany kvádra. Začnite hranou *AB*, potom píšte hrany rovnobežné s *AB*, ďalej hrany rôznobežné s *AB*, napokon hrany mimobežné s *AB*.

183. Opakujte úlohu 182, ale s hranou *BF* namiesto hrany *AB*.

184. Vymenujte bod priamky *AD* a bod priamky *CF* tak, aby tieto body boly čo najbližšie k sebe.

185. Akú vzájomnú polohu majú roviny *ADF* a *BEH*? Je ich priesečnica rovnobežná s niektorou hranou kvádra? Ktoré steny pretne?

186. Akú vzájomnú polohu k priamke *AC* majú jednotlivé telesné uhlopriečky?

187. Možno osmorým spôsobom určiť trojicu hrán tak, aby každé dve hrany v rovnakej trojici boly mimobežné. Jedna takáto trojica je *AB*, *CG*, *EH*. Nájdete všetkých sedem ostatných takýchto trojíc?

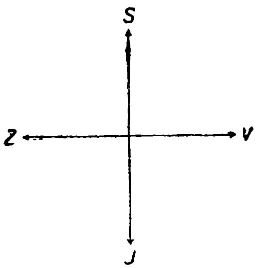
188. Zvoľte si dva protiľahlé vrcholy. Môžete prebehnúť jedným ťahom všetky tie hrany, ktoré nejdú ani jedným z oboch zvolených vrcholov?

§ 16. Svetové strany.

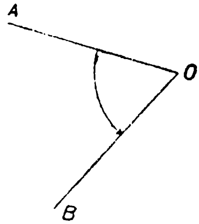
Tieň svislej tyče na vodorovnú rovinu ukazuje na pravé poludnie k s e v e r u. Keď sa obrátime čelom k severu, máme napravo od seba v ý c h o d a naľavo z á p a d ; naproti severu je j u h.

Sever, juh, východ a západ sú svetové strany; značky S. J, V, Z. Na mapách a plánoch zobrazujeme sever svisle hore. Ako teda zobrazujeme ostatné svetové strany (viď obr. 85)?

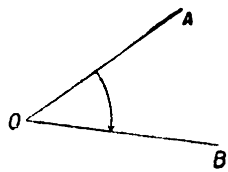
Ako určíme svetové strany podľa hviezd?



Obr. 85.



Obr. 86a.



Obr. 86b.

Označte si (v mysli) písmenom *O* svoje miesto v triede; označte si (v mysli) písmenami *A*, *B* dve určité miesta v triede. Postavte sa vo smere *OA* (t. j. na mieste *O* sa postavte tak, že sa pozeráte na miesto *A*). Teraz sa otáčajte (na mieste *O*), až sa postavíte do smeru *OB*. Hovoríme, že ste sa otočili o uhol *AOB*. (Musíme dávať pozor na poriadok písmen. Ktoré písmeno značí vaše miesto?)

Sú dva smery otáčania: otáčanie doľava (viď obr. 86a) a otáčanie doprava (viď obr. 86b). Ručičky na hodinách sa otáčajú doprava.

Pri porovnávaní veľkosti uhlov môžeme vziať za jednotku uhol pravý. Pre pravý uhol používame značku *R*. (Je to začiatočné písmeno latinského slova rectus, ktoré znamená pravý.) Keď sa otočíme o *2R*, obrátime sa práve čelom dozadu; hovoríme, že sme sa otočili o **uhol priamy.** Keď sa otočíme o *4R*, dostaneme sa zpät do pôvodného smeru; hovoríme, že sme sa otočili o **uhol plný.**

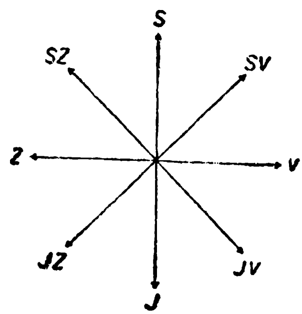
Postavte sa smerom na sever a otočte sa doprava o uhol $\frac{1}{2}$ *R*. Teraz stojíte smerom k severovýchodu, značku SV, čo je teda práve v polovici medzi S a V. Podobne máme severozápad SZ, juhovýchod JV a juhozápad JZ.

189. Zapíšte do slovníčka: Sever S, ..., ..., juhozápad JZ. Pravý uhol *R*. Priamy uhol 2*R*. Plný uhol 4*R*. Otáčanie doprava. Otáčanie doľava.

190. Opíšte a doplňte: Uhol pravý je ... uhla priameho. Uhol priamy je ... uhla plného. Uhol pravý je ... uhla plného.

V úlohách 191 až 200 vymenujte veľkosť uhlov pri daných otáčaniach. Jednotka *R*. Načrtnite si v sošite obrazec podľa obr. 87.

191. Od J doprava k Z.
192. Od Z doprava k V.
193. Od V doľava k J.
194. Od J doprava k SZ.
195. Od Z doľava k SV.
196. Od JV doprava k SZ.
197. Od JZ doľava k SZ.
198. Od SV doprava k J.
199. Od S doľava k V.
200. Od SZ doľava k Z.



Obr. 87.

V úlohách 201 až 212 vymenujte konečný smer, do ktorého sa dostanete z daného smeru daným otočením.

201. Od J doprava o *R*.
202. Od V doprava o 2*R*.
203. Od Z doľava o 3*R*.
204. Od S doľava o 5*R*.
205. Od J doprava o $\frac{1}{2}$ *R*.
206. Od Z doľava o 2 $\frac{1}{2}$ *R*.
207. Od V doľava o 3 $\frac{1}{2}$ *R*.
208. Od S doprava o 4 $\frac{1}{2}$ *R*.
209. Od JV doprava o 3*R*.
210. Od SV doprava o 2 $\frac{1}{2}$ *R*.
211. Od SZ doľava o 1$\frac{1}{2}$ *R*.
212. Od JZ doľava o 3 $\frac{1}{2}$ *R*.

V úlohách 213 až 216 máte povedať, o aký uhol sa otočí veľká hodinová ručička za určený čas. Jednotka *R*.

213. Za hodinu.
214. Za tridsať minút.
215. Za päť minút.
216. Za 2 $\frac{1}{2}$ hodiny.

V úlohách 217 až 220 máte povedať, o aký uhol sa otočí malá hodinová ručička za určený čas. Jednotka *R*.

217. Za šesť hodín.
218. Za štyri hodiny.
219. Za hodinu.
220. Za 30 minút.

221. Muž kráča k juhu, na križovatke sa obráti k juhovýchodu a na ďalšej križovatke sa obráti k juhozápadu. Naznačte obrazcom od ruky. Vyznačte (ako na obr. 86) oblúčikom a šípkou uhly, o ktoré sa otočí na križovatkách. Aké veľké sú tieto uhly?

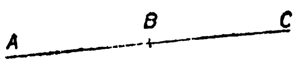
§ 17. Uhly.

