František Balada; Eduard Čech; a kol.

Aritmetika pre 1. triedu gymnázií

Štátne nakladateľstvo, Bratislava, 1951, 108 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501403

Aritmetika

PRE I. TRIEDU GYMNAZIÍ

ŠTÁTNE NAKLADATEĽSTVO V BRATISLAVE

ARITMETIKA

PRE I. TRIEDU GYMNÁZIÍ

1951

ŠTÁTNE NAKLADATEĽSTVO, BRATISLAVA

Názov originálu: Matematika pro I. třídu gymnasií, Praha, 1951

Spracovali: Dr. František Balada, Dr. Eduard Čech, Jozef Holubář, Dr. Karol Hruša, Dr. Marta Chytilová, Dr. Vanda Janová, Dr. Bedřich Koenig, Dr. Emil Mastný, Dr. Karol Roessler, Dr. Anton Srb, Dr. Jozef Šimek, Anton Tuláček, Rudolf Zelinka

Preložily: G. Ormay, M. Skupenová

Recenzenti: A. Dubec, Dr. J. Horecký, V. Ilenčík

Schválilo Povereníctvo školstva, vied a umení výnosom zo dňa 5. marca 1951, č. 6064/51-II/2, ako učebnicu pre I. triedu gymnázií v prvom vydaní

Úvodné poznámky.

Pri vyučovaní matematiky v prvej triede gymnázia majú žiaci budovať svoje poznatky na vedomostiach zo strednej školy. Prvou úlohou aritmetiky je objasniť základné poznatky o číselných oboroch. Treba, aby žiak pochopil dôležitosť a vznik prirodzených čísel, aby si objasnil, prečo sa zaviedly čísla záporné a lomené. Ďalej je dôležité, aby poznal úlohu čísla jedna a nula, najmä pri sčítaní a násobení.

V učebniciach sú exaktne odvodené základné zákony počtových výkonov. Žiak sa vedie ku kritike výsledku svojich úvah.

Doterajšia škola porovnávala najčastejšie veličiny navzájom si rovné. Zavedenie nerovnosti sleduje sblíženie teórie s praxou, lebo v živote musíme častejšie porovnávať veličiny nerovné než sebe rovné.

Soznámenie s presným pojmom odmocniny vedie žiakov v medziach ich vyspelosti i so zreteľom na praktický význam týchto čísel na ich praktickú aproximáciu.

Žiakove poznatky zo strednej školy o rovniciach sa preskúšajú a na ich podklade osvoja si žiaci význam a pojem kvadratických rovníc.

Novej látky vcelku niet mnoho. Úlohou je sceliť doterajšie vedomosti, prehĺbiť ich a dať žiakom zdravý základ pre ďalšie kritické štúdium matematiky.

V aritmetike a v geometrii hľadáme stále ich styčné body, čo je vlastne úlohou každého vedeckého štúdia. Pri vyučovaní hľadáme príležitosť pre logické uvažovanie a usudzovanie. Nejde nám len o získanie zásoby vedomostí, ale aj o sústavnú výchovu samostatného myslenia. Preto venujeme dôkazovým úlohám omnoho väčšiu pozornosť ako prv. V učebnici sa im venuje značná pozornosť. Každý dôkaz metodicky pripravíme, rozdelíme na jednotlivé kroky a vykonáme za účasti všetkých žiakov.

Žiak má poznať úlohu matematiky, ktorá nespočíva len v teórii a v zásobe vedomostí, ale vo výchove k rozvažitosti, kritike, a tak sa stáva aparátom pre štúdium zjavov materiálneho sveta. O matematiku opiera sa mnoho disciplín a matematika tak prispieva k štúdiu mnohých odborov, ktoré sú dôležité pre budovanie nášho štátu.

Pestovaním úsudku a kritičnosti vedieme žiakov k pochopeniu zákonitosti vývoja ľudskej spoločnosti, k socializmu.

I. PRIRODZENÉ ČÍSLA.

1. Sčítanie prirodzených čísel.

Prirodzenými číslami nazývame čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 .... Skupina predmetov rovnakého druhu je **súbor**. Jednotlivé veci tohto súboru sú jeho **prvky**. **Početnosť** prvkov, obsiahnutých v súbore, je prirodzené číslo. Dva súbory A, A' sú rovnako početné, ak je možné každému predmetu prvého súboru priradiť určitý predmet druhého súboru tak, že aj obrátene ktorýkoľvek predmet druhého súboru sa priradí jednému predmetu prvého súboru. Ak napr. každý žiak má svoju učebnicu aritmetiky, je súbor všetkých žiakov rovnako početný ako súbor ich učebníc aritmetiky. Ak však niektorý žiak zabudne svoju učebnicu, tak počet žiakov, prítomných v triede, nie je rovnako početný ako súbor učebníc, ktoré môžu položiť na lavice; prvý súbor je **početnejší** než druhý. Takto priamo porovnávame početnosť dvoch súborov v praxi iba zriedka; obyčajne vyjadrujeme početnosť každého súboru prirodzeným číslom, ktoré udáva **počet predmetov** súboru; dva súbory sú rovnako početné, ak je počet predmetov, obsiahnutých v súboroch, vyjadrený tým istým číslom; naproti tomu je jeden súbor početnejší než druhý, ak počet jeho predmetov je vyjadrený väčším číslom, než je to, ktoré vyjadruje počet predmetov druhého súboru. Ak chceme napr. porovnať početnosť dvoch tried, neporovnávame obyčajne priamo oba súbory, ale spočítame,* že napr. v 1. triede je 43 žiakov a v 2. triede 39; pretože číslo 43 je väčšie než 39, je 1. trieda početnejšia ako druhá.

Z dvoch alebo viacej čísel odvodzujeme nové čísla pomocou **počtových výkonov**. Už na národnej škole ste sa učili štyri zá-

* *Spočítať* znamená zistiť počet jedincov, ktorí patria do súboru. Naproti tomu *sčítame* napr. dve dané čísla.

kladné počtové výkony: sčítanie, odčítanie, násobenie a delenie. To bolo účelné pre národnú školu; teraz však bude účelnejšie pokladať za **základné výkony** iba **sčítanie** a **násobenie**; o odčítaní a delení budeme hovoriť až neskôr v 5. článku.

Ak máme vysvetliť, čo znamená **súčet**

$$a + b,$$

kde a, b sú prirodzené čísla, zvolíme si najprv ľubovoľný súbor predmetov A tak, aby sa počet jeho predmetov rovnal číslu a; potom zvolíme súbor predmetov B tak, aby sa počet jeho predmetov rovnal číslu b; pritom však volíme oba súbory A, B tak, aby boly **disjunktné**; to znamená, že nijaký predmet nesmie patriť do oboch súborov A, B zároveň. Nazvime teraz **spojením** oboch súborov A, B súbor všetkých tých predmetov, ktoré patria alebo do súboru A, alebo do súboru B; počet predmetov, vzniklý spojením oboch súborov, je práve súčet $a + b$ oboch čísel a, b, ktoré sa menujú **sčítancami**.

Pretože spojenie dvoch disjunktných súborov A, B je totožné so spojením súborov B, A, vidíme, že platí **komutatívny zákon sčítania** prirodzených čísel:

$$a + b = b + a.$$

Ak sú a, b, c tri prirodzené čísla, je vám známe, že platí **asociatívny zákon sčítania** prirodzených čísel

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Bude užitočné vysvetliť si smysel tohto zákona. Preto si zvoľme tri **disjunktné** súbory predmetov A, B, C tak, že:

a je počet predmetov súboru A,
b je počet predmetov súboru B,
c je počet predmetov súboru C.

Nijaký predmet nepatrí do viac ako jedného z troch súborov A, B, C. Označme M spojenie oboch disjunktných súborov A, B;

potom je $a + b$ počet predmetov súboru M. Okrem toho súbor M a súbor C sú disjunktné a počet predmetov ich spojenia je

$$(a + b) + c. \qquad (1)$$

Zrejme sa spojenie súborov M a C skladá z tých predmetov, ktoré patria do A alebo do B alebo do C. Ak ďalej označíme N spojenie oboch disjunktných súborov B a C, je $b+c$ počet predmetov súboru N; okrem toho súbor A, a súbor N sú disjunktné a počet predmetov ich spojenia je

$$a + (b + c). \qquad (2)$$

Avšak spojenie súborov A a N sa zase skladá z tých predmetov, ktoré patria do A alebo do B alebo do C. Preto číslo (1) je to isté číslo ako číslo (2) a to hovorí práve náš asociatívny zákon.

Predchádzajúce úvahy môžeme zovšeobecniť. Zvoľme si ľubovoľný počet disjunktných súborov $A, B, C, \ldots, K$ (ako vieme, slovo disjunktný znamená, že nijaký predmet nepatrí do viac ako do jedného z našich súborov); počet predmetov každého súboru označme príslušným písmenom malej abecedy, takže napr. A sa skladá z a predmetov, K sa skladá z k predmetov.

Súčet

$$a + b + c + \ldots + k$$

so sčítancami $a, b, c, \ldots, k$ znamená počet predmetov toho súboru, ktorý vzniká **spojením** všetkých súborov $A, B, C, \ldots, K$, t. j. počet predmetov súboru, ktorý sa skladá zo všetkých predmetov, patriacich do niektorého z daných súborov $A, B, C, \ldots, K$.

Úvahami celkom podobnými predošlým odôvodnite pre prirodzené čísla dva všeobecné zákony o súčtoch s ľubovoľným počtom sčítancov. Je to predovšetkým **všeobecný komutatívny zákon sčítania** prirodzených čísel: **Súčet ľubovoľného počtu sčítancov nezávisí od poradia sčítancov,** napr. súčty

$$a + b + c + d,\ a + c + d + b,\ d + a + b + c \text{ atď.}$$

sú všetky rovnaké. Po druhé je to všeobecný asociatívny zákon **sčítania prirodzených čísel: Súčet ľubovoľného počtu sčítancov môžeme počítať tak, že rozdelíme sčítance na skupiny, spočítame sčítance v každej skupine zvlášť a potom sčítame čiastočné súčty z jednotlivých skupín.** Pritom môže niektorá skupina obsahovať i jedného sčítanca. Napr. je

$$a + b + c + d + e + f = (a + b + c) + d + (e + f).$$

Tu sme rozdelili sčítance na tri skupiny; v prvej skupine sú tri sčítance; v poslednej sú dva a druhá skupina obsahuje jediného sčítanca d.

Cvičenie.

1. Pomocou úvah o početnosti súborov dokážte:

a) $a = a$;

b) z rovnosti $a = b$ plynie $b = a$;

c) z rovností $a = b$, $b = c$ plynie $a = c$.

2. Pomocou úvah o početnosti súborov dokážte, že z rovnosti $a = b$ plynie $a + c = b + c$.

3. Ak je $a = b$, $c = d$, tak aj $a + c = b + d$. Dokážte!

4. Ak sú dané dve prirodzené čísla a, b, dokážte, že nastane práve jeden z prípadov: a) $a = b$, b) $a + x = b$, c) $a = b + y$; pritom x a y sú vhodné prirodzené čísla.

5. Užívajúc asociatívny zákon dokážte: O koľko sa zväčší jeden sčítanec, o toľko sa zväčší súčet.

6. Užívajúc asociatívny a komutatívny zákon sčítania dokážte, že $(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d)$.

7. Ak máme spočítať rad rs čísel

$$\left.\begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r, \\ b_1, b_2, b_3, \ldots, b_r, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \\ k_1, k_2, k_3, \ldots, k_r, \end{array}\right\} s \text{ riadkov}$$

urobíme to tak, že sčítame najprv sčítance v riadkoch $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_r = t_1$, $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_r = t_2, \ldots$, $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_r = t_s$ a potom sčítame $t_1+t_2+t_3+\ldots+t_s$. Kontrolu urobíme tak, že sčítame $a_1+b_1+\ldots+k_1=u_1$, $a_2+b_2+\ldots+k_2=u_2, \ldots, a_r+b_r+\ldots+k_r=u_r$ a tieto súčty sčítame: $u_1+u_2+\ldots+u_r$. Odôvodnite!

8. Pomocou všeobecného komutatívneho zákona sčítania odôvodnite, v čom je podstata skúšky pri sčítaní!

2. Násobenie prirodzených čísel. Násobenie dvoch prirodzených čísel ste sa už na národnej škole učili pomocou sčítania niekoľkých rovnakých prirodzených čísel. Aby sme vysvetlili, čo znamená **súčin**

$$a \times b \text{ alebo } a \, . \, b \text{ alebo } ab,$$

ktorého násobenec je prirodzené číslo a a ktorého násobiteľ je prirodzené číslo b, zvolíme si b disjunktných súborov

$$A_1, A_2, \ldots, A_b, \tag{1}$$

z ktorých sa každý skladá z a predmetov; súčin ab je počet predmetov toho súboru, ktorý je spojením všetkých b súborov (1). Ale pri iných číslach, o ktorých budeme hovoriť neskôr a ktoré poznáte už zo strednej školy, napr. pri zlomkoch, je nemožné previesť násobenie na sčítanie. Preto je účelné vysvetliť si už pri prirodzených číslach násobenie nezávisle od sčítania, čo vedie aj k ľahšiemu odvodeniu vlastností násobenia. Vysvetlíme si preto násobenie prirodzených čísel ako určenie počtu **dvojíc.**

Z dvoch súborov A, B, z ktorých každý sa skladá z ľubovoľných predmetov, utvoríme si nový súbor, ktorý označíme (A, B) a ktorý je súborom všetkých takých dvojíc (x, y), ktoré sa skladajú z predmetu x, náležajúceho do súboru A, a z predmetu y, náležajúceho do súboru B. Ak sa napr. súbor A skladá z kníh a súbor B skladá z obrázkov, potom súbor (A, B) sa skladá z dvojice knihy a obrázku, t. j. každý predmet súboru (A, B) si môžeme predstaviť ako knihu vzatú zo súboru A, do ktorej je vložený obrázok zo súboru B. Ak

a je počet prvkov súboru A,
b je počet prvkov súboru B,

môžeme si súbor dvojíc (A, B) rozložiť na súbory

$$(1) \qquad A_1, A_2, \ldots\ldots, A_b \qquad (1)$$

tak, že súbor A_1 sa skladá z tých dvojíc (x, y), v ktorých ku predmetom x súboru A je pripojený vždy prvý predmet y súboru B, súbor A_2 sa skladá z tých dvojíc (x, y), v ktorých je y druhý predmet súboru B atď. Súbory (1) sú navzájom disjunktné, každý z nich sa skladá z a dvojíc a spojenie všetkých súborov (1) dáva súbor (A, B). Preto **súčin** ab je počet všetkých prvkov súboru dvojíc (A, B). Pretože súbor (A, B) a súbor (B, A) majú zrejme ten istý počet dvojíc, dochádzame ku **komutatívnemu zákonu** násobenia dvoch prirodzených čísel:

$$ab = ba.$$

Pretože násobenie vyhovuje komutatívnemu zákonu, je málo výhodné dávať každému z oboch čísel a, b iné meno (násobenec, násobiteľ), a preto obyčajne dávame obom číslam a, b spoločný názov **činitelia.**

Ak sú teraz A, B, C tri ľubovoľné súbory, pričom

a je počet predmetov súboru A,
b je počet predmetov súboru B,
c je počet predmetov súboru C,

označíme (A, B, C) súbor všetkých **trojíc** (x, y, z), v ktorých

x je ľubovoľný predmet súboru A,
y je ľubovoľný predmet súboru B,
z je ľubovoľný predmet súboru C.

Označme M súbor dvojíc (A, B); ďalej označme N súbor dvojíc (B, C). Teda každú trojicu (x, y, z) súboru trojíc (A, B, C) môžeme považovať za dvojicu složenú jednak z dvojice (x, y) vzatej z M, jednak z predmetu z súboru C; preto počet všetkých trojíc z (A, B, C) rovná sa súčinu $(ab)c$, ktorého prvý činiteľ ab rovná sa počtu predmetov súboru M a druhý činiteľ rovná sa počtu predmetov súboru C. Ďalej však môžeme každú trojicu (x, y, z) súboru trojíc (A, B, C) považovať za dvojicu, složenú jednak z predmetu x súboru A, jednak z dvojice (y, z) vzatej z M; preto počet všetkých trojíc (x, y, z) rovná sa súčinu

$$a(bc),$$

ktorého prvý činiteľ je počet predmetov súboru A a druhý činiteľ je počet predmetov súboru N. Ak porovnáme oba výsledky, dochádzame k **asociatívnemu zákonu násobenia:**

$$(ab)c = a(bc).$$

Predchádzajúce úvahy opäť môžeme zovšeobecniť. Nech sú dané ľubovoľné súbory $A, B, C, \ldots, K$; počet predmetov každého daného súboru označíme príslušným písmenom malej abecedy, takže a je počet predmetov súboru A atď. Súčinom

$$abc \ldots k$$

rozumieme to číslo, ktoré udáva počet všetkých predmetov súboru $(A, B, C, \ldots, K)$, ktorý sa skladá zo všetkých takých skupín $(x, y, z, \ldots, t)$, v ktorých je x ľubovoľný predmet súboru A, y ľubovoľný predmet súboru $B, \ldots$, t ľubovoľný predmet súboru K. Na základe tohto všeobecného vysvetlenia súčinu ľubovoľného počtu prirodzených čísel odvodíte sami bez ťažkosti predovšetkým **všeobecný komutatívny zákon násobenia** prirodzených čísel: **Súčin ľubovoľného počtu činiteľov je nezávislý od poradia činiteľov,** napr. súčiny

$$abcd,\ acdb,\ dabc \text{ atď.}$$

sú všetky rovnaké. Ďalej ľahko odvodíte **všeobecný asociatívny zákon násobenia** prirodzených čísel, ktorý znie takto: **Súčin ľubovoľného počtu činiteľov môžeme počítať tak, že rozdelíme činiteľov na skupiny, znásobíme činiteľov v každej skupine zvlášť a potom násobíme čiastočné súčiny z jednotlivých skupín.** Pritom môže niektorá skupina obsahovať i len jediného činiteľa. Napr. je

$$abcdef = (abc) \,.\, d \,.\, (ef).$$

Tu sme rozdelili činiteľov na tri skupiny; v prvej skupine sú traja činitelia, v poslednej dvaja a druhá skupina obsahuje jediného činiteľa d.

9. Na základe úvah o dvojiciach odôvodnite: Ak máme r radov, v každom je s predmetov, je týchto predmetov rs.

10. Podobne odôvodnite: Ak máme r vrstiev, z ktorých v každej je s radov a v každom z týchto radov je t predmetov, je tých predmetov rst.

11. Pomocou definície násobenia dokážte, že z rovnosti $a=b$ plynie $ac=bc$.

12. Ak je $a=b$, $c=d$, tak aj $ac=bd$. Dokážte!

13. Užívajúc asociatívny zákon dokážte: Koľkokrát sa zväčší jeden činiteľ, toľkokrát sa zväčší súčin.

14. Dokážte vetu: Súčin sa násobí daným číslom, ak sa ním násobí ktorýkoľvek činiteľ.

15. Pomocou asociatívneho a komutatívneho zákona násobenia odôvodnite, že $(ab)\,(cd)=(ac)\,(bd)$.

16. Ak máme spolu znásobiť rs čísel usporiadaných v s riadkoch:

$$\left.\begin{array}{l} a_1,\ a_2,\ a_3, \dots,\ a_r\ , \\ b_1,\ b_2,\ b_3, \dots,\ b_r\ , \\ \dots\dots\dots , \\ k_1,\ k_2,\ k_3,\ \dots,\ k_r, \end{array}\right\}\ s \text{ riadkov}$$

robíme to tak, že najprv utvoríme súčiny $a_1 a_2 \dots a_r = t_1$, $b_1\, b_2 \dots b_r = t_2, \dots,$ $k_1\, k_2 \dots k_r = t_s$ a potom znásobíme $t_1\, t_2 \dots t_s$. Kontrolu vykonáme tak, že znásobíme $a_1\, b_1 \dots k_1 = u_1$, $a_2\, b_2 \dots k_2 = u_2, \dots,$ $a_r\ b_r \dots k_r = u_r$ a tieto súčiny znásobíme: $u_1 u_2 \dots u_r$. Odôvodnite!

3. Distributívny zákon.

V prvom článku sme hovorili o komutatívnom a asociatívnom zákone pre sčítanie; v druhom článku sme hovorili o tých istých zákonoch pre násobenie. Zo strednej školy poznáte ešte jeden dôležitý počtový zákon, v ktorom je reč o oboch základných výkonoch: sčítaní i násobení. Je to tzv. **distributívny zákon** alebo zákon o roznásobení. Je vyjadrený vzorcom:

$$a(b+c)=ab+ac; \tag{1}$$

ako ho vyjadríte slovami? Aby sme odôvodnili distributívny zákon pre prirodzené čísla, zvolíme ako obyčajne tri disjunktné súbory A, B, C s počtom predmetov rovným a, b, c. Ak označíme

M spojenie oboch súborov B, C, skladá sa súbor M z $b+c$ predmetov, a preto súbor dvojíc (A, M) sa skladá z $a\,(b+c)$ predmetov. Na druhej strane súbor M sa rozpadá na dva disjunktné súbory B, C, a preto sa aj súbor dvojíc (A, M) rozpadá na dva disjunktné súbory (A, B), (A, C), z ktorých sa prvý skladá z ab predmetov a druhý z ac predmetov. Preto počet $a\,(b+c)$ všetkých dvojíc súboru (A, M) rovná sa súčtu $ab+ac$, čo je práve obsahom vzorca (1).

V distributívnom zákone (1) sme mali súčty dvoch sčítancov; vo všeobecnejšom tvare máme súčty ľubovoľného počtu sčítancov:

$$a(b+c+\ldots+k)=ab+ac+\ldots+ak.$$

Ešte všeobecnejší tvar distributívneho zákona si vyjadríme slovami: **Súčet násobíme súčtom, keď každého sčítanca prvého súčtu znásobíme každým sčítancom druhého súčtu a všetky tieto súčiny sčítame.** Odôvodnite sami hoci pre tento prípad, že súčet $a+b+c+d$ o štyroch sčítancoch násobíme súčtom $r+s+t$ o troch sčítancoch; teda:

$$(a+b+c+d)(r+s+t)=$$

$$=ar+br+cr+dr+as+bs+cs+ds+at+bt+ct+dt.$$

Cvičenie.

17. Ak sa zväčší každý sčítanec k-krát, zväčší sa aj súčet k-krát. Dokážte!

18. Ak viete, že $a\,(b+c)=ab+ac$, dokážte, že aj $(a+b)\,c=ac+bc$.

19. Pomocou distributívneho zákona vypočítajte (dvoma spôsobmi) súčin $(a+b)\,(c+d+e)$.

20. Dokážte, že súčin dvoch súčtov, z ktorých jeden má r sčítancov a druhý s sčítancov, má rs sčítancov.

21. Dokážte, že súčin troch súčtov, z ktorých jeden má r sčítancov, druhý s sčítancov a tretí t sčítancov, má rst sčítancov.

22. Upravte na súčin výrazy: a) $12pq+6q$; b) $(2a+b)x+2a+b$; c) $uv+u+v+1$.

23. Súčet čísel, z ktorých každé je násobkom čísla p, je aj násobkom čísla p. Dokážte!

4. Nula a jednotka.

Starí matematici nepoznali iné čísla ako prirodzené. Rozšírenie pojmu čísla znamenalo dôležitý pokrok vo vývine matematiky. Už na strednej škole ste poznali niektoré rozšírenia pojmu čísla (zlomky, záporné čísla), ktoré si v tejto triede zopakujeme. V tomto článku zavedieme zatiaľ jediné nové číslo **nula.** Počet predmetov v nejakom súbore sa rovná nule, ak je ten súbor prázdny, t. j. ak neobsahuje vôbec nijaký predmet. Takým prázdnym súborom je napr. súbor všetkých beznohých medzi aktívnymi futbalovými hráčmi. Pomocou prázdneho súboru ľahko vysvetlíte pravidlo:

$$a+0=a, \quad 0+a=a; \tag{1}$$

slovami: **Ak sa jeden sčítanec rovná nule, súčet sa rovná druhému sčítancu.**

Ak je A ľubovoľný súbor predmetov a ak je B prázdny súbor, potom je prázdny aj súbor dvojíc (A, B). Z toho plynie pravidlo:

$$a \,.\, 0=0, \quad 0 \,.\, a=0; \tag{2}$$

slovami: **Ak sa jeden činiteľ rovná nule, súčin sa rovná nule.** Sami ľahko vysvetlíte tiež **obrátené pravidlá** k pravidlám (1) a (2): **Ak sa súčet rovná jednému z dvoch sčítancov, druhý sčítanec sa rovná nule. Ak sa súčin dvoch čísel rovná nule, aspoň jeden činiteľ sa rovná nule.**

Porovnajte obe pravidlá (1) a (2). Vidíte, že nula má pri násobení celkom inú úlohu ako pri sčítaní. Túto úlohu, ktorú pri sčítaní má číslo nula, má pri násobení číslo jedna, ako vysvitá z pravidla:

$$a \,.\, 1=a, \quad 1 \,.\, a=a; \tag{3}$$

slovami: **Ak sa jeden činiteľ rovná jednej, súčin sa rovná druhému činiteľu.** Odôvodnite sami pomocou súboru dvojíc pravidlo (3) a vyslovte a odôvodnite aj obrátené pravidlo!

Doteraz sme hovorili v tomto článku iba o súčte a súčine dvoch čísel. O súčte a súčine ľubovoľného počtu čísel platí podobne: **Súčet niekoľkých čísel ostáva nezmenený, ak vynecháme alebo pridáme sčítanca rovného nule.**

Súčin niekoľkých čísel ostáva nezmenený, ak vynecháme alebo pridáme činiteľa rovného jednej.

Súčin niekoľkých čísel sa rovná nule, ak aspoň jeden činiteľ sa rovná nule. Ak sa súčin niekoľkých čísel rovná nule, musí sa aspoň jeden činiteľ rovnať nule.

Počtové zákony, ktoré sme v predchádzajúcich článkoch odvodili pre prirodzené čísla (komutatívny a asociatívny zákon sčítania, tie isté zákony násobenia, distributívny zákon), ostanú v platnosti, i keď sa niektoré z daných čísel rovná nule.

Cvičenie.

24. Pomocou úvah o prázdnych súboroch dokážte, že a) $0+0=0$; b) $0 . 0=0$.

25. Je možné vyhovieť rovnici $ax=bx$, i keď a, b sú dve čísla navzájom rôzne?

26. Je možné vyhovieť rovnici $a+x=b+x$, i keď a, b sú dve čísla navzájom rôzne?

27. Dokážte, že základné počtové zákony, o ktorých sa hovorilo v čl. 1—3, sú splnené, i keď niektoré z čísel, ktoré sa v nich vyskytujú, rovnajú sa nule.

V nasledujúcich cvičeniach písmená a, x môžu znamenať buď čísla prirodzené alebo nulu. Pomocou úvah o súboroch dokážte:

28. Ak je $a+x=a$, je $x=0$.
29. Ak je $a+x=0$, je $a=0$ i $x=0$.
30. Ak je $a+x=1$, je alebo $a=1$, $x=0$ alebo $a=0$, $x=1$.
31. Ak je $ax=a$ a $a \neq 0$, je $x=1$.
32. Ak je $ax=0$, je alebo $a=0$ alebo $x=0$.
33. Ak je $ax=1$, je $a=1$ i $x=1$.

5. Porovnávanie veľkosti prirodzených čísel.

Už v prvom článku sme si povedali, ak sa dve prirodzené čísla nerovnajú, je jedno z nich väčšie a druhé menšie. Píšeme

$$a>b \text{ (} a \text{ je väčšie ako } b\text{)},$$
$$b<a \text{ (} b \text{ je menšie ako } a\text{)}.$$

Je zrejmé, že **súčet dvoch prirodzených čísel je väčší ako ktorýkoľvek sčítanec.** Súčet **sa rovná** jednému sčítancu, ak sa druhý sčítanec rovná nule. Avšak **súčet nemôže byť nikdy menší ako niektorý sčítanec,** pokiaľ nepripustíme za sčítanca aj záporné čísla, čo v tomto opakovaní urobíme až v 10. článku.

Zatiaľ všetky čísla, o ktorých hovoríme, sú prirodzené čísla alebo nula. Ak sú teda a, b dané čísla, potom rovnica

$$a + x = b \tag{1}$$

s neznámou x nemá nijaké riešenie, ak $a > b$, má jediné riešenie $x = 0$, ak $a = b$, má jediné riešenie x, ktoré je prirodzeným číslom, ak $a < b$. Riešenie rovnice (1) značíme

$$x = b - a$$

a nazývame ho **rozdielom,** ktorého **menšencom** je číslo b a menšiteľom číslo a. Menšiteľ teda nesmie byť väčší ako menšenec. Počtový výkon, ktorým od daných čísel a, b dochádzame k ich rozdielu, menuje sa **odčítaním.** Nebudeme opakovať vlastnosti odčítania, pretože, ako viete, po zavedení záporných čísel sa dá odčítanie previesť na sčítanie.

Súčin dvoch prirodzených čísel je väčší ako ktorýkoľvek činiteľ v tom prípade, keď obaja činitelia sú väčší ako jedna. Vysvetlite!

Ak sú a, b dané prirodzené čísla, potom rovnica

$$ax = b \tag{2}$$

s neznámou x nemá nijaké riešenie (pokiaľ nezavedieme zlomky), ak $a > b$. Ak $a = b$, má rovnica (2) jediné riešenie $x = 1$. Ak $a < b$, potom rovnica (2) niekedy nemá riešenie (pokiaľ nezavedieme zlomky), niekedy má jediné riešenie. Hovoríme, že číslo b je **deliteľné** číslom a, ak jestvuje prirodzené číslo x, ktoré je riešením rovnice (2). Náuku o deliteľnosti zatiaľ nebudeme opakovať. Ak je číslo b deliteľné číslom a, potom riešenie x rovnice (2) značíme

$$b : a.$$

Ak sú a, b dve dané prirodzené čísla a ak je napr. $b > a$, môžeme sa pýtať, **o koľko** je číslo b väčšie ako číslo a; odpoveď na túto otázku je daná číslom $b - a$. Môžeme si položiť aj inú otázku: **Koľkokrát** je číslo b väčšie ako číslo a; ak je číslo b deliteľné číslom a, je odpoveď na túto otázku daná prirodzeným číslom $b : a$. Ak však číslo b nie je deliteľné číslom a, potom otázka koľkokrát je číslo b väčšie ako číslo a, nemá nijaký presný smysel.

Cvičenie.

