Eduard Čech; a kol.

Matematika pro I. třídu gymnasií a vyšších odborných škol

Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1951, 230 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501379

MATEMATIKA

PRO I. TŘÍDU GYMNASIÍ

STÁTNÍ NAKLADATELSTVÍ UČEBNIC, PRAHA

MATEMATIKA

PRO I. TŘÍDU GYMNASIÍ A VYŠŠÍCH ODBORNÝCH ŠKOL

Dr EDUARD ČECH

se spolupracovníky

1 9 5 1

STÁTNÍ NAKLADATELSTVÍ UČEBNIC V PRAZE

ÚVODNÍ POZNÁMKY.

Ve vyučování matematice v první třídě gymnasia mají žáci budovat svoje poznatky na znalostech ze střední školy. Prvním úkolem aritmetiky je ujasnit si základní poznatky o číselných oborech. Je nutné, aby žák pochopil důležitost a vznik přirozených čísel, aby si ujasnil, proč byla zavedena čísla záporná a lomená. Dále je důležité, aby poznal úlohu čísla jedna a nuly, zvláště při sčítání a násobení.

V učebnici jsou exaktně užitím souborů vyvozeny základní zákony početních výkonů. Žák je veden k tomu, aby byl kritický k výsledku svých úvah.

Dosavadní škola srovnávala ponejvíce veličiny sobě rovné. Zavedení nerovností sleduje sblížení theorie s praxí, neboť v životě musíme častěji srovnávat veličiny nerovné než sobě rovné.

Poznání pojmu odmocniny umožňuje žákům, aby v mezích své vyspělosti ocenili její praktickou aproximaci a to zejména se zřetelem k jejímu praktickému významu.

Žákovy poznatky o rovnicích ze střední školy jsou zrevidovány a jsou podkladem pro pochopení významu a vlastností kvadratických rovnic.

V geometrii budují žáci její soustavu z poznatků ze střední školy. Látka geometrie je zde v podstatných rysech zopakována a užitím pojmu shodnosti postavena na jednotící základ. Zvláštní pozornost věnujeme pojmu mnohoúhelníka vzhledem k budoucí látce, k zpřesnění pojmu rovnoběžnosti; jako příklad shodnosti studujeme osovou souměrnost, posunutí a otočení. Užitím jich odvozujeme mnohé vlastnosti útvaru.

Z podobnosti vyvodíme některé vlastnosti stran trojúhelníka pravoúhlého a přejdeme k studiu jejich poměru (goniometrické funkce ostrého úhlu). Geometrie v prvé třídě je ukončena stejnolehlostí jako zvláštním případem podobnosti a studiem vlastností kružnice. V goniometrii přihlížíme k možnostem přesnosti praktického měření.

Zcela nové látky není mnoho. Úkolem je scelit dosavadní vědomosti, prohloubit je a dát žákům zdravý základ k dalšímu kritickému studiu matematiky.

V aritmetice i v geometrii hledáme soustavně jejich styčné body, jak je to úkolem každého vědeckého studia. Ve vyučování hledáme příležitosti k logickému uvažování a usuzování. Nejde nám o získání zásoby vědomostí, ale i o soustavnou výchovu k samostatnému myšlení. Proto věnujeme důkazovým úlohám mnohem větší pozornost než dříve. I v učebnici je jim věnována značná pozornost. Každý důkaz methodicky připravíme, rozdělíme na jednotlivé kroky a provádíme za účasti všech žáků. V geometrii jsou konstruktivní úlohy v mnohem menším měřítku než dříve. Ušetřený čas věnujeme probírání základů geometrie, důkazovým úlohám. Mají-li cvičení splnit svůj úkol, musí být připravována ve škole. Je nutné, aby učitel zaměřil svůj výklad se zřetelem k vybraným úlohám.

Tak připravíme žáky k pochopení zákonitosti vývoje a k porozumění socialistické výstavbě státu.

Žák má poznat úkol matematiky, který nespočívá jen v theorii a v zásobě vědomostí, ale ve výchově k soudnosti, kritičnosti a tak se stává aparátem ke studiu zjevů materiálního světa. O matematiku se opírá mnoho disciplin a matematika tak přispívá ke studiu mnoha oborů, které jsou důležité k budování našeho lidově-demokratického státu.

ARITMETIKA

ROZVRH UČIVA.

Září:	Sčítání přirozených čísel Násobení přirozených čísel Distributivní zákon Nula a jednička
Říjen:	Srovnávání velikosti přirozených čísel Vznik čísla při měření Zlomky a jejich různé tvary Dělitelnost přirozených čísel
Listopad:	Sčítání a násobení zlomků Zavedení záporných čísel Sčítání relativních čísel Násobení relativních čísel
Prosinec:	Nerovnosti Mocniny s celými mocniteli Číselné soustavy
Leden:	Počítání v desítkové soustavě Zaokrouhlování čísel Vzorce pro $(a + b)^2$; $x^2 - y^2$ Tabulka druhých mocnin
Únor:	Pojem druhé odmocniny Vyhledávání druhých odmocnin z tabulek druhých mocnin Přesnější určování druhých odmocnin Irracionálnost druhých odmocnin
Březen:	Částečné odmocňování Čísla racionálně závislá na druhé odmocnině Opakování o rovnicích
Duben:	Pojem kvadratické rovnice Kvadratická rovnice se známými kořeny Celé kořeny kvadratické rovnice
Květen:	Řešení kvadratické rovnice doplněním na čtverec Řešení kvadratické rovnice vzorcem Slovní úlohy
Červen:	Opakování

I. PŘIROZENÁ ČÍSLA.

1. Sčítání přirozených čísel.

Přirozenými čísly budeme nazývat čísla

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots .$$

O tom, jak přirozená čísla zapisujeme pomocí deseti znaků (číslic), promluvíme si později v kapitole IV. Pomocí přirozených čísel vyjadřujeme **početnost** libovolného **souboru** jakýchkoli předmětů. Dva soubory A, A' jsou stejně početné, jestliže je možné každému předmětu prvního souboru přiřadit určitý předmět druhého souboru tak, že obráceně kterýkoli předmět druhého souboru je přiřazen jedinému předmětu prvního souboru. Jestliže na př. každý žák má svou učebnici aritmetiky, je soubor všech žáků stejně početný jako soubor jejich učebnic aritmetiky. Jestliže však některý žák zapomněl si vzít s sebou učebnici, potom počet žáků přítomných ve třídě není stejně početný se souborem učebnic, které mohou položit na lavice, nýbrž prvý soubor je početnější než druhý. Takové přímé srovnávání početnosti dvou souborů provádíme v praxi jenom zřídka; obyčejně vyjadřujeme početnost každého souboru přirozeným číslem, které udává počet předmětů toho souboru; dva soubory jsou stejně početné, jestliže je počet předmětů vyjádřen týmž číslem u obou souborů; naproti tomu je na př. prvý soubor početnější než druhý, jestliže počet jeho předmětů je vyjádřen větším číslem, než je to, které vyjadřuje počet předmětů druhého souboru. Jestliže chceme na př. porovnat početnost dvou různých tříd, nebudeme to obyčejně provádět přímým porovnáním obou souborů, nýbrž spočítáme, že na př. je v 1. třídě 43 žáků a ve 2. třídě 39; protože číslo 43 je větší než číslo 39, je 1. třída početnější než druhá.

Ze dvou nebo více čísel odvozujeme nová čísla pomocí **početních výkonů.** Již na národní škole jste se učili provádět čtyři „základní početní výkony“: sčítání, odčítání, násobení a dělení. To bylo účelné pro národní školu; nyní však bude účelnější nazírat jenom na **sčítání** a **násobení** jako na základní výkony; o odčítání a dělení budeme mluvit až později ve čl. 5.

Máme-li vysvětlit, co znamená **součet**

$$a + b$$

dvou přirozených čísel a, b, zvolíme si nejprve libovolný soubor předmětů A tak, aby počet jeho předmětů byl roven číslu a; potom zvolíme jiný soubor předmětů B tak, aby počet jeho předmětů byl roven číslu b; přitom však volíme oba soubory A, B **disjunktní**; to znamená prostě, že žádný předmět nesmí náležet do obou souborů A, B zároveň. Nazveme nyní spojením obou souborů A, B soubor všech těch předmětů, které náležejí buďto do souboru A nebo do souboru B; počet předmětů ve spojení obou souborů A, B je právě součet $a + b$ obou čísel a, b, která se jmenují **sčítanci.**

Jelikož spojení dvou disjunktních souborů A, B je totožné se spojením souborů B, A, vidíme, že platí **komutativní zákon sčítání** přirozených čísel:

$$a + b = b + a.$$

Jsou-li a, b, c tři přirozená čísla, je vám známo, že platí **asociativní zákon sčítání** přirozených čísel

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Bude užitečné vysvětlit si smysl tohoto zákona. Za tím účelem si zvolme tři disjunktní soubory předmětů A, B, C tak, že:

a je počet předmětů souboru A,
b je počet předmětů souboru B,
c je počet předmětů souboru C.

Žádný předmět nenáleží do víc než jednoho ze tří souborů A, B, C. Označme M spojení obou disjunktních souborů A, B; potom je $a + b$ počet předmětů souboru M. Mimo to soubor M a soubor C jsou disjunktní a počet předmětů jejich spojení je

$$(a + b) + c. \tag{1}$$

Zřejmě se spojení souborů M a C skládá z těch předmětů, které náležejí do A nebo do B nebo do C. Označíme-li dále N spojení obou disjunktních souborů B a C, je $b + c$ počet předmětů souboru N; mimo to soubor A a soubor N jsou disjunktní a počet předmětů jejich spojení je

$$a + (b + c). \tag{2}$$

Avšak spojení souborů A a N se zase skládá z těch předmětů, které náležejí do A nebo do B nebo do C. Proto číslo (1) je totéž číslo jako číslo (2) a to je právě náš asociativní zákon.

Předcházející úvahy můžeme zobecnit. Zvolme si libovolný počet disjunktních souborů $A, B, C, \ldots, K$ (slovo disjunktní znamená, jak víme, že žádný předmět nenáleží do víc než jednoho z našich souborů); počet předmětů každého souboru označme stejným písmenem malé abecedy, takže na př. A se skládá z a předmětů, K se skládá z k předmětů.

Součet

$$a + b + c + \ldots + k$$

se sčítanci $a, b, c, \ldots, k$ znamená počet předmětů toho souboru, který je spojením všech souborů $A, B, C, \ldots, K$, t. j. počet předmětů souboru, který se skládá ze všech předmětů, jež náležejí do některého z daných souborů $A, B, C, \ldots, K$.

Úvahami zcela podobnými dřívějším odůvodníte pro přirozená čísla dva obecné zákony o součtech s libovolným počtem sčítanců. Je to předně **obecný komutativní zákon sčítání** přirozených čísel: Součet libovolného počtu sčítanců je nezávislý na pořádku sčítanců, na př. součty

$$a + b + c + d,\ a + c + d + b,\ d + a + b + c \text{ atd.}$$

jsou si všecky rovny. Za druhé je to **obecný asociativní zákon sčítání** přirozených čísel: Součet libovolného počtu sčítanců můžeme počítati tak, že rozdělíme sčítance na skupiny, sečteme sčítance v každé skupině zvlášť a potom sečteme částečné součty z jednotlivých skupin. Při tom může některá skupina obsahovat i jediného sčítance. Na př. jest

$$a + b + c + d + e + f = (a + b + c) + d + (e + f).$$

Zde jsme rozdělili sčítance na tři skupiny; v první skupině jsou tři sčítanci, v poslední jsou dva a druhá skupina obsahuje jediného sčítance d.

Cvičení.

1. Pomocí úvah o početnosti souborů vysvětlete, co znamená:

a) $a = a$;

b) z rovnosti $a = b$ plyne $b = a$;

c) z rovností $a = b$, $b = c$ plyne $a = c$.

2. Pomocí úvah o početnosti souborů dokažte, že z rovnosti $a = b$ plyne $a + c = b + c$.

3. Je-li $a = b$, $c = d$, pak také $a + c = b + d$. Dokažte.

4. Jsou-li dána dvě přirozená čísla a, b, dokažte, že nastane právě jeden z případů: a) $a = b$, b) $a + x = b$, c) $a = b + y$; při tom x a y jsou vhodná přirozená čísla.

5. Užívajíce zákona asociativního dokažte: O kolik se zvětší jeden sčítanec, o tolik se zvětší součet.

6. Užívajíce asociativního a komutativního zákona sčítání dokažte, že $(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d)$.

7. Máme-li sečíst řadu rs čísel

$$\left.\begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r, \\ b_1, b_2, b_3, \ldots, b_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ k_1, k_2, k_3, \ldots, k_r, \end{array}\right\} s \text{ řádků}$$

provádíme to tak, že sečteme nejprve součty $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_r = t_1$, $b_1 + b_2 + b_3 \ldots + b_r = t_2, \ldots, k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_r = t_s$ a potom sečteme $t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_s$. Kontrolu provádíme tak, že sečteme $a_1 + b_1 + \ldots + k_1 = u_1$, $a_2 + b_2 + \ldots + k_2 = u_2, \ldots, a_r + b_r + \ldots + k_r = u_r$ a tyto součty sečteme: $u_1 + u_2 + \ldots + u_r$. Odůvodněte.

8. Pomocí obecného komutativního zákona sčítání odůvodněte, v čem spočívá podstata zkoušky při sčítání.

2. Násobení přirozených čísel.

Násobení dvou přirozených čísel jste se již na národní škole učili popsat pomocí sčítání několika sebě rovných přirozených čísel. Abychom vysvětlili, co znamená **součin**

$$a \times b \text{ neboli } a \cdot b \text{ neboli } ab,$$

jehož **násobenec** je přirozené číslo a a jehož **násobitel** je přirozené číslo b, zvolíme si celkem b disjunktních souborů

$$A_1, A_2, \ldots\ldots, A_b, \tag{1}$$

z nichž každý se skládá z a předmětů; součin ab je počet předmětů toho souboru, který je spojením všech b souborů (1). Ale u jiných čísel, o kterých budeme mluvit později a která znáte už ze střední školy, na př. u zlomků, není možné násobení přivést na sčítání. Proto je účelné si už u přirozených čísel vysvětlit násobení nezávisle na sčítání, což vede také ke snazšímu odvození vlastností násobení. Vysvětlíme si proto násobení přirozených čísel jako určení počtu **dvojic.**

Ze dvou souborů A, B, z nichž se každý skládá z libovolných předmětů, utvoříme si nový soubor, který označíme (A, B) a který je souborem všech takových dvojic (x, y), které se skládají z předmětu x náležejícího do souboru A a z předmětu y náležejícího do souboru B. Jestliže na př. soubor A se skládá z knih a soubor B se skládá z obrázků, potom soubor (A, B) se skládá z dvojic knihy a obrázku, t. j. každý předmět souboru (A, B) si můžeme představit jako knihu vzatou ze souboru A, do které je vložen obrázek ze souboru B. Jestliže

a je počet prvků souboru A,
b je počet prvků souboru B,

potom si můžeme soubor dvojic (A, B) rozložit na soubory

$$A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots, A_b \tag{1}$$

tak, že soubor A_1 se skládá z těch dvojic (x, y), ve kterých y je první předmět souboru B, soubor A_2 se skládá z těch dvojic (x, y), ve kterých je y druhý předmět souboru B atd. Soubory (1) jsou navzájem disjunktní, každý z nich se skládá celkem z a dvojic, a spojení všech souborů (1) dává soubor (A, B). Proto součin ab je počet všech prvků souboru dvojic (A, B). Protože soubor (A, B) a soubor (B, A) mají zřejmě týž počet dvojic, dospíváme ke **komutativnímu zákonu** násobení dvou přirozených čísel:

$$ab = ba.$$

Protože násobení vyhovuje komutativnímu zákonu, je málo výhodné dávat každému z obou čísel a, b jiné jméno (násobenec a násobitel) a proto dáváme oběma číslům a, b obyčejně společný název **činitelé.**

Jsou-li nyní A, B, C tři libovolné soubory, při čemž

a je počet předmětů souboru A,
b je počet předmětů souboru B,
c je počet předmětů souboru C,

označíme (A, B, C) soubor všech trojic (x, y, z), ve kterých

x je libovolný předmět souboru A,
y je libovolný předmět souboru B,
z je libovolný předmět souboru C.

Označme M soubor dvojic (A, B); dále označme N soubor dvojic (B, C). Potom každou trojici (x, y, z) souboru trojic (A, B, C) můžeme považovat za dvojici složenou jednak ze dvojice (x, y) vzaté z M, jednak z předmětu z souboru C; proto počet všech trojic z (A, B, C) je roven součinu

$$(ab)c,$$

jehož první činitel ab je roven počtu předmětů souboru M a druhý činitel je roven počtu předmětů souboru C. Za druhé však můžeme každou trojici (x, y, z) souboru trojic (A, B, C) považovat za dvojici složenou jednak z předmětu x souboru A, jednak z dvojice (y, z) vzaté z N; proto počet všech trojic (x, y, z) je také roven součinu

$$a(bc),$$

jehož první činitel je počet předmětů souboru A a druhý činitel je počet předmětů souboru N. Porovnáme-li oba výsledky, dospějeme k **asociativnímu zákonu násobení**:

$$(ab)c = a(bc).$$

Předchozí úvahy opět můžeme zobecnit. Buďtež dány libovolné soubory $A, B, C, \ldots\ldots, K$; počet předmětů každého daného souboru označíme příslušným písmenem malé abecedy, takže a je počet předmětů souboru A atd. Součinem

$$abc \ldots k$$

rozumíme to číslo, které udává počet všech předmětů souboru $(A, B, C, \ldots, K)$, který se skládá ze všech takových skupin $(x, y, z, \ldots\ldots, t)$, ve kterých je x libovolný předmět souboru A, y je libovolný předmět souboru $B, \ldots, t$ je libovolný předmět souboru K. Na základě tohoto obecného vysvětlení součinu libovolného počtu přirozených čísel lze odvodit bez potíží především **obecný komutativní zákon násobení** přirozených čísel: Součin libovolného počtu činitelů je nezávislý na pořádku činitelů, na př. součiny

$$abcd,\ acdb,\ dabc \text{ atd.}$$

jsou si všecky rovny. Za druhé se snadno odvodí **obecný asociativní zákon násobení** přirozených čísel, který zní takto: Součin libovolného počtu činitelů můžeme počítati tak, že rozdělíme činitele na skupiny, znásobíme činitele v každé skupině zvlášť a potom znásobíme částečné součiny z jednotlivých skupin. Při tom může některá skupina obsahovat i jediného činitele. Na př. jest

$$abcdef = (abc) \cdot d \cdot (ef).$$

Zde jsme rozdělili činitele na tři skupiny; v první skupině jsou tři činitelé, v poslední jsou dva a druhá skupina obsahuje jediného činitele d.

Cvičení.

9. Na základě úvah o dvojicích odůvodněte: Máme-li r řad, z nichž v každé je s předmětů, je těch předmětů rs.

10. Podobně odůvodněte: Máme-li r vrstev, z nichž v každé je s řad a v každé z těchto řad je t předmětů, je těch předmětů rst.

11. Pomocí definice násobení dokažte, že z rovnosti $a = b$ plyne $ac = bc$.

12. Je-li $a = b$, $c = d$, pak také $ac = bd$. Dokažte.

13. Užívajíce zákona asociativního dokažte: Kolikrát se zvětší jeden činitel, tolikrát se zvětší součin.

14. Dokažte větu: Součin se násobí daným číslem, násobí-li se jím kterýkoli činitel.

15. Pomocí asociativního a komutativního zákona násobení odůvodněte, že $(ab)(cd) = (ac)(bd)$.

16. Máme-li spolu násobit rs čísel

$$\left.\begin{array}{l} a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r, \\ b_1, b_2, b_3, \ldots, b_r, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ k_1, k_2, k_3, \ldots, k_r, \end{array}\right\} s \text{ řádků}$$

provádíme to tak, že nejprve utvoříme součiny $a_1a_2 \ldots a_r = t_1$, $b_1b_2 \ldots b_r = t_2$, $\ldots$, $k_1k_2 \ldots k_r = t_s$ a potom znásobíme $t_1t_2 \ldots t_s$. Kontrolu provádíme tak, že znásobíme $a_1b_1 \ldots k_1 = u_1$, $a_2b_2 \ldots k_2 = u_2$, $\ldots$, $a_rb_r \ldots k_r = u_r$ a tyto součiny znásobíme: $u_1u_2 \ldots u_r$. Odůvodněte.

3. *Distributivní zákon.*

Ve článku 1 jsme mluvili o komutativním a asociativním zákonu pro sčítání; ve článku 2 jsme mluvili o týchž zákonech pro násobení. Ze střední školy znáte ještě jeden důležitý početní zákon, ve kterém je řeč o obou základních výkonech: sčítání i násobení. Je to t. zv. **distributivní zákon** neboli zákon o roznásobení. Je vyjádřen vzorcem:

$$a(b + c) = ab + ac; \tag{1}$$

jak jej vyjádříte slovy? Abychom odůvodnili distributivní zákon pro přirozená čísla, zvolíme jako obvykle tři disjunktní soubory A, B, C s počtem předmětů rovným a, b, c. Označíme-li M spojení obou souborů B, C, skládá se soubor M z $b + c$ předmětů a proto soubor dvojic (A, M) se skládá z $a(b + c)$ předmětů. Na druhé straně soubor M se dělí na dva disjunktní soubory B, C a proto také soubor dvojic (A, M) se dělí na dva disjunktní soubory (A, B), (A, C), z nichž prvý se skládá z ab předmětů a druhý z ac předmětů. Proto počet $a(b + c)$ všech dvojic souboru (A, M) je roven součtu $ab + ac$, což je právě obsahem vzorce (1).