Narysujte si priamku a zvoľte si na nej bod B. Zvolený bod rozdelí priamku na dve **polopriamky.** Teda polopriamka je priama čiara, ktorá je len na jednej strane ohraničená. Napr. na obr. 88 rozdelí bod B priamku ABC na polopriamky BA a BC. (Bod B píšeme najprv.)

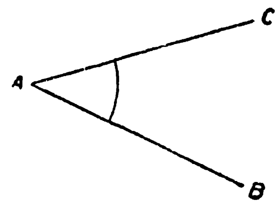
Uhol má dve **ramená** a jeden **vrchol.** Vrchol uhla je *bod*, ramená uhla sú *polopriamky.* Obe ramená *vychádzajú z vrcholu.* Napr. na obr. 89 máme uhol s vrcholom A a ramenami AB a AC. Značíme ho

$$\sphericalangle BAC \text{ alebo } \sphericalangle CAB.$$

$\sphericalangle$ je značka pre uhol. Vrchol sa píše vždy *uprostred.*



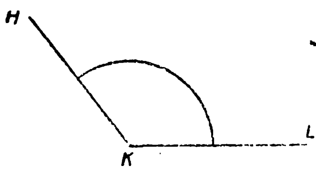
Obr. 88.



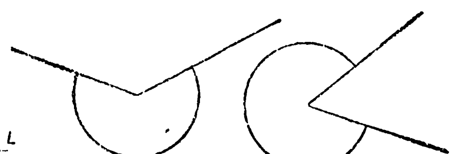
Obr. 89.

Uhol na obr. 89 je **ostrý.** To znamená, že je menší ako uhol pravý. Naproti tomu $\sphericalangle HKL$ na obr. 90 je **tupý**; je väčší ako uhol pravý, ale je menší ako uhol priamy. Spoločný názov pre uhly ostré a tupé je: **uhly kosé.**

Na obrazcoch rysujeme pri každom uhle obyčajne oblúčik kružnice, ktorý spojuje obe ramená (na obr. 89 a 90). Stred kružnice



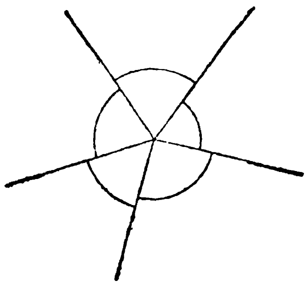
Obr. 90.


Obr. 91.

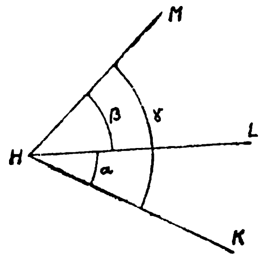
je vo vrchole uhlu, polomer je ľubovoľný. Keď chceme naznačiť, ktoré rameno je prvé, teda či uhol vznikol otáčaním doprava alebo doľava, robíme na konci oblúčika šípku (viď obr. 86). Ale obyčajne na tom nezáleží a šípku nerobíme.

Uhly, ktoré sú menšie ako uhol priamy, teda uhly ostré, pravé a tupé, sa vyskytujú najčastejšie. Nazývajú sa spoločným menom **uhly duté.** V menšej miere sa vyskytujú **uhly vypuklé** (viď obr. 91). To sú uhly väčšie ako uhol priamy, ale menšie ako uhol plný.

Zvoľte si bod a rysujte ním niekoľko polopriamok. Dve susedné polopriamky tvoria vždy uhol (viď obr. 92). Koľko merajú spolu všetky tieto uhly? Keď poznáme veľkosť všetkých uhlov až na jeden, môžeme ostávajúci uhol vypočítať.



Obr. 92.



Obr. 93.

Označenie uhlov troma písmenami, napr. ∢ BAC, je často nepohodlné a neprehľadné. Preto značíme často u h l y j e d i n ý m písmenom. Pri tom používame m a l ý c h p í s m e n g r é c k e j a b e c e d y. Najmä sa používajú pre uhly prvé štyri písmená tejto abecedy. Sú to písmená α (čítame alfa), β (čítame beta), γ (čítame gama), δ (čítame delta). Tieto štyri grécke písmená musíte dobre poznať. Ktoré dve grécke písmená už poznáte?

Keď označujeme uhol gréckym písmenom, nerobíme už značku ∢. Na obr. 93 je ∢ $KHL = \alpha$, ∢ $LHM = \beta$, ∢ $KHM = \gamma$.

Všimnite si, že na obr. 93 je narysovaný každý oblúčik s iným polomerom a že je každé grécke písmeno umiestené tesne pri tom oblúčku, ku ktorému patrí. Keď máme ako na obr. 93 niekoľko uhlov s rovnakým vrcholom, rysujeme veľký obrazec, aby popis bol zreteľný.

Cvičenie k § 17.

222. Zapíšte do slovníčka: Polopriamka UV. Uhol BCD má vrchol C a ramená CB, CD. Značka pre uhol: ∢. Duté uhly sú pravé a kosé. Kosé uhly sú ostré a tupé. Keď $\alpha < R$, α je uhol ostrý. Keď $\beta = R$, β je uhol pravý. Keď $R > \gamma > 2R$, γ je uhol tupý. Keď $\delta = 2R$, δ je uhol priamy. Keď $2R < \alpha < 4R$, α je uhol vypuklý. Keď $\beta = 4R$, β je uhol plný.

223. Napište dva riadky písmen α, dva riadky písmen β, dva riadky písmen γ a dva riadky písmen δ.

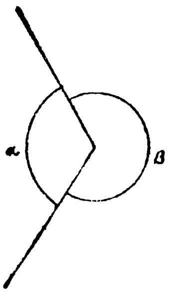
224. Aký veľký je vypuklý uhol medzi JV a Z?

Úlohy 225 až 227 sa vzťahujú na obr. 94.

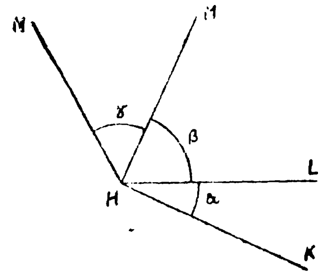
225. Keď $\alpha = 1\frac{1}{4} R$, koľko je β?

226. Keď $\beta = 2\frac{1}{3} R$, koľko je α?

227. Keď $\beta = 2\alpha$, koľko je α?



Obr. 94.



Obr. 95.

Úlohy 228 a 232 sa vzťahujú na obr. 95. Nakreslite si vlastný obrazec.

228. Keď $\alpha = \frac{1}{4} R$, $\beta = \frac{3}{4} R$, aký je $\sphericalangle KMH$?

229. Vypočítajte γ, keď $\sphericalangle LHN = 1\frac{1}{3} R$, $\sphericalangle LHM = R$,

230. Napíšte gréckymi písmenami, že $HK \perp HM$.

231. Vypočítajte β a γ, keď $\sphericalangle KHL = \frac{2}{3} R$, $\sphericalangle KHM = R$, $\sphericalangle KHN = 1\frac{1}{3} R$.