V cvičeniach 34—38 písmená a, b, c značia prirodzené čísla. Pomocou úvah o súboroch dokážte:

34. a) Ak je $a>b$, je $b<a$. b) Ak je $a<b$, je $b>a$.

35. a) Ak je $a>b$ a $b>c$, je aj $a>c$. b) Ak je $a<b$ a $b<c$, je aj $a<c$.

36. Ak sú a, b ľubovoľné prirodzené čísla, platí jeden a len jeden zo vzťahov: a) $a>b$, b) $a=b$, c) $a<b$.

37. Ak je $a>b$, je $a+c>b+c$. b) Ak je $a<b$, je $a+c<b+c$.

38. a) Ak je $a>b$, je $ac>bc$, b) Ak je $a<b$, je $ac<bc$.

39. Z nerovnosti medzi prirodzenými číslami $a > b$, $c > d$ odvoďte a) $a+c>b+d$; b) $ac>bd$ (používajte výsledky cvičení 37 a 38).

40. Z definície odčítania dokážte: a) O koľko sa zväčší menšenec, o toľko sa zväčší rozdiel (pri nezmenenom menšiteľovi). b) Rozdiel sa nezmení, ak sa zväčší menšenec i menšiteľ o to isté číslo.

41. Na základe definície odčítania dokážte, že a) pre $b \geqq c$ je $a+(b-c)=a+b-c$; b) pre $b \geqq c$, $a \geqq b-c$ je $a-(b-c)=a+c-b$.

42. Z definície odčítania odvoďte, že $a-a=0$, b) $a-0=a$.

43. Ak je $a>b$ a $b \geqq c$, je $a-c>b-c$. b) Ak je $a>b$ a $c \geqq a$, je $c-a<c-b$. Dokážte!

II. ZLOMKY.

6. Vznik čísla pri meraní. Dosiaľ sme si všímali iba to, ako vzniká pojem čísla pri určovaní počtu predmetov čiže po **spočítaní.** Pri počítaní vystačíme s prirodzenými číslami; počet predmetov sa nikdy nerovná $\frac{3}{4}$ alebo $\frac{5}{3}$ a pod. Avšak s číslami sa stretávame aj pri **meraní** a tu nevystačíme s prirodzenými číslami. Na strednej škole ste sa na hodinách geometrie zaoberali meraním úsečiek, uhlov, obsahov a objemov. Poznáte aj meranie času, váhy, teploty. Všeobecne hovoríme o meraní **veličín**. Merať môžeme iba dĺžku dĺžkou, váhu váhou, teplotu teplotou; **meranie je porovnávanie veľkosti dvoch veličín toho istého druhu.** Ak meriame napr. dĺžku učebne a ak nameriame *12* m, čo znamená číslo *12*? Znamená, že meraná úsečka (hrana učebne) sa rovná 12 úsečkám rovným 1 m; meter je pri tomto meraní **jednotkou.** Výsledok merania bude pravdepodobne vyjadrený prirodzeným číslom *12* iba zhruba; meraná hrana nebude asi presne *12* m dlhá, ale presnejšie bude dlhá trebárs *12* m *3* dm, t. j. rovná *12* úsečkám rovným jednotke *1* m, a ešte *3* úsečkám rovným jednotke *1* dm, desaťkrát menšej. Ak chceme dĺžku *12* m *3* dm vyjadriť pomocou pôvodnej jednotky *1* m, nevystačíme s prirodzenými číslami, ale musíme zaviesť nové čísla, tzv. **zlomky.** S prirodzenými číslami pracujeme v tých prípadoch, keď je jednotka nedeliteľná. Počet cestujúcich vo vlaku, počet jabĺk na strome a pod. je vždy prirodzené číslo alebo nula. Čas strávený vo vlaku, váha jabĺk na strome a pod. nebudú vždy vyjadrené prirodzeným číslom a okrem toho hodnota čísla, ktoré vyjadruje čas alebo váhu a pod., závisí od voľby jednotky času, váhy a pod. Ak zvolíme napr. hodinu za jednotku času, môže byť čas, ktorý strávim vo vlaku, vyjadrený zlomkom $\frac{3}{4}$; ak si zvolíme za jednotku času minútu, bude ten istý čas vyjadrený prirodzeným číslom 45. S bežnými jednotkami rôznych druhov veličín ste sa soznámili už na strednej škole a ďalšie jednotky poznáte vo vyšších triedach na hodinách fyziky.

Cvičenie.

44. Pri meraní určitej vzdialenosti sa nameralo a m. Ako by sa zmenil tento údaj, keby jednotkou dĺžky nebol *1* m, ale a) *1* dm, b) *1* cm, c) *1* km?

45. Pri meraní určitého času sa nameralo t min. Ako by sa zmenil tento údaj, keby jednotkou času nebola *1* min., ale a) *1* hod., b) *1* sek.?

46. Moderné uhlomerné prístroje majú delenie, ktorým sa pravý uhol nedelí na *90°*, ale na *100* dielkov, zvaných grady. Desatina gradu sa menuje decigrad, stotina gradu sa menuje centigrad. a) Koľko gradov má *1°*, *1'*, *1"*? b) Koľko stupňov (minút, sekúnd) má *1* grad, *1* decigrad, *1* centigrad?

47. *1* l je to isté ako *1* dm³. a) Koľko hl má *1* m³? b) Ak sa pri meraní objemu nameralo a hl, koľko je to m³?

48. Rýchlosť je počet dĺžkových jednotiek, ktoré pohybujúce sa teleso urazí za jednotku času. Ak je jednotkou dĺžky *1* km a jednotkou času *1* hod., je jednotka rýchlosti *1* km/hod. (čítaj *1* km za *1* hod.) Nameralo sa, že rýchlosť vlaku je *72* km/hod. Koľko je to m/sek.?

49. Merná váha je počet váhových jednotiek, ktoré obsahuje objemová jednotka nejakej látky. Ak je jednotkou váhy *1* g a jednotkou objemu *1* cm, je jednotkou mernej váhy *1* g/cm³ (čítaj *1* g na cm³). Nameralo sa, že merná váha železa je *7,8* g/cm³. Koľko je to a) kg/dm³, b) t/m³?

7. Zlomky a ich rôzne tvary. Prirodzené číslo *1* nazvime **základnou jednotkou**; v náuke o zlomkoch máme popri základnej jednotke ešte **lomené jednotky**: polovice, tretiny, štvrtiny, pätiny atď. Každé prirodzené číslo sa skladá z určitého počtu základných jednotiek; podobne sa skladá zlomok z určitého počtu rovnakých lomených jednotiek, napr. z určitého počtu polovíc, tretín atď. Zlomok je teda určený, ak poznáme **druh** a **počet** lomených jednotiek: druh je daný **menovateľom** zlomku, ich počet čitateľom. Zlomky zapisujeme známym spôsobom pomocou **zlomkovej čiary**; napr. zlomok $\frac{5}{6}$ sa skladá z piatich lomených jednotiek toho istého druhu, t. j. z piatich šestín. Každá lomená jednotka sa skladá z určitého počtu menších lomených jednotiek, napr. šestina sa skladá z troch osemnástin alebo zo siedmich dvaaštyridsiatin a pod.; preto je $\frac{5}{6}=\frac{15}{18}$; $(15=3\,.\,5)$; $\frac{5}{6}=\frac{35}{42}$; $(35=7\,.\,5)$ a pod. Všeobecne **každý zlomok, ktorý sa dá napísať s menovateľom a, dá sa napísať aj s menovateľom $2a$, $3a$, $4a$** atď., čiže zlomok $\frac{b}{a}$ sa dá písať aj v tvaroch

$$\frac{2b}{2a},\ \frac{3b}{3a},\ \frac{4b}{4a},\ \frac{5b}{5a}\ \text{atď.}$$

Prechod od tvaru $\frac{b}{a}$ ku ktorémukoľvek z týchto tvarov sa menuje **rozširovaním zlomku**; opačný prechod sa menuje **krátením zlomku.**

Pomocou rozširovania môžeme každé dva zlomky rozmanitým spôsobom **uviesť na spoločného menovateľa**; napr. zlomky $\frac{5}{6}$, $\frac{9}{8}$ môžeme uviesť na ktoréhokoľvek zo spoločných menovateľov *24, 48, 72, 96* atď.

$$\frac{5}{6}=\frac{20}{24},\ \frac{9}{8}=\frac{27}{24};\ \frac{5}{6}=\frac{40}{48},\ \frac{9}{8}=\frac{54}{48};\ \text{atď.}$$

Uvedenie na **najmenšieho** spoločného menovateľa vyžaduje znalosť náuky o deliteľnosti, o ktorej sa stručne zmienime až v 8. článku. Bez náuky o deliteľnosti môžeme dva zlomky $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$ uviesť na spoločného menovateľa ac, ktorý je súčinom pôvodných menovateľov:

$$\frac{b}{a}=\frac{bc}{ac},\ \frac{d}{c}=\frac{ad}{ac}. \tag{1}$$

Uvedením na spoločného menovateľa môžeme rozhodnúť o tom, či sa dva dané zlomky rovnajú, a v prípade, že sa nerovnajú, môžeme rozhodnúť, ktorý z nich je väčší. Z rovností (1) súdime:

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c},\ \text{ak } bc=ad, \tag{2}$$

$$\frac{b}{a}<\frac{d}{c},\ \text{ak } bc<ad,$$

$$\frac{b}{a}>\frac{d}{c},\ \text{ak } bc>ad.$$

Každý zlomok možno napísať v nespočetne mnoho rôznych tvaroch; ale s daným menovateľom možno zlomok napísať v jedinom tvare. Napr. zlomok $\frac{6}{8}$ možno napísať v jedinom tvare

$\frac{3}{4}$ s menovateľom 4, a zlomok $\frac{5}{8}$ vôbec nemožno napísať s menovateľom 4. Preto zo všetkých možných tvarov zlomku je jediný tvar, ktorého menovateľ má najmenšiu možnú hodnotu; tento tvar sa menuje **základným tvarom zlomku.**

Zlomok $\frac{b}{a}$ možno, ako vieme, písať v tvaroch

$$\frac{b}{a}, \frac{2b}{2a}, \frac{3b}{3a}, \frac{4b}{4a}, \frac{5b}{5a}, \ldots. \tag{3}$$

Možno zlomok $\frac{b}{a}$ napísať ešte v inom tvare, ako sú tvary (3)?

Dokážeme **bez použitia náuky o deliteľnosti,** že ak zlomok $\frac{b}{a}$ možno napísať v inom tvare ako sú tvary (3), potom $\frac{b}{a}$ nie je základný tvar, t. j. že zlomok možno napísať v tvare, ktorého menovateľ je menší ako a. Nech je teda možné napísať zlomok $\frac{b}{a}$ aj v tvare $\frac{d}{c}$, ktorý je iný ako sú tvary (3); máme dokázať, že zlomok $\frac{b}{a}$ dá sa napísať v tvare, ktorého menovateľ je menší ako a. To je zrejmé, ak je c menšie ako a, lebo potom $\frac{d}{c}$ už je taký tvar. Ak nie je $c < a$, menovateľ c zlomku tvaru $\frac{d}{c}$ sa nevyskytne medzi menovateľmi

$$a, 2a, 3a, 4a, 5a, \ldots. \tag{4}$$

tvarov (3), a preto menovateľ c je čo do veľkosti medzi niektorými dvoma susednými číslami z čísel (4); to znamená, že jestvuje také prirodzené číslo n, že

$$na < c, (n + 1) a > c.$$

Pretože je $na < c$, jestvuje také prirodzené číslo k, že

$$c = na + k. \qquad (5)$$

Pretože $(n+1)\,a > c$, je

$(n+1)\,a > na + k$ čiže $na + a > na + k$ a z toho

súdime, že je $$a > k. \qquad (6)$$

Zlomok $\frac{b}{a}$ sa dá písať v tvare $\frac{d}{c}$; z toho súdime podľa (2), že

$$bc = ad.$$

Podľa (5) je však

$$bc = b\,(na + k) \text{ čiže } bc = bna + bk,$$

teda

$$bc = a\,.\,nb + bk,$$

takže

$$ad = a\,.\,nb + bk. \qquad (7)$$

Z rovnice (7) vysvitá, že súčin $a\,.\,d$ je väčší ako súčin $a\,.\,nb$; z toho súdime, že prirodzené číslo d je väčšie ako prirodzené číslo nb. Preto jestvuje také prirodzené číslo h, že

$$d = nb + h. \qquad (8)$$

Podľa (8) je

$$ad = a\,.\,nb + ah.$$

Ak porovnáme s (7), vidíme že

$$bk = ah. \qquad (9)$$

Podľa (9) však súdime z (2), že

$$\frac{b}{a} = \frac{h}{k}.$$

Zlomok $\frac{b}{a}$ možno teda napísať v tvare $\frac{h}{k}$ s menovateľom k, ktorý podľa (6) je menší ako a. To sme chceli práve dokázať.

Dokázali sme, že ak zlomok $\frac{b}{a}$ možno napísať v inom tvare ako sú tvary (3), tvar $\frac{b}{a}$ nemôže byť základný. Teda ak $\frac{b}{a}$ je základný tvar zlomku, potom v (3) máme všetky možné tvary zlomku $\frac{b}{a}$ čiže: **Zo základného tvaru zlomku vznikne každý iný tvar rozširovaním.** To môžeme vysloviť aj takto: **Ak je zlomok napísaný v tvare $\frac{d}{c}$, ktorý nie je základný, možno zlomok skrátiť,** a tak uviesť na základný tvar. Ak prirodzené čísla a, b sú **nesúdeliteľné**, t. j. ak nie sú obe deliteľné tým istým prirodzeným číslom väčším ako 1, potom zlomok $\frac{b}{a}$ nemožno krátiť. Teda: **Ak sú a, b nesúdeliteľné čísla, zlomok $\frac{b}{a}$ musí byť v základnom tvare.**

Cvičenie.

50. Srovnajte podľa veľkosti zlomky: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}$.

51. Platí $\frac{68}{51} = \frac{204}{153}$ pričom $153 = 3.51$ Plynie z toho, že zlomok, $\frac{68}{51}$ je v základnom tvare?

52. Presvedčte sa, že $\frac{35}{91} = \frac{65}{169}$. Z toho usúďte, že nijaký z týchto dvoch zlomkov nie je v základnom tvare.

53. Ak je $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, kde a, b, c, d sú také prirodzené čísla, že ak $b > d$, je aj $\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$. Dokážte!

54. Užívajúc výsledok 53. cvič., uveďte zlomky z 52. cvič. na základný tvar.

55. Dokážte vetu: Ak je zlomok v základnom tvare, je alebo čitateľ alebo menovateľ (alebo obaja) nepárny. Možno vetu obrátiť?

56. Ak je $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, znamená to, že $ad = bc$; ak je $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ znamená to, že $cf = de$. Odvoďte odtiaľ, že aj $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$, t. j. že $af = be$.

57. Dokážte vety: a) Pri rovnakých menovateľoch má väčšiu hodnotu ten zlomok, ktorého čitateľ je väčší. b) Pri rovnakých čitateľoch má väčšiu hodnotu ten zlomok, ktorého menovateľ je menší.

8. Deliteľnosť prirodzených čísel. Prirodzené číslo p sa menuje **prvočíslom,** ak je p väčšie ako 1, ale p nie je možné vyjadriť ako súčin dvoch prirodzených čísel väčších ako 1.

Čísla $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$

sú prvočísla; sú to všetky prvočísla menšie ako 20.

Základná vlastnosť prvočísel zneje takto:

Ak je súčin bc dvoch prirodzených čísel deliteľný prvočíslom p, musí aspoň jeden z oboch činiteľov b, c byť deliteľný prvočíslom p.

Dôkaz. Pretože súčin bc je deliteľný prvočíslom p, musí jestvovať také prirodzené číslo d, že

$$bc = pd. \qquad (1)$$

Ak je číslo b deliteľné prvočíslom p, je všetko dokázané. Ak číslo b nie je deliteľné prvočíslom p, potom čísla b, p sú nesúdeliteľné a z toho plynie (pozri koniec 7. čl.), že zlomok $\frac{b}{p}$ je v základnom tvare. Ale ak porovnáme rovnicu (1) s rovnicou (2) článku 7. vidíme, že

$$\frac{b}{p} = \frac{d}{c}.$$

Pretože zlomok $\frac{b}{p}$ je v základnom tvare, vznikne tvar $\frac{d}{c}$ rozširovaním, a preto číslo c je deliteľné číslom p, čo sme práve mali dokázať.

Ak súčin $a_1 a_2 \ldots a_n$ je deliteľný prvočíslom p, musí byť niektorý činiteľ deliteľný prvočíslom p? Pri dvoch činiteľoch sme to už dokázali, ale pri viacej ako dvoch činiteľoch nie je zatiaľ vylúčené, že by jestvoval súčin $a_1 a_2 \ldots a_n$, ktorý by bol deliteľný prvočíslom p, pričom by nijaký činiteľ nebol deliteľný prvočíslom p. Ak taký súčin jestvuje, zvoľme počet činiteľov tak, aby bol najmenší. Potom súčin $a_1 a_2 a_3 \ldots . a_n$ bude deliteľný prvočíslom p, hoci ani jeden z činiteľov $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ nebude deliteľný prvočíslom p. Pretože číslo n sme zvolili čo najmenšie a pretože nijaké z čísel $a_2, \ldots, a_n$ nie je deliteľné prvočíslom p, súčin $c = a_2 \ldots a_n$ nebude deliteľný prvočíslom p. Podľa asociatívneho zákona násobenia je $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n = a_1 c$. Teda súčin $a_1 c$ je deliteľný prvočíslom p, a pretože ani činiteľ c ani činiteľ a_1 nie je deliteľný prvočíslom p, je to nemožné. Tým sme dokázali všeobecne: **Ak je súčin $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ niekoľkých prirodzených čísel deliteľný prvočíslom p, musí niektorý činiteľ byť deliteľný prvočíslom p.** Ak napr. činiteľ a_1 je sám prvočíslom, môže byť deliteľný prvočíslom p iba v tom prípade, keď sa rovná p. Teda: **Ak je súčin niekoľkých prvočísel deliteľný prvočíslom p, musí sa niektorý činiteľ rovnať p.**

Prirodzené číslo väčšie ako 1, ktoré nie je prvočíslo, menuje sa **složeným číslom. Každé složené číslo sa dá napísať ako súčin prvočísel,** z ktorých niektoré si môžu byť rovné. To je tzv. **rozklad na prvočiniteľov,** ktorý je možný iba jediným spôsobom. Lebo ak sú $p_1 p_2 p_3 \ldots p_n$, $q_1 q_2 q_3 \ldots q_m$ dva rozklady na prvočiniteľov toho istého prirodzeného čísla, je

$$p_1 p_2 p_3 \ldots . p_n = q_1 q_2 q_3 \ldots . q_m .$$

Súčin prvočísel $p_1 p_2 \ldots . p_n$ je deliteľný prvočíslom q_1, a preto niektorý činiteľ sa musí rovnať q_1. Ak je napr. $p_1 = q_1$, môžeme týmto spoločným činiteľom krátiť a dostaneme

$$p_2 p_3 \ldots . p_n = q_2 q_3 \ldots q_m .$$

Zase súčin prvočísel je $p_2 p_3 \ldots . p_n$ deliteľný prvočíslom q_2 a niektorý činiteľ sa musí rovnať q_2, napr. $p_2 = q_2$. Pokračujúc v tomto úsudku dostaneme napokon, že oba rozklady sa môžu líšiť nanajvýš poriadkom činiteľov.

Cvičenie.

Dokážte vety:

58. Každé prvočíslo (s výnimkou prvočísla 2) je nepárne číslo.
59. Číslo $n^2 - 1$ nie je prvočíslom pre nijaké $n > 2$.

60. Ak je p prvočíslo väčšie ako 2, je vždy jedno z čísel $p-1$, $p+1$ deliteľné štyrmi a druhé dvoma.

61. Ak je p prvočíslo väčšie ako 3, je vždy jedno z čísel $(p-1)$, $(p+1)$ deliteľné šiestimi.

62. Ak je p prvočíslo väčšie ako 3, je číslo p^2-1 deliteľné 24.

63. Súčin troch po sebe idúcich celých čísel, z ktorých prostredné je nepárne, je vždy deliteľný 24.

64. Ak sú a, b dve čísla nesúdeliteľné, nijaký prvočiniteľ z rozkladu čísla a nie je prvočiniteľom v rozklade čísla b.

65. Ak je číslo deliteľné dvoma číslami navzájom nesúdeliteľnými, je deliteľné aj ich súčinom.

66. Odôvodnite, že každé číslo menšie ako 30, ktoré je s týmto číslom nesúdeliteľné, je prvočíslom.

9. Sčítanie a násobenie zlomkov. Pri sčítaní dvoch zlomkov uvedieme oboch sčítancov na spoločného menovateľa; súčet možno potom napísať ako zlomok s rovnakým menovateľom, ktorého čitateľ je súčet upravených (rozšírených) čitateľov:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}. \tag{1}$$

Pretože pre sčítanie prirodzených čísel v čitateli platí komutatívny zákon, súdime z (1), že **komutatívny zákon sčítania platí aj pre zlomky.**

I viac než dva zlomky môžeme vždy uviesť na spoločného menovateľa a máme:

$$\frac{a_1}{c}+\frac{a_2}{c}+\ldots+\frac{a_n}{c}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{c}. \tag{2}$$

Z toho plynie, že aj **asociatívny zákon sčítania,** o ktorého platnosti pre prirodzené čísla sme hovorili v 1. článku, **platí i pre zlomky.***

Pri násobení nemusíme uvádzať zlomky na spoločného menovateľa. Zo strednej školy vieme, že:

$$\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd}. \tag{3}$$

---

* *Pozn.:* Keď sú čitatele rovnaké, prejde sčítanie v násobenie zlomku celým číslom.

Podobne máme pre viac ako dva zlomky:

$$\frac{a_1}{c_1} \cdot \frac{a_2}{c_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{c_n} = \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{c_1 c_2 \ldots c_n}. \tag{4}$$

Z (3) a (4) súdime, že **komutatívny a asociatívny** zákon násobenia, o ktorého platnosti pre prirodzené čísla sme hovorili v 2. článku, **platí i pre zlomky.** Dokážte!

Rovnako **distributívny zákon platí i pre zlomky.** Tento zákon je vyjadrený vzorcom (pozri 3. čl.):

$$u(r + s) = ur + us. \tag{5}$$

Aby sme dokázali, že zákon (5), ktorého platnosť pre prirodzené čísla je nám známa, zostáva správny i v tom prípade, že písmená u, r, s znamenajú zlomky. Napíšme si najprv zlomok u v ľubovoľnom tvare

$$u = \frac{a}{b}.$$

Ďalej si napíšme oba zlomky r, s tak, aby maly spoločného menovateľa:

$$r = \frac{c}{e}, \quad s = \frac{d}{e},$$

takže podľa pravidla o sčítaní zlomkov

$$r + s = \frac{c + d}{e}.$$

Podľa pravidla o násobení zlomkov je

$$u(r + s) = \frac{a(c + d)}{be},$$

$$ur = \frac{ac}{be}, \quad us = \frac{ad}{be}.$$

Oba zlomky ur, us máme napísané so spoločným menovateľom, takže

$$ur + us = \frac{ac + ad}{be}.$$

Pretože však *a, c, d* sú prirodzené čísla, platí pre ne distributívny zákon

$$a(c + d) = ac + ad$$

a z toho plynie, že platí aj (5).

Každé prirodzené číslo *a* môžeme napísať ako zlomok s menovateľom *1:*

$$a = \frac{a}{1}$$

alebo aj ako zlomok, ktorého menovateľom je ľubovoľne zvolené prirodzené číslo *n;*

$$a = \frac{an}{n}.$$

Ak sa čitateľ zlomku rovná nule a ak je menovateľ akékoľvek prirodzené číslo, zlomok sa rovná nule:

$$\frac{0}{n} = 0, \text{ pre } n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

Naproti tomu **menovateľ zlomku sa nikdy nerovná nule.**

V 4. článku sme odvodili pravidlá

$$a + 0 = a,\ a \,.\, 0 = 0,\ a \,.\, 1 = a \tag{6}$$

za predpokladu, že písmeno *a* znamená prirodzené číslo. Za toho istého predpokladu sme odvodili aj obrátené pravidlá, z ktorých najdôležitejšie je: **Ak sa súčin rovná nule, aspoň jeden činiteľ sa rovná nule.**

Odôvodnite teraz, prečo všetky tieto pravidlá platia aj pre zlomky!

V 5. článku sme hovorili predovšetkým o tom, že rovnica

$$a + x = b \tag{7}$$

s neznámou x nemá nijaké riešenie, ak je $a > b$, a že táto rovnica má jediné riešenie, ktoré značíme

$$x = b - a,$$

ak je $a < b$ alebo $a = b$, pričom je $x = 0$ v prípade $a = b$, ale v prípade $a < b$ nie je $x = 0$. Pritom každé z písmen a, b, x v 5. článku znamenalo prirodzené číslo alebo nulu. Odôvodnite teraz, že to všetko ostane v platnosti i po rozšírení pojmu čísla o zlomky.

V 5. článku sme ďalej hovorili o rovnici

$$ax = b \tag{8}$$

s neznámou x. Ak písmená a, b znamenajú prirodzené čísla, bola rovnica (8) riešiteľná pred zavedením zlomkov iba v tom prípade, že číslo b je deliteľné číslom a. Po zavedení zlomkov má rovnica (8) vždy jediné riešenie, nech sú a, b akékoľvek prirodzené čísla; toto riešenie je dané zlomkom

$$x = \frac{b}{a}. \tag{9}$$

Rovnica (8) má však jediné riešenie i vtedy, ak písmená a, b znamenajú zlomky. Nech je

$$a = \frac{a_1}{a_2}, \quad b = \frac{b_1}{b_2},$$

kde a_1, b_1, a_2, b_2 sú prirodzené čísla. Ak nazveme zlomok $a' = \frac{a_2}{a_1}$ prevrátenou hodnotou zlomku a,
potom riešenie $x = b \cdot a'$ rovnice (8) je súčin čísla b s prevrátenou hodnotou čísla a. Ak $b = 1$, je $x = a'$ čiže **súčin čísla a jeho prevrátenej hodnoty sa rovná** 1. Riešenie rovnice (8) sa niekedy píše v tvare $b : a$, často sa však píše v tvare (9) i vtedy, keď a alebo b je zlomok, alebo a i b sú zlomky. Taký výraz $\frac{a}{b}$ sa nazýva **složeným zlomkom.**

O rovnici (8) sme doteraz hovorili za predpokladu, že ani jedno z písmen a, b neznamená nulu. Tento predpoklad môžeme zapísať takto

$$a \neq 0, b \neq 0. \tag{10}$$

Značka $\neq$ je znamenie nerovnosti; čítame ho „nerovná sa“ alebo „je rôzne od“. Keď vylúčime predpoklad (10), ostávajú tri prípady. Po prvé rovnica

$$a \, . \, x = 0, \text{ kde } a \neq 0,$$

má jediné riešenie $x = 0$. Po druhé rovnica

$$0 \, . \, x = b, \text{ kde } b \neq 0,$$

nemá vôbec nijakého riešenia. Napokon je

$$0 \, . \, x = 0,$$

identická rovnica čiže **identita,** t. j. každé číslo x je riešením tejto rovnice.

Cvičenie.

67. Odôvodnite, že zlomok $x = \frac{b}{a}$ je riešením rovnice $ax = b$, kde $a \neq 0$.

68. Zlomok $\frac{a}{c}$ znamená to isté ako riešenie rovnice $cx = a$ pre $c \neq 0$; zlomok $\frac{b}{c}$ znamená to isté ako riešenie rovnice $cy = b$ pre $c \neq 0$. Odvoďte z toho, aký význam má súčet alebo rozdiel zlomkov $\frac{a}{c}$ a $\frac{b}{c}$.

69. Zlomok $\frac{a}{b}$ znamená to isté ako riešenie rovnice $bx = a$ pre $b \neq 0$; zlomok $\frac{c}{d}$ znamená to isté ako riešenie rovnice $dy = c$ pre $d \neq 0$. Odvoďte z toho, aký význam má súčin zlomkov $\frac{d}{b} \, . \, \frac{c}{d}$!

70. Deliť $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, pričom $b \neq 0$, $c \neq 0$ a $d \neq 0$, znamená to isté ako riešiť rovnicu $\frac{c}{d} \, . \, x = \frac{a}{b}$. Z toho odvoďte pravidlo pre delenie dvoch zlomkov!

71. Dokážte vetu: násobiť zlomkom, ktorý sa nerovná nule, je to isté, ako deliť jeho prevrátenou hodnotou.

72. Ak je $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, znamená to, že $ad=bc$. Z toho odvoďte, že aj $\frac{a}{b}+\frac{e}{f}=\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$, t. j. že $(af+be)df=bf(cf+de)$.

73. Ak je $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, znamená to, že $ad=bc$. Z toho odvoďte, že aj $\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}=\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}$, t. j. že $ae\,.\,df=bf\,.\,ce$.

74. Dokážte, že súčet dvoch zlomkov v základnom tvare, ktorých menovatelia sú dve rôzne čísla, nie je nikdy celé číslo.

75. Dokážte, že súčet dvoch zlomkov v základnom tvare, ktorých menovatelia sú dve nesúdeliteľné čísla, nemožno ďalej krátiť.

III. ZÁPORNÉ ČÍSLA.

10. Zavedenie záporných čísel; číselná os.

Doteraz zavedené čísla sú väčšie ako nula, okrem čísla nula. Čísla väčšie ako nula sa nazývajú **kladnými číslami.** S kladnými číslami vystačíme v praxi všade tam, kde nula znamená medzu, pod ktorú nemožno ísť; počet robotníkov v továrni, váha akéhokoľvek predmetu vo vzduchoprázdnom priestore, objem kvapaliny v nádobe a pod. sú vždy vyjadrené kladnými číslami. Ale čísla používame v praxi nielen pre vyjadrenie veľkosti nemeniacej sa veličiny, lež veľmi často aj na vyjadrenie **zmeny veľkosti.** Zväčšenie veľkosti je vyjadrené číslom kladným, neexistencia zmeny je vyjadrená číslom nula, a zmenšenie veľkosti je vyjadrené **číslom záporným. Číslo nula nepočítame ani medzi kladné čísla ani medzi záporné.** Súborný názov pre kladné i záporné čísla i pre nulu je **relatívne čísla.**

Každému kladnému číslu a je priradené určité záporné číslo, ktoré značíme — a, a ktoré nazývame **opačným číslom** ku kladnému číslu a; k zápornému číslu $-a$ je opačným číslom pôvodné kladné číslo a. Obe čísla, kladné číslo a i záporné číslo $-a$, majú spoločnú **prostú** (čiže **absolútnu**) **hodnotu,** ktorou je kladné číslo a. Prostú hodnotu značíme svislými čiarkami; teda

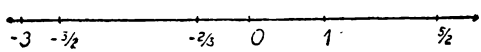
$$|a| = a, \; |-a| = a$$

pre každé kladné číslo a. K číslu 0 je opačným číslom číslo 0 samo; píšeme $-0 = 0$. Prostou hodnotou čísla 0 zase je číslo 0 samo: $|0| = 0$. Prostá hodnota každého čísla $a \neq 0$ (kladného alebo záporného) je kladná; prostá hodnota nuly je nula; nie je teda kladná.