V distributivním zákonu (1) jsme měli součty dvou sčítanců; v obecnějším tvaru máme součty libovolného počtu sčítanců:

$$a(b + c + \dots + k) = ab + ac + \dots + ak.$$

Ještě obecnější tvar distributivního zákona si vyjádříme slovy: **Součet násobíme součtem, jestliže každého sčítance prvního součtu znásobíme každým sčítancem druhého součtu a všecky tyto součiny sečteme.** Odůvodněte sami třeba pro ten případ, že součet $a + b + c + d$ o čtyřech sčítancích násobíme součtem $r + s + t$ o třech sčítancích; tedy:

$$(a + b + c + d)(r + s + t) =$$
$$= ar + br + cr + dr + as + bs + cs + ds + at + bt + ct + dt.$$

Cvičení.

17. Zvětší-li se každý sčítanec k-krát, zvětší se součet také k-krát. Dokažte.

18. Víte-li, že $a(b + c) = ab + ac$, dokažte odtud, že také $(a + b)c = ac + bc$.

19. Pomocí distributivního zákona vypočtěte (dvěma způsoby) součin $(a + b)(c + d + e)$.

20. Dokažte, že součin dvou součtů, z nichž jeden má r sčítanců a druhý s sčítanců, má rs sčítanců.

21. Dokažte, že součin tří součtů, z nichž jeden má r sčítanců, druhý s sčítanců a třetí t sčítanců, má rst sčítanců.

22. Upravte v součin výrazy: a) $12pq + 6q$; b) $(2a + b)x + 2a + b$; c) $uv + u + v + 1$.

23. Součet čísel, z nichž každé je násobkem čísla p, je také násobkem čísla p. Dokažte!

4. Nula a jednička.

Staří matematikové neznali jiná čísla než přirozená čísla. **Rozšíření pojmu čísla** znamenalo důležitý pokrok ve vývoji matematiky. Již na střední škole jste poznali některá rozšíření pojmu čísla (zlomky, záporná čísla), která si v této třídě zopakujeme. V tomto článku zavedeme zatím jediné nové číslo: **nulu.** Počet předmětů v nějakém souboru je roven nule, jestliže ten soubor je prázdný, t. j. jestliže neobsahuje vůbec žádný předmět. Takovým prázdným souborem je pravděpodobně na př. soubor všech osmnáctiletých žáků ve vaší třídě. Pomocí prázdného souboru snadno vysvětlíte pravidlo:

$$a + 0 = a, \qquad 0 + a = a; \tag{1}$$

slovy: Je-li jeden sčítanec roven nule, je součet roven druhému sčítanci.

Je-li A libovolný soubor předmětů a je-li B prázdný soubor, pak také soubor dvojic (A, B) je prázdný. Z toho plyne pravidlo:

$$a \cdot 0 = 0, \qquad 0 \cdot a = 0; \tag{2}$$

slovy: Je-li jeden činitel roven nule, je součin roven nule.

Sami snadno vysvětlíte také obrácená pravidla k pravidlům (1) a (2): Je-li součet roven jednomu ze dvou sčítanců, je druhý sčítanec roven nule. Je-li součin dvou čísel roven nule, je aspoň jeden činitel roven nule.

Porovnejte obě pravidla (1) a (2). Vidíte, že význam nuly při násobení je docela jiný než její význam při sčítání. Význam nuly při sčítání je obdobný významu čísla jedna při násobení, jak je patrné z pravidla:

$$a \cdot 1 = a, \qquad 1 \cdot a = a; \tag{3}$$

slovy: Je-li jeden činitel roven jedné, je součin roven druhému činiteli. Odůvodněte sami pomocí souboru dvojic pravidlo (3) a také vyslovte a odůvodněte obrácené pravidlo.

Dosud jsme mluvili v tomto článku pouze o součtu a součinu dvou čísel. O součtu a součinu libovolného počtu čísel platí podobně:

Součet několika čísel zůstane nezměněn, vynecháme-li nebo přidáme-li sčítance rovné nule.

Součin několika čísel zůstane nezměněn, vynecháme-li nebo přidáme-li činitele rovné jedné.

Součin několika čísel je roven nule, jakmile aspoň jeden činitel je roven nule.

Je-li součin několika čísel roven nule, musí aspoň jeden činitel býti roven nule.

Početní zákony, které jsme v předchozích článcích odvodili pro přirozená čísla (komutativní a asociativní zákony sčítání, tytéž zákony násobení, distributivní zákon), zůstanou v platnosti, i když některé z daných čísel je rovno nule.

Cvičení.

24. Pomocí úvah o prázdných souborech dokažte, že a) $0 + 0 = 0$; b) $0 \cdot 0 = 0$.

25. Je možné vyhověti rovnici $ax = bx$, i když a, b jsou dvě čísla navzájem různá?

26. Je možné vyhověti rovnici $a + x = b + x$, i když a, b jsou dvě čísla navzájem různá?

27. Dokažte, že základní početní zákony, o nichž se mluvilo v čl. 1—3, jsou splněny, i když některá z čísel, jež se v nich vyskytují, jsou rovna nule.

V následujících cvičeních písmena a, x mohou znamenati buď čísla přirozená nebo nulu. Pomocí úvah o souborech dokažte:

28. Je-li $a + x = a$, je $x = 0$.

29. Je-li $a + x = 0$, je $a = 0$ i $x = 0$.

30. Je-li $a + x = 1$, je buď $a = 1$, $x = 0$ nebo $a = 0$, $x = 1$.

31. Je-li $ax = a$ a a není rovno nule, je $x = 1$.

32. Je-li $ax = 0$, je buď $a = 0$ nebo $x = 0$ (nebo obojí).

33. Je-li $ax = 1$, je $a = 1$ i $x = 1$.

5. Srovnávání velikosti přirozených čísel.

Již v 1. článku jsme si řekli, že jestliže dvě přirozená čísla si nejsou rovna, je jedno z nich větší a druhé menší. Píšeme

$$a > b \text{ (a větší než b),}$$
$$b < a \text{ (b menší než a).}$$

Je zřejmé, že součet dvou přirozených čísel je větší než kterýkoli sčítanec. Součet je roven jednomu sčítanci, je-li druhý sčítanec roven nule. Avšak součet nemůže nikdy býti menší než některý sčítanec, dokud nepřipustíme za sčítance také čísla záporná, což v tomto opakování učiníme až ve článku 2 v kapitole III.

Zatím všecka čísla, o kterých mluvíme, jsou přirozená čísla nebo 0. Jsou-li tedy a, b daná čísla, potom rovnice

$$a + x = b \tag{1}$$

s neznámou x nemá žádné řešení, je-li $a > b$, má jediné řešení $x = 0$, je-li $a = b$, má jediné řešení x, které je přirozeným číslem, je-li $a < b$. Řešení rovnice (1) značíme

$$b - a$$

a nazýváme je **rozdílem**, jehož **menšencem** je číslo b a jehož **menšitelem** je číslo a. Menšitel tedy nesmí býti větší než menšenec. Početní výkon, kterým od daných čísel a, b dospíváme k jejich rozdílu, jmenuje se **odčítání.** Nebudeme opakovati vlastnosti odčítání, protože, jak je vám známo, po zavedení záporných čísel se dá odčítání převést na sčítání.

Součin dvou přirozených čísel je větší než kterýkoli činitel v tom případě, že oba činitelé jsou větší než jedna. Vysvětlete!

Jsou-li a, b daná přirozená čísla, potom rovnice

$$ax = b \tag{2}$$

s neznámou x nemá žádné řešení (má-li také hodnota neznámé být přirozeným číslem), jestliže $a > b$. Je-li $a = b$, má rovnice (2) jediné řešení $x = 1$. Jestliže $a < b$, potom rovnice (2) někdy nemá žádné řešení (dokud nezavedeme zlomky), někdy má jediné řešení. Říkáme, že číslo b je **dělitelné** číslem a, jestliže existuje přirozené číslo x, které je řešením rovnice (2). Nauku o dělitelnosti zatím nebudeme opakovat. Je-li číslo b dělitelné číslem a, potom řešení x rovnice (2) značíme

$$b : a.$$

Jsou-li a, b dvě daná přirozená čísla a je-li na př. $b > a$, můžeme se ptáti, **oč** je číslo b větší než číslo a; odpověď na tuto otázku je dána číslem $b - a$. Můžeme si také položit druhou otázku, **kolikrát** je číslo b větší než číslo a; je-li číslo b dělitelné číslem a, je odpověď na tuto otázku dána přirozeným číslem $b : a$. Jestliže však číslo b není dělitelné číslem a, pak otázka, kolikrát je číslo b větší než číslo a, nemá žádný přesný smysl.

Cvičení.

Ve cvičeních 34—38 písmena a, b, c značí přirozená čísla. Pomocí úvah o souborech dokažte:

34. a) Je-li $a > b$, je $b < a$. b) Je-li $a < b$, je $b > a$.

35. a) Je-li $a > b$ a $b > c$, je také $a > c$. b) Je-li $a < b$ a $b < c$, je také $a < c$.

36. Jsou-li a, b libovolná přirozená čísla, platí jeden a jen jeden ze vztahů: a) $a > b$, b) $a = b$, c) $a < b$.

37. a) Je-li $a > b$, je $a + c > b + c$. b) Je-li $a < b$, je $a + c < b + c$.

38. a) Je-li $a > b$, je $ac > bc$, b) Je-li $a < b$, je $ac < bc$.

39. Z nerovností mezi přirozenými čísly $a > b$, $c > d$ odvoďte a) $a + c > b + d$; b) $ac > bd$ (užijte výsledků cvičení 37 a 38).

40. Z definice odčítání dokažte: a) O kolik se zvětší menšenec, o tolik se zvětší rozdíl (při nezměněném menšiteli). b) Rozdíl se nezmění, zvětší-li se menšenec i menšitel o totéž číslo.

41. Na základě definice odčítání dokažte, že a) pro $b \geqq c$ je $a + (b - c) = a + b - c$; b) pro $b \geqq c$, $a \geqq b - c$ je $a - (b - c) = a + c - b$.

42. Z definice odčítání odvoďte, že a) $a - a = 0$, b) $a - 0 = a$.

43. a) Je-li $a > b$ a $b \geqq c$, je $a - c > b - c$. b) Je-li $a > b$ a $c \geqq a$, je $c - a < c - b$. Dokažte.

II. ZLOMKY.

1. Vznik čísla při měření.

Dosud jsme si všímali pouze toho, jak vzniká pojem čísla při určování počtu předmětů neboli při čítání. Při čítání vystačíme s přirozenými čísly; počet předmětů není nikdy roven $\frac{3}{4}$ nebo $\frac{5}{3}$ a pod. Avšak s čísly se setkáváme také při **měření** a tu nevystačíme s přirozenými čísly. Na střední škole jste v hodinách geometrie probírali měření úseček, úhlů, obsahů a objemů. Znáte také měření času, váhy, teploty. Obecně mluvíme o měření **veličin.** Měřit můžeme pouze délku délkou, váhu vahou, teplotu teplotou; měření je porovnávání velikostí dvou veličin téhož druhu. Měříme-li na př. délku učebny a naměříme-li 12 m, co znamená číslo 12? Znamená, že měřená úsečka (hrana učebny) je rovna 12 úsečkám rovným 1 m; metr je při tomto měření **jednotkou.** Výsledek měření bude pravděpodobně vyjádřen přirozeným číslem 12 pouze zhruba; měřená hrana nebude asi přesně rovna 12 m, nýbrž bude přesněji rovna třeba 12 m 3 dm, t. j. rovna 12 úsečkám rovným jednotce 1 m a ještě 3 úsečkám rovným jednotce 1 dm desetkrát menší. Chceme-li délku 12 m 3 dm vyjádřit pomocí původní jednotky 1 m, nevystačíme s přirozenými čísly, nýbrž musíme zavést nová čísla, t. zv. zlomky. S přirozenými čísly pracujeme v těch případech, kdy jednotka je nedělitelná. Počet cestujících ve vlaku, počet jablek na stromě a pod. je vždy přirozené číslo nebo nula. Naproti tomu doba strávená ve vlaku, váha jablek na stromě a pod. nebude vždy vyjádřena přirozeným číslem a mimo to hodnota čísla, které vyjadřuje dobu nebo váhu a pod., závisí na volbě jednotky doby, váhy a pod. Zvolíme-li na př. hodinu za jednotku doby, může býti doba, kterou strávím ve vlaku, vyjádřena zlomkem $\frac{3}{4}$; zvolíme-li však minutu za jednotku doby, bude táž doba vyjádřena přirozeným číslem 45. S běžnými jednotkami různých druhů veličin jste se seznámili již na střední škole a další jednotky poznáte ve vyšších třídách v hodinách fysiky.

Cvičení.

44. Při měření určité vzdálenosti bylo naměřeno a m. Jak by se změnil tento údaj, kdyby jednotkou délky nebyl 1 m, nýbrž a) 1 dm, b) 1 cm, c) 1 km?

45. Při měření určité doby bylo naměřeno t min. Jak by se změnil tento údaj, kdyby jednotkou doby nebyla 1 min., nýbrž a) 1 hod., b) 1 vteř.?

46. Moderní úhloměrné přístroje mají dělení, kterým se pravý úhel nedělí na 90°, nýbrž na 100 dílků zvaných grady. Desetina gradu se jmenuje decigrad, setina gradu se jmenuje centigrad. a) Kolik gradů měří 1°, 1′, 1″? b) Kolik stupňů (minut, vteřin) měří 1 grad, 1 decigrad, 1 centigrad?

47. 1 l je totéž jako 1 dm^3. a) Kolik hl má 1 m^3? b) Bylo-li při měření objemu naměřeno a hl, kolik je to m^3?

48. Rychlost je počet délkových jednotek, které pohybující se těleso urazí za jednotku doby. Je-li jednotkou délky 1 km a jednotkou doby 1 hod., je jednotka rychlosti 1 km/hod (čti 1 km za 1 hodinu). Bylo naměřeno, že rychlost vlaku je 72 km/hod. Kolik je to m/vt?

49. Měrná váha je počet váhových jednotek, které obsahuje objemová jednotka nějaké látky. Je-li jednotkou váhy 1 g a jednotkou objemu 1 cm^3, je jednotkou měrné váhy 1 g/cm^3 (čti 1 g na 1 cm^3). Bylo naměřeno, že měrná váha železa je 7,8 g/cm^3. Kolik je to a) kg/dm^3, b) t/m^3?

2. Zlomky a jejich různé tvary.

Přirozené číslo 1 nazveme **základní jednotkou**; v nauce o zlomcích máme vedle základní jednotky ještě **lomené jednotky**: polovinu, třetinu, čtvrtinu, pětinu atd. Každé přirozené číslo se skládá z určitého počtu základních jednotek; podobně se skládá zlomek z určitého počtu týchž lomených jednotek, na př. z určitého počtu polovin, třetin atd. Zlomek je tedy určen, známe-li druh lomených jednotek a počet těchto lomených jednotek: druh je dán **jmenovatelem** zlomku, jejich počet **čitatelem.** Zlomky zapisujeme známým způsobem pomocí zlomkové čáry; na př. zlomek $\frac{5}{6}$ se skládá z pěti lomených jednotek téhož druhu, t. j. z pěti šestin. Každá lomená jednotka se skládá z určitého počtu menších lomených jednotek, na př. šestina se skládá ze tří osmnáctin nebo ze sedmi dvaačtyřicetin a pod.; proto je $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$ $(15 = 3 \cdot 5)$,

$\frac{5}{6} = \frac{35}{42}$ $(35 = 7 \cdot 5)$ a pod. Obecně: každý zlomek, který se dá napsat se jmenovatelem a, dá se napsat také se jmenovatelem $2a$, $3a$, $4a$, $5a$ atd. neboli zlomek $\dfrac{b}{a}$ se dá psáti také ve tvarech

$$\frac{2b}{2a}, \quad \frac{3b}{3a}, \quad \frac{4b}{4a}, \quad \frac{5b}{5a} \quad \text{atd.}$$

Přechod od tvaru $\dfrac{b}{a}$ ke kterémukoli z těchto tvarů se jmenuje rozšiřování zlomku; opačný přechod se jmenuje krácení zlomku.

Pomocí rozšiřování můžeme každé dva zlomky rozmanitými způsoby uvésti na společného jmenovatele; na př. zlomky $\frac{5}{6}$, $\frac{9}{8}$ můžeme uvésti na kteréhokoli ze společných jmenovatelů 24, 48, 72, 96 atd.:

$$\frac{5}{6} = \frac{20}{24}, \quad \frac{9}{8} = \frac{27}{24}; \quad \frac{5}{6} = \frac{40}{48}, \quad \frac{9}{8} = \frac{54}{48}; \quad \text{atd.}$$

Uvedení na **nejmenšího** společného jmenovatele vyžaduje znalost nauky o dělitelnosti, o které se stručně zmíníme až ve článku 3. Bez nauky o dělitelnosti můžeme dva zlomky $\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{d}{c}$ uvésti na společného jmenovatele ac, který je součinem původních jmenovatelů:

$$\frac{b}{a} = \frac{bc}{ac}, \quad \frac{d}{c} = \frac{ad}{ac}. \tag{1}$$

Uvedením na společného jmenovatele můžeme rozhodnouti o tom, zdali dva dané zlomky si jsou rovny, a v případě, že si rovny nejsou, rozhodnouti, který z nich je větší. Z rovností (1) soudíme:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \text{ jestliže } bc = ad, \tag{2}$$

$$\frac{b}{a} < \frac{d}{c}, \text{ jestliže } bc < ad,$$

$$\frac{b}{a} > \frac{d}{c}, \text{ jestliže } bc > ad.$$

Každý zlomek lze napsat v nesčíslně mnoha různých tvarech; ale s daným jmenovatelem lze zlomek napsat v jediném tvaru. Na př. zlomek $\frac{6}{8}$ lze napsat v jediném tvaru $\frac{3}{4}$ se jmenovatelem 4, a zlomek $\frac{5}{8}$ vůbec nelze napsat se jmenovatelem 4. Proto ze všech možných tvarů zlomku je jediný tvar, jehož jmenovatel má nejmenší možnou hodnotu; tento tvar se jmenuje **základní tvar zlomku.**

Zlomek $\frac{b}{a}$ lze, jak víme, psáti ve tvarech

$$\frac{b}{a}, \quad \frac{2b}{2a}, \quad \frac{3b}{3a}, \quad \frac{4b}{4a}, \quad \frac{5b}{5a}, \quad \ldots \tag{3}$$

Můžeme zlomek $\frac{b}{a}$ napsat ještě v nějakém jiném tvaru nežli jsou tvary (3)? Dokážeme bez užití nauky o dělitelnosti, že lze-li zlomek $\frac{b}{a}$ napsat v jiném tvaru než jsou tvary (3), pak $\frac{b}{a}$ není základní tvar, t. j. pak je možné napsat zlomek ve tvaru, jehož jmenovatel je menší než a. Nechť tedy zlomek $\frac{b}{a}$ lze napsat také ve tvaru $\frac{d}{c}$, který je jiný než jsou tvary (3); máme dokázat, že potom lze zlomek $\frac{b}{a}$ napsat ve tvaru, jehož jmenovatel je menší než a. To je zřejmé, jestliže je $c < a$, neboť potom $\frac{d}{c}$ už je takový tvar zlomku. Není-li $c < a$, potom jmenovatel c zlomku tvaru $\frac{d}{c}$ se nevyskytne mezi jmenovateli

$$a, \quad 2a, \quad 3a, \quad 4a, \quad 5a, \ldots . \tag{4}$$

tvarů (3) a proto jmenovatel c je co do velikosti mezi některými dvěma sousedními z čísel (4); to znamená, že existuje takové přirozené číslo n, že

$$na < c, \ (n + 1)a > c.$$

Protože je $na < c$, existuje takové přirozené číslo k, že

$$c = na + k. \tag{5}$$

Protože $(n + 1)a > c$, je

$$(n + 1)a > na + k \text{ neboli } na + a > na + k$$

a z toho soudíme, že je

$$a > k. \tag{6}$$

Zlomek $\frac{b}{a}$ se dá psáti ve tvaru $\frac{d}{c}$; z toho soudíme podle (2), že je

$$bc = ad.$$

Podle (5) je však

$$bc = b(na + k) \text{ neboli } bc = bna + bk,$$

tedy

$$bc = a \cdot nb + bk,$$

takže

$$ad = a \cdot nb + bk. \tag{7}$$

Z rovnice (7) je patrné, že součin $a \cdot d$ je větší než součin $a \cdot nb$; z toho soudíme, že přirozené číslo d je větší než přirozené číslo nb. Proto existuje takové přirozené číslo h, že

$$d = nb + h. \tag{8}$$

Podle (8) je

$$ad = a \cdot nb + ah.$$

Porovnáme-li se (7), vidíme, že

$$bk = ah. \tag{9}$$

Podle (9) však soudíme ze (2), že

$$\frac{b}{a} = \frac{h}{k}.$$

Zlomek $\frac{b}{a}$ tedy lze napsat ve tvaru $\frac{h}{k}$ se jmenovatelem k, který podle (6) je menší než a. To jsme právě chtěli dokázat.