232. Keď $\alpha = \frac{1}{3} R$, $\beta = \frac{2}{3} R$, $\gamma = \frac{1}{2} R$, vypočítajte: najprv vypuklý uhol s ramenami HK a HN, potom vypuklý uhol s ramenami HL a HM.

§ 18. Prenášanie uhlov.

Narysujte si trojuholník EFG (viď obr. 96). Uhly $\sphericalangle FEG$, $\sphericalangle EFG$, $\sphericalangle EGF$ (na obrazci vyznačené oblúčikmi) sa volajú **vnútorné uhly trojuholníka** EFG alebo stručne **uhly trojuholníka** EFG. Uhol FEG napr. je uhol pri vrchole E a je to uhol proti strane FG.

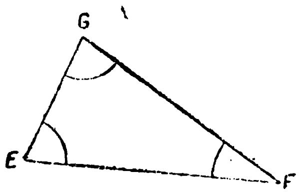
Veľmi často sa značia (viď obr. 97) vrcholy trojuholníka písmenami ABC a uhly písmenami α, β, γ tak, že α je uhol pri vrchole A, β je uhol pri vrchole B, γ je uhol pri vrchole C. Ale nebolo by dobre, keby ste si už teraz zvykali na pevné označovanie.

V sošite máte narysovaný trojuholník EFG (viď obr. 96). Narysujte si na list papiera trojuholník ABC (viď obr. 97) tak, aby bolo

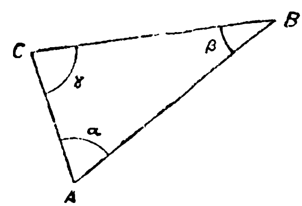
$$\overline{AB} = \overline{EF},\ \overline{AC} = \overline{EG},\ \overline{BC} = \overline{FG}.$$

Už sme hovorili o tom, že trojuholníky ABC a EFG sú **shodné.** Môžeme vystrihnúť trojuholník ABC a položiť ho na trojuholník EFG tak, že vrchol A padne na vrchol E, vrchol B padne na vrchol F a vrchol C padne na vrchol G. Urobte to. Vidíte, že sa vám kryjú nielen vrcholy a strany oboch trojuholníkov, ale tiež uhly. **Shodné trojuholníky majú rovnaké uhly.**

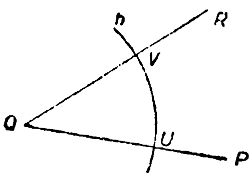
Tento poznatok použijeme na **prenesenie daného uhla,** a to lineárom a kružidlom bez vystrihovania. Pri tom sa používa s výhodou trojuholník rovnoramenný.



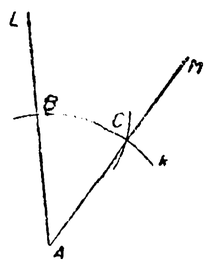
Obr. 96.



Obr. 97.



Obr. 98a.



Obr. 98b.

Zvoľte si v sošite ∢ PQR (viď obr. 98a) a polopriamku AL (viď obr. 98b). Chceme sostrojiť uhol, ktorý je rovnako veľký ako ∢ PQR a ktorého jedným ramenom je daná polopriamka AL (takže vrchol je v bode A).

Narysujte zo stredu Q kružnicu h s ľubovoľným, ale dostatočne veľkým polomerom r. Kružnica h pretne rameno QP daného uhla v bode U a rameno QR v bode V (viď obr. 98a). Tak nám vznikne rovnoramenný trojuholník QUV so základňou UV a s ramenami QU a QV. Daný ∢ PQR je uhol proti základni v trojuholníku QUV.

Aby sme daný uhol preniesli na predpísané miesto, treba sostrojiť iba rovnoramenný trojuholník ABC shodný s trojuholníkom QUV. Základňa bude BC a ramená budú AB a AC. Prenesený uhol bude uhol pri vrchole A v trojuholníku ABC. Pretože jedným ramenom žiadaného uhla má byť polopriamka AL, musíme trojuholník ABC sostrojiť tak, aby vrchol B ležal na tejto polopriamke.

Dĺžka ramien AB a AC rovnoramenného trojuholníka ABC musí byť rovnaká ako dĺžka ramien QU a QV rovnoramenného trojuholníka QUV, teda ako polomer r kružnice h. Narysujme (viď obr. 98b) zo stredu A kružnicu k zasa s polomerom r. Body B a C sú na kružnici k. Bod B je okrem toho na polopriamke AL, takže jeho poloha je už určená. Aby sme dostali i bod C, musíme si ešte pripomenúť, že základňa BC trojuholníka ABC musí byť rovnako dlhá ako základňa UV trojuholníka QUV. Pretnime teda kružnicu k s oblúkom zo stredu B a s polomerom UV. Tak dostaneme bod C (viď obr. 98b) a treba už len spojiť A s C, aby sme dostali druhé rameno AM uhla LAM, ktorý sa rovná uhlu PQR a ktorého jedným ramenom je polopriamka AL.

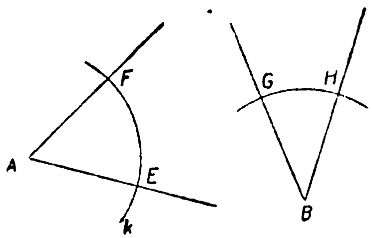
$\sphericalangle$ LAM vznikne otáčaním ramena AL d o p r a v a. Úlohe vyhovuje ešte jeden $\sphericalangle$ LAN (na obr. 98b nevyznačený), ktorý vznikne otáčaním ramena AL d o ľ a v a. Sostrojte v sošite tiež $\sphericalangle$ LAN.

Túto jednoduchú konštrukciu, ktorú ste práve spoznali, musíte sa naučiť šikovne robiť. Aby bola presná, musí sa polomer r kružníc h a k voliť d o s t a t o č n e v e ľ k ý. Prečo?

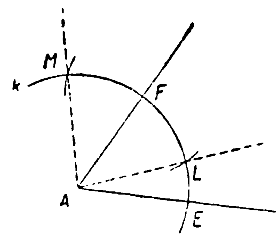
Rovnakou konštrukciou môžeme riešiť aj iné úlohy. Keď máme napr. rozhodnúť, ktorý z oboch uhlov na obr. 99a je väčší, narysujeme ako na obrazci rovnakým polomerom dva oblúky. Kde sú stredy? Potom porovnávame dĺžky $\overline{EF}$ a $\overline{GH}$. Keď je $\overline{EF} > \overline{GH}$, vtedy uhol pri vrchole A je väčší ako uhol pri vrchole B.

Keď dĺžkou $\overline{GH}$ ako s polomerom narysujeme kružnicu zo stredu F, dostaneme dva body L a M kružnice, ktorá je označená k na obr. 99a a 99b.