Prechod od ktoréhokoľvek čísla k opačnému číslu sa menuje **zmenou znamienka**; zmenou znamienka vznikne z kladného čísla $\frac{1}{2}$ záporné číslo $-\frac{1}{2}$, zo záporného čísla -3 kladné číslo 3; z čísla 0 vznikne zmenou znamienka to isté číslo 0.

O dvoch relatívnych číslach hovoríme, že majú to **isté znamienko**, ak sú obe kladné alebo obe záporné alebo obe sa rovnajú nule; hovoríme, že majú **opačné znamienko**, ak je jedno kladné a druhé záporné.

Sčítanie čísel po rozšírení o záporné čísla sa najlepšie pochopí pomocou geometrického znázornenia na tzv. **číselnej osi**. Číselná os je vodorovná priamka (obr. 1), na ktorej sa zvolí určitý bod, zvaný **začiatok**, ktorý je obrazom čísla nula. Napravo od začiatku sa zvolí bod, ktorý je obrazom čísla 1. Vzdialenosť oboch zvolených bodov na číselnej osi volíme za dĺžkovú jednotku. Obrazom kladného čísla a je bod napravo od začiatku, ktorého vzdialenosť od začiatku je vo zvolenej jednotke vyjadrená číslom a; v tej istej vzdialenosti, ale naľavo od začiatku, leží obraz záporného čísla $-a$. V obr. 1 sú znázornené čísla $0, 1, \frac{5}{2}, -3, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{2}$.



Obr. 1.

Cvičenie.

76. Parník prejde silou stroja v km/hod.; rýchlosť prúdu je c km/hod. Obe rýchlosti meriame kladnými číslami v smere prúdu. Aká je rýchlosť

parníka v prúdiacej vode? Čo znamená, keď a) v je kladné, b) v je záporné, c) $v=0$, d) $v=-c$?

77. Z dvoch miest A a B vzdialených od seba a km vyrazia súčasne proti sebe dva vlaky; jeden ide rýchlosťou c_1 km/hod., druhý rýchlosťou c_2 km/hod., pričom $c_1 \neq c_2$. Obe rýchlosti, ako aj vzdialenosť vlakov meriame kladne v smere od A do B. Aká je ich vzdialenosť po uplynutí h hod.? Vysvetlite význam nájdeného výsledku, ak je a) $h < \frac{a}{c_1 - c_2}$, b) $h = \frac{a}{c_1 - c_2}$, c) $h > \frac{a}{c_1 - c_2}$.

78. Otec je trikrát tak starý ako syn; spolu majú *60* rokov. Za aký čas bude otec a) dvakrát, b) štyrikrát starší ako syn? Vysvetlite význam nájdených výsledkov.

79. Ak je $a \geqq 0$, je $|a| = a$, ak je $a \leqq 0$, $|a| = -a$. Odôvodnite!

80. Dokážte, že pre každé a je $|a| \geqq a$.

81. Dokážte, že pre každé a je $|-a| = |a|$.

82. Ako treba voliť číslo x, aby $x+1$, $x-2$ boly dve opačné čísla?

83. Pre ktoré x je a) $|x-1| = x$; b) $|x| = x-1$?

84. Pre ktoré a je $|a-1| = 1-a$?

85. Čo možno povedať o číslach a, b, ak je a) $|a| + |b| = 0$; b) $|a| - |b| = 0$?

11. Sčítanie relatívnych čísel.

V predchádzajúcom článku sme si povedali, že relatívne čísla používame v praxi predovšetkým na číselné vyjadrenie zmien veľkosti veličín. Také zmeny si môžeme veľmi dobre znázorniť **posunovaním číselnej osi.** Majme dve číselné osi: **Pevná číselná os** nech je narysovaná v sošite, **pohyblivá** číselná os nech je na priamej hrane papierového prúžku. Zvoľme si teraz na pevnej číselnej osi bod, ktorý je obrazom relatívneho čísla a; priložme teraz pohyblivú číselnú os k pevnej najprv tak, aby sa oba začiatky kryly, ale potom posunujme pohyblivou číselnou osou pozdĺž pevnej tak, aby sa začiatok pohyblivej osi napokon kryl s obrazom čísla a na pevnej osi. Týmto spôsobom sme zvolenému relatívnemu číslu a priradili určité posunutie číselnej osi; toto posunutie označme (a). Ak je číslo a **kladné,** je (a) posunutie **doprava** o dĺžku rovnú a; ak je číslo a **záporné,** je (a) posunutie **doľava** o dĺžku rovnú a; napokon (0) vlastne nie je posunutie; pre $a = 0$ každý bod ostáva na svojom mieste.

Takým posunovaním si vysvetlíme súčet $a + b$ dvoch relatívnych čísel takto: Vykonáme najprv posunutie (a), potom posunutie (b). Ako výsledok oboch posunutí máme tretie posunutie, o ktorom môžeme hovoriť, že je **složené** z posunutia (a) a z posunutia (b). Pri tomto složenom posunutí prejde počiatok do bodu, ktorý je práve obrazom súčtu $a + b$. Teda: **Ak skladáme posunutie (a) a posunutie (b), dostaneme posunutie $(a+ +b)$.** Vykonajte na príkladoch: (1) $a=2$, $b=3$; (2) $a=-2$, $b=3$; (3) $a=2$, $b=-3$; (4) $a=-2$, $b=-3$. Na týchto a iných príkladoch vysvetlite pravidlá známe zo strednej školy: **Ak sa jeden z oboch sčítancov rovná nule, súčet sa rovná druhému sčítancu. Ak je $a \neq 0$, $b \neq 0$, a ak majú oba sčítance to isté znamienko, má to isté znamienko i súčet a prostá hodnota súčtu je súčet prostých hodnôt oboch sčítancov. Ak majú oba sčítance opačné znamienka a tie isté prosté hodnoty, súčet sa rovná nule,** čiže kratšie: Súčet dvoch opačných čísel sa rovná nule. **Ak majú oba sčítance opačné znamienka, ale nerovnaké prosté hodnoty, prostá hodnota súčtu sa rovná rozdielu prostých hodnôt oboch sčítancov a súčet má to isté znamienko ako ten sčítanec, ktorého prostá hodnota je väčšia.**

Z pripomenutých pravidiel plynie, že **komutatívny zákon sčítania platí aj pre relatívne čísla.**

Doteraz sme hovorili iba o súčte dvoch sčítancov. Ak je však daný ľubovoľný počet relatívnych čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, potom súčet $a_1+a_2+\ldots+a_n$ vznikne zpočiatku tým posunutím, ktoré je složené z posunutí $(a_1), (a_2), \ldots, (a_n)$.

Všimnime si najmä troch sčítancov a, b, c. Ak máme složiť tri posunutia $(a), (b), (c)$, môžeme to urobiť tak, že najprv složíme dve posunutia $(a), (b)$ v jediné posunutie $(a + b)$ a potom ešte toto posunutie skladáme s tretím posunutím (c). Môžeme však skladať aj posunutie (a) s tým posunutím $(b + c)$, ktoré vznikne skladaním dvoch posunutí $(b), (c)$. Tým je odôvodnené, že **asociatívny zákon sčítania platí aj pre relatívne čísla.**

Pravidlo

$$a + 0 = 0 + a = a$$

platí zrejme i pre relatívne čísla a.

Dokiaľ sme nezaviedli záporné čísla, bola rovnica

$$a + x = b \tag{1}$$

neriešiteľná v prípade $a > b$. V oblasti relatívnych čísel je rovnica (1) vždy riešiteľná, lebo má riešenie

$$x = -a + b. \tag{2}$$

Vskutku podľa asociatívneho zákona sčítania je

$$a + x = a + (-a + b) = [a + (-a)] + b$$

a súčet $a + (-a)$ dvoch opačných čísel sa rovná nule, teda

$$a + x = 0 + b = b.$$

Obrátene, ak je x riešenie rovnice (1), platí (2). Lebo podľa asociatívneho zákona sčítania je

$$-a + b = -a + (a + x) = (-a + a) + x,$$

teda

$$-a + b = 0 + x = x.$$

Podľa komutatívneho zákona sčítania môžeme miesto (2) písať aj

$$x = b + (-a),$$

čo je zvykom kratšie písať

$$x = b - a. \tag{3}$$

Teda: **Odčítať od čísla b číslo a znamená práve toľko, ako k číslu b pričítať číslo $-a$, opačné k číslu a.** V oblasti relatívnych čísel nemusíme preto odčítanie vôbec považovať za osobitný počtový výkon, pretože sa dá previesť na sčítanie. V tom je hlavný význam zavedenia záporných čísel.

Všeobecnejšie každý výkon, složený z niekoľkých postupných sčítaní a odčítaní, javí sa po zavedení záporných čísel ako sčítanie, napr.

$$a - b - c + d$$

je súčet čísel

$$a, -b, -c, d.$$

Cvičenie.

86. Dokážte, že súčet dvoch opačných čísel je 0.

87. K číslu $3a-2b+5c$ utvorte opačné číslo.

88. Ktoré číslo treba pričítať k číslu a, aby vyšlo číslo b?

89. a) Ktoré číslo treba odčítať od čísla a, aby vyšlo číslo b? b) od ktorého čísla treba odčítať číslo a, aby vyšlo číslo b?

90. Dokážte správnosť vety: O koľko sa zmenší jeden sčítanec, o toľko sa zmenší súčet.

91. Dokážte správnosť viet: a) O koľko sa zmenší menšenec, o toľko sa zmenší rozdiel. b) O koľko sa zmenší menšiteľ, o toľko sa zväčší rozdiel.

92. Dokážte, že $|a+b| \leqq |a|+|b|$. Kedy nastane rovnosť?

93. Dokážte, že $|a-b| \leqq |a|+|b|$. Kedy nastane rovnosť?

94. Dokážte, že pre $|a| \geqq |b|$ je $|a+b| \geqq |a|-|b|$. Kedy nastane rovnosť? Čo platí, ak je $|a|<|b|$?

95. Dokážte, že pre $|a| \geqq |b|$ je $|a-b| \geqq |a|-|b|$. Kedy nastane rovnosť? Čo platí, ak je $|a|<|b|$?

12. Násobenie relatívnych čísel.

Zo strednej školy viete, že relatívne čísla sa násobia podľa týchto pravidiel: **Prostá hodnota súčinu dvoch relatívnych čísel sa rovná súčinu prostých hodnôt oboch činiteľov. Ak zmeníme znamienko jedného činiteľa, zmení sa znamienko súčinu.** Na podklade týchto základných pravidiel ľahko sami odvodíte ďalšie známe pravidlá: **Ak sa aspoň jeden činiteľ rovná nule, aj súčin sa rovná nule. Súčin dvoch kladných čísel je kladný, tak isto aj súčin dvoch záporných čísel. Ak je jeden činiteľ kladný a druhý záporný, je súčin záporný.** Z toho plynie, že i v oblasti relatívnych čísel ostáva správne pravidlo: **Ak sa súčin rovná nule, aspoň jeden činiteľ sa rovná nule.**

Sami ľahko odôvodníte, že **komutatívny a asociatívny zákon násobenia platí aj pre relatívne čísla.** Aj **distributívny zákon**

$$(a+b)\,r = ar + br \tag{1}$$

platí aj pre relatívne čísla, ale pri odôvodnení rozoznávame niekoľko prípadov. Odôvodnite sami, že pravidlo (1) platí pre relatívne čísla, ak $r=0$. Ďalej odôvodnite, že (1) platí tiež, ak $a=0$ alebo $b=0$. Ostáva len odôvodniť (1) pre prípad, že

$$a \neq 0, b \neq 0, r \neq 0.$$

Pretože zmena znamienka čísla r má za následok iba zmenu znamienka na oboch stranách (1), stačí dokázať (1) pre kladné r. Ak sú aj čísla a, b kladné, vieme, že pravidlo (1) je správne. Súčasná zmena znamienka oboch čísel a, b má za následok na oboch stranách (1) iba zmenu znamienka; preto platí (1), aj keď sú obe čísla a, b záporné. Ostáva dokázať (1) pre prípad, že z čísel a, b je jedno kladné a druhé záporné, pričom r je kladné. Usudzujeme takto:

Ak čísla a, b majú rovnakú prostú hodnotu, líšia sa iba znamienkom, teda $a + b = 0$. Aj čísla ar, br sa líšia iba znamienkom, a preto $ar + br = 0$, a vzorec (1) je správny.

Ak čísla a, b nemajú rovnakú prostú hodnotu a jedno je kladné a druhé záporné, uvážime, že súčasná zmena znamienka oboch čísel a, b má za následok na oboch stranách (1) iba zmenu znamienka. Okrem toho si všimnime komutatívny zákon sčítania! Vidíme, že stačí dokázať (1) pre prípad, že a je kladné, b záporné, pričom a má väčšiu prostú hodnotu ako b. Okrem toho r je kladné. Pretože b je záporné, položme

$$b = -c;$$

čísla a, c sú kladné, $a > c$ a máme dokázať, že

$$(a - c)\, r = ar - cr, \tag{2}$$

pričom aj r je kladné. Položme

$$a - c = s; \tag{3}$$

máme dokázať, že

$$sr = ar - cr, \tag{4}$$

pričom aj c je kladné. Podľa (3) je

$$c + s = a \tag{5}$$

a obe čísla c, s sú kladné. Vieme teda, že

$$(c + s)\, r = cr + sr,$$

$$ar = cr + sr; \qquad (6)$$

pretože však c, s, r sú kladné čísla a pretože platí (5), vieme, že platí (6). Tým je distributívny zákon (1) dokázaný vo všetkých prípadoch.

Dokážte sami, že pravidlo

$$a \cdot 1 = a$$

zostáva v platnosti i pre relatívne čísla a.

Doteraz preberané čísla sa menujú **racionálnymi číslami.** Medzi tieto patria **celé čísla**

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots .$$
$$-1, -2, -3, -4, -5, -6, \ldots .$$

a zlomky

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \ldots$$
$$-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}, \ldots$$

Okrem racionálnych čísel jestvujú aj **iracionálne čísla,** z ktorých niektoré ste už poznali na strednej škole. Sú to najmä niektoré druhé odmocniny, ako $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ a pod., ktoré budeme v tejto triede ešte podrobne preberať. Ďalej sem patrí napr. vám už tiež známe Ludolfovo číslo π.

Cvičenie.

96. Dokážte správnosť vety: Súčin niekoľkých činiteľov, z ktorých ani jeden sa nerovná nule, je kladný, ak je počet záporných činiteľov párny; súčin niekoľkých činiteľov, z ktorých ani jeden sa nerovná nule, je záporný, ak je počet záporných činiteľov nepárny. Treba výslovne uvádzať, že ani jeden z činiteľov sa nerovná nule?

97. Odôvodnite, ako z pravidiel: Súčin dvoch kladných čísel je kladný, súčin dvoch záporných čísel je kladný; súčin čísla kladného a záporného je záporný, plynie pravidlo: Ak sa súčin rovná nule, aspoň jeden činiteľ sa rovná nule.

98. Odôvodnite, prečo pre násobenie relatívnych čísel platí komutatívny a asociatívny zákon.

99. Odôvodnite, že distributívny zákon $(a+b)\,r=ar+br$ platí, a) keď $r=0$, b) keď $a=0$, c) keď $b=0$.

100. Dokážte, že súčin dvoch opačných čísel nie je nikdy kladný. Aký je teda?

101. Z výrazu $[a+(-a)]b$ odvoďte na základe distributívneho zákona pravidlo: Ak zmeníme znamienko jedného činiteľa, zmení sa znamienko súčinu.

102. Z pravidla o násobení relatívnych čísel odôvodnite, že zlomok, ktorého čitateľ a menovateľ majú to isté znamienko, má kladnú hodnotu, a že zlomok, ktorého čitateľ a menovateľ majú opačné znamienka, má zápornú hodnotu.

103. Zpravidla o prostej hodnote súčinu odvoďte, že $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$, pokiaľ $y \neq 0$.

13. Nerovnosti. Aj relatívne čísla môžeme porovnávať čo do veľkosti. Pritom je vhodné používať číselnú os. Číslo a je menšie ako číslo b a číslo b je väčšie ako číslo a, čo píšeme

$$a < b \text{ alebo } b > a,$$

ak na číselnej osi obraz čísla a leží naľavo od čísla b. Pomocou číselnej osi vysvetlite: **Nula je menšia ako každé kladné číslo. Nula je väčšia ako každé záporné číslo. Každé kladné číslo je väčšie ako každé záporné číslo. Z dvoch záporných čísel je to väčšie, ktorého prostá hodnota je menšia.**

Ak je $a < b$, môžu nastať tieto prípady:

(1) obe čísla a, b sú kladné;

(2) číslo a sa rovná nule, číslo b je kladné;

(3) číslo b je kladné, číslo a je záporné;

(4) číslo b sa rovná nule, číslo a je záporné;

(5) obe čísla a, b sú záporné.

V každom z týchto prípadov vysvetlite pomocou číselnej osi, že $-a > -b$. Teda: **Ak v nerovnosti zmeníme na oboch stranách znamienko, platí opačná nerovnosť** (väčšie miesto menšieho, menšie miesto väčšieho).

Nech je zase $a < b$. Ak je c tretie číslo, vzniknú čísla $a + c$, $b + c$ z čísel a, b určitým posunutím číselnej osi (napravo, ak je c kladné, naľavo, ak je c záporné). Keďže obraz čísla a leží naľavo od obrazu čísla b, leží aj obraz čísla $a + c$ naľavo od obrazu čísla $b + c$, t. j. $a + c < b + c$. Teda: **V nerovnosti je dovolené na oboch stranách pričítať to isté číslo** (kladné, záporné alebo nulu).

Majme teraz dve nerovnosti

$$a_1 < b_1, a_2 < b_2. \tag{1}$$

Ak v prvej z oboch nerovností pričítame na oboch stranách číslo a_2, dostaneme

$$a_1 + a_2 < b_1 + a_2. \tag{2}$$

Ak v druhej z oboch nerovností (1) pričítame na oboch stranách číslo b_1, dostaneme $a_2 + b_1 < b_2 + b_1$, čiže

$$b_1 + a_2 < b_1 + b_2. \tag{3}$$

Ak porovnáme obe nerovnosti (2) a (3), dospejeme k nerovnosti

$$a_1 + a_2 < b_1 + b_2.$$

Teda: **Dve súhlasné nerovnosti možno sčítať.** Slovo súhlasné znamená, že v oboch nerovnostiach je znak $<$ alebo v oboch znak $>$.

Ak $a \neq b$, jestvuje číslo $x \neq 0$ také, že $b = a + x$. Na číselnej osi vznikne obraz čísla b z obrazu čísla a posunutím doprava pri kladnom x, doľava pri zápornom x. Preto v prípade $a < b$ je x kladné a naopak pri kladnom x je $a < b$.

Nech je teraz $a < b$; položme zase $b = a + x$, takže x je kladné. Ak je c kladné číslo, je $bc = (a + x)c$, teda podľa distributívneho zákona: $bc = ac + xc$. Pretože obe čísla x, c sú kladné, je aj súčin xc kladný, a preto je ac menšie ako bc. Teda: **V nerovnosti možno obe strany násobiť tým istým kladným číslom.** Vysvetlite, prečo neslobodno obe strany násobiť číslom 0. Ak chceme obe strany nerovnosti $a < b$ znásobiť záporným číslom d, znásobíme najprv kladným číslom $|d|$, čo dáva správnu nerovnosť $a|d| < b|d|$. Potom však musíme na oboch stranách zmeniť ešte znamienko a dochádzame k obrátenej nerovnosti

$ad > bd$. Teda: **Ak obe strany nerovnosti násobíme tým istým záporným číslom, platí medzi súčinmi obrátená nerovnosť.**

Majme teraz dve nerovnosti

$$a_1 < b_1,\ a_2 < b_2$$

a predpokladajme, že všetky dané čísla sú kladné. Potom môžeme v prvej z oboch nerovností násobiť obe strany číslom a_2 a v druhej číslom b_1. Dostaneme dve nové nerovnosti

$$a_1\, a_2 < b_1\, a_2,\ b_1\, a_2 < b_1\, b_2,$$

z ktorých plynie nerovnosť $a_1\, a_2 < b_1\, b_2$. Teda: **Dve súhlasné nerovnosti medzi kladnými číslami možno znásobiť.** Možno znásobiť napr. nerovnosti $-2 < 1$, $-4 < 3$ alebo nerovnosti $-2 < -1$, $-4 < -3$?

Cvičenie.

104. Opierajúc sa o zobrazenie čísel na číselnej osi, dokážte vety: a) Ak je $a>b$, je $b<a$. b) Ak je $a<b$, je $b>a$. c) Ak sú a, b ľubovoľné čísla, platí vždy jeden a len jeden zo vzťahov: $a>b$, $a=b$, $a<b$. d) Ak je $a>b$ a $b>c$, je $a>c$.

105. Je možné, aby súčet dvoch čísel bol menší ako a) niektorý, b) ktorýkoľvek sčítanec? Kedy to nastane?

106. Kedy je a) $a \,.\, b>a$; b) $a \,.\, b<a$?

107. Je možné, aby súčin dvoch čísel bol a) väčší, b) menší ako ktorýkoľvek činiteľ? Kedy to nastane?

108. Ak sú $a \neq 0$, $b \neq 0$ dve čísla s tým istým znamienkom, z nerovnosti $a>b$ plynie $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$. Dokážte! Čo platí, ak majú čísla a, b rôzne znamienka?

109. Ako treba voliť číslo x, aby platilo a) $3x-5>4-2x$; b) $2x-7>7x-2$; c) $3x-7<8x+5$?

110. Zvoľme si ľubovoľné číslo $r>0$. Ako treba voliť číslo s, aby oba výrazy $3r-2s$, $3s-2r$ boly kladné?

111. a) Ak je $a>b$, je $a>\frac{a+b}{2}>b$. b) Dokážte, že z výsledku plynie: Medzi dvoma racionálnymi číslami leží vždy ďalšie racionálne číslo.

112. Čísla a, b, c sú kladné. Dokážte a) Ak je $\frac{a}{b}>1$, je $\frac{a+c}{b+c}>1$. b) Ak je $\frac{a}{b}<1$, je $\frac{a+c}{b+c}<1$.

113. Čísla a, b, c, d sú kladné a také, že $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$. Dokážte, že zlomok $\frac{a+c}{b+d}$ čo do veľkosti leží medzi oboma zlomkami $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$.

IV. DESIATKOVÁ SÚSTAVA.

14. Mocniny s celými mocniteľmi.

Často sa vyskytnú súčiny, ktorých všetci činitelia sa rovnajú tomu istému číslu a. Taký súčin sa menuje **mocnina**. Číslo a sa menuje **základ** mocniny; počet činiteľov r sa menuje **mocniteľ** čiže **exponent**; mocnina so základom a a mocniteľom r sa značí a^r. Napr.

$$a^3 = a \,.\, a \,.\, a, \; a^5 = a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \text{ a pod.}$$

Nevylučujeme prípad $r = 1$; je

$$a^1 = a \tag{1}$$

pre každý základ a.

Na základe asociatívneho zákona násobenia ľahko odvodíte zákon

$$a^r \,.\, a^s = a^{r+s}. \tag{2}$$

Ako vyslovíte tento zákon?

Mocnina a^{rs} je súčin rs činiteľov, z ktorých sa každý rovná číslu a; podľa definície súčinu rs dvoch prirodzených čísel môžeme rs činiteľov rozložiť na s skupín po r činiteľoch. Súčin r činiteľov z jednotlivej skupiny je a^r; súčin s takých čiastočných súčinov je $(a^r)^s$. Preto zo všeobecného asociatívneho zákona plynie zákon

$$(a^r)^s = a^{rs}. \tag{3}$$

Ako vyslovíte tento zákon?

Zo všeobecného komutatívneho zákona násobenia spolu s asociatívnym zákonom násobenia plynie ešte jeden zákon:

$$a^r \,.\, b^r = (ab)^r. \tag{4}$$

Ľavá strana vo vzorci (4) sa podľa asociatívneho zákona rovná súčinu $2r$ činiteľov, z ktorých prvých r činiteľov sa rovná a, ostatných r sa rovná b. Podľa komutatívneho zákona sa tento súčin rovná súčinu $2r$ činiteľov, ktorí sa striedavo rovnajú a, b. Taký súčin sa však podľa asociatívneho zákona rovná súčinu r činiteľov, z ktorých každý sa rovná ab, t. j. rovná sa pravej strane vzorca (4), ktorý sme tak dokázali.

Doteraz sme sa zaoberali iba takými mocninami, ktorých mocniteľ je prirodzené číslo. Ak sa mocniteľ rovná nule, nech je pri každom základe a:

$$a^0 = 1. \tag{5}$$

Sami sa presvedčte, že zákony (2), (3), (4) sú správne i v tom prípade, že jeden z mocniteľov r, s (alebo obaja) sa rovná nule:

Ak sa základ a rovná nule, je

$$0^0 = 1,\ 0^r = 0 \text{ pre } r = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

Teraz sa budeme zaoberať mocninami, ktorých mocniteľ je ľubovoľné celé číslo, ktoré môže byť aj záporné. Ak je $-r$ záporné celé číslo, nevieme zatiaľ, čo má znamenať mocnina a^{-r}. Budeme sa snažiť vysvetliť význam mocniny a^{-r} tak, aby zákon (2) bol správny pre ľubovoľných celých mocniteľov, nech majú akékoľvek znamienko. Potom musí byť pre každé

$$r = 1, 2, 3, \ldots\ldots:$$
$$a^r \,.\, a^{-r} = a^0,$$

t. j. podľa (5) musí byť

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

pre každé prirodzené číslo r. Pretože symbol $\frac{1}{0}$ v obore konečných čísel je bezvýznamný, vidíme z (6), že aj symbol 0^{-r} je bezvýznamný pre každé prirodzené číslo r. Obmedzíme sa preto na mocniny, ktorých základ a je iný ako nula. Potom pre každé prirodzené číslo r je a^r súčinom r činiteľov iných než nula, teda $a^r \neq 0$, a preto a^{-r} má celkom určitý význam.

Ak sú základy a, b iné než nula, platia zákony (2), (3), (4) i keď je niektorý z mocniteľov r, s (alebo obaja) záporný. O tom sa môžete bez ťažkostí presvedčiť sami. Presvedčte sa o tom najprv v určitom prípade, napr. pre $r = 4$, $s = 3$.

Cvičenie.

114. Historická úloha (Ahmesov papyrus okolo 2000 pr. n. e.). Každý zo siedmich ľudí má po siedmich mačkách, každá mačka chytí po siedmich myšiach, každá myš zožerie po siedmich klasoch jačmeňa, z každého klasu môže vyrásť sedem meríc zrna. Koľko meríc zrna sa uchráni vďaka mačkám?

115. Francúzsky matematik Fermat dokázal vetu: „Ak je p prvočíslo, a ľubovoľné číslo číslom p nesúdeliteľné, tak číslo $a^{p-1}-1$ je deliteľné číslom p.“ Overte správnosť tejto vety pre $a=2$, $p=3, 5, 7, 11, 13$!

116. Historická úloha. Kupec si chcel dať podkovať koňa. Kováč žiadal tento spôsob platenia: „Na všetky podkovy potrebujem 24 klincov. Za prvý klinec mi zaplatíš 1 hal., za druhý 2 hal., za tretí 4 hal. atď., teda za každý ďalší klinec dvakrát toľko.“ Kupec radostne súhlasil, neskôr však horko ľutoval. Koľko musel zaplatiť iba za posledný klinec?

117. Koľko je a) $(-1)+(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+(-1)^5+(-1)^6$; b) $a^2+(-a)^2$; c) $a^3+(-a)^3$; d) $x^4-(-x)^4$; e) $x^5-(-x)^5$?

118. Pre ktoré a je a) $a^2>a$; b) $a^2=a$; c) $a^2<a$? (Preveďte a na ľavú stranu.)

119. Pre ktoré a je a) $a^3>a$; b) $a^3=a$; c) $a^3<a$? (Preveďte a na ľavú stranu.)

120. Pre ktoré a je a) $a^3>a^2$; b) $a^3=a^2$; c) $a^3<a^2$;? (Preveďte a^2 na ľavú stranu.)

121. Koľko je a) $3^0, 3^{-1}, 3^{-2}$; b) $(-2)^0, (-2)^{-1}, (-2)^{-2}$; c) $0{,}1^0$, $0{,}1^{-1}, 0{,}1^{-2}, 0{,}1^{-3}$?

122. Vypočítajte: a) $\left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$; b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$, $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1}, \left(-\frac{4}{3}\right)^{-2}$.

123. Čo značí: a) $ab^{-1}, (ab)^{-1}$; b) $ab^{-2}, (ab)^{-2}$; c) $-ab^{-1}, (-ab)^{-1}$, $-(ab)^{-1}$; d) $-ab^{-2}, -(-ab)^{-2}$?

124. Vypočítajte: a) $a^2 . a^{-3}, a^{-2} . a^3, a^{-2} . a^{-3}$; b) $a^{-2} : a^3, a^2 : a^{-3}$, $a^{-2} : a^{-3}$!

125. Vypočítajte: a) $(a^{-3}+a^{-2}+a^1) . a^2$; b) $(a+b)(a^{-1}+b^{-1})$.

126. Dokážte, že pre r, s celé, $a \neq 0$ je $a^r : a^s = a^{r-s}$.

127. Dokážte, že pre r celé, $b \neq 0$ je $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$.

128. Platia zákony $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, $(a^r)^s = a^{rs}$, i keď je $a = 0$? Aké musia byť v tomto prípade čísla r, s?

129. Je pravda, že $a^r \cdot b^r = (ab)^r$, i keď a) $a = 0$, b) $b = 0$, c) $a = 0$ i $b = 0$?

15. Číselné sústavy.