Dokázali jsme, že jestliže zlomek $\frac{b}{a}$ lze psáti v jiném tvaru než jsou tvary (3), tvar $\frac{b}{a}$ nemůže býti základní. Tedy jestliže $\frac{b}{a}$ je základní tvar zlomku, pak v (3) máme všechny možné tvary zlomku $\frac{b}{a}$ neboli:

Ze základního tvaru zlomku vznikne každý jiný tvar rozšiřováním. To můžeme vyslovit také takto: Je-li zlomek napsán ve tvaru $\frac{d}{c}$, který není základní, dá se zlomek zkrátit a tím uvést na základní tvar. Jestliže přirozená čísla a, b jsou **nesoudělná,** t. j. jestliže nejsou obě dělitelná týmž přirozeným číslem větším než 1, potom zlomek $\frac{b}{a}$ se nedá krátit. Tedy: jsou-li a, b nesoudělná čísla, zlomek $\frac{b}{a}$ je nutně v základním tvaru.

Cvičení.

50. Srovnejte podle velikosti zlomky: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$.

51. Platí $\frac{68}{51} = \frac{204}{153}$, při čemž $153 = 3 \cdot 51$. Plyne z toho, že zlomek $\frac{68}{51}$ je v základním tvaru?

52. Přesvědčte se, že $\frac{35}{91} = \frac{65}{169}$. Odtud usuďte, že žádný z těchto dvou zlomků není v základním tvaru.

53. Je-li $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, kde a, b, c, d jsou přirozená čísla taková, že $b > d$, je také $\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$. Dokažte.

54. Užívajíce výsledku cvičení 53, uveďte zlomky ze cvičení 52 na základní tvar.

55. Dokažte větu: Je-li zlomek v základním tvaru, je buď čitatel nebo jmenovatel (nebo oba) lichý. Lze větu obrátit?

56. Je-li $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, znamená to, že $ad = bc$; je-li $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$, znamená to, že $cf = de$. Odvoďte odtud, že také $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$, t. j. že $af = be$.

57. Dokažte věty: a) Při stejných jmenovatelích má větší hodnotu ten zlomek, jehož čitatel je větší. b) Při stejných čitatelích má větší hodnotu ten zlomek, jehož jmenovatel je menší.

3. Dělitelnost přirozených čísel.

Přirozené číslo p se jmenuje **prvočíslo,** jestliže p je větší než 1, ale není možné vyjádřit p jako součin dvou přirozených čísel větších než 1.

Čísla

$$2, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 11, \quad 13, \quad 17, \quad 19$$

jsou prvočísla; jsou to všecka prvočísla menší než 20.

Základní vlastnost prvočísel zní takto:

Je-li součin bc dvou přirozených čísel dělitelný prvočíslem p, musí aspoň jeden z obou činitelů b, c býti dělitelný prvočíslem p.

Důkaz. Jelikož součin bc je dělitelný prvočíslem p, musí existovat takové přirozené číslo d, že

$$bc = pd. \tag{1}$$

Je-li číslo b dělitelné prvočíslem p, je vše dokázáno. Jestliže číslo b není dělitelné prvočíslem p, potom čísla b, p jsou nesoudělná a z toho plyne (viz konec článku 2), že zlomek $\frac{b}{p}$ je v základním tvaru. Ale porovnáme-li rovnici

(1) s rovnicí (2) článku 2, vidíme, že

$$\frac{b}{p} = \frac{d}{c}.$$

Jelikož zlomek $\frac{b}{p}$ je v základním tvaru, vznikne tvar $\frac{d}{c}$ rozšiřováním a proto číslo c je dělitelné číslem p, což jsme právě měli dokázati.

Jestliže součin $a_1a_2 \dots a_n$ je dělitelný prvočíslem p, musí některý činitel býti dělitelný prvočíslem p? Při dvou činitelích jsme to již dokázali, ale při více než dvou činitelích není zatím vyloučeno, že by existoval součin $a_1a_2 \dots a_n$, který by byl dělitelný prvočíslem p, při čemž by žádný činitel nebyl dělitelný prvočíslem p. Jestliže takový součin existuje, zvolme počet činitelů tak, aby byl nejmenší. Potom součin $a_1a_2 \dots a_n$ bude dělitelný prvočíslem p, ačkoli žádný z činitelů $a_1, a_2, \dots, a_n$ nebude dělitelný prvočíslem p. Protože číslo n bylo zvoleno co nejmenší a protože žádné z čísel $a_2, \dots, a_n$ není dělitelné prvočíslem p, součin $c = a_2 \dots a_n$ nebude dělitelný prvočíslem p. Podle asociativního zákona násobení je $a_1a_2 \dots a_n = a_1c$. Tedy součin a_1c je dělitelný prvočíslem p, a protože činitel c není dělitelný prvočíslem p a činitel a_1 rovněž ne, je to nemožné. Tím jsme dokázali obecně: *Je-li součin $a_1a_2 \dots a_n$ několika přirozených čísel dělitelný prvočíslem p, musí některý činitel býti dělitelný prvočíslem p.* Jestliže na př. činitel a_1 je sám prvočíslem, může být dělitelný prvočíslem p pouze v tom případě, že je rovný p. Tedy: *Je-li součin několika prvočísel dělitelný prvočíslem p, musí některý činitel býti rovný p.*

Přirozené číslo větší než 1, které není prvočíslem, jmenuje se **číslo složené.** *Každé složené číslo můžeme napsat jako součin prvočísel,* z nichž některá si mohou býti rovna. To je t. zv. *rozklad na prvočinitele,* který je možný pouze jediným způsobem. Neboť jsou-li $p_1p_2 \dots p_n$, $q_1q_2 \dots q_m$ dva rozklady na prvočinitele téhož přirozeného čísla, jest

$$p_1p_2 \dots p_n = q_1q_2 \dots q_m.$$

Součin prvočísel $p_1p_2 \dots p_n$ je dělitelný prvočíslem q_1 a proto některý činitel musí býti roven q_1. Je-li na př. $p_1 = q_1$, můžeme tímto společným činitelem krátit a dostaneme

$$p_2 \dots p_n = q_2 \dots q_m.$$

Zase součin prvočísel $p_2 \dots p_n$ je dělitelný prvočíslem q_2 a některý činitel musí býti roven q_2, na př. $p_2 = q_2$. Pokračujíce v tomto úsudku dostaneme posléze, že oba rozklady se mohou lišit nanejvýš pořádkem činitelů.

Cvičení.

Dokažte věty:

58. Každé prvočíslo (s výjimkou prvočísla 2) je číslo liché.

59. Číslo $n^2 - 1$ není prvočíslem pro žádné celé n větší než 2.

60. Je-li p prvočíslo větší než 2, je vždy jedno z čísel $p - 1$, $p + 1$ dělitelné čtyřmi a druhé dvěma.

61. Je-li p prvočíslo větší než 3, je vždy jedno z čísel $p - 1$, $p + 1$ dělitelné šesti.

62. Je-li p prvočíslo větší než 3, je číslo $p^2 - 1$ dělitelné dvaceti čtyřmi.

63. Součin tří po sobě jdoucích čísel celých, z nichž prostřední je liché, je vždy dělitelný dvaceti čtyřmi.

64. Jsou-li a, b dvě čísla nesoudělná, pak žádný prvočinitel z rozkladu čísla a není prvočinitelem v rozkladu čísla b.

65. Je-li číslo dělitelné dvěma čísly navzájem nesoudělnými, je také dělitelné jejich součinem.

66. Odůvodněte, že každé číslo menší než 30, jež je s tímto číslem nesoudělné, je prvočíslo.

4. Sčítání a násobení zlomků.

Při sčítání dvou zlomků uvedeme oba sčítance na společného jmenovatele; součet lze potom napsat jako zlomek s týmž jmenovatelem, jehož čitatel je součet původních čitatelů:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}. \tag{1}$$

Jelikož pro sčítání přirozených čísel platí komutativní zákon, soudíme z (1), že komutativní zákon sčítání platí také pro zlomky.

Také více než dva zlomky můžeme vždy uvést na společného jmenovatele a máme:

$$\frac{a_1}{c} + \frac{a_2}{c} + \ldots + \frac{a_n}{c} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{c}. \tag{2}$$

Z toho plyne, že také asociativní zákon sčítání, o jehož platnosti pro přirozená čísla jsme mluvili ve článku 1 kapitoly I, platí i pro zlomky.

Při násobení nemusíme uváděti zlomky na společného jmenovatele. Ze střední školy víme, že:

$$\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd}. \tag{3}$$

Podobně máme pro více než dva zlomky:

$$\frac{a_1}{c_1}\cdot\frac{a_2}{c_2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{c_n}=\frac{a_1 a_2\ldots a_n}{c_1 c_2\ldots c_n}. \tag{4}$$

Ze (3) a (4) soudíme, že komutativní a asociativní zákon násobení, o jehož platnosti pro přirozená čísla jsme mluvili ve článku 2 kapitoly I, platí i pro zlomky.

Rovněž distributivní zákon platí také pro zlomky. Tento zákon je vyjádřen vzorcem (viz článek 3 kapitoly I):

$$u(r+s)=ur+us. \tag{5}$$

Abychom dokázali, že zákon (5), jehož platnost pro přirozená čísla je nám známa, zůstává správný i v tom případě, že písmena u, r, s znamenají zlomky, napišme si nejprve zlomek u v libovolném tvaru

$$u=\frac{a}{b}.$$

Dále si napišme oba zlomky r, s tak, aby měly společného jmenovatele:

$$r=\frac{c}{e},\ s=\frac{d}{e},$$

takže podle pravidla o sčítání zlomků

$$r+s=\frac{c+d}{e}.$$

Podle pravidla o násobení zlomků jest

$$u(r+s)=\frac{a(c+d)}{be},\quad ur=\frac{ac}{be},\quad us=\frac{ad}{be}.$$

Oba poslední zlomky jsou již uvedeny na společného jmenovatele, takže

$$ur+us=\frac{ac+ad}{be}.$$

Protože však a, c, d jsou přirozená čísla, platí pro ně distributivní zákon

$$a(c + d) = ac + ad$$

a z toho následuje nyní, že platí také (5).

Každé přirozené číslo a můžeme napsat jako zlomek se jmenovatelem 1:

$$a = \frac{a}{1},$$

nebo také jako zlomek, jehož jmenovatelem je libovolně zvolené přirozené číslo n:

$$a = \frac{an}{n}.$$

Je-li čitatel zlomku roven nule a je-li jmenovatel jakékoli přirozené číslo, je zlomek roven nule:

$$0 = \frac{0}{n} \text{ pro } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Naproti tomu **jmenovatel zlomku není nikdy roven nule.**

V kapitole I v článku 4 jsme odvodili pravidla

$$a + 0 = a, \; a \cdot 0 = 0, \; a \cdot 1 = a \tag{6}$$

za předpokladu, že písmeno a znamená přirozené číslo. Za téhož předpokladu jsme odvodili také obrácená pravidla, z nichž nejdůležitější je: je-li součin roven nule, je aspoň jeden činitel roven nule. Odůvodněte nyní, proč všecka tato pravidla platí také pro zlomky!

V kapitole I v článku 5 jsme mluvili především o tom, že rovnice

$$a + x = b \tag{7}$$

s neznámou x nemá žádné řešení, je-li $a > b$, a že tato rovnice má jediné řešení, které značíme

$$x = b - a,$$

je-li $a < b$ nebo $a = b$, při čemž je $x = 0$ v případě $a = b$, kdežto v případě $a < b$ není $x = 0$. Při tom každé z písmen a, b, x, v článku 5 znamenalo přirozené číslo nebo nulu. Odůvodněte nyní, že to vše zůstane v platnosti i po rozšíření pojmu čísla o zlomky.

Ve článku 5 jsme dále mluvili o rovnici

$$ax = b \tag{8}$$

s neznámou x. Jestliže písmena a, b znamenají přirozená čísla, potom před zavedením zlomků byla rovnice (8) řešitelná pouze v tom případě, že číslo b je dělitelné číslem a. Po zavedení zlomků má rovnice (8) vždy jediné řešení, ať jsou a a b jakákoli přirozená čísla; toto řešení je dáno zlomkem

$$x = \frac{b}{a}. \tag{9}$$

Rovnice (8) má však jediné řešení i tehdy, jestliže písmena a, b znamenají zlomky. Budiž

$$a = \frac{a_1}{a_2}, \qquad b = \frac{b_1}{b_2},$$

kde a_1, a_2, b_1, b_2 jsou přirozená čísla. Nazveme-li převrácenou (reciprokou) hodnotou zlomku a zlomek

$$a' = \frac{a_2}{a_1},$$

potom řešení $x = ba'$ rovnice (8) je součin čísla b s převrácenou hodnotou čísla a. Jestliže $b = 1$, jest $x = a'$ neboli: součin čísla a jeho převrácené hodnoty je roven 1. Řešení rovnice (8) se někdy píše ve tvaru $b : a$, často se však píše ve tvaru (9) i tehdy, když a nebo b je zlomek nebo a i b jsou zlomky. V tomto případě výraz $\frac{a}{b}$ se nazývá složený zlomek.

O rovnici (8) jsme dosud mluvili za předpokladu, že žádné z písmen a, b neznamená nulu. Tento předpoklad můžeme zapsati takto:

$$a \neq 0, \qquad b \neq 0. \tag{10}$$

Značka $\neq$ je znamení nerovnosti; čteme ji „nerovná se" nebo „je rozdílné od". Jestliže opustíme předpoklad (10), zbývají tři případy. Předně rovnice

$$a \cdot x = 0, \qquad \text{kde } a \neq 0,$$

má jediné řešení $x = 0$. Za druhé rovnice

$$0 \cdot x = b, \qquad \text{kde } b \neq 0,$$

nemá vůbec žádné řešení. Posléze je

$$0 \cdot x = 0$$

identická rovnice neboli identita, t. j. každé číslo x je řešením této rovnice.

Cvičení.

67. Odůvodněte, že zlomek $x = \dfrac{b}{a}$ je řešením rovnice $ax = b$, kde $a \neq 0$.

68. Zlomek $\dfrac{a}{c}$ znamená totéž jako řešení rovnice $cx = a$ pro $c \neq 0$; zlomek $\dfrac{b}{c}$ znamená totéž jako řešení rovnice $cy = b$ pro $c \neq 0$. Odvoďte odtud, jaký význam má součet nebo rozdíl zlomků $\dfrac{a}{c}$ a $\dfrac{b}{c}$.

69. Zlomek $\dfrac{a}{b}$ znamená totéž jako řešení rovnice $bx = a$ pro $b \neq 0$; zlomek $\dfrac{c}{d}$ znamená totéž jako řešení rovnice $dy = c$ pro $d \neq 0$. Odvoďte odtud, jaký význam má součin zlomků $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d}$.

70. Děliti $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d}$, při čemž $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$, znamená totéž jako řešiti rovnici $\dfrac{c}{d} \cdot x = \dfrac{a}{b}$. Odvoďte odtud pravidlo pro dělení dvou zlomků.

71. Dokažte větu: Násobiti zlomkem, který není roven nule, je totéž jako děliti jeho převrácenou hodnotou.

72. Je-li $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, znamená to, že $ad = bc$. Odtud odvoďte, že také $\dfrac{a}{b} + \dfrac{e}{f} = \dfrac{c}{d} + \dfrac{e}{f}$, t. j. že $(af + be)df = bf(cf + de)$.

73. Je-li $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, znamená to, že $ad = bc$. Odtud odvoďte, že také $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{e}{f} = \dfrac{c}{d} \cdot \dfrac{e}{f}$, t. j. že $ae \cdot df = bf \cdot ce$.

74. Dokažte, že součet dvou zlomků v základním tvaru, jejichž jmenovatelé jsou dvě různá čísla, není nikdy celé číslo.

75. Dokažte, že součet dvou zlomků v základním tvaru, jejichž jmenovatelé jsou dvě čísla nesoudělná, nelze dále krátit.

III. ČÍSLA ZÁPORNÁ.

1. Zavedení záporných čísel; číselná osa.

Dosud zavedená čísla jsou větší než 0, s výjimkou čísla 0. Čísla větší než nula se jmenují **kladná čísla.** S kladnými čísly vystačíme v praxi všude tam, kde nula znamená mez, pod kterou není možno jít: počet dělníků v továrně, váha jakéhokoli předmětu, objem kapaliny v nádobě a pod. jsou vždy vyjádřeny kladnými čísly. Ale čísel užíváme v praxi nejen pro vyjádření velikosti neměnící se veličiny, nýbrž velmi často také k vyjádření změny velikosti. Zvětšení velikosti je vyjádřeno číslem kladným, neexistence změny je vyjádřena číslem nula a zmenšení velikosti je vyjádřeno **číslem záporným.** Číslo nula nepočítáme ani mezi kladná čísla ani mezi záporná. Souhrnný název pro kladná i záporná čísla i pro nulu je **čísla relativní.**

Každému kladnému číslu a je přiřazeno určité záporné číslo, které značíme $-a$ a které nazýváme **opačným číslem** ke kladnému číslu a; k zápornému číslu $-a$ je opačným číslem původní kladné číslo a. Obě čísla, kladné číslo a i záporné číslo $-a$, mají společnou **prostou** (neboli **absolutní**) **hodnotu,** jíž jest kladné číslo a. Prostou hodnotu značíme svislými příčkami; tedy

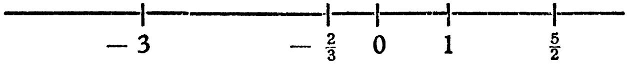
$$|a| = a, \qquad |-a| = a$$

pro každé kladné číslo a. K číslu 0 je opačným číslem číslo 0 samo; píšeme $-0 = 0$. Prostou hodnotou čísla 0 zase je číslo 0 samo: $|0| = 0$. Prostá hodnota každého čísla $a \neq 0$ (kladného nebo záporného) je kladná; prostá hodnota nuly je nula, není tedy kladná.

Přechod od kteréhokoli čísla k opačnému číslu se jmenuje změna znamení; změnou znamení vznikne z kladného čísla $\frac{1}{2}$ záporné číslo $-\frac{1}{2}$, ze záporného čísla -3 kladné číslo 3; z čísla 0 vznikne změnou znamení totéž číslo 0.

O dvou relativních číslech pravíme, že mají totéž znamení, jsou-li obě kladná nebo obě záporná nebo obě rovná nule; pravíme, že mají opačná znamení, je-li jedno kladné a druhé záporné.

Sčítání čísel po rozšíření o čísla záporná se nejlépe pochopí pomocí geometrického znázornění na t. zv. **číselné ose.** Číselná osa je vodorovná přímka (obr. 1), na které je zvolen určitý bod, zvaný počátek, který je obrazem čísla 0. Napravo od počátku je zvolen jiný bod, který je obrazem čísla 1. Vzdálenost obou zvolených bodů na číselné ose volíme za délkovou jednotkou. Obrazem kladného čísla a je bod napravo od počátku, jehož vzdálenost od počátku je ve zvolené jednotce vyjádřena číslem a; v téže vzdálenosti od počátku, ale nalevo od počátku, leží obraz záporného čísla $-a$. V obr. 1 jsou znázorněna čísla 0, 1, $\frac{5}{2}$, -3, $-\frac{2}{3}$.



Obr. 1.

Cvičení.

76. Parník ujede silou stroje v km/hod; rychlost proudu je c km/hod. Obě rychlosti měříme kladnými čísly ve směru proudu. Jaká je rychlost parníku v proudící vodě? Co znamená, když a) v je kladné, b) v je záporné, c) $v = 0$, d) $v = -c$?

77. Ze dvou míst A a B vzdálených od sebe a km vyjedou současně dva vlaky; jeden jede rychlostí c_1 km/hod, druhý rychlostí c_2 km/hod, při čemž $c_1 \neq c_2$. Obě rychlosti, jakož i vzdálenost vlaků měříme kladně ve směru od A do B. Jaká je vzdálenost vlaků po uplynutí h hod.? Vysvětlete význam nalezeného výsledku,

je-li a) $h < \dfrac{a}{c_1 - c_2}$, b) $h = \dfrac{a}{c_1 - c_2}$, c) $h > \dfrac{a}{c_1 - c_2}$.

78. Otec je třikrát tak stár jako syn; dohromady je jim 60 roků. Za jak dlouho bude otec a) dvakrát, b) čtyřikrát starší než syn? Vyložte význam nalezených výsledků.