Vysvetlite sami, prečo $\sphericalangle$ EAM na obr. 99b je súčtom oboch uhlov z obr. 99a a prečo $\sphericalangle$ EAL na obr. 99b je rozdielom týchto dvoch uhlov. Vieme teda **graficky sčítať** a **graficky odčítať** dané



Obr. 99a.



Obr. 99b.

uhly. Ako by ste sostrojili grafický d v o j n á s o b o k daného uhla? Ako t r o j n á s o b o k?

Cvičenie k § 18.

233. Zapíšte do slovníčka: Vnútorné uhly trojuholníka. Prenesenie uhlu. Grafické sčítanie a odčítanie uhlov. Grafické násobenie uhla číslom.

234. Sostrojte si rovnostranný trojuholník so stranou 5 cm a presvedčte sa graficky, že jeho všetky tri uhly sú rovnaké.

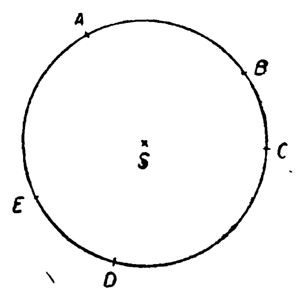
235. Sostrojte si rovnoramenný trojuholník ABC so základňou $\overline{BC} =$ 42 mm a ramenami 63 mm. Presvedčte sa graficky, že uhly pri vrcholoch B a C sú rovnaké.

236. Zvoľte si priamku p a na nej bod H. Sostrojte uhol taký veľký ako $\sphericalangle ABC$ z úlohy 235 tak, aby vrchol bol H a jedno rameno bolo v priamke p. Urobte všetky štyri riešenia.

237. Zvoľte si body K, L a M tak, aby bolo $LK \perp LM$, $\overline{LK} = 5$ cm, $\overline{LM} = 2$ cm. Koľko ráz musíte zväčšiť $\sphericalangle LKM$, aby ste dostali uhol tupý? Koľko ráz, aby ste dostali uhol vypuklý?

238. Sostrojte trojuholník BCD shodný s rovnako označeným trojuholníkom na obr. 8 (str. 8). Označte β, γ a δ uhly pri vrcholoch B, C a D. Sostrojte graficky tieto tri uhly: $\delta - 2\gamma$, $\delta - 3\beta$, $2\beta + 3\gamma$.

239. Na kružnici (dostatočne veľkej) so stredom S si zvoľte päť bodov ako na obr. 100. Porovnajte uhly: $\sphericalangle ACE$, $\sphericalangle ADE$, $\sphericalangle ABE$. Zapíšte, čo ste dostali.



Obr. 100.

240. Sostrojte graficky dvojnásobok $\sphericalangle ACE$ z cvičenia 239 a porovnajte ho s $\sphericalangle ASE$. Zapíšte, čo ste dostali.

§ 19. Meranie uhlov.

Pre prax je R veľmi veľká uhlová jednotka. Zpravidla sa používa jednotka deväťdesiat ráz menšia, ktorá sa volá **stupeň.** Značka pre stupeň je malá nula hore vpravo od číslice. Teda

$$R = 90°,\quad 2R = 180°,\quad 3R = 270°,\quad 4R = 360°,$$

$$\tfrac{1}{2}R = 45°,\quad \tfrac{1}{3}R = 30°,\quad \tfrac{2}{3}R = 60°,\quad \tfrac{1}{4}R = 22\tfrac{1}{2}°.$$

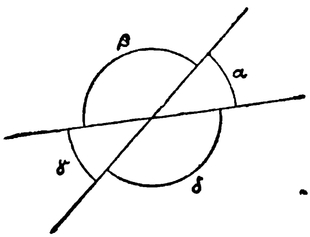
Dva uhly, ktoré spolu dávajú 180°, volajú sa **výplnkové.** Teda 70° a 110° sú výplnkové uhly, $\frac{2}{3}R$ a $\frac{4}{3}R$ sú výplnkové uhly.

Pri jemných meraniach sa používa ešte i menších jednotiek, zvaných **minúta** (uhlová) a **sekunda** (uhlová). Značka pre minútu je čiarka hore vpravo pri číslici, pre sekundu dve takéto čiarky. Je

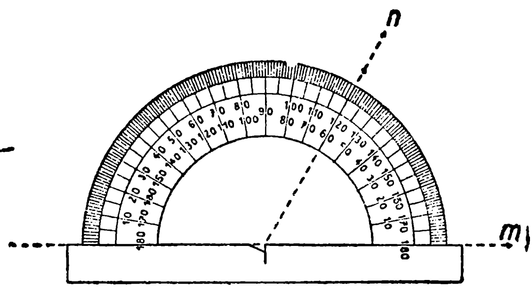
$$1° = 60',\quad 1' = 60''.$$

My budeme merať len na stupne.

Narysujte si dve rôznobežky. Dostanete štyri uhly. Označte si ich ako na obr. 101. Hovoríme, že α a β sú dva **vedľajšie uhly** a že



Obr. 101.



Obr. 102.

α a γ sú dva **vrcholové uhly.** Celkom máte vo svojom obrazci štyri páry vedľajších uhlov a dva páry vrcholových uhlov. Vymenujte ich všetky. Dokážete vysvetliť vlastnými slovami (bez ukazovania na obrázok), kedy sú dva uhly vedľajšie? Dokázali by ste to pre uhly vrcholové?

Vedľajšie uhly α a β tvoria spolu uhol priamy. Teda vedľajšie uhly sú výplnkové. To si zapamätajte. Sú dva výplnkové uhly vždy vedľajšie?

Na obr. 101 sú α a β dva vedľajšie uhly. Tiež β a γ sú vedľajšie uhly. Teda

$$\alpha + \beta = 180^\circ, \text{ takže } \alpha = 180^\circ - \beta,$$
$$\beta + \gamma = 180^\circ, \text{ takže } \gamma = 180^\circ - \beta.$$

Teda $\alpha = \gamma$. Ale aké uhly sú α a γ? Vrcholové uhly sú si rovnaké. Toto si dobre zapamätajte. Keď otvárame nožnice, vznikajú dva vrcholové uhly. Nemusíme nič počítať, aby sme sa presvedčili, že sú rovnaké: oba uhly vznikly rovnakým otáčaním.

V sošite meriame uhly **uhlomerom** (viď obr. 102).

Na uhlomeri čítame vždy dva údaje, ktoré majú súčet 180. Vysvetlite, prečo je to a ako poznáte, ktorý z dvoch údajov máte čítať.

Ako narysujete podľa uhlomeru uhol predpísanej veľkosti?

Cvičenie k § 19.

241. Zapíšte do slovníčka: Výplnkové uhly. Vedľajšie uhly. Vrcholové uhly.

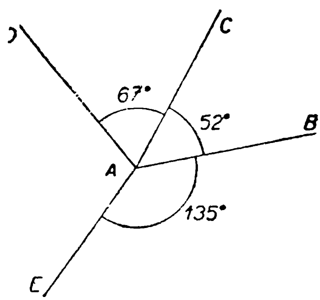
242. Vyjadrite v stupňoch:
$\frac{2}{5}$ R, $\frac{3}{4}$ R, $1\frac{1}{3}$ R, $1\frac{2}{5}$ R, $2\frac{3}{5}$ R, $3\frac{1}{4}$ R.