Prečítajte si znovu začiatok 1. článku! Tam sme hovorili o tom, že prirodzené čísla slúžia na určovanie počtu predmetov ľubovoľného súboru. Spočítať, koľko „jednotiek" je v určitom súbore, je prakticky ľahké pri malých súboroch, je to však menej ľahké pri súboroch, složených z veľkého počtu predmetov. Preto odpradávna sa veľké súbory spočítavaly tak, že sa rozdeľovaly na menšie súbory s určitým počtom predmetov. Tak vznikly **číselné sústavy**, z ktorých dnes má praktický význam najmä sústava so **základom** 10, zvaná **desiatkovou sústavou.** Pri spočítavaní počtu predmetov v desiatkovej sústave nazývame každý predmet spočítavaného súboru **základnou jednotkou** čiže **jednotkou rádu nula,** ktorá sa rovná 1 čiže 10^0. Desať jednotiek rádu nula tvorí **jednotku rádu** 1, ktorá sa rovná 10 čiže 10^1; desať jednotiek rádu 1 tvorí **jednotku rádu** 2, ktorá sa rovná 100 čiže 10^2; 10 jednotiek rádu 2 tvorí **jednotku rádu** 3, ktorá sa rovná 1000 čiže 10^3. Všeobecne pre každé prirodzené číslo r **jednotka rádu** r sa rovná 10^r jednotiek rádu nula. Ľubovoľne veľký počet predmetov sa dá potom rozložiť na určité počty jednotiek rôznych rádov, pričom počet jednotiek každého rádu je menší ako 10. Napr. číslo $9\,724$ je súčet 9 jednotiek rádu 3, 7 jednotiek rádu 2, 2 jednotiek rádu 1, a 4 jednotiek rádu 0 čiže:

$$9\,724 = 9.10^3 + 7.10^2 + 2.10^1 + 4.10^0.$$

Pritom jednotky určitých rádov môžu chýbať: napr. je

$$8\,040 = 8.10^3 + 4.10^1$$

alebo úplnejšie

$$8\,040 = 8.10^3 + 0.10^2 + 4.10^1 + 0.10^0.$$

Počet chýbajúcich jednotiek sa rovná nule; zavedenie číslice nula, čo je zásluhou starovekých indických matematikov, znamenalo obrovský pokrok v aritmetike, lebo len pomocou značky *0* je možné vystihnúť už aj umiestením rádový význam každej jednotky.

V desiatkovej sústave môžeme pohodlne zapisovať nielen prirodzené čísla, ale aj zlomky s menovateľmi *10, 100, 1000* atď., všeobecne zlomky, ktorých menovateľ je mocnina čísla 10. Napr. je

$$73{,}624 = 7.10^1 + 3.10^0 + 6.10^{-1} + 2.10^{-2} + 4.10^{-3}$$
$$0{,}0235 = 2.10^{-2} + 3.10^{-3} + 5.10^{-4}.$$

Také zlomky sa menujú **desatinnými zlomkami.** Pri písaní desatinných zlomkov treba vyznačiť **základné miesto,** t. j. to miesto, na ktorom sú základné jednotky. To sa robí pomocou **desatinnej čiarky;** v anglosaských krajinách sa dosiaľ používa **desatinná bodka,** ktorá sa predtým používala aj u nás.

V desiatkovej sústave zapisujeme čísla pomocou desiatich **číslic (cifier)** *0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.* Hodnota čísla je súčet **miestnych hodnôt** jednotlivých číslic. Miestna hodnota číslice a sa rovná a, ak je a na základnom mieste, rovná sa $a\,.\,10^n$, ak je a o n miest naľavo od základného miesta, rovná sa $a\,.\,10^{-n}$, ak je a o n miest napravo od základného miesta. V každom prípade sa miestna hodnota číslice a rovná $a\,.10^r$, kde r je celé číslo, ktoré môže byť kladné, záporné alebo sa rovnať nule; r sa menuje **rád** číslice a; číslo 10^r je **jednotka rádu** r. Miestna hodnota číslice *0* sa rovná *0,* nech je rád r akýkoľvek.

Miesto desiatkovej sústavy možno vybudovať iné podobné číselné sústavy, v ktorých sa číslo *10* nahradí iným základom. Výhody desiatkovej sústavy sa plne využily až po zavedení metrickej sústavy mier. V Anglicku, ktoré nezaviedlo metrickú sústavu, je praktické počítanie omnoho ťažšie ako u nás. Starí Babylonci používali sústavu so základom 60, ktorej zvyšky nájdeme dosiaľ pri jednotkách uhlových a časových.

Najbližšia desiatkovej sústave je **sústava stovková,** ktorej základom je číslo 100. Číslicami v stovkovej sústave sú čísla menšie ako sto, t. j. sú to okrem číslic desiatkovej sústavy ešte čísla písané v bežnej desiatkovej sústave dvoma číslicami. Ak chceme číslo písané v desiatkovej sústave vyjadriť v stovkovej sústave, soskupíme číslice do skupín po dvoch, počínajúc od desatinnej čiarky, čo si môžeme naznačiť svislými čiarkami. Napr.:

$$23|56|87|04,$$

t. j. v stovkovej sústave máme:

$$23568704 = 23.100^3 + 56.100^2 + 87.100^1 + 4.100^0.$$

Najvyššia skupina môže obsahovať aj len jedinú číslicu; napr.:

$$8|50|06|73, \text{ t. j.}$$

$$8500673 = 8.100^3 + 50.100^2 + 6.100^1 + 73.100^0.$$

Pri desatinných zlomkoch je niekedy potrebné primyslieť si ďalšiu nulu

$$3|16,|87|9, \text{ t. j.}$$

$$316,879 = 3.100^1 + 16.100^0 + 87.100^{-1} + 90.100^{-2}.$$

Cvičenie.

130. Koľko je a) dvojciferných, b) trojciferných, c) štvorciferných prirodzených čísel?

131. Koľko štvorciferných prirodzených čísel môžeme napísať číslicami *0, 2, 3, 5,* a) ak sa každá číslica smie v každom čísle vyskytnúť iba raz; b) ak sa každá číslica smie v každom čísle ľubovoľnekrát opakovať.

132. Napíšte dve dvojciferné prirodzené čísla, z ktorých prvé má na mieste jednotiek číslicu x a na mieste desiatok číslicu y; druhé je napísané tými istými číslicami v opačnom poriadku. Dokážte: a) Súčet oboch čísel je deliteľný jedenástimi; b) rozdiel oboch čísel je deliteľný deviatimi.

133. Rozdiel dvoch prirodzených čísel, písaných tými istými číslicami v opačnom poriadku, je deliteľný *99*. Dokážte!

134. Ak delíme (aspoň trojciferné) prirodzené číslo štyrmi, dostaneme ten istý zvyšok, ako keď delíme štyrmi jeho posledné dvojčíslie. Dokážte!

135. Ak delíme (aspoň štvorciferné) prirodzené číslo ôsmimi, dostaneme ten istý zvyšok, ako keď delíme ôsmimi jeho posledné trojčíslie. Dokážte!

136. a) Napíšte najmenšie prirodzené číslo, ktorého prvá číslica zľava iná ako nula (zvaná obyčajne najvyššia číslica) je rádu r-tého. b) Ktorého rádu je najvyššia číslica n-ciferného prirodzeného čísla?

137. a) Ak je a kladné číslo, ktorého najvyššia číslica je r-tého rádu, je $10^r \leqq a < 10^{r+1}$. b) Ak je a n-ciferné prirodzené číslo, je $10^{n-1} \leqq a < 10^n$. Dokážte to!

138. Napíšte číslo, ktoré má a) 5 jednotiek rádu 2, 7 jednotiek rádu 1 a 3 jednotky rádu -1; b) 3 jednotky rádu 0, 6 jednotiek rádu -2 a 5 jednotiek rádu -3.

16. Počítanie v desiatkovej sústave.

Počtové pravidlá pre vykonávanie základných počtových výkonov v desiatkovej sústave ste poznali už na národnej škole. Ich správnosť plynie zo zákonov, ktorými sme sa zaoberali v predchádzajúcich článkoch. Napr. sčítanie čísel, písaných v desiatkovej sústave, sa zakladá na asociatívnom a komutatívnom zákone sčítania a na zákone distributívnom. Majme napr. úlohu $3{,}26 + 15{,}3 + 23{,}58$. Každý sčítanec je vlastne súčet:

$$3{,}26 = 3.10^0 + 2.10^{-1} + 6.10^{-2};$$
$$15{,}3 = 1.10^1 + 5.10^0 + 3.10^{-1};$$
$$23{,}58 = 2.10^1 + 3.10^0 + 5.10^{-1} + 8.10^{-2}.$$

Súčet všetkých daných čísel sa teda podľa asociatívneho zákona sčítania rovná súčtu s desiatimi sčítancami:

$$3.10^0 + 2.10^{-1} + 6.10^{-2} + 1.10^1 + 5.10^0 + 3.10^{-1} + \\ + 2.10^1 + 3.10^0 + 5.10^{-1} + 8.10^{-2}.$$

Podľa komutatívneho zákona sčítania môžeme sčítancov napísať v ktoromkoľvek inom poriadku. Volíme taký poriadok, aby prišly najprv číslice najmenšieho rádu, potom rádu o 1 vyššieho atď.; teda

$$6.10^{-2} + 8.10^{-2} + 2.10^{-1} + 3.10^{-1} + 5.10^{-1} + 3.10^0 + \\ + 5.10^0 + 3.10^0 + 1.10^1 + 2.10^1.$$

Ďalej podľa asociatívneho zákona sčítania soskupíme sčítancov tých istých rádov, teda

$$(6.10^{-2} + 8.10^{-2}) + (2.10^{-1} + 3.10^{-1} + 5.10^{-1}) + \\ + (3.10^0 + 5.10^0 + 3.10^0) + (1.10^1 + 2.10^1).$$

Podľa distributívneho zákona je

$$6.10^{-2} + 8.10^{-2} = (6 + 8) . 10^{-2} = 14.10^{-2}$$
$$2.10^{-1} + 3.10^{-1} + 5.10^{-1} = (2 + 3 + 5) . 10^{-1} = 10.10^{-1}$$
$$3 . 10^0 + 5 . 10^0 + 3 . 10^0 = (3 + 5 + 3) . 10^0 = 11 . 10^0,$$
$$1 . 10^1 + 2 . 10^1 = (1 + 2) . 10^1 = 3 . 10^1,$$

takže súčet daných čísel sa rovná

$$3{,}26 + 15{,}3 + 23{,}58 = 3.10^1 + 11 . 10^0 + 10 . 10^{-1} + 14 . 10^{-2}.$$

Pritom nám, pravda, vychádza počet jednotiek jednotlivých rádov väčší ako 9, a preto v praxi postupujeme trocha inakšie:

$$6.10^{-2} + 8.10^{-2} = 14.10^{-2} = 1.10^{-1} + 4.10^{-2},$$
$$1.10^{-1} + 2.10^{-1} + 3.10^{-1} + 5.10^{-1} = 11.10^{-1} = 1.10^0 + 1.10^{-1},$$
$$1.10^0 + 3.10^0 + 5.10^0 + 3.10^0 = 12.10^0 = 1.10^1 + 2.10^0,$$
$$1.10^1 + 1.10^1 + 2.10^1 = 4.10^1,$$

teda

$$3{,}26 + 15{,}3 + 23{,}58 = 4.10^1 + 2.10^0 + 1.10^{-1} + 4.10^{-2}$$

alebo

$$3{,}26 + 15{,}3 + 23{,}58 = 42{,}14.$$

Čísla, písané v desiatkovej sústave, sa odčítavajú obrátením postupu sčítania; hľadaný rozdiel je to číslo, ktoré sa má pričítať k menšiteľovi, aby sme dostali menšenca. Vysvetlite sami na príklade.

Veľmi jednoduché je v desiatkovej sústave násobenie mocninou desať. Je založené na distributívnom zákone, na asociatívnom zákone násobenia a na zákone (2) z článku 13 pre násobenie mocnín o tom istom základe. Ak máme napr. úlohu 32,6 . . 100, alebo 32,6 . 10^2,

je

$$32{,}6 = 3.10^1 + 2.10^0 + 6.10^{-1},$$

teda podľa distributívneho zákona

$$32{,}6 \,.\, 100 = (3.10^1) \,.\, 10^2 + (2.10^0) \,.\, 10^2 + (6.10^{-1}) \,.\, 10^2$$

a podľa asociatívneho zákona násobenia

$$32{,}6 \,.\, 100 = 3 \,.\, (10^1 \,.\, 10^2) + 2\,(10^0 \,.\, 10^2) + 6 \,.\, (10^{-1} \,.\, 10^2),$$

teda podľa zákona o násobení mocnín s tým istým základom

$$(3.10^1 + 2.10^0 + 6.10^{-1}) \,.\, 100 = 3.10^3 + 2.10^2 + 6.10^1,$$

t. j. stomi sa násobí tak, že sa rády všetkých číslic zväčšia o dve, čo sa prakticky prejaví posunutím desatinnej čiarky a pripísaním nuly:

$$32{,}6 \,.\, 100 = 3260.$$

Podobne napr. delenie číslom $1000 = 10^3$ alebo násobenie, číslom 10^{-3} (ktoré je prevrátenou hodnotou čísla 10^{+3}) sa robí tak, že sa rády všetkých číslic zmenšia o tri, napr.

$$(5.10^4 + 8.10^3 + 6.10^2) : 1000 = 5.10^1 + 8.10^0 + 6.10^{-1}$$

alebo

$$58600 : 1000 = 58{,}6.$$

Násobenie jednociferným číslom je založené na distributívnom zákone. Ak máme napr. úlohu $52{,}4 \,.\, 7$, alebo

$$(5.10^1 + 2.10^0 + 4.10^{-1}) \,.\, 7.$$

To sa podľa distributívneho zákona rovná

$$(5.10^1) \,.\, 7 + (2.10^0) \,.\, 7 + (4.10^{-1}) \,.\, 7,$$

čo sa podľa asociatívneho a komutatívneho zákona násobenia rovná

$$(5.7) \,.\, 10^1 + (2.7) \,.\, 10^0 + (4.7) \,.\, 10^{-1}$$

alebo

$$35.10^1 + 14.10^0 + 28.10^{-1}.$$

Pritom by sa objavily číslice väčšie ako 9, takže je v praxi potrebná úprava, ktorú nebudeme preberať, pretože je vám dobre známa.

Na základe pravidla pre násobenie jednociferným číslom sa odvodí všeobecné pravidlo pre násobenie dvoch čísel, písaných v desiatkovej sústave. Ak máme napr. úlohu $5{,}87 \,.\, 2{,}3$, je

$$5{,}87 \,.\, 2{,}3 = 5{,}87 \,.\, (2.10^0 + 3.10^{-1})$$

alebo

$$\begin{aligned} 5{,}87 \,.\, 2{,}3 &= (5{,}87 \,.\, 2) \,.\, 10^0 + (5{,}87 \,.\, 3) \,.\, 10^{-1} \\ &= 11{,}74 \,.\, 10^0 + 17{,}61 \,.\, 10^{-1} \\ &= 11{,}74 + 1{,}761; \end{aligned}$$

potom sa pokračuje podľa pravidla o sčítaní čísel, písaných v desiatkovej sústave, a vyjde

$$5{,}87 \,.\, 2{,}3 = 13{,}501.$$

Pri násobení desatinných čísel je prakticky dôležité preskúšať správnosť umiestenia desatinnej čiarky. To sa deje najlepšie hrubým odhadom činiteľov. Ak sme napr. vypočítali, že $270.0{,}0023 = 0{,}621$, umiestili sme desatinnú čiarku správne? Činitelia sú približne $200 = 2.10^2$; $0{,}002 = 2.10^{-3}$. Znásobíme zpamäti $(2.10^2) \,.\, (2.10^{-3}) = 4.10^{-1}$. Pretože vypočítaný súčin je približne 6.10^{-1}, bola desatinná čiarka umiestená správne.

Delenie čísel, písaných v desiatkovej sústave, je založené na postupnom odčítaní jednociferných násobkov deliteľa. Podrobný popis známeho postupu a jeho matematické odôvodnenie by bolo dosť zdĺhavé a nebudeme sa ním zaoberať. Presný podiel dvoch desatinných čísel dá sa obyčajne vyjadriť desatinným číslom len približne. Tu si povieme len o umiestení desatinnej čiarky v podiele, čo sa najpohodlnejšie robí takto: Ak máme deliť napr. $382{,}4 : 0{,}567$, rovná sa prvá číslica podielu 6 rovnako ako pri delení $3824 : 567$; ide o to, aký rád bude mať táto číslica v podiele $382{,}4 : 0{,}567$. Miestne hodnoty dvojčíslia 38 v delenci a číslice 5 v deliteli sú 38.10^1 a 5.10^{-1}. Pretože $10^1 : 10^{-1} = 10^1 \,.\, 10^1 = 10^2$, má najvyššia číslica podielu rád 2. V delení potom môžeme pokračovať bez ohľadu na desatinnú čiarku a dostaneme napr. s presnosťou na desatiny, že

$$382{,}4 : 0{,}567 \doteq 674{,}4.$$

Rád podielu sa rovná rádu delenca zmenšeného o rád deliteľa; ak sa prvé číslice deliteľa nenachodia v prvých čísliciach delenca, je rád podielu ešte o *1* nižší.

Cvičenie.

139. Spočítajte čo najvýhodnejšie: a) 156+144+263, b) 224+327+276, c) 523+461+539.

140. Vysvetlite, ako sa spolu násobia čísla ukončené niekoľkými nulami a odôvodnite správnosť vysloveného pravidla.

141. Znásobte čo najvýhodnejšie: a) 13 . 14 . 25, b) 3 . 4 . 5 . 20, c) 12 . . 40 . 25 . 125.

142. a) Ak násobíme spolu a jednotiek r-tého rádu a b jednotiek s-tého rádu, dostaneme ab jednotiek rádu $(r+s)$-tého. b) Ak delíme ab jednotiek r-tého rádu a jednotkami s-tého rádu, dostaneme b jednotiek rádu $(r-s)$-tého. Dokážte.

143. Ak máme spolu násobiť dve dvojciferné prirodzené čísla, môžeme ihneď napísať výsledok, napr. 47 . 26=1222. Počítame takto: 7 . 6=42, napíšeme 2 jednotky rádu 0 a 4 jednotky rádu 1 si zapamätáme 4 . 6+7 . . 2+4=42, napíšeme 2 jednotky rádu 1 a 4 jednotky rádu 2 si zapamätáme, 4 . 2+4=12 jednotiek rádu 2, ktoré napíšeme. Odôvodnite všeobecne.

144. Ak chceme spolu znásobiť dve dvojciferné prirodzené čísla, ktoré majú tú istú číslicu rádu 1 a ktorých číslice rádu 0 dávajú súčet 10, môžeme to urobiť tak, že utvoríme súčin číslice rádu 1 (ktorá je obom číslam spoločná) a číslice o 1 väčšej a k takto utvorenému súčinu pripíšeme (dvojciferný) súčin číslic rádu 0, napr. 71 . 79=5609, lebo 7 . 8= =56, 1 . 9=09. Dokážte všeobecne.

145. Ak chceme spolu znásobiť dve dvojciferné prirodzené čísla, ktoré majú tú istú číslicu rádu 0 a ich číslice rádu 1 dávajú súčet 10, môžeme to urobiť tak, že utvoríme súčin číslic rádu 1 zväčšený o číslicu rádu 0 (ktorá je obom číslam spoločná) a k takto utvorenému súčinu pripíšeme (dvojciferný) súčin číslic rádu 0, napr. 63 . 43=2709, lebo 6 . 4+3=27, 3 . 3=09. Dokážte všeobecne.

146. Koľko číslic má súčin dvoch prirodzených čísel, z ktorých jedno je n-ciferné a druhé m-ciferné?

17. Zaokrúhľovanie čísel.

V tvare desatinného čísla možno len tie zlomky presne napísať, okrem prirodzených čísel, ktoré sa dajú napísať v tvare, ktorého menovateľ je mocnina desiatich, alebo tie zlomky, ktoré vo svojom základnom tvare majú menovateľa, ktorý nie je deliteľný iným prvočíslom okrem 2 a 5. Ale pomocou desatinných zlomkov možno napísať každé číslo približne s takou malou chybou, že pre účel, ktorý číselný údaj sleduje, je bezvýznamná. Približné vyjadrenie číselných hodnôt sa vyskytuje pri ktoromkoľvek meraní, pretože každé meranie je len približné. Okrem toho príliš presné merania často vôbec nemajú praktický smysel; napr. nemá smysel určovať váhu človeka presne na gramy alebo vzdialenosť dvoch obcí presne na metre. Ak na základe priamo meraných veličín určíme počtovým výkonom hodnotu inej veličiny, býva jej presnosť často len zdanlivá. Ak napr. zmeriame strany obdĺžnika presne na centimetre a nameriame dĺžku 87 cm, šírku 65 cm, dostaneme znásobením, že obsah obdĺžnika je 5655 cm², ale tento výsledok je príliš presný. Veď v skutočnosti mohla byť i dĺžka i šírka napr. o 4 mm väčšia a potom by sa obsah rovnal 5715,96 cm², bol by teda o viac ako 60 cm² väčší než 5655 cm²; alebo by mohla byť i dĺžka i šírka napr. zase o 4 mm menšia a potom by sa obsah rovnal 5594,36 cm², bol by teda o viac ako 60 cm menší než 5655 cm². Preto je v danom prípade vhodné náš počtový výsledok zaokrúhliť na dm²; hovoríme, že obsah nášho obdĺžnika je 57 dm².

Zaokrúhliť číslo a **na rádovú jednotku** 10^n (n môže byť aj záporné) znamená udať číslo tvaru $c \cdot 10^n$, kde c je prirodzené číslo, pričom zaokrúhlená hodnota má byť pokiaľ možno blízka číslu a. Zaokrúhlená hodnota môže byť menšia ako a, to jest zaokrúhlenie klesajúce, alebo väčšia ako a, to jest zaokrúhlenie stúpajúce. Ak napr. $a = 48{,}275$, bude hodnota zaokrúhlená na celky 48 (klesajúce zaokrúhlenie je výhodnejšie); hodnota, zaokrúhlená na desatiny, bude 48,3 (stúpajúce zaokrúhlenie je výhodnejšie); pri zaokruhľovaní na stotiny sú obe hodnoty 48,27; 48,28 rovnako výhodné!

Pri posudzovaní miery presnosti zaokruhľovaného čísla nie je podstatný druh rádovej jednotky, na ktorú zaokruhľujeme, pretože táto rádová jednotka závisí od voľby jednotky miery (alebo váhy a pod.) a pretože pri posudzovaní presnosti je podstatné, aká je **pomerná veľkosť** možnej chyby ku skutočnej veľkosti. Napr. vzdialenosť 29,6 km zaokrúhlená na desatiny je, pravda, rovnako presná ako vzdialenosť 29.600 m zaokrúhlená na stovky. Váha 847 g zaokrúhlená na gramy je omnoho presnejšia ako váha 0,4 g zaokrúhlená na desatiny gramu, pretože v prvom prípade možná chyba je iste menšia ako tisícina skutočnej hodnoty, kým v druhom prípade môže chyba presahovať až desatinu skutočnej hodnoty.

Hrubou, ale pre prax vo väčšine prípadov postačujúcou mierou presnosti zaokrúhleného čísla je počet jeho **platných číslic.** Platné číslice sú číslice vyššieho radu ako tie, v ktorých je možná chyba; pritom najvyššia platná číslica je iná než nula. Ak je 790 hodnota zakrúhlená na desiatky, máme dve platné číslice; hodnota čísla 789,96 zaokrúhlená na desatinu je to isté číslo ako 790,0, ale platné číslice sú teraz štyri.

Pri počítaní so zaokrúhlenými číslami treba zaokrúhliť aj výsledok počtových výkonov. Pritom pre prax vo väčšine prípadov celkom postačia nasledujúce dve pravidlá: **Keď sčítame alebo odčítame čísla, zaokrúhlené na rovnakú radovú jednotku, zaokrúhlime na jednotky toho istého rádu aj výsledok; ak bola pri daných číslach nerovnaká, zaokrúhlime na vyššiu z týchto radových jednotiek. Ak násobíme alebo delíme dve čísla, z ktorých každé je zaokrúhlené na určitý počet platných číslic, zaokrúhlime výsledok na ten istý počet platných číslic, a ak bol ten počet pri daných číslach nerovnaký, spravujeme sa tým číslom, ktoré malo menej platných číslic.**

Pri obyčajných meraniach sa dajú zistiť len dve alebo najviac tri platné číslice. Jemnými vedeckými prostriedkami možno často zistiť i štvrtú platnú číslicu, ale viac číslic len veľmi zriedka. Preto v praxi zpravidla vystačíme s číslicami zaokrúhlenými na dve, tri, najviac štyri platné číslice a matematické tabuľky, o ktorých bude neskoršie reč a z ktorých niektoré ste už na strednej škole spoznali, obsahujú hodnoty, zaokrúhlené na štyri platné číslice. Pritom ak sa štvrtá platná číslica rovná 5, možno na základe zaokrúhlenej hodnoty na štyri platné číslice len vtedy spoľahlivo určiť hodnotu zaokrúhlenú na menej platných číslic, ak vieme, či ide o zaokrúhlenie klesajúce alebo stúpajúce. Ak posledná číslica rovná sa 5, píše sa $\bar{5}$ v tom prípade, ak zaokrúhlenie je stúpajúce. Ak čítame v tabuľkách napr. $21{,}2\underset{\smile}{5}$, vieme, že je to zaokrúhlenie klesajúce (skutočná hodnota je väčšia), a preto hodnota zaokrúhlená na tri platné číslice je 21,3. Ak čítame v tabuľkách $65{,}4\bar{5}$, vieme, že je to zaokrúhlenie stúpajúce (skutočná hodnota je menšia) a preto hodnota zaokrúhlená na tri platné číslice je 65,4. Ak čítame v tabuľkách 12,25, znamená to, že číslo v tabuľkách je číslo presné a za hodnotu zaokrúhlenia na tri platné číslice môžeme rovnakým právom zvoliť 12,2 ako 12,3. Podobne je to v prípadoch, ak za číslicou 5 nasleduje ešte číslica 0 alebo niekoľko núl. Ak čítame v tabuľkách napr. $63{,}5\bar{0}$, je to zaokrúhlenie stúpajúce a hodnota zaokrúhlená na dve platné číslice je 63.

Cvičenie.

147. Dokážte, že každý zlomok, ktorého základný tvar je $\frac{a}{2^r \cdot 5^s}$, môžeme napísať v tvare desatinného zlomku, ktorý má k desatinných miest; pritom k sa rovná väčšiemu z oboch čísel $r \,.\, s$.

148. Naopak každý desatinný zlomok, ktorý má k desatinných miest, môžeme napísať ako obyčajný zlomok, ktorého základný tvar je $\frac{a}{2^r \cdot 5^s}$; pritom $r \leqq k$ a $s \leqq k$ a aspoň jedno z čísel r, s sa rovná číslu k. Dokážte!

149. Čísla 37,997; 420,005; 0,708 zaokrúhlite na jednotky rádu a) —2, b) —1, c) 0.

150. Číslo zaokrúhlené (čo najvýhodnejšie) na jednotky n-tého rádu sa líši od svojej presnej hodnoty najviac o $5 \cdot 10^{n-1}$. Dokážte!

151. Číslo, ktorého najvyššia číslica je n-tého rádu a ktoré je zaokrúhlené (čo najvýhodnejšie) na p platných číslic, líši sa od svojej presnej hodnoty najviac o $5 \cdot 10^{n-p}$. Dokážte!

152. Čísla $a \doteq 32{,}7$, $b \doteq 5{,}48$ sú zaokrúhlené (čo najvýhodnejšie) na tri platné číslice. Nájdite hranicu, ktorú nemôže presiahnuť a) súčet, b) súčin, c) rozdiel, d) podiel presných hodnôt čísel a, b. Nájdené výsledky porovnajte s výsledkami získanými podľa pravidiel na str. 54.

153. Ak spočítame k čísel, z ktorých každé je zaokrúhlené (čo najvýhodnejšie) na jednotky n-tého rádu, líši sa získaný súčet od svojej presnej hodnoty najviac o $\frac{1}{2}\,k$ jednotiek n-tého rádu. Dokážte!

154. Ak odpočítame dve čísla, z ktorých každé je zaokrúhlené (čo najvýhodnejšie) na jednotky n-tého rádu, líši sa získaný rozdiel od svojej presnej hodnoty najviac o jednu jednotku n-tého rádu. Dokážte!

V. DRUHÁ ODMOCNINA.

18. Vzorec pre $(a+b)^2$, x^2-y^2. Na strednej škole ste poznali vzorce

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (1)$$
$$x^2 - y^2 = (x+y).(x-y); \quad (2)$$

hodnoty

$$0^2 = 0,\ 1^2 = 1,\ 2^2 = 4,\ 3^2 = 9,\ 4^2 = 16,$$
$$5^2 = 25,\ 6^2 = 36,\ 7^2 = 49,\ 8^2 = 64,\ 9^2 = 81$$

poznáte z násobilky. Viete tiež, že

$$10^2 = 100,\ 20^2 = 400,\ 30^2 = 900, \dots\ 90^2 = 8100.$$

Ak je n dvojciferné prirodzené číslo, môžeme rýchlo vypočítať n^2 podľa vzorca (1). Ak je a číslicou 0 rádu a c číslicou 1 rádu v čísle n, je $n=a+10c$, a preto je podľa vzorca (1)

$$n^2 = a^2 + 2ac.10 + c^2.100, \quad (3)$$

t. j. číslo n^2 sa skladá z a^2 jednotiek, $2ac$ desiatok a c^2 stovák. Preto vypočítame napr. 87^2 takto: Najprv máme $7^2=49$ jednotiek, z nich 9 napíšeme a 40 prevedieme na 4 desiatky. Ďalej máme $4+2.8.7=116$ desiatok, z nich 6 napíšeme a 110 prevedieme na 11 stovák. Nakoniec máme $11+8^2=75$ stovák, ktoré napíšeme. Výsledok: $87^2 = 7.569$.

Zvlášť rýchle možno vykonať výpočet, ak sa číslica a rovná 5. V tom prípade (3) dáva

$$n^2 = 25 + 100c + 100c^2$$

alebo

$$n^2 = 25 + 100c\,(c+1).$$

Teda: Číslo c znásobíme o 1 väčším číslom $c+1$ a k súčinu pripíšeme 25, napr. $65^2 = 4225$. Ak vieme vypočítať druhú mocninu dvojciferného čísla, vieme vypočítať aj druhú mocninu trojciferného čísla, ktoré sa končí nulou, napr. $850^2 = 722.500$.

Ak máme vypočítať druhú mocninu trojciferného čísla, ktoré sa nekončí nulou, môžeme použiť vzorec (2) takto. Nech je x dané číslo a a jeho posledná číslica, takže môžeme napísať:

$$x = 10n + a,$$

kde n je dvojciferné číslo. Položme ešte $y = 10n$, vtedy $a = x - y$.