79. Je-li $a \geq 0$, je $|a| = a$, je-li $a \leq 0$, je $|a| = -a$. Odůvodněte.

80. Dokažte, že pro každé a je $|a| \geq a$.

81. Dokažte, že pro každé a je $|-a| = |a|$.

82. Jak třeba voliti číslo x, aby $x + 1$, $x - 2$ byla dvě čísla opačná?

83. Pro které x je a) $|x - 1| = x$; b) $|x| = x - 1$?

84. Pro která a je $|a - 1| = 1 - a$?

85. Co lze říci o číslech a, b, je-li a) $|a| + |b| = 0$; b) $|a| - |b| = 0$?

2. Sčítání relativních čísel.

V předcházejícím článku jsme si řekli, že relativních čísel užíváme v praxi především k číselnému vyjádření změn velikosti veličin. Takové změny si můžeme velmi dobře znázornit pomocí posouvání číselné osy. Mějme číselnou osu ve dvou exemplářích: pevná číselná osa budiž narýsována v sešitě, pohyblivá číselná osa budiž na přímé hraně proužku papíru. Zvolme nyní na pevné číselné ose bod, který je obrazem relativního čísla a; přiložme nyní pohyblivou číselnou osu k pevné nejprve tak, aby se oba počátky kryly, ale potom posunujme pohyblivou číselnou osu podél pevné tak, aby počátek pohyblivé osy se posléze kryl s obrazem čísla a na pevné ose. Tímto způsobem jsme zvolenému relativnímu číslu a přiřadili určité posunutí číselné osy; toto posunutí označme krátce (a). Jestliže číslo a je kladné, je (a) posunutí doprava o délku rovnou a; jestliže číslo a je záporné, je (a) posunutí doleva o délku rovnou $|a|$; posléze (0) vlastně není posunutí; pro $a = 0$ každý bod zůstane na svém místě.

Pomocí takových posouvání si vysvětlíme součet $a + b$ dvou relativních čísel takto: Provedeme nejprve posunutí (a), potom posunutí (b). Jako výsledek obojího posunutí máme třetí posunutí, o kterém můžeme říci, že je složeno z posunutí (a) a z posunutí (b). Při tomto složeném posunutí přejde počátek v bod, který je právě obrazem součtu $a + b$. Tedy: složíme-li posunutí (a) a posunutí (b) dostaneme posunutí $(a + b)$. Proveďte na příkladech:

(1) $a = 2$, $b = 3$; (2) $a = -2$, $b = 3$;

(3) $a = 2$, $b = -3$; (4) $a = -2$, $b = -3$.

Na těchto a jiných příkladech vysvětlete pravidla známá ze střední školy: Je-li jeden z obou sčítanců roven nule, je součet roven druhému sčítanci. Je-li $a \neq 0$, $b \neq 0$ a mají-li oba sčítanci totéž znamení, má totéž znamení i součet a prostá hodnota součtu je součet prostých hodnot obou sčítanců. Mají-li oba sčítanci opačná znamení a tytéž prosté hodnoty, je součet roven nule neboli kratčeji: Součet dvou opačných čísel je roven nule. Mají-li oba sčítanci opačná znamení, ale nestejné prosté hodnoty, je prostá hodnota součtu rovna rozdílu prostých hodnot obou sčítanců a součet má totéž znamení jako ten sčítanec, jehož prostá hodnota je větší.

Z připomenutých pravidel plyne, že komutativní zákon sčítání platí také pro relativní čísla.

Dosud jsme mluvili pouze o součtu dvou sčítanců. Je-li však dán libovolný počet relativních čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, potom součet $a_1 + a_2 + \ldots\ldots +$ $+ a_n$ vznikne z počátku tím posunutím, které je složeno z posunutí (a_1), $(a_2), \ldots, (a_n)$.

Všimněme si zejména tří sčítanců a, b, c. Máme-li složit tři posunutí (a), (b), (c), můžeme to provésti tak, že nejprve složíme dvě posunutí (a), (b)

v jediné posunutí $(a + b)$ a potom ještě toto posunutí složíme s třetím posunutím (c).

Můžeme však také složit posunuti (a) s tím posunutím $(b + c)$, které vznikne složením dvou posunutí (b), (c). Tím je odůvodněno, že **asociativní zákon sčítání platí také pro relativní čísla.**

Pravidlo

$$a + 0 = 0 + a = a$$

platí zřejmě i pro relativní číslo a.

Dokud jsme nezavedli záporná čísla, byla rovnice

$$a + x = b \tag{1}$$

neřešitelná v případě $a > b$. V oboru relativních čísel je rovnice (1) vždy řešitelná, neboť má řešení

$$x = -a + b. \tag{2}$$

Vskutku podle asociativního zákona sčítání je

$$a + x = a + (-a + b) = [a + (-a)] + b$$

a součet $a + (-a)$ dvou opačných čísel je roven nule, tedy

$$a + x = 0 + b = b.$$

Obráceně, je-li x řešení rovnice (1), platí (2). Neboť podle asociativního zákona sčítání je

$$-a + b = -a + (a + x) = (-a + a) + x,$$

tedy

$$-a + b = 0 + x = x.$$

Podle komutativního zákona sčítání můžeme místo (2) psáti také

$$x = b + (-a),$$

což je zvykem psáti kratčeji

$$x = b - a. \tag{3}$$

Tedy: **odečísti od čísla b číslo a znamená totéž jako k číslu b přičísti číslo $-a$ opačné k číslu a.** V oboru relativních čísel nemusíme proto odčítání vůbec považovat za zvláštní početní výkon, protože je lze převésti na sčítání. V tom je hlavní význam zavedení záporných čísel.

Obecněji každý výkon složený z několika postupných sčítání a odčítání se po zavedení záporných čísel jeví jako sčítání, na př.

$$a - b - c + d$$

je součet čísel a, $-b$, $-c$, d.

Cvičení.

86. Dokažte, že součet dvou opačných čísel je 0.

87. K číslu $3a - 2b + 5c$ utvořte číslo opačné.

88. Které číslo třeba přičísti k číslu a, aby vyšlo číslo b?

89. a) Které číslo třeba odečísti od čísla a, aby vyšlo číslo b? b) Od kterého čísla třeba odečísti číslo a, aby vyšlo číslo b?

90. Dokažte správnost věty: O kolik se zmenší jeden sčítanec, o tolik se zmenší součet.

91. Dokažte správnost vět: a) O kolik se zmenší menšenec, o tolik se zmenší rozdíl. b) O kolik se zmenší menšitel, o tolik se zvětší rozdíl.

92. Dokažte, že $|a + b| \leqq |a| + |b|$. Kdy nastane rovnost?

93. Dokažte, že $|a - b| \leqq |a| + |b|$. Kdy nastane rovnost?

94. Dokažte, že pro $|a| \geqq |b|$ je $|a + b| \geqq |a| - |b|$. Kdy nastane rovnost? Jak je tomu, je-li $|a| < |b|$?

95. Dokažte, že pro $|a| \geqq |b|$ je $|a - b| \geqq |a| - |b|$. Kdy nastane rovnost? Jak je tomu, je-li $|a| < |b|$?

3. Násobení relativních čísel.

Ze střední školy je vám známo, že násobení relativních čísel se provádí podle těchto pravidel: Prostá hodnota součinu dvou relativních čísel je rovna součinu prostých hodnot obou činitelů. Změníme-li znamení jednoho činitele, změní se znamení součinu. Na podkladě těchto základních pravidel snadno sami odvodíte další známá pravidla: Je-li aspoň jeden činitel roven nule, je také součin roven nule. Součin dvou kladných čísel je kladný, rovněž součin dvou záporných čísel je kladný. Je-li jeden činitel kladný a druhý záporný, je součin záporný. Z toho plyne, že i v oboru relativních čísel zůstává správným pravidlo: Je-li součin roven nule, je aspoň jeden činitel roven nule.

Sami snadno odůvodníte, že **komutativní a asociativní zákon násobení platí také pro čísla relativní**. Také **distributivní zákon**

$$(a + b)r = ar + br \tag{1}$$

platí i pro čísla relativní, ale odůvodnění vyžaduje rozeznávání několika případů. Odůvodněte sami, že pravidlo (1) platí pro relativní čísla, jestliže $r = 0$. Dále odůvodněte, že (1) platí také, jestliže $a = 0$ nebo $b = 0$. Zbývá odůvodnit (1) pro případ, že

$$a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad r \neq 0.$$

Protože změna znamení čísla r působí pouze změnu znamení na obou stranách (1), stačí dokázat (1) pro kladná r. Jsou-li také čísla a, b kladná, víme, že pravidlo (1) je správné. Současná změna znamená obou čísel a, b působí na obou stranách (1) pouze změnu znamení; proto platí (1) také, když obě čísla a, b jsou záporná. Zbývá dokázat (1) pro případ, že z čísel a, b je jedno kladné a druhé záporné, při čemž r je kladné. Usuzujeme takto:

Jestliže čísla a, b mají obě stejnou prostou hodnotu, liší se jenom znamením; tedy $a + b = 0$. Také čísla ar, br se liší jenom znamením a proto $ar + br = 0$ a vzorec (1) je správný.

Jestliže čísla a, b mají nestejnou prostou hodnotu a jedno je kladné a druhé záporné, uvážíme, že současná změna znamení obou čísel a, b způsobí na obou stranách (1) pouze změnu znamení; mimo to si všimneme komutativního zákona sčítání. Vidíme, že stačí dokázat (1) pro případ, že a je kladné, b záporné, při čemž a má větší prostou hodnotu než b. Mimo to je r kladné. Protože b je záporné, položme

$$b = -c;$$

čísla a, c jsou kladná, je $a > c$ a máme dokázat, že

$$(a - c)r = ar - cr, \tag{2}$$

při čemž také r je kladné. Položme

$$a - c = s; \tag{3}$$

máme dokázat, že

$$sr = ar - cr, \tag{4}$$

při čemž také c je kladné. Podle (3) je

$$c + s = a \tag{5}$$

a obě čísla c, s jsou kladná. Víme tedy, že

$$(c + s)\,r = cr + sr,$$

neboli

$$ar = cr + sr; \tag{6}$$

protože však c, s, r jsou kladná čísla a protože platí (5), víme, že platí (6). Tím je distributivní zákon (1) dokázán ve všech případech.

Dokažte sami, že pravidlo

$$a \cdot 1 = a$$

zůstává v platnosti i pro relativní číslo a.

Dosud probíraná čísla se jmenují racionální čísla. Mezi ně patří zejména čísla celá

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \ldots\ldots$$
$$-1, \; -2, \; -3, \; -4, \; -5, \; -6, \ldots\ldots$$

Vedle racionálních čísel jsou také ještě iracionální čísla, z nichž některá jste poznali už na střední škole. Jsou to zejména některé druhé odmocniny jako $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ a pod., které budeme v této třídě ještě podrobně probírat, dále na př. také vám již známé Ludolfovo číslo π.

Cvičení.

96. Dokažte správnost věty: Součin několika činitelů, z nichž žádný není roven nule, je kladný, je-li počet záporných činitelů sudý; součin několika činitelů, z nichž žádný není roven nule, je záporný, je-li počet záporných činitelů lichý. Je třeba výslovně uvádět, že žádný z činitelů není roven nule?

97. Odůvodněte, jak z pravidel: Součin dvou čísel kladných je kladný; součin dvou čísel záporných je kladný; součin čísla kladného a záporného je záporný, plyne pravidlo: Je-li součin roven nule, je aspoň jeden činitel roven nule.

98. Odůvodněte, proč pro násobení čísel relativních platí zákon komutativní a asociativní.

99. Odůvodněte, že distributivní zákon $(a + b)r = ar + br$ platí, a) když $r = 0$, b) když $a = 0$, c) když $b = 0$.

100. Dokažte, že součin dvou čísel opačných není nikdy kladný. Jaký tedy je?

101. Z výrazu $[a + (-a)]b$ odvoďte na základě distributivního zákona pravidlo: Změníme-li znamení jednoho činitele, změní se znamení součinu.

102. Z pravidla o násobení relativních čísel odůvodněte, že zlomek, jehož čitatel a jmenovatel jsou rozdílní od nuly a mají totéž znamení, má hodnotu kladnou a že zlomek, jehož čitatel a jmenovatel mají opačná znamení, má hodnotu zápornou.

103. Z pravidla o prosté hodnotě součinu odvoďte, že $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, pokud $y \neq 0$.

4. Nerovnosti.

Také relativní čísla můžeme porovnávat co do velikosti. Při tom je vhodné užívati číselné osy. Číslo a je menší než číslo b a číslo b je větší než číslo a, což píšeme

$$a < b \quad \text{nebo} \quad b > a,$$

jestliže na číselné ose obraz čísla a leží nalevo od obrazu čísla b. Pomocí číselné osy vysvětlete: Nula je menší než každé číslo kladné. Nula je větší než každé číslo záporné. Každé kladné číslo je větší než každé záporné číslo. Ze dvou záporných čísel je to větší, jehož prostá hodnota je menší.

Jestliže je $a < b$, mohou nastati tyto případy:

(1) obě čísla a, b jsou kladná;
(2) číslo a je rovné nule, číslo b je kladné;
(3) číslo b je kladné, číslo a je záporné;
(4) číslo b je rovné nule, číslo a je záporné;
(5) obě čísla a, b jsou záporná.

V každém z těchto případů vysvětlete pomocí číselné osy, že $-a > -b$. Tedy: Jestliže v nerovnosti změníme na obou stranách znamení, platí obrácená nerovnost (větší místo menší, menší místo větší).

Budiž zase $a < b$. Je-li c třetí číslo, vzniknou čísla $a + c$, $b + c$ z čísel a, b určitým posunutím číselné osy (napravo, je-li c kladné, nalevo, je-li c záporné). Ježto obraz čísla a leží nalevo od obrazu čísla b, leží také obraz čísla $a + c$ nalevo od obrazu čísla $b + c$, t. j. $a + c < b + c$. Tedy: V nerovnosti je dovoleno na obou stranách přičíst totéž číslo (kladné, záporné nebo nulu).

Mějme nyní dvě nerovnosti

$$a_1 < b_1, \quad a_2 < b_2. \tag{1}$$

Jestliže v první z obou nerovností přičteme na obou stranách číslo a_2, dostaneme

$$a_1 + a_2 < b_1 + a_2. \tag{2}$$

Jestliže ve druhé z obou nerovností (1) přičteme na obou stranách číslo b_1, dostaneme $a_2 + b_1 < b_2 + b_1$ neboli

$$b_1 + a_2 < b_1 + b_2. \tag{3}$$

Porovnáme-li obě nerovnosti (2) a (3), dospíváme k nerovnosti

$$a_1 + a_2 < b_1 + b_2.$$

Tedy: Dvě souhlasné nerovnosti je dovoleno sečíst. Slovo souhlasné znamená, že je v obou nerovnostech znak $<$ nebo v obou znak $>$.

Jestliže $a \neq b$, existuje číslo $x \neq 0$ tak, že $b = a + x$. Na číselné ose vznikne obraz čísla b z obrazu čísla a posunutím doprava při kladném x, doleva při záporném x. Proto v případě $a < b$ je x kladné a obráceně při kladném x je $a < b$.

Budiž nyní $a < b$; položme zase $b = a + x$, takže x je kladné. Je-li c kladné číslo, je $bc = (a + x)c$ tedy podle distributivního zákona: $bc = ac + xc$. Protože obě čísla x, c jsou kladná, je také součin xc kladný a proto je $ac < bc$. Tedy: V nerovnosti je dovoleno obě strany znásobit týmž **kladným** číslem. Vysvětlete, proč není dovoleno obě strany znásobit číslem nula. Chceme-li obě strany nerovnosti $a < b$ znásobit záporným číslem d, znásobíme nejprve kladným číslem $|d|$, což dá správnou nerovnost $a|d| < b|d|$. Potom však musíme na obou stranách ještě změnit znamení a dospějeme k obrácené nerovnosti $ad > bd$. Tedy: Jestliže obě strany nerovnosti znásobíme týmž záporným číslem, platí pro součiny obrácená nerovnost.

Mějme nyní dvě nerovnosti

$$a_1 < b_1, \quad a_2 < b_2$$

a předpokládejme, že všecka daná čísla jsou kladná. Potom můžeme v prvé z obou nerovností znásobit obě strany číslem a_2 a ve druhé číslem b_1. Dostaneme dvě nové nerovnosti

$$a_1a_2 < b_1a_2, \quad b_1a_2 < b_1b_2,$$

ze kterých plyne nerovnost $a_1a_2 < b_1b_2$. Tedy: Dvě souhlasné nerovnosti mezi **kladnými** čísly je dovoleno znásobit. Je dovoleno znásobit na př. nerovnosti $-2 < 1$, $-4 < 3$ nebo nerovnosti $-2 < -1$, $-4 < -3$?

Cvičení.

104. Opírajíce se o zobrazení čísel na číselné ose, dokažte věty: a) Je-li $a > b$, je $b < a$. b) Je-li $a < b$, je $b > a$. c) Jsou-li a, b libovolná čísla, platí vždy jeden a jen jeden ze vztahů: $a > b$, $a = b$, $a < b$. d) Je-li $a > b$ a $b > c$, je $a > c$.

105. Je možné, aby součet dvou čísel byl menší než a) některý, b) kterýkoli sčítanec? Kdy to nastane?

106. Kdy je a) $a \cdot b > a$; b) $a \cdot b < a$?

107. Je možné, aby součin dvou čísel byl a) větší b) menší než kterýkoli činitel? Kdy to nastane?

108. Jsou-li $a \neq 0$, $b \neq 0$ dvě čísla téhož znamení, pak z nerovnosti $a > b$ plyne $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. Dokažte. Jak je tomu, jsou-li čísla a, b různých znamení?

109. Jak třeba voliti číslo x, aby platilo a) $3x - 5 > 4 - 2x$; b) $2x - 7 > 7x - 2$; c) $3x - 7 < 8x + 5$?

110. Volme libovolné číslo $r > 0$. Jak třeba voliti číslo s, aby oba výrazy $3r - 2s$, $3s - 2r$ byly kladné?

111. a) Je-li $a > b$, je $a > \frac{a+b}{2} > b$. b) Dokažte, že z výsledku plyne: mezi každými dvěma racionálními čísly leží další racionální číslo.

112. Čísla a, b, c jsou kladná. Dokažte: a) Je-li $\frac{a}{b} > 1$, je $\frac{a+c}{b+c} > 1$. b) Je-li $\frac{a}{b} < 1$, je $\frac{a+c}{b+c} < 1$.

113. Čísla a, b, c, d jsou kladná a taková, že $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$. Dokažte, že zlomek $\frac{a+c}{b+d}$ co do velikosti leží mezi oběma zlomky $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$.

IV. DESÍTKOVÁ SOUSTAVA.

1. Mocniny s celými mocniteli.

Často se vyskytují součiny, jejichž všichni činitelé jsou rovni témuž číslu a. Takový součin se jmenuje **mocnina**, číslo a se jmenuje **mocněnec** neboli **základ** mocniny; počet činitelů r se jmenuje **mocnitel** neboli **exponent**; mocnina se základem a a mocnitelem r se značí a^r. Na př.:

$$a^3 = a \cdot a \cdot a, \quad a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \quad \text{a pod.}$$

Nevylučujeme případ $r = 1$;
$$a^1 = a \tag{1}$$
pro každý základ a.

Na základě asociativního zákona násobení snadno odvodíte zákon
$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}. \tag{2}$$
Jak vyslovíte tento zákon?

Mocnina a^{rs} je součin rs činitelů vesměs rovných číslu a; podle definice součinu rs dvou přirozených čísel můžeme rs činitelů rozložit na s skupin po r činitelích. Součin r činitelů z jednotlivé skupiny je a^r; součin s takových částečných součinů je $(a^r)^s$. Proto z obecného asociativního zákona plyne zákon
$$(a^r)^s = a^{rs}. \tag{3}$$
Jak vyslovíte tento zákon?

Z obecného komutativního zákona násobení spolu s asociativním zákonem násobení plyne ještě jeden zákon:
$$a^r \cdot b^r = (ab)^r. \tag{4}$$

Levá strana ve vzorci (4) je podle asociativního zákona rovna součinu $2r$ činitelů, z nichž prvních r je rovno a, ostatních r je rovno b. Podle komutativního zákona je tento součin roven součinu $2r$ činitelů, kteří jsou střídavě rovni a, b. Takový součin je však podle asociativního zákona roven součinu r činitelů vesměs rovných ab, t. j. je roven pravé straně vzorce (4), který je tím dokázán.

Dosud jsme se zabývali pouze takovými mocninami, jejichž mocnitel je přirozené číslo. Je-li mocnitel roven nule, budiž při každém základu a:
$$a^0 = 1. \tag{5}$$

Sami se přesvědčte, že zákony (2), (3), (4) jsou správné i v tom případě, že jeden z mocnitelů r, s (nebo oba) je roven nule.