243. Vyjadrite pomocou pravého uhla:
60^0, 15^0, 210^0, $22\frac{1}{2}{}^0$, 135^0, 270^0, 315^0.

244. Vymenujte uhly výplnkové k uhlom:
97^0, 36^0, 130^0, 48^0, 148^0, 100^0, 1^0.

245. Sostrojte pomocou uhlomeru v rozličných polohách uhly:
55^0, 38^0, 142^0, 200^0, 300^0.

246. Podobne sostrojte uhly:
100^0, 72^0, 85^0, 330^0, 254^0.

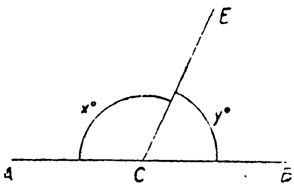


Obr. 103.

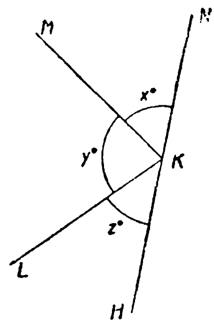
247. Na obr. 8 (str. 8) odmerajte: $\sphericalangle$ *ACB*, $\sphericalangle$ *CDB*, vypuklý uhol *ABD*. Zapíšte svoje výsledky. Porovnávajte výsledky triedy.

248. Vypočítajte $\sphericalangle$ *DAE* na obr. 103.

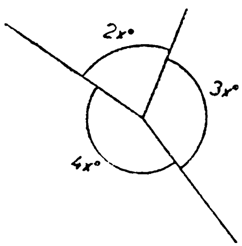
249. Nakreslite obrazec, v ktorom vychádza z bodu *S* za sebou šesť polopriamok *SA, SB, SC, SD, SE, SF* tak, že $\sphericalangle ASB = 43^0$, $\sphericalangle BSC = 67^0$, $\sphericalangle CSD = 70^0$, $\sphericalangle DSE = 59^0$, $\sphericalangle ESF = 51^0$. Zapíšte veľkosti uhlov do svojho obrazca. Rozhodnite najprv výpočtom, či by pri presnom rysovaní čiara *ASD* bola priama, potom, či by čiara *BSE* bola priama a konečne, či by čiara *CSF* bola priama.



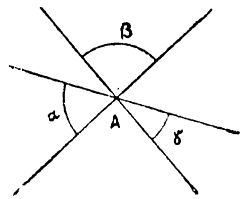
Obr. 104.



Obr. 105.



Obr. 106.



Obr. 107.

Úlohy 250 až 255 riešte najprv výpočtom, potom sostrojte pomocou uhlomeru presný obrazec.

Úlohy 250 až 252 sa vzťahujú na obr. 104 (str. 65). Čiara ABC je priama.

250. Keď $y = 72$, koľko je x?

251. Keď $x = 134$, koľko je y?

252. Keď $x = 2y$, koľko je y?

Úlohy 253 až 255 sa vzťahujú na obr. 105 (str. 68). Čiara HKN je priama.

253. Keď $x = 52$ a $y = 62$, koľko je z?

254. Keď $y = z = 57$, koľko je x?

255. Keď $y = z = 2x$, koľko je x?

256. Keď máte obrazec podobný ako na obr. 105, ale neviete, či čiara HKN je priama, čo o tom môžete povedať, keď nameriate $x = 40$, $y = z = 70$? Čo keď nameriate $x = 30$, $y = 85$, $z = 75$?

257. Na obr. 106 nájdite, koľko je x.

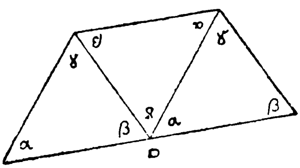
258. Na obr. 107 sú tri priamky, prechádzajúce bodom A. Nájdite α, keď $\beta = 72^0$, $\gamma = 36^0$.

259. Na obr. 107 je $\alpha = 4x^0$, $\beta = 5x^0$, $\gamma = 3x^0$. Nájdite x.

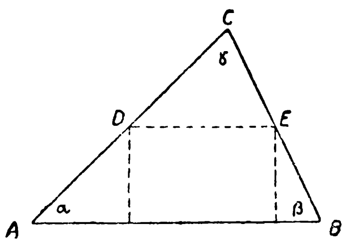
§ 20. Súčet uhlov v trojuholníku.

Vezmite list papiera a dva razy ho složte, aby ste mali tri papiere nad sebou. Na vrchnom papieri si narysujte ľubovoľný trojuholník a vystrihnite. Dostanete t r i celkom rovnaké (shodné) trojuholníky. Označte ich uhly tak, že v pôvodnej polohe by boly tri α nad sebou, tri β nad sebou a tri γ nad sebou. Položte (viď obr. 108) všetky tri trojuholníky vedľa seba tak, aby určitý bod P bol vrcholom uhla α prvého trojuholníka, uhla β druhého trojuholníka a uhla γ tretieho trojuholníka. Aký uhol $\alpha+\beta+\gamma$ vám vznikol pri vrchole P?

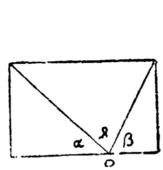
Narysujte si na list papiera trojuholník ABC (dostatočne veľký). N a r u b poznačte značky α, β a γ pre uhly. Nájdite stred D strany AC a stred E strany BC. Složte papier pozdĺž úsečiek čiarkovaných na obr. 109a, takže dostanete obr. 109b. Aký uhol $\alpha+\beta+\gamma$ vám vznikol pri vrchole P?



Obr. 108.



Obr. 109a.



Obr. 109b.

Odmerajte uhlomerom uhly trojuholníka ABC na obr. 8 (str. 8) a výsledky sčítajte. Opakujte s trojuholníkom BCD na obr. 8 (str. 8).

Pamätajte: S ú č e t v š e t k ý c h t r o c h u h l o v t r o j u h o l n í k a s a r o v n á $180°$ ($= 2R$).

Trojuholník je ostrouhlý, keď všetky tri jeho uhly sú ostré. Trojuholník je pravouhlý, keď má jeden uhol pravý. Trojuholník je tupouhlý, keď má jeden uhol tupý. Spoločný názov pre trojuholníky ostrouhlé a tupouhlé je: trojuholníky kosouhlé. Prečo?

Prečo má každý trojuholník aspoň dva uhly ostré?

Pamätajte: S ú č e t o b o c h o s t r ý c h u h l o v p r a v o u h l é h o t r o j u h o l n í k a s a r o v n á $90°$ ($= R$). Dva uhly, ktoré majú súčet $90°$, volajú sa **uhly doplnkové.** Čo to boly výplňkové uhly?