Číslo y^2 vieme vypočítať. Z neho vypočítame x^2 takto:

$$x - y = a, x + y = 20n + a,$$

násobením dostaneme

$$x^2 - y^2 = (20n + a)\,a, \text{ ale } y^2 = (10n)^2,$$

preto

$$x^2 = (10n)^2 + (20n + a) \,.\, a$$

$(20n + a) \,.\, a$ sa vypočíta, keď k číslu $2n$ pripíšeme číslicu a, tým vznikne číslo $20n + a$, ktoré ešte vynásobíme číslom a. Výpočtu dávame úpravu tu naznačenú pre prípad $x = 876$.

$$\begin{array}{rr}
\underline{876^2} & \\
87^2 \;\ldots\ldots\ldots & 7569\ldots \\
1746 \,.\, 6 \qquad & \underline{10476} \\
 & 767376
\end{array}$$

Keďže vo vzorci (1) je číslo b pomerne malé oproti číslu a, je na pravej strane člen b^2 pomerne malý oproti ostatným členom a máme približný vzorec

$$(a + b)^2 \doteq a^2 + 2ab, \tag{4}$$

ktorý je tým presnejší, čím je b pomerne ku a menšie. Ak je napr. b viac ako stokrát menšie než a, je b^2 viac ako dvestokrát menšie než člen $2ab$ a viac ako 10 000-krát menšie než člen a^2. Ak je b viac ako 1000-krát menšie než a, je b^2 viac ako 2000-krát menšie než $2ab$ a viac ako miliónkrát menšie než a^2.

Cvičenie.

155. Je možné, aby sa $(a+b)^2 = a^2 + b^2$? Kedy to nastane?

156. Dvojciferné prirodzené číslo, ktorého číslica rádu 1 je 5, umocníme na druhú takto: Číslo 25 zväčšíme o číslicu rádu 0 a k číslu takto vznik-

nutému pripíšeme (dvojcifernú) druhú mocninu číslice rádu 0, napr. $53^2=2809$, lebo $25+3=28$, $3^2=09$. Dokážte všeobecnú platnosť!

157. Ak sa zväčší číslo a o x, zväčší sa jeho druhá mocnina o $x(2a+$ $+x)$. Dokážte!

158. Ak sa líšia dve čísla a_1, a_2 o x, líšia sa ich druhé mocniny o $x(a_1+$ $+a_2)$. Dokážte!

159. Dokážte, že pre každé a, b je $a^2+b^2 \geqq 2ab$.

160. Dokážte, že súčet kladného čísla a a jeho prevrátenej hodnoty nie je nikdy menší ako 2. Je možné, aby sa rovnal dvom?

161. a) Overte správnosť identít:

$$(a^2+b2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2,$$
$$(a^2+b2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(ay+bx)^2.$$

Ukážte, že tieto rovnosti vyjadrujú vetu: „Súčin dvoch čísel, z ktorých každé je súčtom dvoch štvorcov, možno (dvoma spôsobmi) vyjadriť ako súčet dvoch štvorcov." b) Možno vždy súčin $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$ vyjadriť ako súčet dvoch štvorcov dvoma rozličnými spôsobmi? Príklad: $a=3$, $b=2$, $x=y=1$.

162. Dokážte, že $(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2$. Ako to plynie z 161. cvičenia?

163. Overte správnosť identity:

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2+$$
$$+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2.$$

164. a) Dokážte, že $(a^2+b^2+c^2)^2=(a^2+b^2-c^2)^2+(2ac)^2+(2bc)^2$! Ako to plynie zo 163. cvičenia?

164. b) Dokážte, že
$(a^2+b^2+c^2)^2=(ab+bc+ca)^2+(ac-b^2)^2+(ba-c^2)^2+(bc-a^2)^2$! Ako to plynie zo 163. cvičenia ?

165. Vypočítajte: a) $(x+y+z)(x-y-z)$; b) $(x-y+z)$, $(x+y-z)$; c) $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$.

166. Rozložte na súčin a) $x^2-y^2+2yz-z^2$; b) u^4-v^4; c) $p^4-2p^2q^2+$ $+q^4$, d) $a^4+a^2b^2+b^4$.

167. Vypočítajte: a) 75^2; b) 376^2; c) 405^2; d) 937^2; e) približne 83^2; f) približne 853^2; g) uveďte a vypočítajte príklady z praxe, ktoré sa riešia umocnením dvoma.

19. Tabuľka druhých mocnín. Už na strednej škole ste sa soznámili s tabuľkou druhých mocnín. Tabuľka obsahuje hodnoty n^2 čísel zaokrúhlené na štyri platné číslice.

$$n=1;\ 1{,}01;\ 1{,}02;\ 1{,}03;\ 1{,}04;\ \ldots;\ 10{,}07;\ 10{,}08;\ 10{,}09.$$

Rozdiel medzi dvoma susednými hodnotami základu n je 0,1. Celkom ide o 910 hodnôt n, ktoré sú rozdelené na 91 riadkov. V každom riadku sú druhé mocniny desiatich čísel n; tieto čísla n majú spoločné prvé 2 číslice (udané na ľavom kraji riadku); tretia číslica je vždy rovnaká pre celý stĺpec (je udaná v každom stĺpci hore i dolu). Napr. druhú mocninu $8{,}36^2$ hľadáme v riadku so záhlavím 8,3 a v stĺpci so záhlavím 6; nájdeme $8{,}36^2 \doteq 69{,}89$.

Okrem druhých mocnín horeuvedených čísel n vyčítame bezprostredne z tabuľky aj druhé mocniny čísel $n \,.\, 10^r$, kde r je ľubovoľné celé číslo, kladné alebo záporné. Je

$$(n \,.\, 10^r)^2 = n^2 \,.\, 10^{2r},$$

a preto druhú mocninu čísla $n \,.\, 10^r$ dostaneme z druhej mocniny n^2 zväčšením rádu čísla o $2r$ pri kladnom r, zmenšením rádu čísla o $+2r$ pri zápornom r, napr.

$$836^2 \doteq 698\,900; \qquad 0{,}0836^2 \doteq 0{,}006\,989.$$

V tabuľke sú zaokrúhlené druhé mocniny čísel n medzi 1 a 10, ktoré sú určené celistvým počtom stotín. Pomocou posledných stĺpcov v tabuľke (stĺpcov opráv) nájdeme však rýchle aj (zase na 4 platné číslice zaokrúhlené) druhé mocniny čísel n medzi 1 a 10, ktoré sú určené celistvým počtom tisícin. Také číslo, ak sa nerovná celému počtu stotín, má tvar

$$x = n \pm c \,.\, 10^{-3},$$

kde n je celé číslo, ktorého druhá mocnina je v tabuľke a c má jednu z hodnôt

$$c = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Číslo n vznikne z čísla x zaokrúhlením na 3 platné číslice, a to klesajúcim zaokrúhlením v prípade $x = n + c \,.\, 10^{-3}$, stúpajúcim zaokrúhlením v prípade $x = n - c \,.\, 10^{-3}$. Podľa vzorca o druhej mocnine dvojčlenov je

$$x^2 = n^2 \pm 2cn \,.\, 10^{-3} + c^2 \,.\, 10^{-6}.$$

Posledný člen je nanajvýš $25 \cdot 10^{-6}$, vtedy je menší ako $3 \cdot 10^{-5}$ a pri zaokrúhlení na 4 platné číslice je bezvýznamný. Preto je približne

$$x^2 \doteq n^2 \pm 2cn \cdot 10^{-3}.$$

Pri rôznych hodnotách n v tom istom riadku sa jednotlivé n od seba líšia o menej ako 10^{-1}, preto sa možné hodnoty výrazu $2cn \cdot 10^{-3}$ od seba líšia o menej ako $2c \cdot 10^{-4}$, teda o menej ako 10^{-3}, t. j. pri zaokrúhlení na 4 platné číslice sa od seba podstatne nelíšia. Preto opravy, t. j. to, čo treba pričítať k n^2 alebo odčítať od n^2, aby sa dostalo x^2, sú v celom riadku rovnaké. Sú udané v stĺpci opráv, pričom číslica c je udaná v záhlaví stĺpca opráv (hore i dolu); nie je udaný rád opráv, ktorý súhlasí s najnižším rádom zaokrúhlenej hodnoty n^2. Počítajme napr. $6{,}723^2$.

V tabuľke nájdeme	$6{,}72^2 \doteq 45{,}16$
v stĺpci opráv nájdeme a pričítame	4
	teda: $6{,}723^2 \doteq 45{,}20.$

Iný príklad: počítajme $5{,}268^2$!

V tabuľke nájdeme	$5{,}27^2 \doteq 27{,}77$
v stĺpci opráv nájdeme a odčítame	2
	teda: $5{,}268^2 \doteq 27{,}75.$

Keďže

$$(x \cdot 10^r)^2 = x^2 \cdot 10^{2r}$$

nájdeme zmenou rádov na 4 platné číslice zaokrúhlenej druhej mocniny čísla zaokrúhleného na štyri platné číslice, napr.

$$672{,}3^2 \doteq 452000;$$
$$0{,}05268^2 \doteq 0{,}002775.$$

Cvičenie.

168. Ktoré čísla uvedené v tabuľke druhých mocnín sú presné?

169. Čísla uvedené v prvých 22 riadkoch tabuľky v stĺpci 5 sa končia všetky číslicou 3. Viete to vysvetliť?

170. Čísla uvedené v prvých 22 riadkoch ktoréhokoľvek stĺpca (okrem

stĺpca 0 a 5) majú tú vlastnosť, že sa v nich vždy po piatich riadkoch opakuje na poslednom mieste tá istá číslica. Ako to vysvetlíte?

171. Ak je číslo a vyjadrené v stotinách, tak čísla a^2 a $(5+a)^2$ zaokrúhlené na stotiny sa končia na tú istú číslicu. Vysvetlite!

172. Ak je číslo a vyjadrené v stotinách, pričom číslica rádu —2 je nepárna, čísla a^2 a $(2{,}5+a)^2$ zaokrúhlené na stotiny sa končia tou istou číslicou. Vysvetlite!

173. Nájdite v tabuľke druhej mocniny zaokrúhlené na štyri platné číslice: a) $3{,}27^2$, $40{,}8^2$, 987^2, $0{,}123^2$, $0{,}0207^2$, b) $2{,}386^2$, $8{,}705^2$, $12{,}41^2$, $456{,}7^2$ $0{,}2008^2$. c) Udajte si podobné vhodné príklady z praxe!

174. Použitím vzorca pre x^2-y^2 a tabuľky druhých mocnín určite na štyri platné číslice: a) $32{,}7 \,.\, 48{,}5$, b) $127{,}3 \,.\, 8{,}26$.

175. Zistite, či sa rovnajú výrazy: $62{,}9^2+13{,}5^2$ a $62{,}1^2+16{,}8^2$.

20. Pojem druhej odmocniny. Budeme sa zaoberať rovnicou tvaru

$$x^2=a, \tag{1}$$

v ktorej x je neznáme a a je dané číslo. Riešením rovnice je také číslo x, ktoré umocnené dvoma dáva číslo a. Ak $a=0$, má rovnica (1) zrejme len jediné riešenie $x=0$. Ak je a záporné, nemá rovnica (1) pre nás riešenia, lebo druhá mocnina nuly, kladného čísla, záporného čísla nikdy nie je záporná. Až v druhej triede sa zavádza rozšírenie pojmu čísla o tzv. imaginárne čísla, a až potom sa stane rovnica (1) riešiteľnou so záporným a. Predbežne však rovnica (1) je so záporným a neriešiteľná a budeme skúmať rovnicu (1) len s kladným a. Viete zo strednej školy, že pri kladnom a je riešením určité kladné číslo, ktoré sa nazýva **druhou odmocninou** kladného čísla a a značí sa $\sqrt{a}$. Teda pri kladnom a vzťah

$$c=\sqrt{a} \tag{2}$$

znamená to isté, ako

$$c>0,\ c^2=a. \tag{3}$$

Pri zápornom a je $\sqrt{a}$ výraz bezvýznamný a nadobudne význam až po zavedení imaginárnych čísel. Pre $a=0$ je účelné položiť

$$\sqrt{0}=0. \tag{4}$$

V nasledujúcom článku si pohovoríme o tom, ako sa pri kladnom

a nájde približná hodnota $\sqrt{a}$ pomocou tabuliek druhých mocnín. Ak $c^2 = a$, je aj $(-c)^2 = a$, a preto pri kladnom a má rovnica (1) dvojaké riešenie:

Kladné riešenie $c = \sqrt{a}$,
záporné riešenie $-c = -\sqrt{a}$.

Rovnica (1) má len tieto dve riešenia.
Lebo keď $c^2 = a$, je pre každé číslo x

$$x^2 - a = x^2 - c^2 \text{ alebo } x^2 - a = (x - c) \,.\, (x + c).$$

Ak je číslo x riešenie rovnice (1), je $x^2 - a = 0$, teda súčin $(x - c) \,.\, (x + c)$ sa rovná nule, a preto aspoň jeden činiteľ sa rovná nule. To dáva dva prípady: Buď je $x - c = 0$, *vtedy* $x = c$, t. j. $x = +\sqrt{a}$, alebo je $x + c = 0$, vtedy $x = -c$, t. j. $x = -\sqrt{a}$.

Pre druhé odmocniny platí (pri kladných a, b) dôležité pravidlo:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \,.\, \sqrt{b}. \tag{5}$$

Lebo $\sqrt{a}$ je to kladné číslo c, pre ktoré platí $c^2 = a$; $\sqrt{b}$ je to kladné číslo d, pre ktoré platí $d^2 = b$. Teda

$$(cd)^2 = c^2d^2 \text{ alebo } (cd)^2 = ab \text{ a z toho } \sqrt{ab} = cd.$$

Pretože súčin cd dvoch kladných čísel je kladný, je $\sqrt{ab} = cd$, čo znamená, že platí (5). Všeobecnejšie platí pri ľubovoľnom počte kladných činiteľov $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$;

$$\sqrt{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} = \sqrt{a_1} \,.\, \sqrt{a_2} \,.\, \sqrt{a_3} \ldots \sqrt{a_n}\,. \tag{6}$$

Ľahko dokážeme ďalej, že pri kladných a, b platí pravidlo:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}. \tag{7}$$

Lebo môžeme položiť

$$\frac{a}{b} = c;$$

c je kladné číslo, pre ktoré platí $bc = a$. Podľa (5) je však $\sqrt{bc} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$ alebo $\sqrt{b} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a}$, takže

$$\sqrt{c} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

čo nie je nič iné ako vzorec (7).

Ak sú a, b kladné čísla a ak je $a < b$, je aj $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Lebo nech je

$$x = \sqrt{a},\ y = \sqrt{b},$$

čísla x, y sú kladné a je $x^2 = a$, $y^2 = b$, teda

$$y^2 - x^2 = b - a, \text{ takže}$$

$$b - a = (x + y) \,.\, (y - x). \tag{8}$$

Keďže $a < b$, súčin (8) je kladný; aj činiteľ $x + y$ je kladný, a preto i druhý činiteľ $y - x$ je kladný; takže $x < y$, alebo $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Cvičenie.

176. Platí pravidlo $\sqrt{a_1 a_2 \ldots a_n} = \sqrt{a_1} \,.\, \sqrt{a_2} \ldots \sqrt{a_n}$, i keď sa niektoré z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ rovná nule?

177. Je možné, aby $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, i keď sa niektoré z čísel a, b rovná nule?

178. Ako preskúšate, že a) $\sqrt{529} = 23$; b) $\sqrt{100489} = 317$?

179. a) Značí rovnica $x^2 = 7$ a $x = \sqrt{7}$ presne to isté?

b) Čo značí $\sqrt{a^2}$?

180. Vypočítajte: a) $\sqrt{16 \,.\, 49}$; b) $\sqrt{36 \,.\, 64}$; c) $\sqrt{49 \,.\, 64 \,.\, 81}$.

181. Vypočítajte: a) $\sqrt{5} \,.\, \sqrt{\ }$; b) $\sqrt{3} \,.\, \sqrt{12}$; c) $\sqrt{6} \,.\, \sqrt{10} \,.\, \sqrt{15}$.

182. Určite a) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; b) $\sqrt{3\frac{6}{25}}$; c) $\sqrt{2{,}5} \,.\, \sqrt{8{,}1}$.

183. Určite $\sqrt{25} + \sqrt{16}$; b) $\sqrt{25 + 16}$; c) $\sqrt{25} + 16$.

184. Dokážte, že a) $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$; b) $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.

185. Je daný štvorec o strane 5 cm a obdĺžnik o stranách 6 cm a 4 cm. Ktorý z nich má dlhšiu uhlopriečku?

21. Vyhľadávanie druhých odmocnín z tabuliek druhých mocnín.

V tabuľke druhých mocnín máme (zaokrúhlené na štyri platné číslice) hodnoty n^2 pre dané n, kde

$$n = 1;\ 1{,}01;\ 1{,}02;\ 1{,}03;\ \ldots;\ 10{,}00.$$

Pretože $1^2 = 1$, $10^2 = 100$, sú všetky tieto druhé mocniny medzi číslami 1 a 100. Obrátene, ak je číslo a medzi číslami 1 a 100, môže sa stať, že číslo a sa vyskytuje v tabuľke druhých mocnín. Tak je to napr. pre

$$a = 7{,}673 \text{ alebo } a = 94{,}67,$$

lebo podľa tabuľky je

$$2{,}77^2 \doteq 7{,}673 \text{ alebo } 9{,}73^2 \doteq 94{,}67.$$

Preto máme

$$\sqrt{7{,}673} \doteq 2{,}77 \text{ alebo } \sqrt{94{,}67} \doteq 9{,}73.$$

Ale i keď číslo a, ktoré leží medzi 1 a 100, nie je v tabuľke druhých mocnín, ľahko vyčítame z tabuľky hodnotu $\sqrt{a}$, zaokrúhlenú na tri platné číslice. Stačí vyhľadať v tabuľke to číslo n, pre ktoré je n^2 čo najbližšie číslu a; potom je $\sqrt{a} \doteq n$ na tri platné číslice. Napr. pre $a = 32{,}92$ je v tabuľke najbližšie číslu a číslo $32{,}95 \doteq 5{,}74^2$, a preto je

$$\sqrt{32{,}92} \doteq 5{,}74$$

presne na tri platné číslice. Pomocou stĺpcov opráv môžeme určiť $\sqrt{32{,}92}$ presne na štyri platné číslice. Lebo pomocou stĺpcov opráv môžeme určiť druhé mocniny čísel, ktoré sú väčšie alebo menšie ako 5,74 o 0,001, alebo 0,002, alebo 0,003, alebo 0,004, alebo 0,005. (1)

V danom prípade, pretože $a = 32{,}92$ je oniečo menšie ako $5{,}74^2$, bude $\sqrt{a}$ oniečo menšie ako 5,74. V riadku so záhlavím 5,7 máme opravy 1, 2, 3, 5, 6; z nich vyhovuje oprava 3, lebo číslo $a = 32{,}92$ sa líši od čísla $5{,}74^2 \doteq 32{,}95$ o $3 \cdot 10^{-2}$. Keďže oprava 3 zodpovedá číslici 3 a keďže

$$5{,}74 - 0{,}003 = 5{,}737,$$

máme $\sqrt{32{,}92} \doteq 5{,}737$ presne na štyri platné číslice.

Praktický postup si vysvetlíme na príklade $\sqrt{a}$ pre $a = 7{,}6$. V tabuľke druhých mocnín číslu a najbližšie je číslo $n^2 \doteq 7{,}618$, kde $n = 2{,}76$. Preto je $\sqrt{a} = \sqrt{7{,}6} \doteq 2{,}76$ presne na tri platné číslice. Keď chceme určiť štvrtú číslicu čísla $\sqrt{a}$ postupujeme takto. Číslo $a = 7{,}6$ je trocha menšie ako číslo 7,618, ktorému zodpovedá v tabuľke 2,76.

Preto je $\sqrt{a}$ trocha menšia ako 2,76. Avšak

$$7{,}618 - 7{,}6 = 0{,}018 = 18 \,.\, 10^{-3}$$

a číslu 18 je v tabuľke opráv (v riadku so záhlavím 2,7) najbližšie číslo 16, ktoré zodpovedá číslici 3 alebo 7. Preto je

$$\sqrt{a} \doteq 2{,}76 - 0{,}003 = 2{,}757.$$

V niektorých prípadoch nastane pri štvrtej číslici malá pochybnosť, napr. pre $a = 14{,}08$. V tabuľke nájdeme najbližšie číslu 14,08 číslo $14{,}06 \doteq 3{,}75^2$. Je $14.08 - 14{,}06 = 2.10^{-2}$ a v tabuľke opráv rozdiel 2 zodpovedá i číslici 2 i číslici 3. Preto presne na štyri platné číslice je buď $\sqrt{14{,}08} \doteq 3{,}752$ alebo $\sqrt{14{,}08} \doteq 3{,}753$.

Dosiaľ sme počítali podľa tabuliek hodnotu $\sqrt{a}$ len pre ten prípad, keď je číslo a medzi číslami 1 a 100. Keď je číslo a buď väčšie ako 100, buď menšie ako 1, položíme

$$a = b \,.\, 100^r, \tag{2}$$

kde celé číslo r (kladné alebo záporné) volíme tak, aby b bolo medzi 1 a 100. Potom vieme nájsť $\sqrt{b}$ (presne na tri alebo štyri platné číslice). Keďže $100 = 10^2$, je podľa vzorca (3) v článku 14, $100^r = 10^{2r}$ alebo $100^r = (10^r)^2$, teda

$$\sqrt{100^r} = 10^r,$$

takže podľa vzorca (5) v článku 20 je

$$\sqrt{a} = \sqrt{b} \,.\, 10^r,$$

t. j. číslo $\sqrt{a}$ vznikne z čísla $\sqrt{b}$ posunutím číslic o r miest doľava pri kladnom r, o r miest doprava pri zápornom r. Prakticky k číslu a nájdeme číslo b medzi 1 a 10, ktoré vyhovuje vzťahu (2), keď napíšeme číslo a v stovkovej sústave. (Pozri koniec čl. 15.)

Ak je napr.

$$a = 3\,568 = 35|68,$$

je

$$a = 35{,}68 \,.\, 100.$$

Z tabuliek nájdeme $\sqrt{35{,}68} \doteq 5{,}973$, takže $\sqrt{3568} \doteq 59{,}73$. Iný príklad:

$$a = 0{,}000567 = 0{,}|00|05|61.$$

Je

$$a = 5{,}67 \,.\, 100^{-2}.$$

Z tabuliek nájdeme $\sqrt{5{,}67} \doteq 2{,}381$, teda

$$\sqrt{0{,}000567} \doteq 0{,}02381.$$

Cvičenie.

186. Určite podľa tabuľky: $\sqrt{6{,}656}$, $\sqrt{45{,}16}$, $\sqrt{723{,}6}$, $\sqrt{8968}$, $\sqrt{0{,}9663}$, $\sqrt{0{,}0\ldots}$ [illegible], $\sqrt{0{,}003758}$, $\sqrt{0{,}0\ldots3881}$ [illegible].

187. Určite podľa tabuľky: $\sqrt{1{,}234}$, $\sqrt{3.456}$, $\sqrt{45{,}67}$, $\sqrt{55{,}55}$, $\sqrt{605\,9}$, $\sqrt{75\ldots5}$ [illegible], $\sqrt{0{,}57\ldots2}$ [illegible], $\sqrt{0{,}06\ldots33}$ [illegible], $\sqrt{0{,}\ldots07284}$ [illegible], $\sqrt{0{,}0008103}$.

188. Určite podľa tabuľky: $\sqrt{7}$, $\sqrt{80}$, $\sqrt{800}$, $\sqrt{0{,}3}$, $\sqrt{0{,}017}$, $\sqrt{0{,}0023}$, $\sqrt{0{,}001}$.

189. Obsah štvorca je 125 cm^2. Určite jeho stranu.

190. Odvesny pravouhlého trojuholníka sú 37,2 cm a 26,4 cm. Vypočítajte preponu.

191. Prepona pravouhlého trojuholníka je 234 m, odvesna 176 m. Aká dlhá je druhá odvesna?

192. V kružnici s polomerom 78 mm je vedená tetiva dĺžky 125 mm. Ako je vzdialená od stredu kružnice?

193. Hrany kvádra sú 12,8 cm, 21,5 cm a 36,4 cm. a) Aké dlhé sú stenové uhlopriečky? b) Aká dlhá je telesná uhlopriečka?

194. Doba t (sekúnd) voľne padajúceho telesa s výšky s m je daná vzorcom $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$, kde $g \doteq 9{,}81$. Ako dlho padá teleso s výšky 60 m?

195. Doba kyvu t (sekúnd) kyvadla dĺžky l m je určená vzorcom $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, kde $g \doteq 9{,}81$. Vypočítajte dobu kyvu kyvadla, ktorého dĺžka je a) 50 cm, b) 30 cm.

22. Presnejšie určovanie druhých odmocnín.

Pre prax postačí obyčajne určenie druhej odmocniny presne na tri platné číslice, ktoré možno vykonať podľa tabuliek bez použitia stĺpcov opráv. Sú však aj také úlohy, v ktorých sa musí určiť druhá odmocnina presnejšie. Preto si prehovoríme stručne o tejto úlohe. **Je daná približná hodnota b nejakej druhej odmocniny z a; má sa nájsť presnejšia hodnota tejto druhej odmocniny.** Nech

$$\sqrt{a} = b + x; \tag{1}$$

máme určiť, čomu sa približne rovná x. Poznamenajme, že čísla a, b sú kladné, ale x môže byť kladné i záporné. Rozhodne je však číslo $|x|$ oproti číslu b malé. Z rovnice (1) plynie, že $a = (b + x)^2$ alebo

$$a = b^2 + 2bx + x^2. \tag{2}$$

Z troch sčítancov na pravej strane (2) je posledný sčítanec pomerne malý, a preto je približne

$$a - b^2 \doteq 2bx$$

alebo

$$x \doteq \frac{a - b^2}{2b}. \tag{3}$$

Hodnotu (3) vypočítame delením a dosadíme do (1), čím je určená žiadaná presnejšia hodnota $\sqrt{a}$.

Tento postup si objasníme na dvoch príkladoch. P r v ý p r í k l a d: $\sqrt{2}$. Z tabuliek vidíme, že na štyri platné číslice je $\sqrt{2} \doteq 1{,}414$ alebo $\sqrt{2} \doteq 1{,}415$. Násobením vypočítame, že

$$1{,}414^2 = 1{,}414 \,.\, 1{,}414 = 1{,}999396,$$
$$1{,}415^2 = 1{,}415 \,.\, 1{,}415 = 2{,}002225.$$

$1{,}414^2$ je teda menšie ako dve; $1{,}415^2$ väčšie ako 2. Z toho súdime, že $1{,}414 < \sqrt{2}$; $1{,}415 > \sqrt{2}$. Okrem toho je číslo $1{,}414^2$ bližšie číslu 2 ako číslo $1{,}415^2$, a preto položíme

$$\sqrt{2} = 1{,}414 + x, \tag{4}$$

kde číslo x bude kladné a menšie ako $0{,}001 = 10^{-3}$, pravdepodobne menšie ako $0{,}0005 = \frac{1}{2} 10^{-3}$. Podľa (4) je

$$2 = 1{,}414^2 + 2x \,.\, 1{,}414 + x^2,$$

kde zanedbáme sčítanca x^2 a položíme teda $2 \doteq 1{,}999396 + x \,.\, 2{,}828$, takže

$$x \doteq 0{,}000604 : 2{,}828.$$

Delením na tri platné číslice nájdeme

$$x \doteq 0{,}000214,$$

takže

$$\sqrt{2} \doteq 1{,}414\,214. \tag{5}$$

Násobením môžeme zistiť, že

$$1{,}414214^2 = 2{,}000001237796, \tag{6}$$
$$1{,}414213^2 = 1{,}999998409369,$$

z čoho súdime, že výsledok (5) je správny na sedem platných číslic. Dá sa dokázať, že týmto postupom môžeme každú druhú odmocninu vypočítať na sedem platných číslic, keď vopred určíme z tabuliek hodnotu odmocniny zaokrúhlenú na štyri platné číslice a potom určíme x delením na tri platné číslice.

Druhý príklad: Vychádzajúc z približnej hodnoty (5), položme

$$\sqrt{2} = 1{,}414214 + y.$$

Podľa (6) je

$$2 = 2{,}000001237796 + 2y \,.\, 1{,}414214 + y^2,$$

teda po zanedbaní y^2:

$$-y \,.\, 2{,}828428 \doteq 0{,}000001237796;$$

číslo y je teda záporné. Delením nájdeme

$$-y \doteq 0{,}000000437627,$$

takže

$$\sqrt{2} \doteq 1{,}414213562373. \tag{7}$$

Dá sa dokázať, že (7) máme skutočne hodnotu $\sqrt{2}$ zaokrúhlenú na 13 platných číslic. Taká presnosť je pre praktické potreby zbytočná, ale teoreticky je dôležité, že je možné vypočítať každú druhú odmocninu s ľubovoľne vysokou presnosťou.

Cvičenie.

196. Ak b je približná hodnota $\sqrt{a}$, je $\sqrt{a} \doteq \frac{1}{2}\left(b+\frac{a}{b}\right)$. Dokážte to!

197. Ak je b približná hodnota $\sqrt{a}$ a keď $x = \frac{a-b^2}{2b}$, je $\sqrt{a} < b + x$. Dokážte to! (Návod: Skúmajte, aké znamienko má výraz $\sqrt{a} - b - x$.)

198. Ak sa hodnota $\sqrt{a}$ najvýhodnejšie zaokrúhlená na p platných číslic rovná číslu b, keď položíme $x = \frac{a-b^2}{2b}$, líši sa číslo $\sqrt{a}$ od čísla $b+x$ o menej ako $\frac{1}{8}$ jednotky stojacej na mieste $(2p-1)$-ej platnej číslice. Dokážte to! (Návod: Ak je najvyššia číslica čísla b rádu n-tého, je $(\sqrt{a}-b) < 5 \cdot 10^{n-p}$ [pozri cvičenie 151]; ďalej použite výsledok 2. príkladu a pamätajte pritom, že $b \geqq 10^n$ [pozri cvičenie 137a v čl. 15].)

199. Z výsledku predchádzajúceho cvičenia odvoďte, že postupom opísaným v texte dostaneme hodnotu $\sqrt{2}$ skutočne na 7, príp. na 13 platných číslic.