Je-li základ a rovný nule, je
$$0^0 = 1$$
podle (5), kdežto
$$0^r = 0 \quad \text{pro} \quad r = 1, 2, 3, \ldots . \tag{6}$$

Nyní se budeme zabývati mocninami, jejichž mocnitel je libovolné číslo celé, které může býti také záporné. Je-li $-r$ záporné celé číslo, nevíme zatím, co má znamenat mocnina a^{-r}. Budeme se snažit vysvětlit význam mocniny a^{-r} tak, aby zákon (2) byl správný pro libovolné celé mocnitele, ať mají jakékoli znamení. Potom musí býti pro každé $r = 1, 2, 3, \ldots$:

$$a^r \cdot a^{-r} = a^0,$$

t. j. podle (5) musí býti

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r} \tag{7}$$

pro každé přirozené číslo r. Jelikož symbol $\frac{1}{0}$ je bezvýznamný, vidíme z (6), že také symbol 0^{-r} je bezvýznamný pro každé přirozené r. Omezíme se proto na mocniny, jejichž základ a je rozdílný od nuly. Potom pro každé přirozené číslo r je a^r součin r činitelů různých od nuly, tedy $a^r \neq 0$, a proto a^{-r} má zcela určitý význam.

Jsou-li základy a, b rozdílné od nuly, platí zákony (2), (3), (4) i když některý z mocnitelů r, s (nebo oba) je záporný. O tom se můžete bez potíží přesvědčit sami. Nejlépe bude, provedete-li důkaz v určitém případě, na př. pro $|r| = 4$, $|s| = 3$.

Cvičení.

114. Historická úloha (Ahmesův papyrus okolo 2 000 př. n. l.). Každý ze sedmi lidí má po sedmi kočkách, každá kočka chytne po sedmi myších, každá myš sežere po sedmi klasech ječmene, z každého klasu může vyrůsti po sedmi měřicích zrna. Kolik měřic zrna se uchrání dík kočkám?

115. Francouzský matematik Fermat dokázal větu: „Je-li p prvočíslo a a libovolné číslo s číslem p nesoudělné, pak číslo $a^{p-1} - 1$ je dělitelné číslem p". Ověřte správnost této věty pro $a = 2$, $p = 3, 5, 7, 11, 13$.

116. Historická úloha. Kupec si chtěl dát okovat koně. Kovář žádal tento způsob placení: „Na všecky podkovy potřebuji 24 hřebíků. Za první hřebík mi zaplatíš 1 haléř, za druhý 2 hal., za třetí 4 hal. atd. vždy za každý další hřebík dvakrát tolik". Kupec radostně souhlasil, později však hořce litoval. Kolik musel zaplatiti jenom za poslední hřebík?

117. Kolik je a) $(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6$; b) $a^2 + (-a)^2$; c) $a^3 + (-a)^3$; d) $x^4 - (-x)^4$; e) $x^5 - (-x)^5$?

118. Pro která a je a) $a^2 > a$; b) $a^2 = a$; c) $a^2 < a$? (Převeďte a na levou stranu.)

119. Pro která a je a) $a^3 > a$; b) $a^3 = a$; c) $a^3 < a$? (Převeďte a na levou stranu.)

120. Pro která a je a) $a^3 > a^2$; b) $a^3 = a^2$; c) $a^3 < a^2$? (Převeďte a^2 na levou stranu.)

121. Kolik je a) 3^0, 3^{-1}, 3^{-2}; b) $(-2)^0$, $(-2)^{-1}$, $(-2)^{-2}$; c) $0{,}1^0$, $0{,}1^{-1}$, $0{,}1^{-2}$, $0{,}1^{-3}$?

122. Vypočtěte: a) $(\frac{2}{3})^2$, $(\frac{2}{3})^{-2}$, $(\frac{3}{2})^2$, $(\frac{3}{2})^{-2}$; b) $(\frac{3}{4})^{-1}$, $(\frac{4}{3})^{-1}$, $(-\frac{4}{3})^{-2}$.

123. Co značí: a) ab^{-1}, $(ab)^{-1}$; b) ab^{-2}, $(ab)^{-2}$; c) $-ab^{-1}$, $-(ab)^{-1}$, $(-ab)^{-1}$; d) $-ab^{-2}$, $(-ab)^{-2}$?

124. Vypočtěte: a) $a^2 \cdot a^{-3}$, $a^{-2} \cdot a^3$, $a^{-2} \cdot a^{-3}$; b) $a^{-2} : a^3$, $a^2 : a^{-3}$, $a^{-2} : a^{-3}$.

125. Vypočtěte: a) $(a^{-3} + a^{-2} + a^{-1}) \cdot a^2$; b) $(a + b)(a^{-1} + b^{-1})$.

126. Dokažte, že pro r, s celé, $a \neq 0$ je $a^r : a^s = a^{r-s}$.

127. Dokažte, že pro r celé, $b \neq 0$ je $\dfrac{a^r}{b^r} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^r$.

128. Platí zákony $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, $(a^r)^s = a^{rs}$, i když je $a = 0$? Jaká musí v tomto případě být čísla r, s?

129. Je pravda, že $a^r \cdot b^r = (ab)^r$, i když a) $a = 0$, b) $b = 0$, c) $a = 0$ i $b = 0$?

2. *Číselné soustavy.*

Přečtěte si znovu začátek článku 1 v kapitole I.

Tam jsme mluvili o tom, že přirozená čísla slouží k určování počtu předmětů libovolného souboru. Spočítat, kolik „jednotek“ je v určitém souboru, je prakticky snadné při malých souborech, je to však méně snadné při souborech složených z velkého počtu předmětů. Proto od pradávna bylo čítání velkých souborů prováděno tak, že se ty soubory rozdělovaly na menší soubory o určitém počtu předmětů. Tak vznikly **číselné soustavy,** ze kterých dnes má praktický význam hlavně soustava o základě deset, zvaná **desítková soustava.** Při čítání počtu předmětů v desítkové soustavě nazýváme každý předmět čítaného souboru **základní jednotkou** neboli jednotkou řádu nula. Deset jednotek řádu nula tvoří jednotku řádu 1 rovnou 10 neboli 10^1; deset jednotek řádu 1 tvoří jednotku řádu 2 rovnou 100 neboli 10^2; deset jednotek řádu 2 tvoří jednotku řádu 3 rovnou 1 000 neboli 10^3. Obecně pro každé přirozené číslo r jednotka řádu r je rovna 10^r. Libovolně velký počet předmětů lze potom rozložit na určité počty jednotek různých řádů, při čemž počet jednotek každého řádu je menší než 10. Na př. číslo 9 724 je součet 9 jednotek řádu 3, 7 jednotek řádu 2, 2 jednotek řádu 1, 4 jednotky řádu 0 neboli:

$$9\,724 = 9 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0.$$

Při tom jednotky určitých řádů mohou scházet: na př. je

$$8\,040 = 8 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^1$$

nebo úplněji

$$8\,040 = 8 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0.$$

Počet scházejících jednotek je roven nule; zavedení číslice nula, které je zásluhou starověkých indických matematiků, znamenalo obrovský pokrok v aritmetice, neboť teprve pomocí značky 0 je možné vystihnout pouhým umístěním řádový význam každé jednotky.

V desítkové soustavě můžeme pohodlně zapisovat nejenom přirozená čísla, nýbrž také zlomky se jmenovateli 10, 100, 1 000 atd., obecně zlomky, jejichž jmenovatel je mocnina čísla 10. Na př. je

$$73{,}624 = 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3},$$
$$0{,}0235 = 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4}.$$

Takové zlomky se jmenují **desetinné zlomky.** Při psaní desetinných zlomků je třeba vyznačit **základní místo,** t. j. to místo, na kterém jsou základní jednotky. To se děje pomocí desetinné čárky; v anglosaských zemích se dosud užívá desetinné tečky, které se dříve užívalo také u nás.

V desítkové soustavě zapisujeme čísla pomocí deseti číslic (cifer) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Hodnota čísla je součet místních hodnot jednotlivých číslic. Místní hodnota číslice a je rovna a, je-li a na základním místě, je rovna $a \cdot 10^n$, je-li a o n míst nalevo od základního místa, je rovna $a \cdot 10^{-n}$, je-li a o n míst napravo od základního místa. V každém případě je místní hodnota číslice a rovna $a \cdot 10^r$, kde r je celé číslo, které může býti kladné, záporné nebo rovné nule; r se jmenuje **řád** číslice a; číslo 10^r je jednotka řádu r. Místní hodnota číslice 0 je rovna 0, ať řád r je jakýkoli.

Místo desítkové soustavy je možné vybudovat jiné podobné číselné soustavy, ve kterých číslo 10 je nahrazeno jiným základem. Výhod desítkové soustavy bylo plně využito teprve po zavedení metrické soustavy měr. V Anglii, která nezavedla metrickou soustavu, je praktické počítání mnohem obtížnější než u nás. Staří Babyloňané užívali soustavy se základem 60, jejíž zbytky pozorujeme dosud na jednotkách úhlových a časových.

Desítkové soustavě nejbližší je soustava stovková, jejímž základem je číslo 100. Číslicemi v soustavě stovkové jsou čísla menší než sto, t. j. jsou to vedle číslic soustavy desítkové ještě čísla psaná v této soustavě dvěma číslicemi.

Chceme-li číslo psané v desítkové soustavě vyjádřit v soustavě stovkové, seskupíme číslice ve skupiny po dvou, což si můžeme naznačit svislými příčkami. Na příklad:

$$23|56|87|04,$$

t. j. ve stovkové soustavě máme:

$$23568704 = 23 \cdot 100^3 + 56 \cdot 100^2 + 87 \cdot 100^1 + 4 \cdot 100^0.$$

Nejvyšší skupina může obsahovat také jedinou číslici; na př.:

$$8|50|06|73, \text{ t. j.}$$

$$8500673 = 8 \cdot 100^3 + 50 \cdot 100^2 + 6 \cdot 100^1 + 73 \cdot 100^0.$$

U desetinných zlomků je někdy nutné si přimyslit další nulu

$$3|16,|87|9, \text{ t. j.}$$

$$316{,}879 = 3 \cdot 100^1 + 16 \cdot 100^0 + 87 \cdot 100^{-1} + 90 \cdot 100^{-2}.$$

Cvičení.

130. Kolik je a) dvojciferných, b) trojciferných, c) čtyrciferných přirozených čísel?

131. Kolik čtyrciferných přirozených čísel můžeme napsati číslicemi 0, 2, 3, 5, a) smí-li se každá číslice v každém čísle vyskytovat jen jednou; b) smí-li se každá číslice v každém čísle libovolněkrát opakovat.

132. Napište dvě dvojciferná přirozená čísla, z nichž první má na místě jednotek číslici x a na místě desítek číslici y; druhé pak je psáno týmiž číslicemi v opačném pořádku. Dokažte: a) Součet obou čísel je dělitelný jedenácti; b) rozdíl obou čísel je dělitelný devíti.

133. Rozdíl dvou trojciferných přirozených čísel psaných týmiž číslicemi v opačném pořádku je dělitelný devadesáti devíti. Dokažte.

134. Dělíme-li (aspoň trojciferné) přirozené číslo čtyřmi, dostaneme týž zbytek, jako dělíme-li čtyřmi jeho poslední dvojčíslí. Dokažte.

135. Dělíme-li (aspoň čtyrciferné) přirozené číslo osmi, dostaneme týž zbytek, jako dělíme-li osmi jeho poslední trojčíslí. Dokažte.

136. a) Napište nejmenší přirozené číslo, jehož prvá od nuly různá číslice zleva (zvaná obyčejně nejvyšší číslice) je řádu r-tého. b) Kterého řádu je nejvyšší číslice n-ciferného přirozeného čísla?

137. a) Je-li a kladné číslo, jehož nejvyšší číslice je řádu r-tého, je $10^r \leqq a < 10^{r+1}$. b) Je-li a n-ciferné přirozené číslo, je $10^{n-1} \leqq a < 10^n$. Dokažte.

138. Napište číslo, které má a) 5 jednotek řádu 2, 7 jednotek řádu 1 a 3 jednotky řádu -1; b) 3 jednotky řádu 0, 6 jednotek řádu -2 a 5 jednotek řádu -3.

3. Počítání v desítkové soustavě.

Početní pravidla pro provádění základních početních výkonů v desítkové soustavě jste poznali již na národní škole. Jejich správnost plyne ze zákonů, kterými jsme se zabývali v předcházejících článcích. Na př. sčítání čísel psaných v desítkové soustavě je založeno na asociativním a komutativním zákonu sčítání a na zákonu distributivním. Mějme na př. úkol $3{,}26 + 15{,}3 + 23{,}58$. Každý sčitanec je vlastně součet:

$$
\begin{aligned}
3{,}26 &= 3 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2};\\
15{,}3 &= 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1};\\
23{,}58 &= 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}.
\end{aligned}
$$

Součet všech daných čísel je tedy podle asociativního zákona sčítání roven součtu o deseti sčítancích:

$$
\begin{aligned}
&3 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} +\\
&\quad + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}.
\end{aligned}
$$

Podle komutativního zákona sčítání můžeme sčítance napsat ve kterémkoli jiném pořádku. Volíme takový pořádek, aby přišly napřed číslice nejmenšího řádu, potom řádu o 1 vyššího atd.; tedy

$$
\begin{aligned}
&6 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^0 +\\
&\quad + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^1.
\end{aligned}
$$

Dále podle asociativního zákona sčítání seskupíme sčítance týchž řádů, tedy

$$
\begin{aligned}
&(6 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-2}) + (2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-1}) +\\
&+ (3 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^0) + (1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^1).
\end{aligned}
$$

Podle distributivního zákona je

$$
\begin{aligned}
6 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-2} &= (6 + 8) \cdot 10^{-2} = 14 \cdot 10^{-2},\\
2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-1} &= (2 + 3 + 5) \cdot 10^{-1} = 10 \cdot 10^{-1},\\
3 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^0 &= (3 + 5 + 3) \cdot 10^0 = 11 \cdot 10^0,\\
1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^1 &= (1 + 2) \cdot 10^1 = 3 \cdot 10^1,
\end{aligned}
$$

takže součet daných čísel je roven

$$3{,}26 + 15{,}3 + 23{,}58 = 3 \cdot 10^1 + 11 \cdot 10^0 + 10 \cdot 10^{-1} + 14 \cdot 10^{-2}.$$

Při tom nám ovšem vychází počet jednotek jednotlivých řádů větší než 9 a proto v praxi postupujeme poněkud jinak:

$$6 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-2} = 14 \cdot 10^{-2} = 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2},$$
$$1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-1} = 11 \cdot 10^{-1} = 1 \cdot 10^{0} + 1 \cdot 10^{-1},$$
$$1 \cdot 10^{0} + 3 \cdot 10^{0} + 5 \cdot 10^{0} + 3 \cdot 10^{0} = 12 \cdot 10^{0} = 1 \cdot 10^{1} + 2 \cdot 10^{0},$$
$$1 \cdot 10^{1} + 1 \cdot 10^{1} + 2 \cdot 10^{1} = 4 \cdot 10^{1},$$

tedy:

$$3{,}26 + 15{,}3 + 23{,}58 = 4 \cdot 10^{1} + 2 \cdot 10^{0} + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$$

neboli:

$$3{,}26 + 15{,}3 + 23{,}58 = 42{,}14.$$

Odčítání čísel psaných v desítkové soustavě se provádí obrácením postupu sčítání; hledaný rozdíl je to číslo, které je třeba přičísti k menšiteli, abychom dostali menšenec. Vyložte sami na příkladě.

Velmi jednoduché je v desítkové soustavě násobení mocninou deseti. Je založeno na distributivním zákoně, na asociativním zákoně násobení a na zákoně (2) ze článku 1 pro násobení mocnin o témž základě. Mějme na př. úkol $32{,}6 \cdot 100$ neboli $32{,}6 \cdot 10^2$. Jest

$$32{,}6 = 3 \cdot 10^{1} + 2 \cdot 10^{0} + 6 \cdot 10^{-1},$$

tedy podle distributivního zákona

$$32{,}6 \cdot 100 = (3 \cdot 10^{1}) \cdot 10^{2} + (2 \cdot 10^{0}) \cdot 10^{2} + (6 \cdot 10^{-1}) \cdot 10^{2}$$

a podle asociativního zákona násobení

$$32{,}6 \cdot 100 = 3 \cdot (10^{1} \cdot 10^{2}) + 2 \cdot (10^{0} \cdot 10^{2}) + 6 \cdot (10^{-1} \cdot 10^{2}),$$

tedy podle zákona o násobení mocnin s týmž základem

$$(3 \cdot 10^{1} + 2 \cdot 10^{0} + 6 \cdot 10^{-1}) \cdot 100 = 3 \cdot 10^{3} + 2 \cdot 10^{2} + 6 \cdot 10^{1},$$

t. j. násobení stem se provádí tak, že se řády všech číslic zvětší o dvě, což se prakticky projeví posunutím desetinné čárky a připsáním nuly:

$$32{,}6 \cdot 100 = 3\,260.$$

Podobně na př. dělení číslem $1\,000 = 10^3$ neboli násobení číslem 10^{-3} (které je převrácenou hodnotou čísla 10^3) se provádí tak, že se řády všech číslic zmenší o tři, na př.

$$(5 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2) : 1\,000 = 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0 + 6 \cdot 10^{-1}$$

neboli

$$58\,600 : 1\,000 = 58{,}6.$$

Násobení jednociferným číslem je založeno na distributivním zákoně. Mějme na př. úkol $52{,}4 \cdot 7$ neboli

$$(5 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1}) \cdot 7.$$

To je podle distributivního zákona rovné

$$(5 \cdot 10^1) \cdot 7 + (2 \cdot 10^0) \cdot 7 + (4 \cdot 10^{-1}) \cdot 7,$$

což podle asociativního a komutativního zákona násobení je rovné

$$(5 \cdot 7) \cdot 10^1 + (2 \cdot 7) \cdot 10^0 + (4 \cdot 7) \cdot 10^{-1}$$

neboli

$$35 \cdot 10^1 + 14 \cdot 10^0 + 28 \cdot 10^{-1}.$$

Při tom by se objevily číslice větší než 9, takže je v praxi nutná úprava, vám dobře známá.

Na základě pravidla pro násobení jednociferným číslem se odvodí obecné pravidlo pro násobení dvou čísel psaných v desítkové soustavě. Mějme na př. úkol $5{,}87 \cdot 2{,}3$. Jest

$$5{,}87 \cdot 2{,}3 = 5{,}87 \cdot (2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1})$$

neboli

$$\begin{aligned} 5{,}87 \cdot 2{,}3 &= (5{,}87 \cdot 2) \cdot 10^0 + (5{,}87 \cdot 3)\ 10^{-1} \\ &= 11{,}74 \cdot 10^0 + 17{,}61 \cdot 10^{-1} \\ &= 11{,}74 + 1{,}761 \end{aligned}$$

načež se pokračuje podle pravidla o sčítání čísel psaných v desítkové soustavě a vyjde

$$5{,}87 \cdot 2{,}3 = 13{,}501.$$

Při násobení desetinných čísel je prakticky důležité přezkoušet správnost umístění desetinné čárky. To se děje nejlépe hrubým odhadem činitelů.

Vypočetli-li jsme na př., že $270 \cdot 0{,}0023 = 0{,}621$, umístili jsme správně desetinnou čárku? Činitelé jsou přibližně $200 = 2 \cdot 10^2$; $0{,}002 = 2 \cdot 10^{-3}$. Znásobíme zpaměti $(2 \cdot 10^2) \cdot (2 \cdot 10^{-3}) = 4 \cdot 10^{-1}$. Protože vypočtený součin je přibližně $6 \cdot 10^{-1}$, byla desetinná čárka umístěna správně.

Dělení čísel psaných v desítkové soustavě je založeno na postupném odčítání jednociferných násobků dělitele. Podrobný popis známého postupu a jeho matematické zdůvodnění by bylo dosti zdlouhavé a nebudeme je prováděti. Přesný podíl dvou desetinných čísel obyčejně lze vyjádřit desetinným číslem pouze přibližně. Zde si promluvíme pouze o umístění desetinné čárky v podílu, které se nejpohodlněji provádí takto. Máme-li děliti na př. $382{,}4 : 0{,}567$, je první číslice podílu rovna 6 stejně jako při dělení $3\,824 : 567$; běží o to, jaký řád bude míti tato číslice v podílu $382{,}4 : 0{,}567$. Místní hodnoty dvojčíslí 38 v dělenci a číslice 5 v děliteli jsou $38 \cdot 10^1$ a $5 \cdot 10^{-1}$. Protože $10^1 : 10^{-1} = 10^1 \cdot 10^1 = 10^2$, má nejvyšší číslice podílu řád 2. V dělení potom můžeme pokračovat bez ohledu na desetinnou čárku a dostaneme na př. s přesností na desetiny, že

$$382{,}4 : 0{,}567 \doteq 674{,}4.$$

Cvičení.

139. Sečtěte co nejvýhodněji: a) $156 + 144 + 263$; b) $224 + 327 + 276$; c) $523 + 461 + 539$.

140. Vyložte, jak se spolu násobí čísla ukončená několika nulami a odůvodněte správnost vysloveného pravidla.

141. Znásobte co nejvýhodněji: a) $13 \cdot 14 \cdot 25$; b) $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 20$; c) $12 \cdot 40 \cdot 25 \cdot 125$.