Naučte sa písať ešte štyri grécke písmená: ε (čítame epsilon), φ (čítame fí), ψ (čítame psí), ω (čítame omega).

Cvičenie k § 20.

260. Zapíšte do slovníčka: Doplnkové uhly. Ostrouhlý trojuholník. Tupouhlý trojuholník. Kosouhlé trojuholníky.

261. Napíšte dva riadky písmen ε, dva riadky písmen φ, dva riadky písmen ψ a dva riadky písmen ω.

262. Pravouhlý trojuholník má jeden uhol

a) 52^0; b) 39^0; c) 80^0; d) 27^0; e) 36^0.

Vymenujte veľkosť druhého ostrého uhla.

263. Vymenujte veľkosť tretieho uhla trojuholníka, keď dva uhly sú:

a) 52^0, 68^0; b) 112^0, 36^0; c) 8^0, 3^0; d) 90^0, 47^0.

264. Povedzte, či môže mať trojuholník tieto uhly:

a) 46^0, 65^0, 80^0; b) 43^0, 64^0, 73^0; c) 95^0, 95^0, x^0.

265. Nájdite x, keď uhly trojuholníka sú:

a) x^0, $2x^0$, $3x^0$;

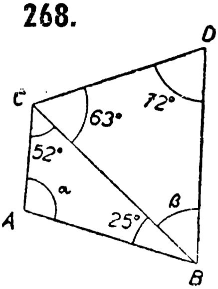
b) $3x^0$, $4x^0$, $5x^0$.

266. Nájdite x, keď uhly trojuholníka sú:

x^0, $(x+35)^0$, $(x+25)^0$.

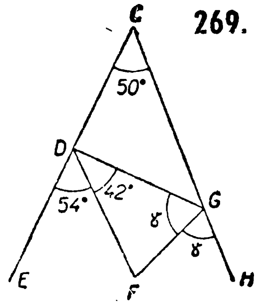
267. V trojuholníku ABC je uhol α väčší ako $\beta + \gamma$. Môže byť trojuholník ostrouhlý?

268.



Obr. 110.

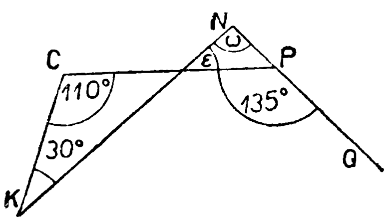
269.



Obr. 111.

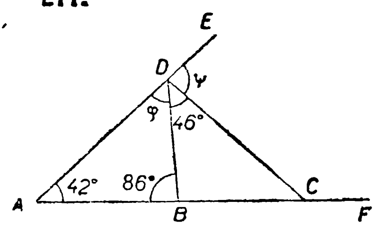
V úlohách 268 a 271 máte vypočítať, aké veľké sú uhly, označené gréckymi písmenami. Kreslite vždy sami svoj obrazec. (Nemusí byť presný, ale nech je úhľadný.)

270.



Obr. 112.

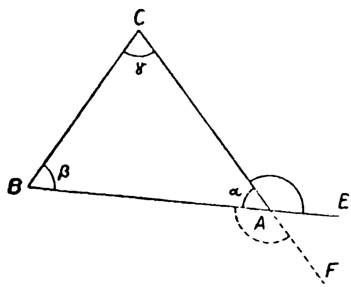
271.



Obr. 113.

§ 21. Vonkajšie uhly trojuholníka.

Narysujte si trojuholník ABC (viď obr. 114) a uhly označte α, β, γ. Predĺžte stranu BA za obvod A. Uhol CAE sa volá **vonkajší uhol trojuholníka** ABC p r i v r c h o l e A. Mohli sme namiesto strany BA tiež predĺžiť stranu CA za bod A (čiarkované na obr. 114). Potom by sme namiesto $\sphericalangle CAF$ dostali $\sphericalangle BAF$ Tieto dva uhly sú však rovnaké Prečo?



Obr. 114.

Uhly α a $\sphericalangle CAE$ sú vedľajšie. Sú teda výplnkové, takže

$$\sphericalangle CAE = 180^\circ - \alpha.$$

Ale my vieme, že $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, takže

$$\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha.$$

Porovnajte oba výsledky.

Pamätajte: V o n k a j š í u h o l t r o j u h o l n í k a s a r o v n á s ú č t u o b o c h p r o t i ľ a h l ý c h u h l o v v n ú t o r n ý c h. Mnohé úlohy sa riešia rýchlejšie, keď sa použije pravidlo o vonkajšom uhle, ako keby sa použilo pravidlo $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

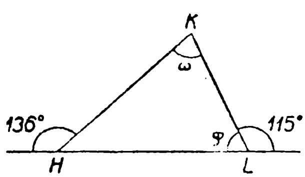
Cvičenie k § 21.

272. Zapíšte do slovníčka: Vonkajšie uhly trojuholníka.

273. Trojuholník CDE má pri vrchole C uhol 32°. Aký má uhol pri vrchole D, keď v o n k a j š í uhol pri vrchole E je

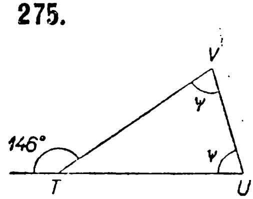
a) 100°? b) 85°? c) 136°?

274.



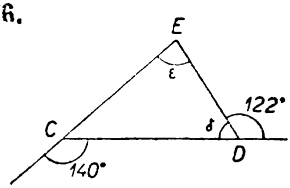
Obr. 115.

275.



Obr. 116.

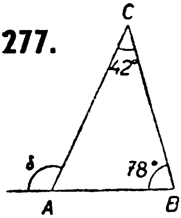
276.



Obr. 117.

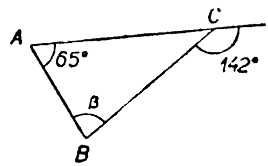
V úlohách 274 až 278 máte vypočítať uhly, označené gréckymi písmenami. Kreslite vlastné obrazce.

277.

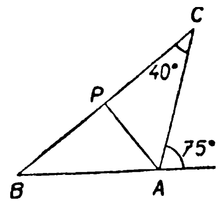


Obr. 118.

278.



Obr. 119.

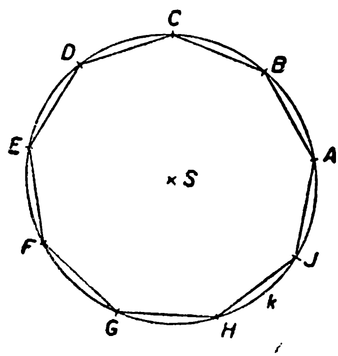


Obr. 120.

279. Na obr. 120 je $AP \perp BC$. Vypočítajte $\sphericalangle PAB$.

§ 22. Pravidelné mnohouholníky.