200. Určite na 7 platných číslic: a) $\sqrt{3}$, b) $\sqrt{5}$, c) $\sqrt{6}$, d) $\sqrt{10}$.

201. Určite $\sqrt{3}$ na 13 platných číslic.

23. Iracionálnosť druhých odmocnín.

Doteraz sme sa zaoberali len výpočtom **zaokrúhlených hodnôt** druhých odmocnín. Ak je a kladné racionálne číslo (teda zlomok alebo prirodzené číslo), môžeme sa pýtať, či $\sqrt{a}$ je číslo racionálne. Uvidíme, že v mnohých prípadoch je odpoveď záporná, že teda druhá odmocnina racionálneho čísla často je iracionálne číslo (p. koniec článku 12).

Nech je n prirodzené číslo. Budeme skúmať, za akých podmienok je číslo $\sqrt{n}$ prirodzené číslo. Takým je pre $n=1$, lebo $\sqrt{1}=1$. Ak je n väčšie ako 1, vieme (p. článok 8), že možno n napísať jediným spôsobom ako súčin prvočísel. Niektoré z týchto prvočísel môžu si byť rovné, ale súčin niekoľkých sebe rovných prvočísel môžeme napísať v tvare

$$n=p_1^{r_1}\, p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}, \tag{1}$$

kde $p_1, p_2, \dots, p_k$ sú navzájom rôzne prvočísla a mocnitelia r_1, $r^2, \dots, r_k$ sú prirodzené čísla.

Pritom môže byť aj $k=1$; v tomto prípade rozklad (1) zneje jednoducho

$$n=p^r,$$

kde p je prvočíslo a r je prirodzené číslo, ktoré sa môže rovnať 1.

Rozklad (1) je jednoznačný okrem p o r a d i a činiteľov; ak chceme docieliť úplnú jednoznačnosť, predpokladáme, že prvočísla $p_1, p_2, \dots, p_k$ sú usporiadané **stúpajúco**, t. j. od najmenšieho k najväčšiemu. Ak sú všetci **mocnitelia** $r_1, r_2, \dots, r_k$ **rozkladu (1) čísla párne, vtedy** $\sqrt{n}$ **je prirodzené číslo.** Lebo potom je

$$r_1=2s_1,\ r_2=2s_2, \dots, r_k=2s_k, \tag{2}$$

kde $s_1, s_2, \dots, s_k$ sú prirodzené čísla a ľahko sa presvedčíte, že

$$\sqrt{n}=p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}, \tag{3}$$

takže $\sqrt{n}$ je prirodzené číslo. Obrátene, ak $\sqrt{n}$ je prirodzené číslo, sú všetci mocnitelia $r_1, r_2, \dots, r_k$ rozkladu (1) čísla párne. Lebo pre prirodzené číslo $\sqrt{n}$ musíme mať rozklad tvaru (3), z ktorého plynie rozklad (1), ktorého mocnitelia majú tvar (2), sú to teda čísla párne. Nech je n také prirodzené číslo, že $\sqrt{n}$ nie je prirodzené číslo, takže máme rozklad (1), v ktorom aspoň jeden mocniteľ je číslo nepárne. Skúmajme, či je možné, aby $\sqrt{n}$ bol zlomok. Ak je to tak, napíšme ten zlomok v základnom tvare:

$$\sqrt{n}=\frac{u}{v}, \tag{4}$$

kde u a v sú dve nesúdeliteľné prirodzené čísla. Pritom je $v > 1$; a keďže aj $n > 1$, teda $\sqrt{n} > 1$ a $u > v$, preto aj $u > 1$.

Čísla u, v rozložme na prvočiniteľov:

$$u = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_h^{a_h}, \quad v = q_1^{b_1} \dots q_k^{b_k}; \tag{5}$$

pritom sú $p_1, p_2, \dots, p_k$ navzájom rôzne prvočísla, $q_1, q_2, \dots, q_k$ sú tiež navzájom rôzne prvočísla a všetci mocnitelia v rozkladoch (5) sú prirodzené čísla. Keďže čísla u a v sú nesúdeliteľné, je každé z prvočísel $p_1, p_2, \dots, p_h$ iné než prvočísla $q_1, q_2, \dots q_k$. Teraz zo (4) plynie: $v \,.\, \sqrt{n} = u$ a z toho ďalej plynie:

$$v^2 n = u^2$$

alebo

$$q_1^{2b_1} \dots q_k^{2b_k} . n = p_1^{2a_1} \dots p_h^{2a_h}. \tag{6}$$

Označme m spoločnú hodnotu oboch strán rovnosti (6); je teda m prirodzené číslo a

$$m = p_1^{2b_1} \dots q_k^{2b_k} \cdot n.$$

Ak rozložíme n na prvočiniteľov, dostaneme rozklad na prvočiniteľov čísla m. Teda v rozklade čísla m na prvočiniteľov sa musí vyskytnúť prvočíslo q_1. Na druhej strane

$$m = p_1^{2a_1} \dots p_h^{2a_h},$$

t. j. v rozklade čísla m sa vyskytujú len prvočísla $p_1, \dots, p_h$, ktoré sú rôzne od q_1. To je v rozpore s tým, že sa q_1 musí vyskytnúť v rozklade na prvočiniteľov čísla m. Rozpor vznikol z predpokladu, že číslo $\sqrt{n}$ je možné presne vyjadriť v tvare zlomku (4). Preto je tento predpoklad nemožný. Tým sme dokázali: **Ak je n prirodzené číslo a ak $\sqrt{n}$ nie je prirodzené číslo, je $\sqrt{n}$ iracionálne číslo.** Teda napr. čísla

$$\sqrt{2}, \ \sqrt{3}, \ \sqrt{5}, \ \sqrt{6}, \ \sqrt{7} \text{ atď.}$$

sú iracionálne čísla.

Ak sú m, n dve prirodzené čísla, a ak sú aj $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ prirodzené čísla, je aj $\sqrt{mn}$ prirodzené číslo. Lebo ak je $\sqrt{m} = x$, $\sqrt{n} = y$, je $\sqrt{mn} = xy$; ak sú x a y prirodzené čísla, je aj xy prirodzené číslo. Ale i keď $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ nie sú prirodzené čísla, môže $\sqrt{mn}$ byť prirodzené číslo; napr. čísla $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ sú iracionálne, ale $\sqrt{2.8} = 4$ je prirodzené číslo. Na druhej strane platí: Ak sú m, n dve nesúdeliteľné prirodzené čísla a ak je $\sqrt{mn}$ prirodzené číslo, sú aj $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ prirodzené čísla. Je to zrejmé, ak $m = 1$, alebo $n = 1$. Ak je však $m > 1$, $n > 1$, rozložme obe čísla m, n na prvočiniteľov:

$$m = p_1^{a_1} \dots p_h^{a_h}, \quad n = q_1^{b_1} \dots q_k^{b_k}. \tag{7}$$

Keďže m, n sú nesúdeliteľné čísla, je každé z prvočísel $p_1, \dots, p_h$ iné než ktorékoľvek z prvočísel $q_1, \dots, q_k$ a preto všetky prvočísla

$$p_1, \dots, p_h, q_1, \dots, q_k$$

sú navzájom rôzne. Z rozkladu (7) dostaneme rozklad na prvočiniteľov

$$mn = p_1^{a_1} \dots p_h^{a_h} \cdot q_1^{b_1} \dots q_k^{b_k}. \tag{8}$$

Pretože mn je prirodzené číslo, musí každý z mocniteľov v (8) byť číslo párne. Sú teda všetky čísla $a_1, \dots, a_h$ párne, a preto je $\sqrt{m}$ prirodzené číslo; okrem toho sú všetky čísla $b_1, \dots, b_k$ párne, a preto je $\sqrt{n}$ prirodzené číslo.

Nech je

$$z = \frac{m}{n} \tag{9}$$

zlomok v základnom tvare, takže m, n sú dve nesúdeliteľné prirodzené čísla. Ak sú $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ prirodzené čísla, je

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$$

(p. vzorec (7) v článku 20) racionálne číslo. Obrátene, **ak je** $\sqrt{z}$ **racionálne číslo, sú** $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ **prirodzené čísla.** Lebo nech $\sqrt{z} = x$, kde x je racionálne číslo. Podľa (9) je $n^2 z = mn$, teda (p. vzorec (5) v článku 20) $n\sqrt{z} = \sqrt{mn}$, alebo $nx = \sqrt{mn}$, takže $\sqrt{mn}$ je racionálne číslo. Pretože $m \,.\, n$ je prirodzené číslo, plynie z toho, že $\sqrt{mn}$ je prirodzené číslo a pretože m, n sú nesúdeliteľné, musia aj $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ byť prirodzené čísla. Z dokázaného plynie, že napr.

$$\sqrt{\frac{1}{2}},\ \sqrt{\frac{1}{3}},\ \sqrt{\frac{2}{3}},\ \sqrt{\frac{3}{2}},\ \sqrt{\frac{2}{5}},\ \sqrt{\frac{5}{2}}\ \text{atď.}$$

sú iracionálne čísla.

Cvičenie.

202. Vyšetrite, či sú racionálnymi číslami druhé odmocniny týchto čísel: 1296, 1728, 1764, 2268, 2304.

203. Ak číslo $\sqrt{a}$ je prirodzené číslo a je deliteľné dvoma, je deliteľné aj štyrmi. Dokážte to! Vyslovte a dokážte analogickú vetu pre ľubovoľného prvočiniteľa p.

204. Ak sú $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$, $\sqrt{p}$ prirodzené čísla, je aj $\sqrt{mnp}$ prirodzené číslo. Dokážte!

205. Ak je $\sqrt{mnp}$ prirodzené číslo, za akých podmienok sú tiež čísla $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$, $\sqrt{p}$ prirodzené čísla? Rozšírte vetu i na väčší počet činiteľov.

206. Aké podmienky musia byť splnené, aby $\sqrt{mn}$ bolo prirodzené číslo, i keď $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ nie sú prirodzené čísla?

207. Je možné, aby $\sqrt{\frac{m}{n}}$ bolo racionálne číslo, i keď $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ nie sú prirodzené čísla?

208. Určite: a) $\sqrt{54} \,.\, \sqrt{6}$; b) $\sqrt{30} \,.\, \sqrt{35} \,.\, \sqrt{42}$:, c) $\sqrt{14} \,.\, \sqrt{15} \,.\, \sqrt{24} \,.\, \sqrt{35}$.

209. Ktoré z nasledujúcich čísel sú racionálne? a) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; b) $\sqrt{3\frac{5}{9}}$; c) $\sqrt{1\frac{1}{24}}$; d) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$?

24. Čiastočné odmocňovanie.

Nech je n prirodzené číslo. Budeme skúmať, či číslo n môže byť deliteľné druhou mocninou u^2 nejakého prirodzeného čísla u. To je možné vždy, keď $u = 1$. Pre $u > 1$ nech je

$$u = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k},$$

rozklad na prvočiniteľov čísla u, takže $s_1, \dots, s_k$ sú prirodzené čísla a

$$u^2 = p_1^{2s_1} \dots p_k^{2s_k}. \tag{1}$$

Pretože číslo n je deliteľné číslom u^2, je

$$n = u^2 v, \tag{2}$$

kde aj v je prirodzené číslo, takže

$$n = p_1^{2s_1} \dots p_k^{2s_k} \cdot v. \tag{3}$$

Keď $v = 1$, je $n = u^2$, takže v (1) máme už rozklad na prvočiniteľov čísla n, v ktorom mocniteľ $2s_1$ prvočísla p_1 je väčší ako 1. Keď je však $v > 1$ a keď rozložíme v na prvočiniteľov, dostaneme z (3) rozklad na prvočiniteľov čísla n a pozorujeme, že mocniteľ prvočísla p_1 je aspoň rovný $2s_1$, teda je iste väčší ako 1. Tým je dokázané: **Ak je prirodzené číslo n deliteľné druhou mocninou u^2 prirodzeného čísla a $u > 1$, v rozklade čísla n na prvočiniteľov musí aspoň jedno prvočíslo mať mocniteľa väčšieho ako 1.**

Nech je teraz

$$m = p_1 \dots p_k \tag{4}$$

súčin k rôznych prvočísel; pritom môže byť $k = 1$, t. j. číslo m samé môže byť prvočíslom. Z dokázaného vyplýva, že číslo m nie je deliteľné druhou mocninou u^2 ani jedného prirodzeného čísla $u > 1$. Naproti tomu, ak sa v rozklade na prvočiniteľov nejakého prirodzeného čísla n vyskytuje aspoň jedno prvočíslo p s mocniteľom väčším ako 1, je číslo n deliteľné druhou mocninou prvočísla p. Z toho dôvodu nazývame čísla tvaru (4) **čís-**

lami bez štvorcov, pretože nie sú deliteľné druhou mocninou alebo štvorcom ani jedného prirodzeného čísla $u > 1$.

Nech je teraz $n > 1$ akékoľvek prirodzené číslo. Jeho rozklad na prvočiniteľov môžeme napísať v tvare

$$n = p_1^{a_1} \dots p_h^{a_h} . q_1^{b_1} \dots q_k^{b_k} , \tag{5}$$

kde mocnitelia sú prirodzené čísla, pričom mocnitelia $a_1, \dots,$ a_h sú čísla párne, mocnitelia $b_1, \dots, b_k$ sú čísla nepárne. Pritom môžu prvočísla označené p (s rôznymi indexmi) vôbec chýbať, načo rozklad (5) má tvar

$$n = q_1^{b_1} \dots q_k^{b_k} \tag{5)'$$

alebo môžu chýbať prvočísla označené q (s rôznymi indexmi), načo rozklad (5) má tvar

$$n = p_1^{a_1} \dots p_h^{a_h}. \tag{5)''$$

Keďže čísla $a_1, \dots, a_h$ sú párne, je

$$a_1 = 2r_1, \dots, a_h = 2r_h,$$

kde $r_1, \dots, r_h$ sú prirodzené čísla. Keďže čísla $b_1, \dots, b_k$ sú nepárne, je

$$b_1 = 2s_1 + 1, \dots, b_k = 2s_k + 1,$$

kde každé z čísel $s_1, \dots, s_k$ je prirodzené číslo alebo 0. Rozklad (5) potom zneje

$$n = p_1^{2r_1} \dots p_h^{2r_h} . q_1^{2s_1+1} \dots q_k^{2s_k+1}. \tag{6}$$

Položme

$$u = p_1^{r_1} \dots p_h^{r_h} . q_1^{s_1} \dots q_k^{s_k},$$

$$m = q_1 \cdots q_k,$$

takže z (6) plynie, že

$$n = u^2 m. \tag{7}$$

V prípade (5)' zneje (6)

$$n = q_1^{2s_1+1} \dots q_k^{2s_k+1}$$

a je $u = 1$, vtedy $n = m$. V prípade (5)" zneje (6)

$$n = p_1^{2r_1} \dots p_h^{2r_h}$$

a je $m = 1$, vtedy $n = u^2$ je druhá mocnina prirodzeného čísla u. Keď nenastane prípad (5)", t. j. ak $\sqrt{n}$ nie je prirodzené číslo, plynie zo (7)

$$\sqrt{n} = u\sqrt{m}.$$

Teda: **Ak druhá odmocnina $\sqrt{n}$ prirodzeného čísla n je iracionálna, je**

$$\sqrt{n} = u\sqrt{m}, \tag{8}$$

kde u je prirodzené číslo a m je číslo bez štvorcov. V prípade (5)" je číslo n samo bez štvorcov a $u = 1$, $n = m$.

V tvare (8) budeme písať každú iracionálnu druhú odmocninu $\sqrt{n}$ prirodzeného čísla n. Uvedenie druhej odmocniny $\sqrt{n}$ na tvar (8) sa menuje **čiastočným odmocňovaním.** Príklady:

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \sqrt{24} = 2\sqrt{6},$$
$$\sqrt{27} = 3\sqrt{3}, \sqrt{28} = 2\sqrt{7}, \sqrt{32} = 4\sqrt{2}, \text{ atď.}$$

Čiastočným odmocňovaním uvedieme každú iracionálnu druhú odmocninu $\sqrt{n}$ na **základný tvar.** Všimnime si teraz iracionálnu druhú odmocninu

$$x = \sqrt{\frac{m}{n}} \tag{9}$$

zlomku $\frac{m}{n}$. Predpokladáme, že zlomok je napísaný v základnom tvare, takže prirodzené čísla m, n sú nesúdeliteľné. Je

$$\frac{m}{n} = \frac{mn}{n^2},$$

teda

$$x = \frac{\sqrt{mn}}{n}.$$

Keď uvedieme druhú odmocninu $\sqrt{mn}$ prirodzeného čísla na základný tvar,

$$\sqrt{mn} = u\sqrt{v},$$

je

$$x = \frac{u}{n}\sqrt{v}, \tag{10}$$

t. j. iracionálna druhá odmocnina (9) je napísaná v tvare súčinu (10) zlomku $\frac{u}{n}$ s druhou odmocninou $\sqrt{v}$ čísla v bez štvorcov. Tvar (10) je základný tvar iracionálnej druhej odmocniny (9) zlomku. Príklady:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2};\ \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3};\ \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6};\ \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{5};\ \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{10};\ \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{15};\ \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5};\ \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{10};\ \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{15};\ \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5};\ \sqrt{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7}\sqrt{7};\ \text{atď.}$$

Cvičenie.

210. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich čísel je bez štvorcov? 210, 240, 256, 315!

211. Napíšte čísla bez štvorcov menšie ako 50!

212. a) Je možné, aby odmocninou súčinu dvoch čísel bez štvorcov bolo číslo prirodzené? b) Je možné, aby odmocninou súčinu troch čísel bez štvorcov bolo číslo prirodzené?

213. Súčin dvoch odmocnín v základnom tvare $u\sqrt{m}$, $v\sqrt{n}$, pričom m, n sú dve rôzne nesúdeliteľné čísla bez štvorcov, u, v sú racionálne čísla odlišné od nuly, nie je nikdy číslo racionálne. Dokážte to!

214. Keď sú $u\sqrt{m}$, $v\sqrt{n}$ dve odmocniny v základnom tvare, pričom

m, n sú dve rôzne čísla bez štvorcov a u, v sú racionálne čísla odlišné od nuly, vtedy nie je možné, aby $u\sqrt{m} = v\sqrt{n}$. Dokážte to!

215. Upravte na základný tvar čísla: a) $\sqrt{40}$; *b)* $\sqrt{45}$; *c)* $\sqrt{48}$; *d)* $\sqrt{50}$; *e)* $\sqrt{56}$; *f)* $\sqrt{72}$; *g)* $\sqrt{147}$; *h)* $\sqrt{338}$; *i)* $\sqrt{363}$; *j)* $\sqrt{1000}$.

216. Upravte na základný tvar čísla: a) $\sqrt{\frac{1}{8}}$; *b)* $\sqrt{\frac{3}{8}}$; *c)* $\sqrt{1\frac{1}{2}}$; *d)* $\sqrt{2\frac{1}{12}}$; *e)* $\sqrt{3\frac{1}{5}}$; *f)* $\sqrt{3\frac{3}{8}}$; *g)* $\sqrt{1\frac{1}{49}}$; *h)* $\sqrt{21\frac{1}{3}}$; *i)* $\sqrt{3,6}$; *j)* $\sqrt{48,8}$.

217. Čísla p, q, r sú navzájom rôzne prvočísla a rôzne od 2 a od 3. Upravte na základný tvar čísla: a) $\sqrt{p^3}$; b) $\sqrt{q^5}$; c) $\sqrt{r^7}$; d) $\sqrt{p^2q}$; e) $\sqrt{pr^3}$; f) $\sqrt{q^3r^2}$; g) $\sqrt{9p^5q^6r^7}$; h) $\sqrt{8pq^2r^6}$.

218. Čísla p, q, r sú prvočísla. Upravte na základný tvar výrazy:

a) $\sqrt{\frac{p^3}{q^2}}$; b) $\sqrt{\frac{p^2}{q^3}}$; c) $\sqrt{\frac{pq^2}{r^3}}$; d) $\sqrt{\frac{9p^2q}{4rs^2}}$; e) $\sqrt{\frac{8pq^3}{27r^2s^3}}$.

219. Ktoré z uvedených čísel je väčšie: *a)* $5\sqrt{3}$ alebo $2\sqrt{19}$; *b)* $9\sqrt{3}$ alebo $11\sqrt{2}$?

25. Čísla racionálne závislé od druhej odmocniny.

Nech je n také prirodzené číslo, že $\sqrt{n}$ je iracionálna. O čísle x hovoríme, že je racionálne závislé od $\sqrt{n}$, keď sa dá napísať v tvare

$$x = r + s\sqrt{n}, \tag{1}$$

kde r, s sú čísla racionálne. Ak $s = 0$, je $x = r$, t. j. x je racionálne. Teda každé racionálne číslo je racionálne závislé od $\sqrt{n}$. Ak $s \neq 0$, je číslo (1) iracionálne. Lebo ak je $s \neq 0$, plynie z (1), že

$$\frac{x - r}{s} = \sqrt{n}. \tag{2}$$

Keby bolo x racionálne, bolo by aj číslo (2) racionálne, a to je nemožné.

Číslo x racionálne závislé od $\sqrt{n}$ sa dá len jediným spôsobom vyjadriť v tvare (1).
Nech je

$$r_1 + s_1\sqrt{n} = r_2 + s_2\sqrt{n}, \tag{3}$$

kde r_1, r_2, s_1, s_2 sú racionálne čísla. Máme dokázať, že je $r_1 = r_2$, $s_1 = s_2$. Keď položíme

$$r = r_1 - r_2, \quad s = s_1 - s_2, \tag{4}$$

plynie z (3), že

$$r + s\sqrt{n} = 0. \tag{5}$$

Avšak z (5) plynie, že

$$r = 0, \quad s = 0. \tag{6}$$

Keďže 0 je racionálne číslo, plynie z (5) najprv, že $s = 0$, načo (5) sama dá $r = 0$. Podľa (4) a (6) je skutočne $r_1 = r_2$, $s_1 = s_2$.

Súčet a súčin dvoch čísel racionálne závislých od $\sqrt{n}$ je zase racionálne závislý od $\sqrt{n}$. Lebo ak

$$x_1 = r_1 + s_1\sqrt{n}, \quad x_2 = r_2 + s_2\sqrt{n},$$

kde r_1, s_1, r_2, s_2 sú racionálne čísla, je

$$x_1 + x_2 = (r_1 + r_2) + (s_1 + s_2)\sqrt{n},$$

$$x_1 \,.\, x_2 = (r_1 r_2 + s_1 s_2 n) + (s_1 r_2 + r_1 s_2)\sqrt{n}$$

a tieto všetky čísla

$$r_1 + r_2, \; s_1 + s_2, \; r_1 r_2 + s_1 s_2 n, \; s_1 r_2 + r_1 s_2$$

sú racionálne.

Ak je číslo x racionálne závislé od $\sqrt{n}$, je aj opačné číslo $-x$ racionálne závislé od $\sqrt{n}$. Z (1) plynie

$$-x = (-r) + (-s)\sqrt{n}$$

a zároveň s číslami r, s sú aj čísla $-r$, $-s$ racionálne.

Ak je číslo $x \neq 0$ racionálne závislé od $\sqrt{n}$, je aj jeho prevrátená hodnota $\frac{1}{x}$ racionálne závislá od $\sqrt{n}$. Je to zrejmé, ak je x racionálne. Ale ak je x iracionálne, je v (1) iste $s \neq 0$. Takže $r - s\sqrt{n} \neq 0$, lebo inak by [pozri (5) a (6)] bolo $r = 0$, $s = 0$. Teda iný než nula je aj súčin

$$(r + s\sqrt{n}) \,.\, (r - s\sqrt{n}) = r^2 - s^2 n$$

a máme

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{r+s\sqrt{n}}=\frac{r-s\sqrt{n}}{(r+s\sqrt{n})\cdot(r-s\sqrt{n})}=\frac{r-s\sqrt{n}}{r^2-s^2n}=$$

$$=\frac{r}{r^2-s^2n}-\frac{s}{r^2-s^2n}\sqrt{n}=r'+s'\sqrt{n},$$

kde r' a s' sú racionálne čísla.

Rozdiel a podiel dvoch čísel racionálne závislých od $\sqrt{n}$ je zase racionálne závislý od $\sqrt{n}$; v prípade podielu musí, pravda, deliteľ byť odlišný od nuly. Lebo

$$x_1-x_2=x_1+(-x_2),$$

$$x_1 : x_2=x_1\cdot\frac{1}{x_2}.$$

Cvičenie.

220. Dokážte, že súčin troch činiteľov, z ktorých každý je racionálne závislý od $\sqrt{n}$, je racionálne závislý aj od $\sqrt{n}$. Platí to i pre väčší počet činiteľov?

221. Dokážte, že zlomok, ktorého čitateľ i menovateľ je súčin niekoľko činiteľov racionálne závislých od $\sqrt{n}$, je tiež racionálne závislý od $\sqrt{n}$.

222. Dokážte, že každá mocnina čísla racionálne závislého od $\sqrt{n}$ s ľubovoľným celým mocniteľom je opäť číslo racionálne závislé od $\sqrt{n}$

223. Je možné, aby súčtom dvoch iracionálnych čísel bolo číslo racionálne? Uveďte príklad!

224. Je možné, aby súčinom dvoch iracionálnych čísel bolo číslo racionálne? Uveďte príklad!

225. Napíšte v tvare čísla racionálne závislého od odmocniny:

a) $(1+\sqrt{3})\sqrt{3}$; b) $(3+2\sqrt{2})(2-3\sqrt{2})$; c) $\frac{6}{\sqrt{2}}$; d) $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; e) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$

f) $\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$; g) $\frac{2-3\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}$.

226. Dokážte, že číslo $x=s\sqrt{m}+t\sqrt{n}$ je vždy iracionálne, keď čísla

m, n sú dve rôzne čísla bez štvorcov a s, t sú dve čísla racionálne, pričom nie je súčasne $s=0$, $t=0$.

227. Dokážte, že nie je možné, aby $r_1 + s\sqrt{m} = r_2 + t\sqrt{n}$, ak m, n sú dve rôzne čísla bez štvorcov a r_1, r_2, s, t sú čísla racionálne, pričom nie je súčasne $s=0$, $t=0$.

VI. KVADRATICKÉ ROVNICE.

26. Opakovanie o rovniciach.

V matematike máme pred sebou často úlohu vypočítať neznáme číslo, ktoré má vyhovovať predpísaným podmienkam. V najjednoduchších prípadoch je hneď zrejmé, ktorými počtovými výkonmi sa žiadané číslo vypočíta a celá úloha spočíva v šikovnom vykonaní počtových výkonov. Ale na strednej škole ste sa naučili riešiť aj úlohy, v ktorých nie je hneď zrejmé, aké počtové výkony sa majú používať. V takých prípadoch si pomáhame usudzovaním. Príklad: **Z dvoch miest, vzdialených od seba 27 km, vyjdú súčasne dvaja chodci a idú si oproti. Prvý prejde za hodinu 5 km, druhý 4 km.** Za aký čas sa stretnú? Usudzujeme takto: Pretože $5+4=9$, približia sa chodci za každú hodinu o 9 km. Pretože $27:9=3$, stretnú sa za tri hodiny. Už na strednej škole ste poznali, že v podobných prípadoch môžeme miesto priameho usudzovania postupovať aj takto: Neznáme číslo si označíme nejakým písmenom, najčastejšie písmenom x. Potom si z daných podmienok úlohy vyjadríme postupne všetky čísla, o ktorých je reč v úlohe, pomocou neznámej hodnoty x. Nakoniec dôjdeme pomocou x k dvojakému vyjadreniu tej istej hodnoty. Ak naznačíme, že oba výrazy, vyjadrujúce to isté číslo, sú si rovné, dostaneme **rovnicu** s neznámou x. Túto rovnicu riešime a jej **riešenie** alebo **koreň** je hľadaná hodnota x. V predchádzajúcom prípade bude postup tento: Chodci sa stretnú za x hodín. Za tento čas ujde prvý chodec $5x$ km, druhý $4x$ km. Obe tieto vzdialenosti dajú dohromady $(5x+4x)$ km, čo sa musí rovnať 27 km. Máme teda rovnicu $5x+4x=27$ a ľahko nájdeme jej riešenie alebo koreň $x=3$, čím je úloha riešená. V uvedenom prípade je priame riešenie úlohy úsudkom vlastne jednoduchšie ako riešenie pomocou rovnice. Pozrime na iný príklad: **Štvorec a obdĺžnik majú ten istý obsah. Dĺžka obdĺžnika je o 5 m väčšia ako strana štvorca, šírka obdĺžnika je o 4 m menšia ako strana štvorca. Čomu sa rovná strana štvorca?** Toto riešiť priamym úsudkom je ťažšie, preto riešime úlohu pomocou rovnice. Zvolíme 1 m za jednotku dĺžky, 1 m² za jednotku plochy. Obsahy štvorca a obdĺžnika sú vyjadrené výrazmi x^2, $(x+5).(x-4)$. Máme teda rovnicu $(x+5).(x-4)=x^2$ a ľahko vypočítame, že $x=$ $=20$. Teda strana štvorca rovná sa 20 m.

Riešenie jednoduchých rovníc spočíva na známych zákonoch, platných pre základné počtové výkony. V prvej z našich rovníc $5x+4x=27$ uvedieme $5x+4x$ pomocou distributívneho zákona na tvar $(5+4)\,x$ alebo $9x$, a máme novú rovnicu $9x=27$, na jej riešenie musíme však vedieť, že neznámy činiteľ súčinu sa vypočíta delením. V druhej z našich rovníc $(x+5).(x-$ $-4)=x^2$, uvedieme $(x+5).(x-4)$ pomocou distributívneho zákona na tvar x^2+x-20 a máme novú rovnicu

$$x^2+x-20=x^2. \qquad (1)$$

Rovnica (1) sa upraví podľa pravidla, že každý člen rovnice môžeme preniesť na druhú stranu so zmeneným znamienkom. Odôvodnite toto pravidlo na základe pravidiel pre sčítanie relatívnych čísel! Keď prenesieme v (1) člen x^2 naľavo a člen -20 napravo, dostaneme

$$x^2+x-x^2=20.$$

Ľavá strana je rovná x^2-x^2+x podľa komutatívneho zákona sčítania, teda je rovná $0+x$, alebo x, takže dostávame $x=20$.

Cvičenie.

228. Ak obrátim poradie číslic v dvojcifernom čísle, dostanem číslo o 1 menšie ako dvojnásobok pôvodného čísla. Druhá číslica je o 4 väčšia ako prvá. Ktoré je to číslo?

229. Keď jedno z dvoch neznámych čísel zväčším o 5, dostanem číslo, ktoré je trikrát väčšie ako druhé číslo; keď však druhé číslo zmenším o 7, dostanem číslo, ktoré je štyrikrát menšie ako prvé číslo. Ktoré sú to čísla?