142. a) Násobíme-li spolu a jednotek řádu r-tého a b jednotek řádu s-tého, dostaneme ab jednotek řádu $(r + s)$-tého. b) Dělíme-li ab jednotek řádu r-tého a jednotkami řádu s-tého, dostaneme b jednotek řádu $(r - s)$-tého. Dokažte.

143. Máme-li spolu násobit dvě dvojciferná přirozená čísla, můžeme napsati výsledek ihned, na př. $47 \cdot 26 = 1\,222$. Počítáme takto: $7 \cdot 6 = 42$, napíšeme 2 jednotky řádu 0 a 4 jednotky řádu 1 si pamatujeme; $4 \cdot 6 + 7 \cdot 2 + 4 = 42$, napíšeme 2 jednotky řádu 1 a 4 jednotky řádu 2 si pamatujeme; $4 \cdot 2 + 4 = 12$ jednotek řádu 2, které napíšeme. Odůvodněte obecně.

144. Chceme-li spolu znásobit dvě dvojciferná přirozená čísla, která mají touž číslici řádu 1 a jejichž číslice řádu 0 dají součet 10, můžeme to provésti tak, že utvoříme součin číslice řádu 1 (která je oběma číslům společná) a číslice o 1 větší a k takto utvořenému součinu připíšeme (dvojciferný) součin číslic řádu 0, na příklad $71 \cdot 79 = 5609$, neboť $7 \cdot 8 = 56$, $1 \cdot 9 = 09$. Dokažte obecně.

145. Chceme-li spolu znásobit dvě dvojciferná přirozená čísla, která mají touž číslici řádu 0 a jejichž číslice řádu 1 dají součet 10, můžeme to provést tak, že utvoříme součin číslic řádu 1 zvětšený o číslici řádu 0 (která je oběma číslům společná) a k takto utvořenému součinu připíšeme (dvojciferný) součin číslic řádu 0, na příklad $63 \cdot 43 = 2\,709$, neboť $6 \cdot 4 + 3 = 27$, $3 \cdot 3 = 09$. Dokažte obecně.

146. Kolik číslic má součin dvou přirozených čísel, z nichž jedno je n-ciferné a druhé m-ciferné?

4. Zaokrouhlování čísel.

Ve tvaru desetinného zlomku lze přesně zapsati vedle přirozených čísel pouze ty zlomky, které lze napsati ve tvaru, jehož jmenovatel je mocnina deseti, neboli ty zlomky, které ve svém základním tvaru mají jmenovatele, který není dělitelný žádným jiným prvočíslem mimo 2 a 5. Ale pomocí desetinných zlomků je možné zapsat každé číslo přibližně s chybou tak malou, že je bezvýznamná pro účel, který číselný údaj sleduje. Přibližné vyjádření číselných hodnot se vyskytuje při kterémkoli měření, protože každé měření je pouze přibližné. Mimo to příliš přesná měření mnohdy vůbec nemají praktického smyslu; na př. je zřejmé, že nemá smyslu určovat váhu člověka přesně na gramy nebo vzdálenost dvou obcí přesně na metry. Jestliže na základě přímo měřených veličin určíme početním výkonem hodnotu jiné veličiny, bývá její přesnost často jenom zdánlivá. Jestliže na př. změříme strany obdélníka přesně na centimetry a naměříme délku 87 cm, šířku 65 cm, dostaneme znásobením, že obsah obdélníka je 5 655 cm^2, ale tento výsledek je příliš přesný. Neboť ve skutečnosti mohla být i délka i šířka na př. o 4 mm větší a potom by byl obsah roven 5 715,96 cm^2, byl by tedy o více než 60 cm^2 větší než 5 655 cm^2; nebo by mohla být i délka i šířka na př. zase o 4 mm menší a potom by byl obsah roven 5 594,36 cm^2, byl by tedy o více než 60 cm^2 menší než 5 655 cm^2. Proto v daném případě je vhodné náš početní výsledek zaokrouhlit na dm^2; řekneme, že obsah našeho obdélníka je 57 dm^2.

Zaokrouhlit číslo a na řádovou jednotku 10^n (n může býti také záporné) znamená udat číslo tvaru $c \cdot 10^n$, kde c je přirozené číslo, při čemž zaokrouhlená hodnota má býti co možná blízká číslu a. Zaokrouhlená hodnota může býti menší než a, to je zaokrouhlení sestupné, nebo větší než a, to je zaokrouhlení vzestupné. Je-li na př. $a = 48{,}275$, bude hodnota zaokrouhlená na celky 48 (sestupné zaokrouhlení je výhodnější); hodnota zaokrouhlená na desetiny bude 48,3 (vzestupné zaokrouhlení je výhodnější); při zaokrouhlování na setiny jsou obě hodnoty 48,27; 48,28 stejně výhodné.

Při posuzování míry přesnosti zaokrouhlovaného čísla není podstatný druh řádové jednotky, na kterou zaokrouhlujeme, protože tato řádová jednotka závisí na volbě jednotky míry (nebo váhy a pod.) a protože při posuzování přesnosti je podstatné, jaká je *poměrná velikost* možné chyby ke skutečné velikosti. Na př. vzdálenost 29,6 km zaokrouhlená na desetiny je ovšem stejně přesná jako vzdálenost 29 600 m zaokrouhlená na sta. Váha 847 g zaokrouhlená na gramy je mnohem přesnější než váha 0,4 g zaokrouhlená na desetiny gramu, protože v prvním případě možná chyba je jistě menší než tisícina skutečné hodnoty, kdežto ve druhém případě může chyba přesáhnouti desetinu skutečné hodnoty.

Hrubou, ale pro praxi ve většině případů postačující měrou přesnosti zaokrouhleného čísla je počet jeho *platných číslic*. Platné číslice jsou číslice vyššího řádu než ty, ve kterých je možná chyba; při tom nejvyšší platná číslice je rozdílná od nuly. Je-li 790 hodnota zaokrouhlená na desítky, máme dvě platné číslice; hodnota čísla 789,96 zaokrouhlená na desetiny je totéž číslo 790,0, ale platné číslice jsou nyní čtyři.

Při počítání se zaokrouhlenými čísly je nutné zaokrouhlit také výsledek početních výkonů. Při tom pro praxi ve většině případů zcela postačí následující dvě hrubá pravidla. *Sčítáme-li nebo odčítáme-li čísla, z nichž každé je zaokrouhleno na určitou řádovou jednotku, zaokrouhlíme výsledek na touž řádovou jednotku, a byla-li u daných čísel nestejná, na vyšší z těchto řádových jednotek. Násobíme-li nebo dělíme-li dvě čísla, z nichž každé je zaokrouhleno na určitý počet platných číslic, zaokrouhlíme výsledek na týž počet platných číslic, a byl-li ten počet u daných čísel nestejný, řídíme se tím číslem, které mělo méně platných číslic.*

Při obyčejných měřeních lze zjistit jenom dvě nebo nejvýše tři platné číslice. Jemnými vědeckými prostředky lze mnohdy zjistit i čtvrtou platnou číslici, ale více číslic jen velmi zřídka. Proto v praxi zpravidla vystačíme s čísly zaokrouhlenými na dvě, tři nebo nejvýše čtyři platné číslice a matematické tabulky, o kterých bude později řeč a z nichž některé jste poznali už na střední škole, obsahují hodnoty zaokrouhlené na čtyři platné číslice. Při tom, je-li čtvrtá platná číslice rovna 5, je možné na základě hodnoty zaokrouhlené na čtyři platné číslice pouze tehdy spolehlivě určit hodnotu zaokrouhlenou na méně platných číslic, víme-li, zda běží o zaokrouhlení sestupné či vzestupné. Proto se v tabulkách, je-li poslední číslice rovna 5, píše $\bar{5}$ v tom případě, že zaokrouhlení je vzestupné. Čteme-li na př. v tabulce 21,25, víme, že je to zaokrouhlení sestupné (skutečná hodnota je větší), a proto hodnota zaokrouhlená na tři platné číslice je 21,3. Čteme-li však v tabulce 65,4$\bar{5}$, víme, že je to zaokrouhlení vzestupné (skutečná hodnota je menší), a proto hodnota zaokrouhlená na tři platné číslice je 65,4. Čteme-li posléze v tabulce 12,2$\dot{5}$, znamená to, že číslo v tabulce je číslo přesné a za hodnotu zaokrouhlenou na tři platné číslice můžeme stejným právem zvolit 12,2 jako 12,3. Podobně je tomu v případech, že za číslicí 5 následuje ještě číslice nula nebo několik nul. Čteme-li v tabulce na př. 63,$\bar{5}$0, je to zaokrouhlení vzestupné a hodnota zaokrouhlená na dvě platné číslice je 63.

Cvičení.

147. Dokažte, že každý zlomek, jehož základní tvar je $\dfrac{a}{2^r \cdot 5^s}$, můžeme napsat ve tvaru desetinného zlomku, který má k desetinných míst; při tom k je rovno většímu z obou čísel, r, s.

148. Naopak každý desetinný zlomek, který má k desetinných míst, z nichž poslední je rozdílné od nuly, můžeme napsati jako zlomek obyčejný, jehož základní tvar je $\dfrac{a}{2^r \cdot 5^s}$; při tom $r \leqq k$, $s \leqq k$ a aspoň jedno z čísel r, s je rovno číslu k. Dokažte.

149. Čísla 37,997, 420,005, 0,708 zaokrouhlete na jednotky řádu a) -2, b) -1, c) 0.

150. Číslo, zaokrouhlené (co nejvýhodněji) na jednotky řádu n-tého, liší se od své přesné hodnoty nejvýše o $5 \cdot 10^{n-1}$. Dokažte.

151. Číslo, jehož nejvyšší číslice je řádu n-tého a jež je zaokrouhleno (co nejvýhodněji) na p platných číslic, liší se od své přesné hodnoty nejvýše o $5 \cdot 10^{n-p}$. Dokažte.

152. Čísla $a \doteq 32{,}7$, $b \doteq 5{,}48$ jsou zaokrouhlena (co nejvýhodněji) na tři platné číslice. Nalezněte meze, které nemůže přesáhnout a) součet, b) součin, c) rozdíl, d) podíl přesných hodnot čísel a, b. Nalezené výsledky porovnejte s výsledky získanými podle pravidel na str. 50.

153. Sčítáme-li k čísel, z nichž každé je zaokrouhleno (co nejvýhodněji) na jednotky řádu n-tého, liší se nalezený součet od své přesné hodnoty nejvýše o $\frac{1}{2}k$ jednotek řádu n-tého. Dokažte.

154. Odečítáme-li dvě čísla, z nichž každé je zaokrouhleno (co nejvýhodněji) na jednotky řádu n-tého, liší se nalezený rozdíl od své přesné hodnoty nejvýše o jednu jednotku řádu n-tého. Dokažte.

V. DRUHÁ ODMOCNINA.

1. Vzorce pro $(a+b)^2$, $x^2 - y^2$.

Na střední škole jste poznali vzorce

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \tag{1}$$

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y). \tag{2}$$

Hodnoty

$$0^2 = 0, \quad 1^2 = 1, \quad 2^2 = 4, \quad 3^2 = 9, \quad 4^2 = 16,$$

$$5^2 = 25, \quad 6^2 = 36, \quad 7^2 = 49, \quad 8^2 = 64, \quad 9^2 = 81$$

znáte z násobilky. Víte také, že

$$10^2 = 100, \quad 20^2 = 400, \quad 30^2 = 900, \ldots, \quad 90^2 = 8\,100.$$

Je-li n dvojciferné přirozené číslo, můžeme rychle vypočísti n^2 na základě vzorce (1). Je-li a číslice řádu 0 a c číslice řádu 1 v čísle n, je $n = a + 10c$ a proto je podle vzorce (1)

$$n^2 = a^2 + 2ac \cdot 10 + c^2 \cdot 100, \tag{3}$$

t. j. číslo n^2 se skládá z a^2 jednotek, $2ac$ desítek a c^2 set. Proto vypočteme na př. 87^2 takto. Nejprve máme $7^2 = 49$ jednotek, z nichž 9 napíšeme a 40 převedeme na 4 desítky. Dále máme $4 + 2 \cdot 8 \cdot 7 = 116$ desítek, z nichž 6 napíšeme a 110 převedeme na 11 set. Posléze máme $11 + 8^2 = 75$ set, které napíšeme. Výsledek: $87^2 = 7\,569$. Zvláště rychle lze provésti výpočet, jestliže číslice a se rovná 5. V tomto případě (3) dává

$$n^2 = 25 + 100c + 100c^2$$

neboli

$$n^2 = 25 + 100c(c+1).$$

Tedy: číslo c znásobíme o 1 větším číslem $c + 1$ a k součinu připíšeme číslice 25, na př. $65^2 = 4\,225$.

Umíme-li vypočíst druhou mocninu dvojciferného čísla, umíme ovšem vypočíst také druhou mocninu trojciferného čísla, které končí nulou, na př. $850^2 = 722\,500$. Máme-li vypočíst druhou mocninu trojciferného čísla, které nekončí nulou, můžeme užíti vzorce (2) takto. Budiž x dané číslo a a jeho poslední číslice, takže můžeme položiti:

$$x = 10n + a,$$

kde n je dvojciferné číslo. Položme ještě

$$y = 10n, \quad \text{tedy} \quad a = x - y.$$

Číslo y^2 umíme vypočísti, z něho dostaneme x^2, přičteme-li $x^2 - y^2$. Avšak podle (2) je

$$x^2 - y^2 = (20n + a) \cdot a.$$

Proto $x^2 - y^2$ se vypočte, jestliže k číslu $2n$ připíšeme číslici a, čímž vznikne číslo $20n + a$, které je třeba ještě znásobit číslem a. Výpočtu dáváme úpravu zde naznačenou pro případ $x = 876$.

$$\begin{array}{lr}
\underline{876^2} & \\
87^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & 7569 \\
1746 \cdot 6 \;.\;.\;.\;.\;.\;. & \underline{10476} \\
 & 767376
\end{array}$$

Jestliže ve vzorci (1) číslo b je poměrně malé proti číslu a, je na pravé straně člen b^2 poměrně malý proti ostatním členům a máme přibližný vzorec

$$(a + b)^2 \doteq a^2 + 2ab, \tag{4}$$

který je tím přesnější, čím menší je poměrně b než a. Jestliže na př. je b více než stokrát menší než a, je b^2 více než 200krát menší než člen $2ab$ a více než 10 000krát menší než člen a^2. Je-li b více než tisíckrát menší než a, je b^2 více než 2 000krát menší než $2ab$ a více než milionkrát menší než a^2.

Cvičení.

155. Je možné, aby bylo $(a + b)^2 = a^2 + b^2$? Kdy to nastane?

156. Dvojciferné přirozené číslo, jehož číslice řádu 1 je 5, umocníme na druhou takto: Číslo 25 zvětšíme o číslici řádu 0 a k takto vzniklému číslu připíšeme (dvojcifernou) druhou mocninu číslice řádu 0, na příklad $53^2 = 2809$, neboť $25 + 3 = 28$, $3^2 = 09$. Dokažte obecně.

157. Zvětší-li se číslo a o x, zvětší se jeho druhá mocnina o $x(2a + x)$. Dokažte.

158. Liší-li se dvě čísla a_1, a_2 o x, liší se jejich druhé mocniny o $x(a_1 + a_2)$. Dokažte.

159. Dokažte, že pro každé a, b je $a^2 + b^2 \geqq 2ab$.

160. Dokažte, že součet kladného čísla a a jeho převrácené hodnoty není nikdy menší než 2. Je možné, aby byl roven dvěma?

161. a) Ověřte správnost identit:

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2,$$
$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax - by)^2 + (ay + bx)^2.$$

Ukažte, že tyto rovnosti vyjadřují větu: „Součin dvou čísel, z nichž každé je součtem dvou čtverců, lze (dvěma způsoby) vyjádřiti jako součet dvou čtverců.“ b) Lze vždy součin $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ vyjádřiti jako součet dvou čtverců dvěma různými způsoby? Příklad: $a = 3$, $b = 2$, $x = y = 1$.

162. Dokažte, že $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$. Jak to plyne z cvičení 161?

163. Ověřte správnost identity:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 +$$
$$+ (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2.$$

164. Dokažte, že $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2$. Jak to plyne z cvičení 163?

165. Dokažte, že

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (ab + bc + ca)^2 + (ac - b^2)^2 + (ba - c^2)^2 + (bc - a^2)^2.$$

Jak to plyne z cvičení 163?

166. Vypočtěte: a) $(x + y + z)(x - y - z)$; b) $(x - y + z)(x + y - z)$; c) $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(- a + b + c)$.

167. Rozložte v součin: a) $x^2 - y^2 + 2yz - z^2$; b) $u^4 - v^4$; c) $p^4 - 2p^2q^2 + q^4$; d) $a^4 + a^2b^2 + b^4$.

2. Tabulka druhých mocnin.

Již na střední škole jste se seznámili s tabulkou druhých mocnin. Tabulka obsahuje hodnoty n^2, zaokrouhlené na čtyři platné číslice, čísel

$$n = 1;\ 1{,}01;\ 1{,}02;\ 1{,}03;\ 1{,}04;\ \dots;\ 10{,}07;\ 10{,}08;\ 10{,}09.$$

Rozdíl mezi dvěma sousedními hodnotami základu n je 0,1. Celkem běží o 910 hodnot n, které jsou rozděleny do 91 řádků. V každém řádku jsou druhé mocniny deseti čísel n; tato čísla n mají společné první dvě číslice (udané na levém kraji řádku); třetí číslice je vždy stejná pro celý sloupec (je udána v každém sloupci nahoře i dole). Na př. druhou mocninu $8{,}36^2$ hledáme v řádku se záhlavím 8,3 a sloupci se záhlavím 6; najdeme $8{,}36^2 \doteq 69{,}89$.

Vedle druhých mocnin shora uvedených čísel n vyčteme bezprostředně z tabulky také druhé mocniny čísel $n \cdot 10^r$, kde r je libovolné celé číslo, kladné nebo záporné. Jest

$$(n \cdot 10^r)^2 = n^2 \cdot 10^{2r}$$

a proto druhá mocnina čísla $n \cdot 10^r$ se dostane z druhé mocniny n^2 zvětšením řádu číslic o $2r$ při kladném r, zmenšením řádů číslic o $2|r|$ při záporném r, na příklad

$$836^2 \doteq 698\,900; \qquad 0{,}0836^2 \doteq 0{,}006989.$$

V tabulce jsou zaokrouhlené druhé mocniny čísel n mezi 1 a 10, která jsou rovna celému počtu setin. Pomocí posledních sloupců v tabulce (sloupců oprav) najdeme však rychle také (zase na čtyři platné číslice zaokrouhlené) druhé mocniny čísel n mezi 1 a 10, která jsou rovna celému počtu tisícin. Takové číslo, není-li rovné celému počtu setin, má tvar

$$x = n \pm c \cdot 10^{-3},$$

kde n je číslo, jehož druhá mocnina je v tabulce, a c má jednu z hodnot

$$c = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Číslo n vznikne z čísla x zaokrouhlením na tři platné číslice, a to sestupným zaokrouhlením v případě $x = n + c \cdot 10^{-3}$, vzestupným zaokrouhlením v případě $x = n - c \cdot 10^{-3}$. Podle vzorce o druhé mocnině dvojčlenu je

$$x^2 = n^2 \pm 2cn \cdot 10^{-3} + c^2 \cdot 10^{-6}.$$

Poslední člen je nanejvýš $25 \cdot 10^{-6}$, tedy je menší než $3 \cdot 10^{-5}$ a při zaokrouhlení na čtyři platné číslice je bezvýznamný. Tedy je přibližně

$$x^2 \doteq n^2 \pm 2cn \cdot 10^{-3}$$

Při různých hodnotách n v témž řádku se jednotlivá n od sebe liší o méně než 10^{-1}, proto se možné hodnoty výrazu $2cn \cdot 10^{-3}$ od sebe liší o méně než $2c \cdot 10^{-4}$, tedy o méně než 10^{-3}, t. j. při zaokrouhlení na čtyři platné číslice se od sebe podstatně neliší. Proto opravy, t. j. to, co je třeba přičísti k n^2 nebo odečísti od n^2, aby se dostalo x^2, jsou v celém řádku stejné. Jsou udány ve sloupci oprav, při čemž číslice c je udána v záhlaví sloupce oprav (nahoře i dole); není udán řád opravy, který souhlasí s nejnižším řádem zaokrouhlené hodnoty n^2.

Počítejme na př. $6{,}723^2$.

V tabulce najdeme		$6{,}72^2 \doteq 45{,}16$
ve sloupci oprav najdeme a přičteme		4
	Tedy:	$6{,}723^2 \doteq 45{,}20.$

Jiný příklad: počítejme $5{,}268^2$.

V tabulce najdeme		$5{,}27^2 \doteq 27{,}77$
ve sloupci oprav najdeme a odečteme		2
	Tedy:	$5{,}268^2 \doteq 27{,}75.$

Ježto

$$(x \cdot 10^r)^2 = x^2 \cdot 10^{2r}$$

najdeme změnou řádů na čtyři platné číslice zaokrouhlené druhé mocniny čísla zaokrouhleného na čtyři platné číslice, na př.:

$$672{,}3^2 \doteq 452000;$$

$$0{,}05268^2 \doteq 0{,}002775.$$

Cvičení.