Zvoľte si body S a A. Pri otáčaní okolo bodu S vytvorí bod A kružnicu k. Myslime si kružnicu k, vytvorenú napr. otáčaním doľava. Pri otočení o plný uhol sa vytvorí celá kružnica k. Rozdeľme si plný uhol napr. na d e v ä ť rovnakých otočení. Je $360 : 9 = 40$, teda veľkosť každého tohto otočenia je $40°$. Keď teda deväť ráz otočíme doľava o $40°$, vráti sa bod A cez polohy B, C, D, E, F, G, H, I zpät (viď obr. 121) do pôvodnej polohy A. Sostrojte si bod B tak, že nanesiete $\sphericalangle ASB = 40°$ pomocou uhlomeru. Pri otočení o $40°$ prejde úsečka AB do polohy BC. Teda je $\overline{AB} = \overline{BC}$ a obecne

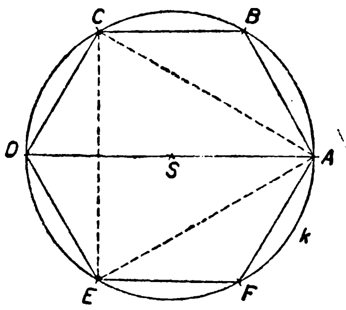


Obr. 121.

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HI} = \overline{IA}.$$

Preto, keď už máme bod B, dostaneme postupne ďalšie body C, D atď. pohodlnejšie bez uhlomeru., keď prenesieme kružidlom dĺžku $\overline{AB}$. Urobte to a spojte AB, BC atď. ako na obr. 121. Dostaneme pravidelný deväťuholník $ABCDEFGHI$. Je **vpísaný** kružnici k a kružnica k je mu **opísaná**. (Kde sme už hovorili o opísanej kružnici?)

Obecne hovoríme o **pravidelnom mnohouholníku.** P r a v i d e l n ý t r o j u h o l n í k a p r a v i d e l n ý š t v o r u h o l n í k sú



Obr. 122.

nám už dobre známe, ale majú iné mená. Aké?

Zaujímavý je **pravidelný šesťuholník** *ABCDEF* (na obr. 122). Trojuholník *ASB* je tu rovnostranný. Preto: Strana pravidelného šesťuholníka sa rovná polomeru kružnice opísanej a sostrojujeme ho jednoducho tak, že polomer nanesieme na kružnicu šesťkrát za sebou. Urobte to. Pozorujete, že čiara *ASD* je priama. Vysvetlite prečo?

Teda tri uhlopriečky *AD, BE, CF* sú také dlhé ako priemer opísanej kružnice. Okrem toho má náš šesťuholník ešte šesť kratších uhlopriečok. Tri z nich sú vyčiarkované na obr. 122 a tvoria rovnostranný trojuholník, vpísaný kružnici *k*. Vymenujte ostatné tri uhlopriečky.

Cvičenie k § 22.

280. Zapíšte do slovníčka: Pravidelný mnohouholník.

281. Zvoľte si úsečku *AB*, ktorá je 42 mm dlhá a sostrojte pravidelný šesťuholník *ABCDEF*. Riešte oboma spôsobmi.

282. Zvoľte úsečku *AD*, 74 mm dlhú a sostrojte pravidelný šesťuholník *ABCDEF*.

283. Do kružnice s polomerom 5 cm vpíšte rovnostranný trojuholník *ACE*. Odmerajte dĺžky strán a porovnajte výsledky triedy.

§ 23. Opakovanie.

Cvičenie A (geometrické výrazy).

284. Ako sa volá priama čiara, ohraničená na dvoch stranách, ohraničená na jednej strane, neohraničená? Keď je takáto čiara označená *AB*, môžeme ju tiež označiť *BA*?

285. Ktoré iné slová znamenajú to isté ako slová »vzdialenosť bodov *U* a *V*«?

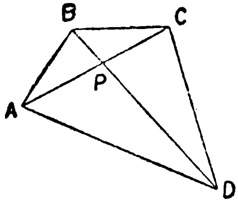
286. Vymenujte dva vrcholové uhly na obr. 123.

287. Čím je bod *P* vzhľadom na štvoruholník *ABCD* (viď obr. 123)?

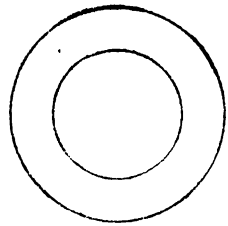
288. Ako sa volajú také dve kružnice, aké vidíme na obr. 124? Ako sa volá plocha nimi ohraničená?

289. Čo je to kruhový úsek? Naznačte obrazcom od ruky a potom vysvetlite slovami. Ako sa volá priama časť okraja? Čo je to kruhový výsek?

290. Mnoho výrazov má v geometrii dvojaký význam. Napr. výraz »obvod trojuholníka« môže znamenať čiaru, ale môže tiež znamenať... Hľadajte iné príklady.



Obr. 123.



Obr. 124.

291. Čo to znamená, keď pri niektorom obrazci v učebnici je poznámka »jednotka 1 mm«?

292. Ktoré cudzie slovo znamená »sostrojenie«?

293. Čítajte: $AB \parallel CD$, $AC \perp BD$, $\overline{AD} < \overline{BC}$.

294. Vymenujte tie rovné plochy, ktorým ste dali mená. Každý druh plochy naznačte obrazcom od ruky a potom popíšte slovami.

295. Trojuholníky sme rozdelili na tri druhy, a to dvojakým spôsobom; najprv podľa...., potom podľa... Vysvetlite podrobne.

296. Čo je to päta?

297. Ako sa volajú strany pravouhlého trojuholníka?

298. Čo sú doplnkové uhly? Čo sú výplnkové uhly?

299. Čo znamená v geometrii slovo »sieť«?

300. Ako sa volajú obrazce, ktorými si v sošite znázorňujete kocky a iné telesá?

301. Akými jednotkami meriame uhly?

302. Ako sa hovorí takýmto počtom, ako napr. $7 \times 7 \times 7 = 343$ alebo $9 \times 9 \times 9 = 729$?

303. Čo môže byť rôznobežné? Čo mimobežné?

304. Ako sa volá priamka, v ktorej sa pretínajú dve roviny?

305. Čo sú vedľajšie uhly? (Obrázok a výklad.)

306. Ako delíme uhly podľa veľkosti?

307. Ako sa volajú obrazce, ktoré sa dajú na seba položiť tak, že sa kryjú?

308. Čo je to telesná uhlopriečka? (Obrázok a výklad.)

309. Čo sú vonkajšie uhly trojuholníka? (Obrázok a výklad.)

310. Hovoríme nielen o vzdialenosti dvoch bodov, ale aj o iných vzdialenostiach. O ktorých?

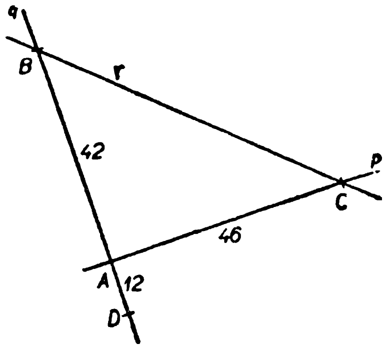
311. Čo sú vrcholové uhly? (Obrázok a výklad.)