230. Dve kvapaliny majú merné váhy 1,2 g/cm^3 a 0,9 g/cm^3. Koľko z ktorej musíme pomiešať, aby sme dostali 100 cm^3 smesi s mernou váhou 1 g/cm^3?

231. Za 5 kg hrachu a 3 kg krúp zaplatilo sa 136 Kčs; za 4 kg hrachu a 5 kg krúp zaplatilo sa 140 Kčs. Koľko stojí 1 kg hrachu a 1 kg krúp?

232. Určitú vzdialenosť prejde jeden vlak za 6 hod. 25 min. a iný vlak za 7 hod. Prvý vlak prejde za každú hodinu o 3 km viac ako druhý. Koľko km prejde každý vlak za 1 hod.? Aká je to vzdialenosť?

233. Keď prejde vlak 1 km za $2\frac{2}{5}$ min., dôjde do cieľovej stanice o $\frac{1}{2}$ hod. neskoršie, ako je v cestovnom poriadku. Keď vlak prejde 1 km za 2 min., dôjde do cieľovej stanice o 2 hod. skoršie, ako je v cestovnom poriadku. Vypočítajte vzdialenosť oboch staníc a čas, za ktorý má vlak túto vzdialenosť prejsť.

234. Po dvoch rovnobežných koľajniciach idú tým istým smerom dva vlaky: Rýchlik 105 m dlhý rýchlosťou 57 km/hod. a osobný vlak 75 m dlhý rýchlosťou 39 km/hod. a) Ako dlho trvá, kým každý vlak minie pozorovateľa, sediaceho v druhom vlaku? b) Aký dlhý čas uplynie od okamihu, v ktorom sa stretne rušeň rýchlika s posledným vozňom osobného vlaku, do okamihu, v ktorom posledný vozeň rýchlika predíde rušeň osobného vlaku?

235. Predchádzajúce cvičenie riešte pre prípad, že oba vlaky idú proti sebe.

236. Vyhľadajte čitateľa zlomkov $\frac{A}{x+1}$, $\frac{B}{x-1}$ tak, aby pre každé x súčet oboch zlomkov bol $\frac{4x+2}{x^2-1}$.

b) Podobne rozložte zlomok $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ na súčet dvoch zlomkov s menovateľmi $x+1$ a $x+2$.

237. Číslo a rozložte na tri sčítance tak, aby prvý bol o 5 väčší ako druhý a trikrát menší ako tretí.

238. Číslo 15 rozložte na dva sčítance tak, aby prvý sčítanec, delený číslom a, dával podiel o 3 väčší ako druhý sčítanec, delený číslom b. Je úloha vždy riešiteľná?

239. Vo výraze $y=Ax+B$ ustanovte čísla A a B tak, aby pre $x=a$ bolo $y=b$ a pre $x=a'$ bolo $y=b'$; pritom je a rozdielne od a'.

240. 100 Kčs chcem vyplatiť v päťkorunách a desaťkorunách tak, aby celkový počet štátoviek bol n. Koľko ich bude z každého druhu? Ako sa má voliť číslo n, aby úloha mala riešenie?

241. Obvod obdĺžnika je $2s$ m; ak zväčšíme jeho dĺžku o 5 m a šírku o 3 m, zväčší sa obsah o 195 m^2. Aké sú rozmery obdĺžnika? Pre ktoré s má úloha riešenie?

242. Za niekoľko metrov súkna sme zaplatili a Kčs. Keby ho bolo o 2 m viac, stálo by b Kčs. Koľko m sme kúpili a čo stál 1 m? Ako sa majú voliť čísla a, b, aby úloha mala smysel?

243. Mám dve kvapaliny o merných váhach s_1 g/cm³ a s_2 g/cm³. Smiešam ich rovnaké množstvá a) čo do objemu, b) čo do váhy. Akú mernú váhu má smes?

244. Chceme dostať n kg smesi po b Kčs za 1 kg z dvoch druhov tovaru, ktorý stojí p Kčs a q Kčs za 1 kg ($p>q$). Koľko kg máme vziať z každého druhu? Kedy má úloha riešenie?

245. Mám dva druhy tovaru. Keď si vezmem a kg jedného druhu a b kg druhého druhu, dostanem smes v cene m Kčs za 1 kg. Keď si vezmem b kg prvého druhu a a kg druhého druhu, dostanem smes v cene n Kčs za 1 kg. Koľko Kčs stojí 1 kg z každého tovaru? Ako sa majú voliť čísla a, b, m, n, aby úloha mala smysel?

27. Pojem kvadratickej rovnice.

Najčastejšie sa vyskytujú rovnice tvaru

$$V_1(x) = V_2(x), \tag{1}$$

kde znaky V_1, V_2 naznačujú, že obe strany sú výrazy utvorené zo známych čísel a z neznámeho čísla x sčítaním a násobením (alebo aj odčítaním, ale odčítanie môžeme po zavedení relatívnych čísel nahradiť sčítaním). Také výrazy, ako viete, volajú sa **mnohočlenmi.** Prenesením všetkých členov s pravej strany na ľavú dostaneme z (1) rovnicu tvaru

$$V_1(x) - V_2(x) = 0, \tag{2}$$

kde na pravej strane je nula. Prechod od tvaru (1) ku tvaru (2) volá sa **anulovaním** rovnice; hovoríme tiež, že (2) je anulovaný tvar rovnice (1). Výraz $V_1(x) - V_2(x)$ je, ako viete, zasa mnohočlen, a preto rovnica (2) zneje takto:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{3}$$

kde n je prirodzené číslo a $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sú známe čísla, ktoré sa volajú **koeficientmi** (slovensky **súčiniteľmi**) rovnice (3).

Člen a_0, ktorý neobsahuje neznámu x, volá sa **absolútnym** (slovensky **prostým**) členom rovnice. Súčiniteľ a_n pri najvyššej mocnine neznámej, pri x^n, sa volá **najvyšším súčiniteľom (koeficientom)** rovnice. Ak sa všetky koeficienty rovnajú nule, dostaneme **identitu**, ktorej vyhovuje každé číslo x. Ak sa všetky koeficienty rovnajú nule okrem a_0, nemá rovnica nijaký koreň, je sporná. Tieto dva prípady vynechajme. Môžeme teda predpokladať, že nejaký najvyšší koeficient a_n rovnice (3) je iný ako nula. Hovoríme potom, že (3) je **algebraická rovnica n-tého stupňa.** Pre $n = 1$ máme rovnicu prvého stupňa alebo **lineárnu rovnicu:**

$$a_1x + a_0 = 0, \tag{4}$$

pre $n = 2$ máme rovnicu druhého stupňa alebo **kvadratickú rovnicu:**

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0. \tag{5}$$

O lineárnej rovnici (4) vieme, že má jediný koreň,

$$x = -\frac{a_0}{a_1}.$$

Kvadratickú rovnicu (5) sa iba naučíme riešiť. Kvadratickou rovnicou sa dá riešiť mnoho úloh. Také úlohy sa obyčajne ťažko riešia úsudkom, bez rovníc. Preto je náuka o kvadratických rovniciach veľmi dôležitá. Pretože v (5) je $a_2 \neq 0$, môžeme položiť

$$\frac{a_1}{a_2} = p, \quad \frac{a_0}{a_2} = q$$

a uviesť kvadratickú rovnicu (5) na tvar

$$x^2 + px + q = 0, \tag{6}$$

ktorého najvyšší koeficient sa rovná jednej a volá sa **normálnym tvarom** kvadratickej rovnice. Koeficient p a prostý člen q môžu byť kladné alebo záporné, alebo sa rovnajú nule. Dokiaľ neboly všeobecne uznávané záporné čísla, rozoznávaly sa rôzne druhy kvadratických rovníc:

$$x^2 = px + q, \; x^2 + px = q, \; x^2 + q = px,$$

čo bolo veľmi nepohodlné. O tvare (6) s kladnými p, q sa neuvažovalo vôbec, pretože sa hľadaly len kladné korene a rovnica (6) pri kladných p, q nemôže mať ani jeden kladný koreň. V tomto článku si preberieme tie jednoduché prípady, v ktorých buď p, buď q sa rovná 0. Ak sa obe rovnajú nule, rovnica (6) zneje $x^2 = 0$ a zrejme má jediný koreň $x = 0$. Nech je ďalej $q = 0$, ale $p \neq 0$. Rovnica (6) zneje $x^2 + px = 0$ alebo

$$x\,(x + p) = 0. \tag{7}$$

Súčin na ľavej strane v (7) sa rovná nule, ak sa niektorý činiteľ rovná nule; obrátene, ak sa súčin rovná nule, aspoň jeden činiteľ sa rovná nule. Teda rovnici (7) možno vyhovieť dvoma spôsobmi: Buď tak, že $x=0$, alebo tak, že $x+p=0$, to jest $x = -p$.

Nakoniec nech je v rovnici (6) $p = 0$. Dostaneme tzv. rýdzo kvadratickú rovnicu $x^2 + q = 0$ alebo

$$x^2 = a, \tag{8}$$

kde $a = -q$. Hovorili sme už, že pre $a = 0$, má rovnica (8) jediné riešenie $x = 0$. Pre kladné a má rovnica (8) dve riešenia: Kladné riešenie $x = \sqrt{a}$ a záporné riešenie $x = -\sqrt{a}$. Pre záporné a nemá rovnica (8) riešenie také, ktorému by sme rozumeli. Prečo?

Pozorujeme, že ak sa niektoré z p, q v rovnici (6) rovná nule, má rovnica (6) buď dva korene, buď jediný koreň, alebo ani jeden koreň. Ďalej pozorujeme, že i keď p, q sú čísla racionálne, môžu byť korene iracionálne. Tak je to napr. v rovnici $x^2 - 2 = 0$. V ďalších našich článkoch zistíme, že výsledky našich pozorovaní sú rovnaké, i keď sa ani p, ani q nerovná nule.

Cvičenie.

V cvičeniach, ktoré vyriešite v znakoch čísel, preskúšajte správnosť riešenia v číslach.

246. Dokážte: a) Každé číslo r, ktoré je koreňom rovnice $ax^2+bx+c=0$, je aj koreňom rovnice $k(ax^2+bx+c)=0$, kde k je ľubovoľné číslo. b) Obrátene každé číslo r, ktoré je koreňom rovnice $k(ax^2+bx+c)=0$, kde $k \neq 0$, je aj koreňom rovnice $ax^2+bx+c=0$.

247. Dokážte: Ak rovnica $ax^2+bx+c=0$, kde $a \neq 0$, má kladný koreň, je aspoň jedno z čísel a, b, c kladné a aspoň jedno záporné.

248. Dokážte: Ak rovnica $ax^2+bx+c=0$ má jeden koreň rovný nule $r=0$, vtedy $c=0$.

249. Dokážte: Ak rovnica $ax^2+bx+c=0$ má dva korene rovnakej absolútnej hodnoty, ale opačného znamienka, $b=0$.

250. Dokážte: Ak rovnica $ax^2+bx+c=0$ má tri navzájom rôzne korene r, s, t, je $a=0$, $b=0$, $c=0$.

251. Nájdite korene rovnice: a) $x^2-5x=0$, b) $x^2+3{,}7x=0$; c) $3x^2=10x$; d) $(2x+3)(x-2)=(4x-3)(3x+2)$; e) $(x+3)^2+(x+4)^2=(x+5)^2$;

$$\text{f) } x-\frac{1}{x-1}=1+\frac{x}{x-1};\quad \text{g) } \frac{x-2}{x-3}+\frac{x-3}{x-2}=2\frac{1}{6};\quad \text{h) } \frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}=\frac{1}{x(x-1)}.$$

252. Teleso sme vrhli svisle nahor so začiatočnou rýchlosťou 50 m/sec. Za aký čas dopadne zpät na zem, keď výška telesa (v metroch) nad zemou je vyjadrená vzorcom $s=ct-\frac{1}{2}gt^2$, kde c (v m/sec.) je začiatočná rýchlosť, t čas (v sekundách) a $g \doteq 9{,}81$ m/sec².

253. Určite a tak, aby daná rovnica mala jeden koreň rovný nule a určite jej druhý koreň: a) $2ax^2-7(a+1)x+a-1=0$; b) $(a-1)x^2-(a-2)x+a(a-3)=0$.

254. Nájdite korene rovníc: a) $4x^2=9$; b) $3x^2-2=0$; c) $(x+2)^2+(x-2)^2=40$; d) $(2x-3)(3x+2+(2x+3)(3x-2)=0$;

$$\text{e) } \frac{x}{x+3}+\frac{3}{x-3}=2\frac{1}{8};\ \text{f) } \frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=6;\ \text{g) } \frac{x-2}{x-1}-2\frac{x-1}{x-2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)};\ \text{h) } \frac{x+2}{x-2}-\frac{x+2}{x-2}=\frac{32}{x(x^2-4)}.$$

255. Určite a) x, b) y tak, aby sa rovnica $4x^2+16xy+4x+8y-8=0$ stala rýdzo kvadratickou a potom túto rovnicu riešte.

28. Kvadratická rovnica so známymi koreňmi.

Zvoľme si dve ľubovoľné čísla r, s. Ľahko sostavíme kvadratickú rovnicu, ktorá má za korene dané čísla r, s. Je to rovnica

$$(x - r) \,.\, (x - s) = 0. \tag{1}$$

Prečo sú čísla r, s koreňami rovnice (1)? Prečo nemá rovnica (1) ani jeden iný koreň?

Na tvar (1) môžeme upraviť kvadratickú rovnicu v normálnom tvare

$$x^2 + px + q = 0, \tag{2}$$

ak položíme

$$r + s = -p, \; rs = q. \tag{3}$$

Teda: **Ak platí vzťah (3), má kvadratická rovnica (2) dva korene $x = r$, $x = s$.**

Pritom sme mali na mysli predovšetkým ten prípad, že $r \neq s$. Ale naša úvaha je správna i pre prípad $r = s$. V tomto prípade má rovnica (2) jediný koreň $x = r$. Napr. rovnica $(x - 3)^2 = 0$ alebo $x^2 - 6x + 9 = 0$ má jediný koreň $x = 3$, teda $p = -6$, $q = 9$ a vzťahy (3) platia pre $r = 3$, $s = 3$.

Kvadratická rovnica nemusí mať ani jeden koreň; príkladom je rýdzokvadratická rovnica $x^2 + q = 0$ s ľubovoľným **kladným** q. Ak kvadratická rovnica (2) má koreň, má buď presne dva korene, alebo jediný koreň. Presvedčíme sa o tom takto: Vychádzajme od ľubovoľnej kvadratickej rovnice v normálnom tvare (2) a predpokladajme, že sa nám podarilo nejakým spôsobom určiť koreň $x = r$ tejto rovnice. Keďže číslo r je koreňom rovnice (2), je $r^2 + pr + q = 0$ alebo

$$q = -r\,(r + p). \tag{4}$$

Teraz určíme číslo s z podmienky

$$r + s = -p; \tag{5}$$

je jediné také číslo, totiž číslo

$$s = -(r + p). \tag{6}$$

Avšak zo (4) a (6) plynie

$$q = rs. \tag{7}$$

Podľa (5) a (7) platia oba vzťahy (3); vieme, že z toho plynie, že rovnica (2) má korene $x = r$, $x = s$, a nijaký iný koreň. Ak $s \neq r$, má rovnica (2) presne dva korene, ak $s = r$, má rovnica (2) jediný koreň, ktorý sa menuje dvojnásobným koreňom rovnice (2).

Príklad 1. V rovnici

$$x^2 + 5x + q = 0 \tag{8}$$

určíme q tak, aby rovnica mala koreň $x = 3$. Vsadením hodnoty $x = 3$ do rovnice (8) nájdeme ľahko $q = -24$, takže rovnica zneje:

$$x^2 + 5x - 24 = 0; \tag{9}$$

vo vzťahu (5) je v našom prípade $r = 3$, $p = 5$, takže $s = -8$. Teda rovnica (9) má dva korene $x = 3$, $x = -8$.

Príklad 2. V rovnici:

$$x^2 + px + 16 = 0$$

určíme p tak, aby rovnica mala koreň $r = -4$. Ľahko zistíme, že musí byť $p = 8$, takže rovnica zneje:

$$x^2 + 8x + 16 = 0; \tag{10}$$

zo vzťahu (5) vypočítame $s = -4$. Teda rovnica (10) má dvojnásobný koreň $r = -4$.

Cvičenie.

256. Dokážte vetu: Ak má rovnica $x^2+px+q=0$ dva korene kladné, je $q>0$, $p<0$; ak má dva korene záporné, je $q>0$, $p>0$; ak má dva korene rôzneho znamienka, je $q<0$.

257. Ak má kvadratická rovnica s racionálnymi koeficientmi dvojnásobný koreň, je ten koreň racionálny. Dokážte to!

258. Ak má kvadratická rovnica s racionálnymi koeficientmi jeden koreň iracionálny, je aj druhý koreň iracionálny a oba tie korene sú navzájom rôzne. Dokážte to!

259. Ak má kvadratická rovnica $x^2+px+q=0$ dvojnásobný koreň r, dokážte, že a) $r = -\frac{p}{2}$; b) $|r| = \pm\sqrt{q}$; c) $p^2-4q=0$.

260. Keď v rovnici $x^2+px+q=0$ platí $p^2-4q=0$, má rovnica dvojnásobný koreň. Dokážte to!

261. Ak má rovnica $x^2+px+q=0$ dva korene $r \neq s$, je $p^2-4q>0$. Dokážte to!

262. Rovnica $x^2+px+q=0$ má dva korene. Určite vzťah, ktorý musí platiť medzi p a q, ak jeden z týchto koreňov má byť a) o n, b) n-krát väčší ako druhý.

263. Ak rovnica $x^2+px+q=0$ má dva korene, z ktorých jeden je druhou mocninou druhého, vtedy $p^3-3pq+q+q^2=0$. Dokážte to!

264. Ak r a s sú korene rovnice $x^2+px+q=0$, vyjadrite pomocou p a q výrazy: a) $(r+1)(s+1)$; b) r^2+s^2; c) r^3+s^3; d) $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}$; e) $\frac{r}{s}+\frac{s}{r}$.

265. Sostavte kvadratickú rovnicu, ktorej korene sú: a) 5 a 8; b) -2 a 3; c) 1,2 a $-1{,}3$; d) $-\frac{3}{4}$ a $-\frac{4}{5}$; e) $2+\sqrt{5}$ a $2-\sqrt{5}$; f) $-1+\sqrt{2}$ a $-1\sqrt{2}$.

266. Keď r a s sú korene rovnice $x^2+px+q=0$, sostavte rovnicu, ktorá má korene a) $-r$ a $-s$; b) $r-n$, $s-n$, kde n je dané číslo; c) rn a sn, kde n je dané číslo; d) $\frac{1}{r}$ a $\frac{1}{s}$; e) r^2 a s^2; f) r^3 a s^3; g) $\frac{r}{s}$ a $\frac{s}{r}$.

267. Je daná kvadratická rovnica a jeden jej koreň r; určite druhý koreň v prípadoch: a) $x^2-7x-30=0$, $r=10$; b) $x^2+5x-2346=0$, $r=-51$; c) $x^2-2x-3=0$, $r=1+\sqrt{2}$; d) $x^2-4x+1=0$, $r=2-\sqrt{3}$

268. Určite q tak, aby rovnica $x^2-6x+q=0$ mala daný koreň r. Aký je druhý koreň v prípadoch: a) $r=7$; b) $r=-5$; c) $r=3$; d) $r=3+2\sqrt{5}$?

269. Určite p tak, aby rovnica $x^2+px+36=0$ mala daný koreň r. Aký je druhý koreň v prípadoch: a) $r=12$; b) $r=\frac{9}{2}$; c) $r=-6$; d) $r=7-\sqrt{13}$.

270. Ak má rovnica $x^2+px+q=0$ korene r, s, potom je $x^2+px+q=$ $=(x-r)(x-s)$ pre každé x. Dokážte to! Ako je to, ak daná rovnica má dvojnásobný koreň r? (Rozklad kvadratického trojčlena x^2+px+q na súčin dvoch lineárnych dvojčlenov.)

271. Ak má rovnica $ax^2+bx+c=0$ korene r, s, je $ax^2+bx+c=a(x-r)$. .$(x-s)$ pre každé x. Dokážte to! Ako je to, ak daná rovnica má dvojnásobný koreň r?

272. Ak má rovnica $x^2+px+q=0$ korene r a s a rovnica $x^2+p'x+q'=0$ korene r' a s', ktoré vyhovujú vzťahu $\frac{r-r'}{r-s'} = -\frac{s-r'}{s-s'}$, je $p\,.\,p'=2q+2q'$. Dokážte to!

273. Ak majú rovnice $x^2+px+q=0$ a $x^2+p'x+q'=0$ spoločný koreň r, je $r=-\frac{q-q'}{p-p'}$ a $(q-q')^2+(p-p')(pq'-p'q)=0$. Dokážte to!

29. Celistvé korene kvadratickej rovnice.

Kvadratická rovnica

$$x^2+px+q=0, \tag{1}$$

kde p, q sú racionálne, nemusí mať ani jeden koreň (príklad: $x^2+1=0$) alebo môže mať dva iracionálne korene (príklad: $x^2-3=0$). Ak rovnica (1) má koreň $x=r$, vieme z článku 28, že má ešte koreň $s=-(r+p)$; ak koreň r i koeficient p sú čísla racionálne, je aj koreň s racionálny a aj prostý člen q je racionálny, lebo vieme, že $q=rs$. Môže sa, pravda, stať, že $s=r$, t. j. že koreň r je dvojnásobný.

Ak rovnica (1) má za korene **celé čísla** r, s, tak zo známych vzťahov

$$r+s=-p, \quad rs=q \tag{2}$$

plynie, že aj p a q sú celé čísla. Pritom nevylučujeme prípad $r=s$ dvojnásobného koreňa r.

Ak rovnica, ktorej p, q sú celé čísla, má za korene celé čísla r, s, môžeme tieto korene ľahko určiť skusmo na základe vzťahov (2). Pritom môžeme vylúčiť prípad $q=0$ prebraný už v článku 27. Podľa druhého zo vzťahov (2) je

$$|q|=|r|\,.\,|s|,$$

kde všetky tri čísla $|q|$ (toto číslo poznáme), $|r|$, $|s|$ (tieto čísla hľadáme) sú prirodzené čísla. Aby sme určili korene r, s, rozložíme predovšetkým prirodzené číslo q všetkými možnými spôsobmi na súčin $r\,.\,s$ dvoch prirodzených čísel; toto vieme urobiť už zo strednej školy na základe rozkladu čísla q na prvočiniteľov. Obyčajne číslo q nie je príliš veľké a môžeme rozklady jednoducho uhádnuť. Ďalší postup si objasníme na príklade.

Príklad: Pri rovnici

$$x^2+px-24=0 \tag{3}$$

vyjdeme od rozkladov

$$-24=-1\,.\,24=-2\,.\,12=-3\,.\,8=-4\,.\,6=-6\,.\,4=$$
$$=-8\,.\,3=-12\,.\,2=-24\,.\,1,$$

takže máme osem možností:

$$\begin{array}{ll|ll} r=-1; & s=24; & r=-6; & s=4; \\ r=-2; & s=12; & r=-8; & s=3; \\ r=-3; & s=8; & r=-12; & s=2; \\ r=-4; & s=6; & r=-24; & s=1. \end{array} \qquad (4)$$

(Pretože číslo $rs = q$ alebo $rs = -24$ je záporné, musí z čísel r, s byť jedno kladné a druhé záporné.) Ak je napr. $p = -5$, potom vzťahy (2) znejú

$$r + s = 5, \qquad rs = -24$$

a ľahko zistíme, že im vyhovuje jediná z 8 možností (4), totiž $r = -3$, $s = 8$. Teda rovnica

$$x^2 - 5x - 24 = 0$$

má korene $r = -3$, $s = 8$. Podobne zistíme napr., že rovnica

$$x^2 + 10x - 24 = 0$$

má korene $r = 2$, $s = -12$. Inak je to s rovnicou

$$x^2 + 14x - 24 = 0. \qquad (5)$$

Tu ani jedna z možností (4) nevyhovuje vzťahu $r + s = -14$. (Možnosť $r = -2$, $s = -12$ by dala $rs = 24$. A teda čísla $r = -2$, $s = -12$ nie sú korene rovnice (5), ale sú to korene rovnice $x^2 + 14x + 24 = 0$.

Preto rovnica (5) nemá za koreň nijaké celé číslo.

Vyskytuje sa otázka, či rovnica (1), keď p, q sú celé čísla, môže mať za koreň racionálne číslo, ktoré nie je celé. Odpoveď je záporná. Predpokladajme, že rovnica (1), keď p, q sú celé čísla, má koreň tvaru

$$x = \pm \frac{m}{n}, \qquad (6)$$

kde m, n sú dve nesúdeliteľné prirodzené čísla a menovateľ n je väčší ako 1. Ľahko zistíme, že je to nemožné. Vsadením koreňov (6) do rovnice (1) dostaneme

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 \pm p.\frac{m}{n} + q = 0.$$

Po úprave $m^2 = -n\,(qn \pm pm)$. (7)

Pretože čísla m^2, n sú kladné, môžeme (7) prepísať v tvare

$$m^2 = n\,|qn \pm pm|. \tag{8}$$

Pretože prirodzené číslo n je väčšie ako 1, je deliteľné nejakým prvočíslom k. Vzťah (8) ukazuje, že prvočíslom k má byť deliteľné aj číslo m^2 a tak aj číslo m. Ale m a n sú nesúdeliteľné prirodzené čísla a nemôžu byť obe deliteľné tým istým prvočíslom k. Predpoklad (6) bol teda nesprávny.

Tak napr. rovnica (5) nemôže mať za koreň nijaké racionálne číslo. Keď položíme

$$r = \sqrt{73} - 7, \quad s = -(\sqrt{73} + 7), \tag{9}$$

ľahko vypočítame, že pre $p = 14$, $q = -24$ čísla (9) vyhovujú vzťahom (2). Teda rovnica (5) má dva iracionálne korene (9). Ako sa hľadajú iracionálne korene kvadratickej rovnice, s tým sa soznámime v nasledujúcom článku.

Cvičenie.

274. Keď v rovnici $x^2+px+q=0$ sú obe čísla p, q nepárne, rovnica nemá celočíselný koreň. Dokážte to!

275. Ak rovnica $ax^2+bx+c=0$ má dva navzájom rôzne celočíselné korene r a s, je $b=ka$, $c=ha$, kde k, h sú vhodné celé čísla. Dokážte to!

276. Ak má rovnica $x^2+px+q=0$ celočíselné korene, je p^2-4q druhou mocninou celého čísla. Dokážte to!

277. Určite korene rovníc: a) $x^2-5x+6=0$; b) $x^2+5x+6=0$; c) $x^2-5x-6=0$; d) $x^2-13x+30=0$; e) $x^2+13x-30=0$; f) $x^2-10x+9=0$; g) $x^2+4x-21=0$; h) $x^2-3x-40=0$; i) $x^2-x-30=0$; j) $x^2-20x+96=0$.

278. Rozložte na súčin lineárnych dvojčlenov: a) x^2+6x+8; b) x^2-5x+4; c) $x^2+4x-12$; d) $x^2-3x-18$; e) $x^2-4x-45$; f) $x^2-23x+120$.

279. Vypočítajte: a) $\frac{2x+5}{x^2+3x+2} - \frac{x+5}{x^2+x-2}$; b) $\frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x^2-4x+3} + \frac{1}{x^2-5x+6}$; c) $\frac{x^2+x-6}{x^2+x-12} \cdot \frac{x^2-x-6}{x^2-x-12}$.

280. Ak má rovnica $ax^2+bx+c=0$, kde a, b, c sú celé čísla a $a \neq 0$, racionálny koreň v základnom tvare $r=\frac{m}{n}$, je číslo c násobkom čísla m a číslo a násobkom čísla n. Dokážte to!

281. Ak má rovnica $ax^2+bx+c=0$, kde a, b, c sú celé čísla a $a \neq 0$, racionálny koreň r, má rovnica $y^2+by+ac=0$ celočíselný koreň ar. Dokážte to! (Návod: Danú rovnicu násobte číslom a.)

282. Podľa cvičenia 281 určite korene rovníc: a) $2x^2-3x-2=0$; b) $6x^2-7x+2=0$; c) $9x^2-9x-4=0$; d) $4x^2-x-5=0$.

283. Rozložte na súčin lineárnych činiteľov: a) $3x^2-5x+2$; b) $3x^2+5x-2$; c) $4x^2-4x-3$; d) $6x^2+13x+6$.

30. Riešenie kvadratickej rovnice doplnením na štvorec.

Keď n, d sú dané čísla, vtedy rovnica

$$(x+n)^2=d \tag{1}$$

je kvadratická rovnica. Ak považujeme $x+n$ za neznámu, je rovnica (1) rýdzokvadratická. O riešení rýdzokvadratickej rovnice sme už hovorili v článku 27. Ľahko usúdime: 1. Ak $d<0$, nemá rovnica (1) koreň; 2. ak $d=0$, má rovnica (1) dvojnásobný koreň $x=-n$; 3. ak $d>0$, má rovnica (1) dva korene:

$$r=-n+\sqrt{d},\quad s=-n-\sqrt{d}. \tag{2}$$

Najdôležitejší je prípad, keď čísla n, d sú racionálne. Ak $d>0$, môžu korene (2) byť racionálne alebo iracionálne. Záleží na tom, či $\sqrt{d}$ je číslo racionálne alebo iracionálne. O tom môžeme rozhodnúť podľa článku (22); v prípade iracionálnom uvádzame $\sqrt{d}$ na základný tvar [zase podľa článku (22)].

Rovnicu (1) môžeme uviesť na tvar

$$x^2+2nx+n^2-d=0, \tag{3}$$

t. j. na tvar normálny

$$x^2+px+q=0, \tag{4}$$

v ktorom je

$$p=2n,\quad q=n^2-d. \tag{5}$$

Obrátene, ak máme riešiť kvadratickú rovnicu v normálnom tvare (4), stačí určiť čísla n, d zo vzťahu (5). Rovnica (4) prejde tým na tvar (1), ktorý vieme riešiť, t. j. vieme rozhodnúť, či korene existujú alebo nie, a keď existujú, vieme ich určiť. Táto metóda vedie k cieľu pri každej kvadratickej rovnici, lebo vzťahom (5) vyhovujú čísla

$$n = \frac{p}{2}, d = n^2 - q.$$

Ako sa pritom prakticky postupuje, vyložíme si na príkladoch. Treba si len zapamätať, že

$$n = \frac{p}{2}. \tag{6}$$

Danú rovnicu neuvádzame na normálny tvar (4), ale radšej na tvar

$$x^2 + px = t, \tag{7}$$

kde teda $t = -q$. Zo (6) určíme n a napíšeme rovnicu (1), v ktorej n je známe a d určíme porovnaním s rovnicou (7).