168. Která čísla uvedená v tabulce druhých mocnin jsou přesná?

169. Čísla uvedená v prvých 22 řádcích tabulky ve sloupci 5 končí vesměs číslicí 3. Dovedete vysvětlit proč?

170. Čísla uvedená v prvých 22 řádcích kteréhokoli sloupce (vyjímajíc sloupec 0 a sloupec 5) mají tu vlastnost, že se v nich vždy po pěti řádcích opakuje na posledním místě táž číslice. Jak to vysvětlíte?

171. Je-li číslo a udáno na setiny, pak čísla a^2 a $(5 + a)^2$ zaokrouhlená na setiny končí touž číslicí. Vysvětlete.

172. Je-li číslo a udáno na setiny, při čemž číslice řádu -2 je lichá, pak čísla a^2 a $(2{,}5 + a)^2$ zaokrouhlená na setiny končí touž číslicí. Vysvětlete.

173. Nalezněte z tabulky druhé mocniny zaokrouhlené na čtyři platné číslice: a) $3{,}27^2$, $40{,}8^2$, 987^2, $0{,}123^2$, $0{,}0207^2$; b) $2{,}386^2$, $8{,}705^2$, $12{,}41^2$, $456{,}7^2$, $0{,}2008^2$.

174. Použitím vzorce pro $x^2 - y^2$ a tabulky druhých mocnin stanovte na čtyři platné číslice: a) $32{,}7 \cdot 48{,}5$; b) $127{,}3 \cdot 8{,}26$.

175. Zjistěte, jsou-li si rovny výrazy: $62{,}9^2 + 13{,}5^2$ a $62{,}1^2 + 16{,}8^2$.

3. Pojem druhé odmocniny.

Budeme se zabývati rovnicí tvaru

$$x^2 = a, \tag{1}$$

ve které x je neznámá a a je dané číslo.

Je-li $a = 0$, má rovnice (1) zřejmě jediné řešení $x = 0$. Je-li a záporné, nemá rovnice (1) žádné řešení, neboť druhá mocnina nuly, kladného nebo záporného čísla nikdy není záporná. Ovšem ve druhé třídě provedeme rozšíření pojmu čísla o t. zv. imaginární čísla a potom rovnice (1) se stane řešitelná i při záporném a. Prozatím však rovnice (1) je při záporném a neřešitelná a budeme zkoumati rovnici (1) pro k l a d n é a. Víte ze střední školy, že při kladném a má jako řešení určité kladné číslo, které se nazývá **druhá odmocnina** kladného čísla a a které se značí $\sqrt{a}$. Tedy při kladném a vztah

$$c = \sqrt{a} \tag{2}$$

znamená totéž jako

$$c > 0, \qquad c^2 = a. \tag{3}$$

Při záporném a výraz $\sqrt{a}$ je bezvýznamný a nabude významu až po zavedení imaginárních čísel. Pro $a = 0$ je účelné položiti

$$\sqrt{0} = 0. \tag{4}$$

V následujícím článku si promluvíme o tom, jak se při kladném a najde přibližná hodnota $\sqrt{a}$ pomocí tabulek druhých mocnin. Je-li $c^2 = a$, je také $(-c)^2 = a$ a proto při kladném a má rovnice (1) dvě řešení:

$$\text{kladné řešení } c = \sqrt{a},$$
$$\text{záporné řešení } -c = -\sqrt{a}.$$

Jiná řešení než tato dvě rovnice (1) nemá. Neboť ježto $c^2 = a$, je pro každé číslo x

$$x^2 - a = x^2 - c^2 \quad \text{neboli} \quad x^2 - a = (x - c)(x + c).$$

Je-li číslo x řešení rovnice (1), je $x^2 - a = 0$, tedy součin $(x - c)(x + c)$ je roven nule a proto aspoň jeden činitel je rovný nule. To dává dva případy: buďto je $x - c = 0$, tedy $x = c$, t. j. $x = \sqrt{a}$, nebo je $x + c = 0$, tedy $x = -c$, t. j. $x = -\sqrt{a}$.

Pro druhé odmocniny platí (při kladných a, b) důležité pravidlo:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}. \tag{5}$$

Neboť $\sqrt{a}$ je to kladné číslo c, pro které platí $c^2 = a$; $\sqrt{b}$ je to kladné číslo d, pro které platí $d^2 = b$. Tedy

$$(cd)^2 = c^2d^2 \quad \text{neboli} \quad (cd)^2 = ab$$

a protože součin cd dvou kladných čísel je kladný, je $\sqrt{ab} = cd$, což znamená, že platí (5). Obecněji platí při libovolném počtu kladných činitelů $a_1, a_2, \ldots,$ a_n:

$$\sqrt{a_1 a_2 \ldots a_n} = \sqrt{a_1}\,\sqrt{a_2} \ldots \sqrt{a_n}. \tag{6}$$

Snadno dokážeme dále, že při kladných a, b platí pravidlo:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}. \tag{7}$$

Neboť můžeme položiti

$$\frac{a}{b} = c;$$

c je kladné číslo, pro které platí $bc = a$. Podle (5) je však $\sqrt{bc} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$ neboli $\sqrt{b} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a}$, takže

$$\sqrt{c} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

což není nic jiného než vzorec (7).

Jsou-li a, b kladná čísla a je-li $a < b$, je také $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Neboť budiž

$$x = \sqrt{a}, \qquad y = \sqrt{b}.$$

Čísla x, y jsou kladná a jest $x^2 = a$, $y^2 = b$, tedy $y^2 - x^2 = b - a$, takže

$$b - a = (x + y)(y - x). \tag{8}$$

Ježto $a < b$, součin (8) je kladný; také činitel $x + y$ je kladný a proto i druhý činitel $y - x$ je kladný, takže $x < y$ neboli $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Cvičení.

176. Platí pravidlo $\sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n} = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdots \sqrt{a_n}$, i když některé z čísel $a_1, a_2, \cdots, a_n$ je rovno nule?

177. Je možné, aby $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, i když některé z čísel a, b je rovno nule?

178. Jak překontrolujete, že a) $\sqrt{529} = 23$; b) $\sqrt{100489} = 317$?

179. a) Značí rovnice $x^2 = 7$ a $x = \sqrt{7}$ přesně totéž?
b) Co značí $\sqrt{a^2}$?

180. Vypočtěte: a) $\sqrt{16 \cdot 49}$; b) $\sqrt{36 \cdot 64}$; c) $\sqrt{49 \cdot 64 \cdot 81}$.

181. Vypočtěte: a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$; b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$; c) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{15}$.

182. Určete a) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; b) $\sqrt{3\frac{6}{25}}$; c) $\sqrt{2{,}5 \cdot \sqrt{8{,}1}}$.

183. Stanovte: a) $\sqrt{25} + \sqrt{16}$; b) $\sqrt{25 + 16}$; c) $\sqrt{25} + 16$.

184. Dokažte, že a) $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$; b) $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.

185. Je dán čtverec o straně 5 cm a obdélník o stranách 6 cm a 4 cm. Který z nich má delší úhlopříčku?

4. *Vyhledávání druhých odmocnin z tabulek druhých mocnin.*

V tabulce druhých mocnin máme (na čtyři platné číslice zaokrouhlené) hodnoty n^2 pro

$$n = 1;\ 1{,}01;\ 1{,}02;\ 1{,}03;\ \ldots\ldots;\ 10$$

(a mimo to ještě pro dalších 9 hodnot čísla n). Protože $1^2 = 1$; $10^2 = 100$, jsou všecky tyto druhé mocniny mezi čísly 1 a 100. Obráceně, jestliže číslo a je mezi čísly 1 a 100, může se státi, že číslo a se vyskytuje v tabulce druhých mocnin. Tak je tomu na př. pro

$$a = 7{,}673 \qquad \text{nebo} \qquad a = 94{,}67,$$

neboť podle tabulky je

$$2{,}77^2 \doteq 7{,}673 \qquad \text{nebo} \qquad 9{,}73^2 \doteq 94{,}67.$$

Proto máme

$$\sqrt{7{,}673} \doteq 2{,}77 \qquad \text{nebo} \qquad \sqrt{94{,}67} \doteq 9{,}73.$$

Ale i když číslo a, které stále budiž mezi 1 a 100, není v tabulce druhých mocnin, snadno vyčteme z tabulky hodnotu $\sqrt{a}$ zaokrouhlenou na tři platné číslice. Stačí vyhledat v tabulce to číslo n, pro které je n^2 co nejblíže číslu a; potom je $\sqrt{a} \doteq n$ na tři platné číslice. Na př. pro $a = 32{,}92$ je v tabulce nejblíž číslu a číslo $32{,}95 \doteq 5{,}74^2$ a proto je

$$\sqrt{32{,}92} \doteq 5{,}74$$

přesně na tři platné číslice. Pomocí sloupců oprav můžeme určit 32,92 přesně na čtyři platné číslice. Neboť pomocí sloupců oprav můžeme určit druhé mocniny čísel, které jsou větší nebo menší než 5,74 o

$$0{,}001 \text{ nebo } 0{,}002 \text{ nebo } 0{,}003 \text{ nebo } 0{,}004 \text{ nebo } 0{,}005. \tag{1}$$

V daném případě, protože $a = 32{,}92$ je o něco menší než $5{,}74^2$, bude $\sqrt{a}$ o něco menší než 5,74. V řádku se záhlavím 5,7 máme opravy 1, 2, 3, 5, 6; z nich vyhovuje oprava 3, neboť číslo $a = 32{,}92$ se liší od čísla $5{,}74^2 \doteq 32{,}95$ o $3 \cdot 10^{-2}$. Ježto oprava 3 odpovídá číslici 3 a ježto

$$5{,}74 - 0{,}003 = 5{,}737,$$

máme $\sqrt{32{,}92} \doteq 5{,}737$ přesně na čtyři platné číslice.

Praktický postup si vysvětlíme na příkladě $\sqrt{a}$ pro $a = 7,6$. V tabulce druhých mocnin číslu a nejblíže je číslo $n^2 \doteq 7,618$, kde $n = 2,76$. Proto je $\sqrt{a} = \sqrt{7,6} \doteq 2,76$ přesně na tři platné číslice. Chceme-li určit čtvrtou číslici čísla $\sqrt{a}$, postupujeme takto. Číslo $a = 7,6$ je trochu menší než číslo $7,618 \doteq 2,76^2$, které máme v tabulce. Proto je $\sqrt{a}$ trochu menší než 2,76. Avšak

$$7,618 - 7,6 = 0,018 = 18 \cdot 10^{-3}$$

a číslu 18 je v tabulce oprav (v řádku se záhlavím 2,7) nejblíže číslo 16, které odpovídá číslici 3 nebo 7. Proto je

$$\sqrt{a} \doteq 2,76 - 0,003 = 2,757.$$

V některých případech nastane u čtvrté číslice malá pochybnost, na př. pro $a = 14,08$. V tabulce najdeme nejblíže číslu 14,08 číslo $14,06 \doteq 3,75^2$. Jest $14,08 - 14,06 = 2 \cdot 10^{-2}$ a v tabulce oprav rozdíl 2 odpovídá i číslici 2 i číslici 3. Proto přesně na čtyři platné číslice je buďto $\sqrt{14,08} \doteq 3,752$ nebo $\sqrt{14,08} \doteq$ $\doteq 3,753$.

Dosud jsme počítali podle tabulek hodnotu $\sqrt{a}$ pouze pro ten případ, že číslo a je mezi čísly 1 a 100. Jestliže číslo a je buďto větší než 100 nebo menší než 1, položíme

$$a = b \cdot 100^r, \tag{2}$$

kde celé číslo r (kladné nebo záporné volíme tak, aby b bylo mezi 1 a 100. Potom umíme najít $\sqrt{b}$ (přesně na tři nebo čtyři platné číslice). Je však $100 =$ $= 10^2$, takže podle vzorce (3) ve článku 1 v kapitole IV je $100^r = 10^{2r}$ neboli $100^r = (10^r)^2$, tedy

$$\sqrt{100^r} = 10^r,$$

takže podle vzorce (5) ve článku 3 je

$$\sqrt{a} = \sqrt{b} \cdot 10^r,$$

t. j. číslo $\sqrt{a}$ vznikne z čísla $\sqrt{b}$ posunutím číslic o r míst doleva při kladném r, o $|r|$ míst doprava při záporném r. Prakticky k číslu a najdeme číslo b mezi 1 a 10, které vyhovuje vztahu (2), jestliže napíšeme číslo a ve stovkové soustavě (viz konec článku 2 v kapitole IV). Je-li na př.

$$a = 3568 = 35\,|\,68,$$

jest

$$a = 35{,}68 \cdot 100.$$

Z tabulek najdeme $\sqrt{35{,}68} \doteq 5{,}973$, takže $\sqrt{3568} \doteq 59{,}73$. Jiný příklad:

$$a = 0{,}000561 = 0{,}\,|\,00\,|\,05\,|\,61.$$

Jest

$$a = 5{,}67 \cdot 100^{-2}.$$

Z tabulek najdeme $\sqrt{5{,}67} \doteq 2{,}381$, tedy $\sqrt{0{,}000567} \doteq 0{,}02381$.

Cvičení.

186. Určete podle tabulky: $\sqrt{6{,}656}$, $\sqrt{45{,}16}$, $\sqrt{723{,}6}$, $\sqrt{8968}$, $\sqrt{0{,}9663}$, $\sqrt{0{,}05523}$, $\sqrt{0{,}003758}$, $\sqrt{0{,}0003881}$.

187. Určete podle tabulky: $\sqrt{1{,}234}$, $\sqrt{3{,}456}$, $\sqrt{45{,}67}$, $\sqrt{55{,}55}$, $\sqrt{605{,}9}$, $\sqrt{7575}$, $\sqrt{0{,}5722}$, $\sqrt{0{,}06133}$, $\sqrt{0{,}007284}$, $\sqrt{0{,}0008103}$.

188. Určete podle tabulky: $\sqrt{7}$, $\sqrt{80}$, $\sqrt{800}$, $\sqrt{0{,}3}$, $\sqrt{0{,}017}$, $\sqrt{0{,}0023}$, $\sqrt{0{,}001}$.

189. Obsah čtverce je 125 cm^2. Určete jeho stranu.

190. Odvěsny pravoúhlého trojúhelníka měří 37,2 cm a 26,4 cm. Vypočtěte přeponu.

191. Přepona pravoúhlého trojúhelníka měří 234 m, odvěsna 176 m. Jak dlouhá je druhá odvěsna?

192. V kružnici s poloměrem 78 mm je vedena tětiva délky 125 mm. Jak je vzdálena od středu kružnice?

193. Hrany kvádru měří 12,8 cm, 21,5 cm a 36,4 cm. a) Jak dlouhé jsou stěnové úhlopříčky? b) Jak dlouhá je tělesová úhlopříčka?

194. Doba t (vteřin) pádu tělesa volně padajícího s výše s m je dána vzorcem $t = \sqrt{\dfrac{2s}{g}}$, kde $g \doteq 9{,}81$. Jak dlouho padá těleso s výše 60 m?

195. Doba kyvu t (vteřin) kyvadla délky l m je stanovena vzorcem $t = \pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, kde $g \doteq 9{,}81$. Vypočtěte dobu kyvu kyvadla, jehož délka je a) 50 cm, b) 30 cm.

5. *Přesnější určování druhých odmocnin.*

Pro praxi postačí zpravidla určení druhé odmocniny přesně na tři platné číslice, které lze provésti podle tabulek bez užití sloupců oprav. Jsou však také úlohy, ve kterých je třeba umět určit druhou odmocninu přesněji. Proto si promluvíme stručně o tomto úkolu. Je dána přibližná hodnota b nějaké druhé odmocniny $\sqrt{a}$; má se najít přesnější hodnota této druhé odmocniny. Položíme

$$\sqrt{a} = b + x; \tag{1}$$

máme určit, čemu se přibližně rovná x. Poznamenejme, že čísla a, b jsou kladná, ale x může býti kladné i záporné. Rozhodně je však číslo $|x|$ proti číslu b malé. Z rovnice (1) plyne, že $a = (b + x)^2$ neboli

$$a = b^2 + 2bx + x^2. \tag{2}$$

Ze tří sčítanců napravo ve (2) je poslední sčítanec poměrně malý a proto je přibližně

$$a - b^2 \doteq 2bx$$

neboli

$$x \doteq \frac{a - b^2}{2b}. \tag{3}$$

Hodnotu (3) vypočteme dělením a dosadíme do (1), čímž je určena žádaná přesnější hodnota odmocniny $\sqrt{a}$.

Objasníme si tento postup na dvou příkladech. **První příklad:** $\sqrt{2}$. Z tabulek vidíme, že na čtyři platné číslice je $\sqrt{2} \doteq 1{,}414$ nebo $\sqrt{2} \doteq 1{,}415$. Násobením vypočteme, že

$$1{,}414^2 = 1{,}414 \cdot 1{,}414 = 1{,}999396,$$

$$1{,}415^2 = 1{,}415 \cdot 1{,}415 = 2{,}002225.$$

Je tedy $1{,}414^2 < 2$; $1{,}415^2 > 2$. Z toho soudíme, že $1{,}414 < \sqrt{2}$; $1{,}415 > \sqrt{2}$. Mimo to je číslo $1{,}414^2$ blíže číslu 2 než číslo $1{,}415^2$ a proto položíme

$$\sqrt{2} = 1{,}414 + x, \tag{4}$$

kde číslo x bude kladné a menší než $0{,}001 = 10^{-3}$, pravděpodobně dokonce menší než $0{,}0005 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$. Podle (4) je

$$2 = 1{,}414^2 + 2x \cdot 1{,}414 + x^2,$$

kde zanedbáme sčítance x^2 a položíme tedy

$$2 \doteq 1{,}999396 + x \cdot 2{,}828,$$

takže

$$x \doteq 0{,}000604 : 2{,}828.$$

Dělením na tři platné číslice najdeme

$$x \doteq 0{,}000214,$$

takže

$$\sqrt{2} \doteq 1{,}414214. \tag{5}$$

Násobením můžeme zjistit, že

$$1{,}414214^2 = 2{,}000001237796, \tag{6}$$
$$1{,}414213^2 = 1{,}999998409369,$$

z čehož soudíme, že výsledek (5) je správný na 7 platných číslic. Dá se dokázati, že tímto postupem můžeme každou druhou odmocninu vypočítat na 7 platných číslic, jestliže napřed určíme z tabulek hodnotu odmocniny zaokrouhlenou na 4 platné číslice a potom určíme x dělením na 3 platné číslice.

Druhý příklad. Vycházejíce z přibližné hodnoty (5), položíme

$$\sqrt{2} = 1{,}414214 + y.$$

Podle (6) je

$$2 = 2{,}000001237796 + 2y \cdot 1{,}414214 + y^2,$$

tedy po zanedbání y^2:

$$-y \cdot 2{,}828428 \doteq 0{,}000001237796;$$

číslo y je tedy záporné. Dělením najdeme

$$-y \doteq 0{,}000000437627,$$

takže

$$\sqrt{2} \doteq 1{,}414213562373. \tag{7}$$

Dá se dokázati, že v (7) máme skutečně hodnotu $\sqrt{2}$ zaokrouhlenou na 13 platných číslic. Taková přesnost je pro praktické potřeby zbytečná, ale theoreticky je důležité, že je možné vypočíst každou druhou odmocninu s libovolně vysokou přesností.

Cvičení.

196. Je-li b přibližná hodnota $\sqrt{a}$ a je-li $x = \dfrac{a - b^2}{2b}$, je $\sqrt{a} < b + x$. Dokažte. — [Návod: Zkoumejte, jaké znamení má výraz $\sqrt{a} - b - x$.]

197. Je-li b přibližná hodnota $\sqrt{a}$ tak volená, že $\sqrt{a} < 3b$, a je-li $x = \dfrac{a - b^2}{2b}$, je číslo $b + x$ lepším přiblížením k číslu $\sqrt{a}$ než číslo b samo. Dokažte: — [Návod: Porovnávejte čísla $|b - \sqrt{a}|$ a $(b + x - \sqrt{a})$; viz cvič. 196.]

198. Je-li hodnota $\sqrt{a}$ zaokrouhlena na p platných číslic číslem b co nejvýhodněji a položíme-li $x = \dfrac{a - b^2}{2b}$, liší se číslo $\sqrt{a}$ od čísla $b + x$ o méně než $\frac{1}{p}$ jednotky stojící na místě $(2p - 1)$ní platné číslice. Dokažte. — [Návod: Je-li nejvyšší číslice čísla b řádu n-tého, je $|\sqrt{a} - b| < 5 \cdot 10^{n-p}$ (viz cvičení 151); dále užijte výsledku cvičení 196 a pamatujte při tom, že $b \geqq 10^n$ (viz cvičení 137a).]

199. Z výsledku předcházejícího cvičení odvoďte, že postupem popsaným v textu dostaneme hodnotu $\sqrt{2}$ skutečně na 7, případně na 13 platných číslic.