Cvičenie B (vyjadrovanie a čítanie).

312. Vysvetlite zreteľne, ako sa skusmo rozpolťuje úsečka. Môžete si pomáhať obrazcom od ruky, ale vyjadrujte sa tak, aby ste nemuseli na obrazec ukazovať. Podobne i v ďalšom.

313. Vysvetlite, ako sa sostrojuje štvorec s danou stranou.

314. Vysvetlite, čo by ste robili, keby ste mali k danému trojuholníku *DEF* sostrojiť shodný trojuholník *PQR,* pri čom by ste mali predpísaný bod *P*.



Obr. 125.

315. Dávajte slovný návod, podľa ktorého by vaši spolužiaci mohli rysovať obrazec, naznačený na obr. 125 (jednotka 1 mm). Je $q \perp p$. Dávajte návod tak, aby rysovali najprv priamku p, potom bod A, potom q, ďalej bod B, bod C, bod D a napokon priamku r.

316. Opakujte úlohu 315, ale začnite priamkou q a potom nech nasledujú za sebou bod D, bod B, bod A, priamka p, bod C a priamka r.

317. Dávajte slovný návod, podľa ktorého by spolužiaci rysovali obrazec, naznačený na obr. 16 (str. 14, jednotka 1 cm).

318. To isté s obrazcom 19 na str. 14.

319. (Čítajte pomaly a postupne rysujte.) Zvoľte si priamku p a na nej dva body A a B, vzdialené od seba 5 cm. Bodom A rysujte priamku CAD a naneste $\overline{CA} = \overline{AD} = 1$ cm. Bodom B rysujte priamku BE a určte bod E tak, aby bolo $\overline{BE} = 2$ cm a aby úsečka DE nepreťala priamku p. Sostrojte kružnicu nad priemerom CE.

320. Narysujte dve kružnice h a k zo spoločného stredu S o polomeroch 3 cm (kružnica h) a 5 cm (kružnica k). Zvoľte si na k bod A a rysujte ním priemer, ktorý pretne h v bodoch B a C ($\overline{AB} > \overline{AC}$). Nájdite na k body D a E, vzdialené 5 cm od B. Spusťte s bodu E kolmicu na priamku BD a označte jej pätu P. Vztýčte v bode D kolmicu k priamke AD.

Cvičenie C (presné rysovanie).

321. Prepichnite voľný list papiera vo dvoch bodoch A a B ($\overline{AB} =$ 4 cm). Na oboch stranách sostrojte štvorce $ABCD$. Vyznačte ich uhlopriečky a stredné priečky. Presvedčte sa, že poloha bodov C a D je presne rovnaká na líci i na rube.

322. Zvoľte body A, B a C tak, aby bolo $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm, $AB \perp AC$. Sostrojte štvorec $BCDE$ tak, aby nezasahoval do trojuholníka ABC. Nájdite pätu H kolmice, spustenej s bodu E na priamku AC. Nájdite pätu K kolmice, spustenej s bodu B na priamku EH. Presvedčte sa, že štvoruholník $ABKH$ je štvorec.

323. V kružnici k (stred S) si zvoľte body B a C tak, aby $\sphericalangle BAC$ bol ostrý. Bodom A rysujte tetivy BD a CE. Presvedčte sa graficky, že $\sphericalangle BSC$ a $\sphericalangle DSE$ sa rovná dvojnásobku $\sphericalangle BAC$.

324. Narysujte kružnicu k zo stredu S s polomerom 25 mm. Sostrojte kružnicu m o polomere 35 mm tak, aby prechádzala bodom S. Označte si A a B priesečníky kružníc k a m. Rysujte priamku SPQ tak, aby bod P ležal na kružnici k a aby bod Q ležal na kružnici m. Sostrojte os $\sphericalangle ABQ$. Prechádza vám presne bodom P?

325. Sostrojte si kružnicu k a vpíšte do nej rovnostranný trojuholník ABC. Na kružnici k si zvoľte body D a E tak, aby bolo $AD = BE$ a aby išly na kružnici k za sebou poporiadku A, D, B, E a C. Presvedčte sa graficky, že súčet usečiek AD a DB sa rovná AE.

Cvičenie D (poučky).

326. Keď poznáme priemer, ako vypočítame polomer? Ako vypočítame priemer z polomeru?

327. Čo viete o dĺžke strán trojuholníka?

328. Keď priamka p neprechádza bodom A, ktorý bod priamky p je najbližšie k bodu A?

329. Ktorá strana pravouhlého trojuholníka je najdlhšia?

330. Aká je vzájomná poloha priamok, kolmých na priamku p: (1) v rovine, (2) v priestore?

331. Čo viete o stranách obdĺžnika?

332. Čo viete o uhlopriečkach obdĺžnika?

333. Koľko m u s í mať kváder hrán rovnako dlhých s danou hranou? M ô ž e ich byť viacej?

334. Čo viete o stredných priečkach obdĺžnika?

335. Čo viete o stredných priečkach štvorca?

336. Čo viete o uhlopriečkach štvorca?

337. Podľa ktorých zásad rysujeme priemet kvádra?

338. Koľko uhlopriečok má kváder? Čo o nich viete?

339. Ako vypočítate obsah obdĺžnika? Ako obsah štvorca?

340. Môžete vypočítať obsah štvorca, keď odmeráte uhlopriečku?

341. Ako vypočítate objem kvádra?

342. Ako vypočítate povrch kvádra? Ako povrch otvorenej škatule (bez veka)?

343. Keď P je päta kolmice spustenej s bodu A na rovine ϱ, čo viete o priamkach, ktoré ležia na rovine ϱ a prechádzajú bodom P?

344. Čo viete o štyroch uhloch, vytvorených dvoma rôznobežkami?

345. Čo viete o ostrých uhloch pravouhlého trojuholníka?

346. Čo viete o uhloch pri základni rovnoramenného trojuholníka?

347. Čo viete o uhloch obecného trojuholníka?

348. Ako sa vypočíta vonkajší uhol trojuholníka?

349. Aké sú uhly rovnostranného trojuholníka?

350. Čo viete o pravidelnom šesťuholníku?

OBSAH:

Autor	Dr. Eduard Čech
Názov	Geometria, pomocná kniha pre I. tr. stred. škôl
Slovenská úprava	F. Lovásko
Recenzia	J. Štalmašek
Náklad	1—50.000 výtlačkov
Vydalo	Štátne nakladateľstvo v Bratislave
Rok	1949
Tlačila	Pravda, graf. a vyd. podniky v Bratislave
Papier	stredojemný tlačový
Typ písma	borgis Excelsior, petit Ideál

Papier pridelilo PIO výmerom zo dňa 9. septembra 1949, čís. 21.329/49-II/1.