P r í k l a d 1.

$$x^2 - 10x = 56. \tag{8}$$

Podľa (6) je $n = -5$, teda rovnicu (8) uvedieme na tvar

$$(x - 5)^2 = d,$$

kde sa d má určiť. Keďže $(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$, porovnanie s (8) dá, že $d = 56 + 25$, takže rovnica nadobudne tvar

$$(x - 5)^2 = 81. \tag{9}$$

Keďže $\sqrt{81} = 9$, plynie z (9), že $x - 5 = \pm 9$. Daná rovnica má teda korene $r = 14$, $s = -4$. Od tvaru (8) sme prešli k tvaru (9) tak, že sme na oboch stranách pričítali také číslo, aby sa ľavá strana stala druhou mocninou alebo štvorcom výrazu tvaru $(x + n)^2$. Preto sa táto metóda riešenia kvadratickej rovnice volá **doplnením na štvorec.** V jednoduchých prípadoch vieme uhádnuť, ktoré číslo treba pričítať na oboch stranách rovnice (7), aby ľavá strana bola doplnená na štvorec.

Príklad 2. $x^2 + 5x + 7 = 0$. Tu $n = \frac{2}{5}$ a doplnenie na štvorec dá $(x + \frac{5}{2})^2 = -\frac{3}{4}$, kde pravá strana je záporná. Teda daná rovnica nemá riešenie.

Príklad 3.

$$(4x - 9)^2 + (3x + 2)^2 = 97.$$

Postupnými úpravami nájdeme:

$$16x^2 - 72x + 81 + 9x^2 + 12x + 4 = 97,$$

$$25x^2 - 60x = 12,$$

$$x^2 - \frac{12}{5}x = \frac{12}{25},$$

$$\left(x^2 - \frac{6}{5}\right)^2 = \frac{48}{25},$$

teda

$$x = \frac{6}{5} \pm \sqrt{\frac{48}{25}}.$$

Odmocninu $\sqrt{\frac{48}{25}}$ uvedieme na základný tvar $\frac{4}{5}\sqrt{3}$ a výsledok je, že daná rovnica má iracionálne korene:

$$r = \frac{2}{5}(3 + 2\sqrt{3}), \quad s = \frac{2}{5}(3 - 2\sqrt{3}).$$

Podľa tabuliek je

$$r \doteq 2{,}5856, \qquad s \doteq 0{,}1856. \tag{10}$$

Presvedčte sa, s akou presnosťou vyhovujú približné hodnoty (10) koreňov r, s vzťahom

$$r + s = \frac{12}{5} = 2{,}4; \quad rs - \frac{12}{25} = -0{,}48.$$

Cvičenie.

284. Doplnením na štvorec riešte rovnicu: a) $x^2 - 6x + 5 = 0$; b) $x^2 - 6x + 9 = 0$; c) $x^2 - x = 42$; d) $x^2 - 5x = 84$; e) $x^2 - 2x - 1 = 0$; f) $x^2 + 5x - 5 = 0$; g) $2x^2 - x - 1 = 0$; h) $3x^2 - 32x + 20 = 0$; i) $9x^2 - 30x + 25 = 0$; j) $8x^2 + 38x + 35 = 0$.

285. Upravte a doplnením na štvorec riešte: *a)* $(3x-2)(2x-3)=1$; b) $(3x+5)^2+3(x+5)^2=37$; c) $(2x+1)(3x-2)=(4x-1)(x-2)$; d) $(x+2)x+2(x+2)(x-2)+9=0$; e) $\frac{x}{x+2}+\frac{1}{x-2}=\frac{11}{8}$; f) $\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}=1$; g) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{2x^2+x}=0$; h) $\frac{x+2}{x+3}=\frac{2x-1}{3x+1}$.

286. Ako sa má voliť *c*, aby rovnica $x^2-7x+c=0$ mala a) dva korene, b) dvojnásobný koreň, c) nemala riešenia?

287. Ako sa má voliť *b*, aby rovnica $2x^2+bx+24=0$ mala a) dva korene, b) dvojnásobný koreň, c) nemala riešenie?

288. Ako sa má voliť *a*, aby rovnica $ax^2+3x-4=0$ mala a) dva korene, b) dvojnásobný koreň, c) nemala riešenie?

289. Ako možno určiť znamienko čísla *q* tak, aby rovnica $x^2+px+q=0$ mala aspoň jeden koreň bez ohľadu na to, aké znamienko má číslo *p*?

290. Ak v kvadratickej rovnici $x^2+px+q=0$ výraz $p^2-4q>0$, má rovnica dva korene; ak $p^2-4q=0$ má rovnica dvojnásobný koreň; ak $p^2-4q<0$ nemá rovnica koreň. Dokážte to!

291. Ak v kvadratickej rovnici $ax^2+bx+c=0$ výraz $b^2-4ac>0$, má rovnica dva korene; ak $b^2-4ac=0$, má rovnica dvojnásobný koreň; ak $b^2-4ac<0$ nemá rovnica koreň. Dokážte to!

31. Riešenie kvadratickej rovnice vzorcom.

V jednoduchých prípadoch riešime kvadratickú rovnicu doplnením na štvorec. Aby sme nemuseli vždy opakovať celý postup riešenia úpravou na úplný štvorec, rozriešime rovnicu danú v znakoch čísel, to jest vypočítame vzorec riešenia. Podľa vzorca vypočítame korene, ak, pravda, existujú a zároveň zistíme, či riešenie existuje. Pri odvodení vzorca vyjdeme z tzv. **všeobecného tvaru** kvadratickej rovnice

$$ax^2+bx+c=0. \tag{1}$$

Normálny tvar

$$x^2+px+q=0$$

je ten zvláštny prípad všeobecného tvaru (1), v ktorom najvyšší koeficient *a* rovná sa jednej. Zo všeobecného tvaru (1) prejdeme do normálneho tvaru, keď položíme

$$p = \frac{b}{a};\ q = \frac{c}{a}.$$

Keď v normálnom tvare p, q nie sú celé racionálne čísla, môžeme všeobecný tvar (1) voliť tak, aby a, b, c boly celé čísla. V tom je výhoda všeobecného tvaru. Vo všeobecnom tvare kvadratickej rovnice a, b, c sú ľubovoľne dané čísla, lenže musí byť

$$a \neq 0, \tag{2}$$

lebo byináč (1) vôbec nebola kvadratická rovnica.

Aby sme dostali vzorec pre riešenie rovnice (1), prepíšeme ju na tvar

$$a\,(ax^2 + bx + c) = 0$$

alebo

$$a^2x^2 + abx = -ac.$$

K obom stranám pripočítame $\frac{b^2}{4}$, dostaneme

$$a^2\,x^2 + abx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - ac$$

alebo

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - ac \tag{3}$$

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{D}{4},$$

kde

$$D = b^2 - 4ac. \tag{4}$$

Od tvaru (3) sa už ľahko prejde ku vzorcu pre riešenie. Predovšetkým je zrejmé, že existencia riešenia závisí od znamienka čísla D, ktoré sa menuje **diskriminantom** kvadratickej rovnice (1).

Ak je diskriminant (4) záporný, nemá rovnica (1) koreň.

Ak je diskriminant (4) kladný, má rovnica (1) dva korene dané vzorcom:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \tag{5}$$

t. j. rovnica (1) má korene

$$r = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad s = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Ak sa diskriminant (4) rovná nule, má rovnica (1) dvojnásobný koreň $x = -\frac{b}{2a}$, ktorý je tiež daný vzorcom (5), lebo $\sqrt{0} = 0$.

Pri riešení kvadratickej rovnice treba si zapamätať vzorce (4), (5). Najprv vypočítame diskriminant D podľa vzorca (4). Ak je D menšie ako 0, nemá rovnica (1) koreň a sme hotoví. Ak $D = 0$, má rovnica (1) jeden dvojnásobný koreň $x = -\frac{b}{2a}$; ak sú čísla a, b, c celé, je dvojnásobný koreň racionálne číslo. Ak $D > 0$, rozložíme D na prvočiniteľov a podľa článku (24) uvedieme do tvaru

$$D = n^2 k,$$

kde n; k sú prirodzené čísla a číslo k je bez štvorcov. Ak $k = 1$, je $\sqrt{D} = n$ a oba korene sú racionálne čísla. Ak $k > 1$, je $\sqrt{D} = n \cdot \sqrt{k}$ a korene píšeme v tvare

$$r = -\frac{b}{2a} + \frac{n}{2a}\sqrt{k}, \quad s = -\frac{b}{2a} - \frac{n}{2a}\sqrt{k};$$

oba korene sú iracionálne čísla tvaru prebraného v predošlých článkoch.

Príklad 1.

$$2x^2 + 3x + 5 = 0.$$

Tu je $D = 9 - 40$, teda $D < 0$ a rovnica nemá riešenie.

Príklad 2.

$$(2x - 7)^2 - (3x + 2)^2 = 125.$$

Rovnicu upravíme postupne:

$$4x^2 - 28x + 49 - (9x^2 + 12x + 4) = 125,$$

$$-5x^2 - 40x - 80 = 0,$$

$$x^2 + 8x + 16 = 0. \tag{6}$$

Diskriminant rovnice (6) je $D = 8^2 - 4 \, . \, 16 = 0$; teda daná rovnica má dvojnásobný koreň $x = -4$.

Príklad 3.

$$12x^2 + 38x - 23 = 0.$$

Výpočet zjednodušíme, ak si uvedomíme, že podľa (4) **diskriminant D je deliteľný štyrmi, ak koeficient b je číslo párne.** V našom prípade je

$$D = 4 \, . \, (19^2 + 12 \, . \, 23) = 4 \, . \, 637 = 2^2 \, . \, 7^2 \, . \, 13,$$

a preto

$$\sqrt{D} = 14 \sqrt{13}.$$

Zo vzorca (5) dostaneme, že daná rovnica má iracionálne korene

$$r = \frac{-19 + 7\sqrt{13}}{12}, \qquad s = \frac{-19 - 7\sqrt{13}}{12}.$$

Podľa tabuliek je na tri desatinné miesta

$$r \doteq 0{,}520; \quad s \doteq -3{,}687. \tag{7}$$

Vypočítajte, s akou presnosťou vyhovujú približné hodnoty (7) známym vzťahom

$$r + s = -\frac{38}{12}, \qquad rs = -\frac{23}{12}.$$

Príklad 4.

$$tx^2 + 2(3t - 1)x + 9t - 7 = 0, \tag{8}$$

kde t znamená dané číslo a x je neznáma. Ak $t = 0$, je (8) lineárna rovnica $-2x - 7 = 0$ s jediným koreňom $x = -\frac{7}{2}$.

Ak $t \neq 0$, je (8) kvadratická rovnica s diskriminantom:

$$D = 4 \left[(3t - 1)^2 - t \, (9t - 7) \right]$$

alebo po úprave

$$D = 4 \, (t + 1).$$

Ak

$$t < 0, \; |t| > 0,$$

je diskriminant záporný a rovnica (8) nemá koreň. Ak $t = -1$, je $D = 0$, rovnica zneje $-x^2 - 8x - 16 = 0$ a má dvojnásobný koreň $x = -4$. Ak

$$t < 0,\ |t| < 1 \text{ alebo } t > 0,$$

je diskriminant kladný a rovnica (8) má dva korene

$$x = \frac{1 - 3t \pm \sqrt{t+1}}{t}.$$

Vráťme sa k všeobecnej kvadratickej rovnici (1), v ktorej $a \neq 0$ (ináč by to nebola kvadratická rovnica).

Ak má rovnica (1) dva korene (označme ich r, s), platia známe vzťahy

$$r + s = -\frac{b}{a}, \tag{9}$$

$$rs = \frac{c}{a}. \tag{10}$$

Tieto vzťahy platia i pre prípad, že rovnica (1) má dvojnásobný koreň $r = s$. Vzťahy (9), (10) nemajú smysel v prípade $D < 0$, lebo v tomto prípade rovnica (1) nemá nijaký koreň. Ak $a > 0$ a $c < 0$, alebo $a < 0$, $c > 0$, je $ac < 0$, takže podľa (4) je $D > 0$ a rovnica (1) má dva korene; z (10) plynie, že jeden koreň je kladný a druhý záporný. Ak $a > 0$, $c > 0$, alebo $a < 0$, $c < 0$, môže byť $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$. V prípade $D > 0$ má rovnica (1) dva korene a z (10) plynie, že tieto korene sú oba iné ako nula a majú rovnaké znamienko, ktoré najrýchlejšie určíme podľa (9). Ako je to v prípade $c = 0$?

Cvičenie.

292. Zo vzorca pre korene r, s rovnice $ax^2+bx+c=0$ dokážte, že

$$r + s = -\frac{b}{a}, \quad rs = \frac{c}{a}.$$

293. Podľa znamienka diskriminantu rozhodnite, či nasledujúce kvadratické rovnice majú korene, a ak ich majú, určite ich:

a) $2x^2-9x+7=0$; b) $6x^2+7x+1=0$; c) $x^2+x-1=0$; d) $x^2+3x+3=0$; e) $3x^2-5x+3=0$; f) $3x^2+5x+1=0$; g) $10x^2+27x-63=0$; h) $x^2-x-272=0$.

294. Ak v rovnici $ax^2+bx+c=0$ sú čísla a, b, c celé a ak diskriminant $D=b^2-4ac$ je deliteľný štyrmi, je číslo b párne. Dokážte to!

295. Ak rovnica $ax^2+bx+c=0$ má celočíselné koeficienty, pričom b je nepárne, nemôže mať dvojnásobný koreň. Dokážte to!

296. Užívajúc to, že diskriminant je deliteľný štyrmi, riešte rovnice: a) $7x^2-22x+3=0$; b) $45x^2-106x+45=0$; c) $2x^2-14x+25=0$; d) $4x^2-4x-1=0$; e) $3x^2+2x-2=0$; f) $63x^2-4x-35=0$; g) $64x^2-144x+81=0$; h) $x^2+4x+1=0$; i) $x^2-6x+10=0$; j) $x^2+36x+325=0$.

297. Ak v rovnici $ax^2+bx+c=0$ súčinitelia b, c sú násobky prvočísla p, pričom c nie je násobkom čísla p^2 a a nie je násobkom čísla p, a keď má rovnica dva korene, tie korene sú iracionálne. Dokážte to!

298. Ak v rovnici $ax^2+bx+c=0$ súčinitelia a, b sú násobky prvočísla p, pričom a nie je násobkom čísla p^2 a c nie je násobkom čísla p, a keď má rovnica dva korene, sú iracionálne. Dokážte to!

299. Ak rovnica $ax^2+bx+c=0$ nemá koreň, majú čísla a a c to isté znamienko. Dokážte to!

300. Riešte rovnice: a) $12x=1+x^{-1}$; b) $5x^{-2}-9x^{-1}+4x^0=0$; c) $\frac{x+3}{2}-\frac{2}{x+5}=0$; d) $\frac{x}{x+2}+\frac{x+2}{x}=3$; e) $\frac{2x-1}{2}+\frac{2}{2x-1}=2$; f) $\frac{5}{3-x}+\frac{8}{x+4}=\frac{10}{x+2}$; g) $\frac{x+3}{x^2-x}+\frac{x+1}{x^2-x}+\frac{x-3}{x^2-1}=0$; h) $\frac{x-3}{x^2-1}+\frac{x-5}{x^2-3x+2}+\frac{x+7}{x^2-x-2}=0$.

301. Ako treba voliť číslo u, aby dané rovnice maly spoločný koreň, a ktorý je ten koreň v prípadoch: a) $3x^2-14x+u-2=0$; b) $3x^2+4x-3u-12=0$; c) $2a^2-11x+u+2=0$; d) $2x^2-5x-2u+15=0$.

302. Riešte nasledujúce rovnice a vykonajte rozbor riešenia (neznáma je x): a) $mx^2-(m+1)x+1=0$; b) $mx^2+2(m+1)x+m=0$; c) $(m+1)x^2+2mx+(m-1)=0$; d) $(m-1)x^2-mx-(m+1)=0$; e) $(m-1)x^2-mx-(m-1)=0$.

303. Riešte rovnice a vykonajte rozbor riešenia (neznáma je x): a) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$; b) $ax^2+(a+b)x+b=0$; c) $abx^2+(a^2-b^2)x-ab=0$; d) $x(abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$; e) $a(a+b)x^2+4abx+(a+b)b=0$.

304. Ak aspoň dve z čísel a, b, c sú rôzne, má rovnica $(x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-b)(x-c)=0$ dve riešenia. Dokážte to! [Diskriminant možno upraviť na tvar $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$.]

305. Pokiaľ rovnica $\frac{a^2}{x-p}+\frac{b^2}{x-q}=1$ vedie k rovnici kvadratickej, má vždy dva rôzne korene. Dokážte to! [Diskriminant možno upraviť na tvar $(a^2-b^2+p-q)^2+(2ab)^2$.]

32. Slovné úlohy.

Riešenie slovných úloh pomocou rovníc ste dôkladne preberali už na strednej škole. Keďže teraz už vieme riešiť kvadratickú rovnicu, pomocou týchto rovníc môžeme ľahko riešiť rozmanité slovné úlohy, ktoré by bolo omnoho ťažšie riešiť úsudkom než rovnicou.

Príklad 1.

Pri študentskej akadémii predalo sa celkom 256 lístkov, za lístky I. miesta sa vybralo 2800 Kčs, za lístky II. miesta 2160 Kčs. Koľko bolo ktorých a po čom boly, ak lístky I. miesta boly o 10 Kčs drahšie než II. miesta?

Môžeme zvoliť za neznámu x cenu druhého miesta v Kčs. Cena I. miesta je $(x+10)$ Kčs. Počet predaných I. miest bude $\frac{2800}{x+10}$, počet predaných II. miest $\frac{2160}{x}$. Keďže bolo predaných celkom 256 lístkov, máme rovnicu:

$$\frac{2800}{x+10}+\frac{2160}{x}=256.$$

Možno krátiť 16 a máme jednoduchšiu rovnicu

$$\frac{175}{x+10}+\frac{135}{x}=16.$$

Odstránime zlomky tak, že obe strany znásobíme výrazom $x(x+10)=x^2+10x$ a dostaneme

$$175x+135(x+10)=16(x^2+10x),$$

po úprave

$$16x^2-150x-1350=0,$$

po skrátení dvoma

$$8x^2-75x-675=0.$$

Na základe poznámok, urobených ku koncu predošlého článku, pozorujeme, že naša rovnica má jeden koreň kladný a jeden záporný. Pre slovnú rovnicu má význam len kladný koreň. Vypočítajme diskriminant.

$$D = 75^2 + 4 . 8 . 675 = 75 . (75 + 4 . 8 . 9) =$$
$$= 75 . 3 (25 + 4 . 8 . 3) = 75 . 3 . 121 = 3^2 . 5^2 . 11^2;$$

teda $\sqrt{D} = 3 . 5 . 11 = 165$ a podľa vzorca kladný koreň je

$$x = \frac{75 + 165}{16} = \frac{240}{16} = 15.$$

Ďalej máme

$$x + 10 = 25, \quad \frac{2800}{x + 10} = 112, \quad \frac{2160}{x} = 144.$$

Teda I. miesto stálo 25.— Kčs, druhé 15.— Kčs, predané bolo 112 prvých a 144 druhých miest. Ľahko sa presvedčíme, že tieto čísla vyhovujú danej slovnej úlohe.

Mohli sme neznámu voliť aj ináč. Ak označíme napr. y počet predaných I. miest, bude $256 - y$ počet predaných II. miest, cena I. miesta bude $\frac{2800}{y}$ Kčs, cena II. miesta $\frac{2160}{259-y}$ Kčs a dostaneme rovnicu:

$$\frac{2800}{y} - \frac{2160}{256-y} = 10.$$ Krátime desiatimi

$$\frac{280}{y} - \frac{216}{256-y} = 1.$$

Násobíme výrazom $\quad y\,(256 - y)$:

$$280\,(256 - y) - 216y = 256y - y^2$$

a po úprave

$$y^2 - 752y + 280 . 256 = 0. \tag{1}$$

Výpočet diskriminantu sa zjednoduší, keď rozložíme 752 na prvočiniteľov. Bude $752 = 2^4 . 47 = 16 . 47$, teda

$$D = (16 . 47)^2 - 4 . 280 . 256 = 16^2\,(47^2 - 4 . 280) =$$
$$= 16^2 . (2\,209 - 1\,120) = 16^2 . 1089.$$

Ak je úloha riešiteľná, musí byť $\sqrt{1089} = n$ prirodzené číslo, ktoré je zrejme dvojciferné a má prvú číslicu 3 (pretože $30^2 < 1189$, $1189 < 40^2$) a druhú číslicu buď 3 alebo 7; teda buď $n = 33$ alebo $n = 37$. Keďže $33^2 = 1089$, teda $n = 33$, $\sqrt{D} = 16 \,.\, 33$. Podľa vzorca má rovnica (1) riešenie:

$$\frac{752 \pm 16.33}{2} = 376 \pm 8.33.$$

Podľa významu neznáma y je menšia ako 256; preto musíme voliť záporné znamienko a máme

$y = 376 - 8 \,.\, 33 = 112$ (počet predaných I. miest), ďalej

$256 - y = 144$ (počet predaných II. miest),

$\frac{2800}{112} = \frac{100}{4} = 25 = 25$ (cena I. miesta je 25 Kčs)

$\frac{2160}{144} = \frac{180}{12} = 15$ (cena II. miesta je 15 Kčs) v súhlase s predchádzajúcim riešením.

Príklad 2. Počet uhlopriečok mnohouholníka je o n väčší ako počet strán. Koľko má strán?

Nech je x počet strán, teda aj počet vrcholov. Uhlopriečku dostaneme, keď spojíme úsečkou ktorýkoľvek vrchol A s ktorýmkoľvek vrcholom B, ktorý nie je susedný s A. Počet všetkých vrcholov A je x. Pri zvolenom vrchole A máme $x - 3$ možných vrcholov B; to by dalo $x(x - 3)$ uhlopriečok, ale pritom je každá počítaná dvakrát. Teda počet strán je x, počet uhlopriečok $\frac{x(x-3)}{2}$ a máme rovnicu

$$\frac{x(x-3)}{2} = x + n$$

alebo $$x^2 - 5x - 2n = 0. \qquad (2)$$

Pri každej voľbe prirodzeného čísla n má rovnica (2) jeden kladný a jeden záporný koreň; do úvahy prichádza len kladný koreň x. Keď n zvolíme odhadom, bude x iracionálne a úloha bude neriešiteľná. Ak má byť úloha riešiteľná, musí $\sqrt{D}$ byť racionálne číslo. $D = b^2 - 4ac = 25 + 8n$, teda n musí byť volené tak, aby

$$D = 25 + 8n = m^2, \tag{3}$$

kde m je prirodzené číslo, ktoré zrejme musí byť číslom nepárnym. Ak má n byť napr. trojciferné, bude

$$n > 100 \text{ alebo } n = 100, \quad n < 1000, \text{ vtedy podľa (3)}$$
$$m^2 > 825 \text{ alebo } m^2 = 825, \ m^2 < 8\,025.$$

Z tabuľky druhých mocnín okamžite nájdeme, že možné hodnoty m sú všetky nepárne čísla počínajúc číslom 29 a končiac číslom 89. Napr. pre $m = 65$ bude podľa (3)

$$25 + 8n = 4\,225,$$

teda $n = 525$ a rovnica (2) zneje

$$x^2 - 5x - 1\,050 = 0;$$

a diskriminant $D = 4\,225 = 65^2$ a kladný koreň

$$x = \frac{5 + 65}{2} = 35.$$

Počet uhlopriečok 35-uholníka je

$$\frac{x\,(x-3)}{2} = \frac{35.32}{2} = 35.16 = 560,$$

čo je skutočne o $n = 525$ väčší ako počet strán $x = 35$.

Cvičenie.

306. Súčet dvoch čísel je 20, ich súčin je 96. Ktoré sú to čísla?

307. Súčin dvoch za sebou idúcich nepárnych čísel je 399. Ktoré sú to čísla?

308. Súčet štvorcov troch za sebou idúcich celých čísel je 1202. Ktoré sú to čísla?

309. Súčet číslic dvojciferného čísla je 7. Ak zmeníme poradie oboch číslic, dostaneme nové číslo, ktoré znásobené pôvodným dá 1462. Ktoré je to číslo?

310. Úloha Bhaskarova (z XII. storočia): Stádo opíc sa bavilo. Štvorec

jednej osminy ich počtu šantil v lese. Zbývajúcich dvanásť kričalo na pahorku. Povedz mi, koľko bolo všetkých opíc?

311. Úloha Bézoutova (XVIII. storočie): Niekto kúpil koňa a po nejakom čase ho predal za 24 pištolí. Pritom stratil toľko percent, koľko pištolí ho stál kôň. Za čo ho kúpil?

312. Úloha Maclaurinova (XVIII. storočie): Niekoľko priateľov obedovalo spoločne a mali zaplatiť celkom 175 šilingov. Vysvitlo, že dvaja nemajú pri sebe peniaze, a tak každý z ostatných musel zaplatiť o 10 šilingov viac, ako naň malo pripadnúť. Koľko ľudí bolo pri obede?

313. Jeden z dvoch lyžiarov prešiel vzdialenosť 36 km za čas o pol hodiny kratší ako druhý. Rýchlosť prvého bola o 1 km/hod. väčšia ako rýchlosť druhého. Má sa určiť rýchlosť každého z týchto lyžiarov.

314. Roľnícke družstvo obrábalo 300 ha pozemkov. Keby mali o tri traktory viac, skončili by prácu o 6 dní skôr. Koľko mali traktorov, keď každý traktor obrobí 15 ha denne?

315. Každý z dvoch robotníkov mal zhotoviť 400 rovnakých súčiastok. Jeden z nich zhotoví za hodinu o 5 súčiastok viac ako druhý. Koľko hodín pracoval každý, keď na celú prácu bolo treba 36 pracovných hodín?

316. Plavec preplával vzdialenosť 480 m po prúde rieky i proti prúdu za $12^1/_2$ min. Aká je rýchlosť prúdu, keď vlastná rýchlosť plavca je 80 m/min.?

317. Dvaja turisti vyšli súčasne z miest *A* a *B* proti sebe a stretli sa za 3 hodiny. Prvý prišiel do *B* o $2^1/_2$ hod. neskoršie než druhý prišiel do *A*. Za aký čas prešiel každý z nich celú vzdialenosť?

318. Z dvoch brigád jedna vykoná určitú prácu za čas o 10 hod. kratší ako druhá. Keby pracovaly spoločne, vykonaly by tú prácu za 12 hodín. Za aký čas vykoná prácu každá brigáda sama?

319. Dva mnohouholníky majú dohromady 18 strán a 55 uhlopriečok. Ktoré sú to mnohouholníky?

320. V jednej debnici bolo 152 pomarančov, v druhej 70 a v tretej 23. Koľko pomarančov treba preložiť z prvej debnice do tretej, aby v prvej bolo toľkokrát viac ako v druhej, koľkokrát viac je v druhej ako v tretej? (Zo sbierky úloh K. Krajeviča z r. 1882.)

321. Z dediny poslali do mesta, vzdialeného $10^1/_2$ versty (versta = 1 km 66 m) posla na nákup. Po 30 min. poslali za ním druhého, aby dohonil prvého a oddal mu akýsi odkaz. Druhý posol, ktorý ušiel za každú hodinu 4 versty, nielen že dohonil prvého, ale vrátil sa domov práve vtedy, keď prvý posol došiel do mesta. Koľko verst ušiel za hodinu prvý posol? (Z tej istej sbierky.)

322. Dve dedinčianky priniesly na trh 140 jabĺk a predaly ich za rôzne ceny, ale utŕžily rovnako. „Keby som mala tvoje jablká“, hovorila jedna

z nich, „a predávala by som ich za svoju cenu, dostala by som za ne 90 kopejok.“ „A keby som ja,“ odvetila druhá, „mala tvoje jablká a predávala ich za moju cenu, utŕžila by som 1 rubeľ 60 kopejok.“ Koľko jablk mala každá. (Podľa L. Eulera.)

323. Obvod obdĺžnika je o dĺžkových jednotiek dlhý a má plošný obsah P zodpovedajúcich jednotiek štvorcových. Určite jeho strany. Kedy je možno úlohu riešiť?

324. Strany obdĺžnika sú a m a b m. O koľko sa má predĺžiť každá strana, aby sa jeho obsah zväčšil o m m²? Ako by to bolo, keby sa jeho obsah mal o m m² zmenšiť? Má úloha vždy riešenie?

325. Obvod obdĺžnika je o m, jeho uhlopriečka u m. Aké sú rozmery obdĺžnika? Má úloha vždy riešenie?

326. Rozdiel tretích mocnín dvoch prirodzených za sebou idúcich čísel je n. Určite tie čísla! Určite, aký tvar musí mať číslo n, aby úloha mala riešenie.

327. Pravidelný mnohouholník má o n uhlopriečok viac, ako je dvojnásobný počet jeho strán. Koľko má strán? Aká je podmienka pre n, aby úloha bola riešiteľná?

328. Do priepasti pustili kameň a po uplynutí t sekúnd bolo počuť náraz na dno. Aká hlboká je priepasť? (Pád kameňa je pohyb rovnomerne zrýchlený so zrýchlením $g \doteq 9.81$ m/sec²; pohyb zvuku je rovnomerný s rýchlosťou $c \doteq 333$ m/sec.) Možno úlohu vždy riešiť?

329. Teleso bolo vrhnuté svisle nahor rýchlosťou c m/sec. Za aký čas bude vo výške s m? (Pozri úlohu 252 pri ods. 27.) V akom prípade je úloha riešiteľná?

330. Ak sa zväčší nejaké číslo o a, jeho prevrátená hodnota sa zmenší o to isté a. Ktoré je to číslo? Má úloha vždy riešenie? Ako musíme voliť číslo a, aby úloha mala riešenie racionálne?

OBSAH

ARITMETIKA PRE I. TR. GYMN.

Vydalo Štátne nakladateľstvo v Bratislave, šéfredaktor, Dr. Ján Slosiarik, výkonný redaktor Elena Horná, technický redaktor Ján Homolka, číslo publikácie 186, plán. podskupina 20, náklad 10000 výtlačkov, plánov. hárkov 7, papier skupiny 222, formát 61x86, 70 g, vytlačila Neografia, n. p., Martin, rukopis zadaný v marci 1951, vytlačené v januári 1952, tlačené zo sadzby, typ písma garmond Ideal News, sadzba všeobecnej dane 1%, povolenie PIO číslo 8735/51-III/1.

Cena broš. Kčs 17.—.

Čkm. 769 Po Kčs 17.—