200. Určete na 7 platných číslic: a) $\sqrt{3}$, b) $\sqrt{5}$, c) $\sqrt{6}$, d) $\sqrt{10}$.

201. Určete $\sqrt{3}$ na 13 platných číslic.

6. Irracionálnost druhých odmocnin.

Dosud jsme se zabývali pouze výpočtem zaokrouhlených hodnot druhých odmocnin. Je-li a kladné racionální číslo (tedy zlomek nebo přirozené číslo), můžeme se ptát, zdali $\sqrt{a}$ je racionální číslo. Uvidíme, že v četných případech odpověď je záporná, že tedy často druhá odmocnina racionálního čísla je irracionální číslo (viz konec článku 3 v kapitole III).

Budiž n přirozené číslo. Budeme zkoumati, za jakých podmínek také číslo $\sqrt{n}$ je přirozené číslo. Tomu tak je pro $n = 1$, neboť $\sqrt{1} = 1$. Je-li n větší než 1, víme (viz článek 3 v kapitole II), že lze n jediným způsobem napsat jako součin prvočísel. Některá z těchto prvočísel si mohou býti rovna, ale součin několika sobě rovných prvočísel můžeme napsat ve tvaru mocniny, takže

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots\ldots p_k^{r_k}, \tag{1}$$

kde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ jsou navzájem různá prvočísla a mocnitelé $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_k$ jsou přirozená čísla. Při tom může býti také $k = 1$; v tomto případě rozklad (1) zní prostě

$$n = p^r,$$

kde p je prvočíslo a r je přirozené číslo, které může býti rovné 1. Rozklad (1) je jednoznačný až na pořádek činitelů; chceme-li dosáhnouti naprosté jednoznačnosti, předpokládáme, že prvočísla $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_k$ jsou uspořádána vzestupně, t. j. od nejmenšího k největšímu.

Jestliže všichni mocnitelé $r_1, r_2, \ldots, r_k$ rozkladu (1) jsou čísla sudá, pak n je přirozené číslo. Neboť pak je

$$r_1 = 2s_1, \quad r_2 = 2s_2, \ldots, r_k = 2s_k, \tag{2}$$

kde $s_1, s_2, \ldots, s_k$ jsou přirozená čísla, a snadno se přesvědčíte, že

$$\sqrt{n} = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_n^{s_n}, \tag{3}$$

takže $\sqrt{n}$ je přirozené číslo. Obráceně, jestliže $\sqrt{n}$ je přirozené číslo, jsou všichni mocnitelé $r_1, r_2, \ldots, r_n$ rozkladu (1) čísla sudá. Neboť pro přirozené číslo $\sqrt{n}$ musíme míti rozklad tvaru (3), ze kterého plyne rozklad (1), jehož mocnitelé mají tvar (2), jsou tedy sudá čísla.

Budiž nyní n takové přirozené číslo, že $\sqrt{n}$ není přirozené číslo, takže máme rozklad (1), ve kterém aspoň jeden mocnitel je liché číslo. Zkoumejme, je-li možné, aby $\sqrt{n}$ byl zlomek. Je-li tomu tak, napišme ten zlomek v základním tvaru

$$\sqrt{n} = \frac{u}{v}, \tag{4}$$

kde tedy u, v jsou dvě nesoudělná přirozená čísla. Při tom je $v > 1$; ježto $n > 1$, je také $\sqrt{n} > 1$, tedy $u > v$ a proto také $u > 1$. Čísla u, v rozložme na prvočinitele:

$$u = p_1^{a_1} \ldots p_h^{a_h}, \qquad v = q_1^{b_1} \ldots q_k^{b_k}; \tag{5}$$

při tom jsou $p_1, \ldots, p_h$ navzájem různá prvočísla, $q_1, \ldots, q_k$ jsou navzájem různá prvočísla a všichni mocnitelé v rozkladech (5) jsou přirozená čísla. Jelikož čísla u, v jsou nesoudělná, je každé z prvočísel $p_1, \ldots, p_h$ různé od každého z prvočísel $q_1, \ldots, q_k$. Nyní ze (4) plyne $v \cdot \sqrt{n} = u$ a z toho plyne dále

$$v^2 n = u^2$$

neboli

$$q_1^{2b_1} \ldots q_k^{2b_k} \cdot n = p_1^{2a_1} \ldots p_h^{2a_h}. \tag{6}$$

Označme m společnou hodnotu obou stran rovnosti (6); je tedy m přirozené číslo a jest

$$m = q_1^{2b_1} \ldots q_k^{2b_k} \cdot n.$$

Jestliže rozložíme n na prvočinitele, dostaneme rozklad na prvočinitele čísla m.

Tedy v rozkladu čísla m na prvočinitele se musí vyskytnout prvočíslo q_1. Na druhé straně jest

$$m = p_1^{2a_1} \dots p_h^{2a_h},$$

t. j. v rozkladu čísla m se vyskytují pouze prvočísla $p_1, \dots, p_h$, která jsou různá od q_1. To je v rozporu s tím, že se q_1 musí vyskytnout v rozkladu na prvočinitele čísla m. Rozpor vznikl z předpokladu, že číslo $\sqrt{n}$ je možné přesně vyjádřit ve tvaru zlomku (4). Proto tento předpoklad je nemožný. Tím jsme dokázali: Je-li n přirozené číslo a není-li $\sqrt{n}$ přirozené číslo, jest $\sqrt{n}$ irracionální číslo. Tedy na př. čísla

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{7}\ \text{atd.}$$

jsou irracionální čísla.

Jsou-li m, n dvě přirozená čísla a jsou-li $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ přirozená čísla, je také $\sqrt{mn}$ přirozené číslo. Neboť je-li $\sqrt{m} = x$, $\sqrt{n} = y$, jest $\sqrt{mn} = xy$; jsou-li x, y přirozená čísla, je také xy přirozené číslo. Ale i když $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ nejsou přirozená čísla, může $\sqrt{mn}$ býti přirozené číslo; na př. čísla $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$ jsou irracionální, ale $\sqrt{2 . 8} = 4$ je přirozené číslo. Na druhé straně platí: Jsou-li m, n dvě **nesoudělná** přirozená čísla a je-li $\sqrt{mn}$ přirozené číslo, jsou také $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ přirozená čísla. To je zřejmé, je-li $m = 1$ nebo $n = 1$. Je-li však $m > 1$, $n > 1$, rozložme obě čísla m, n na prvočinitele:

$$m = p_1^{a_1} \dots p_h^{a_h}, \qquad n = q_1^{b_1} \dots q_k^{b_k} \tag{7}$$

Ježto m, n jsou nesoudělná čísla, je každé z prvočísel $p_1, \dots, p_h$ různé od každého z prvočísel $q_1, \dots, q_k$ a proto všecka prvočísla

$$p_1, \dots, p_h, q_1, \dots, q_k$$

jsou navzájem různá. Z rozkladů (7) dostaneme rozklad na prvočinitele

$$mn = p_1^{a_1} \dots p_h^{a_h} q_1^{b_1} \dots q_k^{b_k}. \tag{8}$$

Protože mn je přirozené číslo, musí každý z mocnitelů v (8) býti číslo sudé. Jsou tedy všecka čísla $a_1, \dots, a_h$ sudá a proto je $\sqrt{m}$ přirozené číslo; mimo to jsou všecka čísla $b_1, \dots, b_k$ sudá a proto je $\sqrt{n}$ přirozené číslo.

Budiž nyní

$$z = \frac{m}{n} \tag{9}$$

zlomek v základním tvaru, takže m, n jsou dvě nesoudělná přirozená čísla. Jestliže $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ jsou přirozená čísla, jest

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$$

(viz vzorec (7) ve článku 3) racionální číslo. Obráceně, jestliže $\sqrt{z}$ je racionální číslo, jsou $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ přirozená čísla. Neboť budiž $\sqrt{z} = x$, kde x je racionální číslo. Podle (9) je $n^2 z = mn$, tedy (viz vzorec (5) ve článku 3) $n\sqrt{z} = \sqrt{mn}$ neboli $nx = \sqrt{mn}$, takže $\sqrt{mn}$ je racionální číslo. Protože mn je přirozené číslo, plyne z toho, že $\sqrt{mn}$ je přirozené číslo a protože m, n jsou nesoudělná, musí také $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ býti přirozená čísla. Z dokázaného následuje, že na př.

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ \sqrt{\tfrac{1}{3}},\ \sqrt{\tfrac{2}{3}},\ \sqrt{\tfrac{3}{2}},\ \sqrt{\tfrac{2}{5}},\ \sqrt{\tfrac{5}{2}} \quad \text{atd.}$$

jsou irracionální čísla.

Cvičení.

202. Vyšetřte, jsou-li racionálními čísly druhé odmocniny těchto čísel: 1296, 1728, 1764, 2268, 2304.

203. Je-li $\sqrt{a}$ přirozené číslo a je-li číslo a dělitelné dvěma, je také dělitelné čtyřmi. Dokažte. Vyslovte a dokažte obdobnou větu pro libovolného prvočinitele p.

204. Jsou-li $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$, $\sqrt{p}$ přirozená čísla, je také $\sqrt{mnp}$ přirozené číslo. Dokažte. Platí věta i pro více činitelů?

205. Je-li $\sqrt{mnp}$ přirozené číslo a jsou-li čísla m, n, p po dvou nesoudělná, jsou také čísla $\sqrt{m}, \sqrt{n}, \sqrt{p}$ přirozená. Dokažte a rozšiřte i na větší počet činitelů.

206. Jaké podmínky musí býti splněny, aby $\sqrt{mn}$ bylo přirozené číslo, i když $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ nejsou čísla přirozená?

207. Je možné, aby $\sqrt{\dfrac{m}{n}}$ bylo racionální číslo, i když $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ nejsou přirozená čísla?

208. Určete: a) $\sqrt{54} \cdot \sqrt{96}$; b) $\sqrt{30} \cdot \sqrt{35} \cdot \sqrt{42}$; c) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{24} \cdot \sqrt{35}$.

209. Která z následujících čísel jsou racionální:
a) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; b) $\sqrt{3\frac{5}{9}}$; c) $\sqrt{1\frac{1}{24}}$; d) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$?

7. Částečné odmocňování.

Budiž n přirozené číslo. Budeme zkoumat, zdali číslo n může býti dělitelné druhou mocninou u^2 nějakého přirozeného čísla u. Tomu je tak vždy, je-li $u = 1$. Pro $u > 1$ budiž

$$u = p_1^{s_1} \ldots p_k^{s_k}$$

rozklad na prvočinitele čísla u, takže $s_1, \ldots, s_k$ jsou přirozená čísla a

$$u^2 = p_1^{2s_1} \ldots p_k^{2s_k}. \tag{1}$$

Protože číslo n je dělitelné číslem u^2, jest

$$n = u^2 v, \tag{2}$$

kde také v je přirozené číslo, takže

$$n = p_1^{2s_1} \ldots p_k^{2s_k} . v. \tag{3}$$

Je-li $v = 1$, je $n = u^2$, takže v (1) máme už rozklad na prvočinitele čísla n, ve kterém mocnitel $2s_1$ prvočísla p_1 je větší než 1. Je-li však $v > 1$ a rozložíme-li v na prvočinitele, dostaneme ze (3) rozklad na prvočinitele čísla n a pozorujeme, že mocnitel prvočísla p_1 je alespoň roven $2s_1$, tedy je jistě větší než 1. Tím je dokázáno: Jestliže přirozené číslo n je dělitelné druhou mocninou u^2 přirozeného čísla $u > 1$, potom v rozkladu čísla n na prvočinitele musí aspoň jedno prvočíslo míti mocnitele většího než 1.

Budiž nyní

$$m = p_1 \ldots p_k \tag{4}$$

součin k různých prvočísel; při tom může býti $k = 1$, t. j. číslo m samo může býti prvočíslem. Z toho plyne, že číslo m není dělitelné druhou mocninou u^2 žádného přirozeného čísla $u > 1$. Naproti tomu, jestliže v rozkladu na prvočinitele nějakého přirozeného čísla n se vyskytuje aspoň jedno prvočíslo p s mocnitelem větším než 1, je číslo n dělitelné druhou mocninou prvočísla p. Z toho důvodu nazýváme čísla tvaru (4) **čísla prostá čtverců,** protože nejsou dělitelná druhou mocninou neboli čtvercem žádného přirozeného čísla $u > 1$.

Budiž nyní $n > 1$ jakékoliv přirozené číslo. Jeho rozklad na prvočinitele můžeme napsati ve tvaru

$$n = p_1^{a_1} \ldots p_h^{a_h} \cdot q_1^{b_1} \ldots q_k^{b_k}, \tag{5}$$

kde mocnitelé jsou přirozená čísla, při čemž mocnitelé $a_1, \ldots, a_h$ jsou čísla sudá, mocnitelé $b_1, \ldots, b_k$ jsou čísla lichá. Při tom mohou prvočísla označená p (s různými indexy) vůbec chybět, načež rozklad (5) má tvar

$$n = q_1^{b_1} \ldots q_k^{b_k} \tag{5'}$$

nebo mohou chybět prvočísla označená q (s různými indexy), načež rozklad (5) má tvar

$$n = p_1^{a_1} \dots p_h^{a_h}. \tag{5''}$$

Jelikož čísla $a_1, \dots, a_h$ jsou sudá, jest

$$a_1 = 2r_1, \dots, a_h = 2r_h,$$

kde $r_1, \dots, r_h$ jsou přirozená čísla. Jelikož čísla $b_1, \dots, b_k$ jsou lichá, jest

$$b_1 = 2s_1 + 1, \dots, b_k = 2s_k + 1,$$

kde každé z čísel $s_1, \dots, s_k$ je přirozené číslo nebo nula. Rozklad (5) potom zní

$$n = p_1^{2r_1} \dots p_h^{2r_h} \cdot q_1^{2s_1+1} \dots q_k^{2s_k+1}. \tag{6}$$

Položme

$$u = p_1^{r_1} \dots p_h^{r_h} \cdot q_1^{s_1} \dots q_k^{s_k},$$

$$m = q_1 \dots q_k,$$

takže z (6) plyne, že

$$n = u^2 m. \tag{7}$$

V případě (5′) zní (6)

$$n = q_1^{2s_1+1} \dots q_k^{2s_k+1}$$

a jest

$$u = q_1^{s_1} q_2^{s_2} \dots q_k^{s_k}.$$

V případě (5″) zní (6)

$$n = p_1^{2r_1} \dots p_h^{2r_h}$$

a jest $m = 1$, tedy $n = u^2$ je druhá mocnina přirozeného čísla u. Nenastane-li případ (5″), t. j. jestliže $\sqrt{n}$ není přirozené číslo, plyne ze (7)

$$\sqrt{n} = u \cdot \sqrt{m}.$$

Tedy: Jestliže druhá odmocnina $\sqrt{n}$ přirozeného čísla n je iracionální, jest

$$\sqrt{n} = u \cdot \sqrt{m}, \tag{8}$$

kde u je přirozené číslo a m je číslo prosté čtverců. V případě (5″) je číslo n samo čtvercem a jest $m = 1$; $n = u^2$.

Ve tvaru (8) budeme psáti každou iracionální druhou odmocninu $\sqrt{n}$

přirozeného čísla n. Uvedení druhé odmocniny $\sqrt{n}$ na tvar (8) se jmenuje **částečné odmocňování**. Příklady:

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2},\ \sqrt{12} = 2\sqrt{3},\ \sqrt{18} = 3\sqrt{2},\ \sqrt{20} = 2\sqrt{5},$$
$$\sqrt{24} = 2\sqrt{6},\ \sqrt{27} = 3\sqrt{3},\ \sqrt{28} = 2\sqrt{7},\ \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\quad \text{atd.}$$

Částečným odmocňováním uvedeme každou iracionální druhou odmocninu $\sqrt{n}$ na **základní tvar**. Všimněme si nyní iracionální druhé odmocniny

$$x = \sqrt{\frac{m}{n}} \tag{9}$$

zlomku $\frac{m}{n}$. Předpokládáme, že zlomek je napsán v základním tvaru, takže přirozená čísla m, n jsou nesoudělná. Jest

$$\frac{m}{n} = \frac{mn}{n^2},$$

tedy

$$x = \frac{\sqrt{mn}}{n}.$$

Uvedeme-li druhou odmocninu $\sqrt{mn}$ přirozeného čísla na základní tvar

$$\sqrt{mn} = u\sqrt{v},$$

jest

$$x = \frac{u}{n}\cdot\sqrt{v}, \tag{10}$$

t. j. iracionální druhá odmocnina (9) je napsána ve tvaru součinu (10) zlomku $\frac{u}{n}$ se druhou odmocninou $\sqrt{v}$ čtverců prostého čísla v. Tvar (10) je **základní tvar** iracionální druhé odmocniny (9) zlomku. Příklady:

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3},\ \sqrt{\tfrac{2}{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{6},\ \sqrt{\tfrac{1}{5}} = \tfrac{1}{5}\sqrt{5},\ \sqrt{\tfrac{2}{5}} = \tfrac{1}{5}\sqrt{10},$$
$$\sqrt{\tfrac{3}{5}} = \tfrac{1}{5}\sqrt{15},\ \sqrt{\tfrac{4}{5}} = \tfrac{2}{5}\sqrt{5},\ \sqrt{\tfrac{5}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{10},\ \sqrt{\tfrac{5}{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{15},\ \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5},\ \sqrt{\tfrac{1}{7}} = \tfrac{1}{7}\sqrt{7}$$

atd.

Cvičení.

210. Rozhodněte, která z následujících čísel jsou prostá čtverců: 210, 240, 256, 315.

211. Napište všecka čísla prostá čtverců menší než 50.

212. a) Je možné, aby odmocninou součinu dvou čísel prostých čtverců bylo číslo přirozené? b) Je možné, aby odmocninou součinu tří čísel prostých čtverců bylo číslo přirozené?

213. Součin dvou odmocnin v základním tvaru $u\sqrt{m}$, $v\sqrt{n}$, při čemž m, n jsou dvě různá čísla prostá čtverců a u, v jsou racionální čísla různá od nuly, není nikdy číslo racionální. Dokažte.

214. Jsou-li $u\sqrt{m}$, $v\sqrt{n}$ dvě odmocniny v základním tvaru, při čemž m, n jsou dvě různá čísla prostá čtverců a u, v jsou racionální čísla různá od nuly, pak není možné, aby $u\sqrt{m} = v\sqrt{n}$. Dokažte.

215. Uveďte na základní tvar čísla: a) $\sqrt{40}$; b) $\sqrt{45}$; c) $\sqrt{48}$; d) $\sqrt{50}$; e) $\sqrt{56}$; f) $\sqrt{72}$; g) $\sqrt{147}$; h) $\sqrt{338}$; i) $\sqrt{363}$; j) $\sqrt{1000}$.

216. Na základní tvar uveďte čísla: a) $\sqrt{\frac{1}{8}}$; b) $\sqrt{\frac{3}{8}}$; c) $\sqrt{1\frac{1}{2}}$; d) $\sqrt{2\frac{1}{12}}$; e) $\sqrt{3\frac{1}{5}}$; f) $\sqrt{3\frac{3}{8}}$; g) $\sqrt{1\frac{1}{49}}$; h) $\sqrt{21\frac{1}{3}}$; i) $\sqrt{3{,}6}$; j) $\sqrt{48{,}8}$.

217. Čísla p, q, s jsou prvočísla různá navzájem a různá od 2 a od 3. Na základní tvar uveďte čísla: a) $\sqrt{p^3}$; b) $\sqrt{q^5}$; c) $\sqrt{r^7}$; d) $\sqrt{p^3q}$; e) $\sqrt{pr^3}$; f) $\sqrt{q^3r^2}$; g) $\sqrt{9p^5q^6r^7}$; h) $\sqrt{8pq^2r^6}$.

218. Čísla p, q, r, s jsou prvočísla různá navzájem a různá od 2 a od 3. Na základní tvar uveďte výrazy:

a) $\sqrt{\dfrac{p^3}{q^2}}$; b) $\sqrt{\dfrac{p^2}{q^3}}$; c) $\sqrt{\dfrac{pq^2}{r^3}}$; d) $\sqrt{\dfrac{9p^2q}{4rs^2}}$; e) $\sqrt{\dfrac{8pq^3}{27r^2s^3}}$.

219. Které z uvedených čísel je větší: a) $5\sqrt{3}$ nebo $2\sqrt{19}$; b) $9\sqrt{3}$ nebo $11\sqrt{2}$?

8. *Čísla racionálně závislá na druhé odmocnině.*

Budiž n přirozené číslo takové, že $\sqrt{n}$ je iracionální. O čísle x řekneme, že je racionálně závislé na $\sqrt{n}$, můžeme-li je napsat ve tvaru

$$x = r + s\sqrt{n}, \tag{1}$$

kde r, s jsou čísla racionální. Je-li $s = 0$, je $x = r$, t. j. x je racionální. Tedy každé racionální číslo je racionálně závislé na $\sqrt{n}$. Je-li však $s \neq 0$, je číslo (1) iracionální. Neboť je-li $s \neq 0$, plyne z (1), že

$$\frac{x - r}{s} = \sqrt{n}; \tag{2}$$

kdyby bylo x racionální, bylo by také číslo (2) racionální, což je nemožné.

Číslo x racionálně závislé na $\sqrt{n}$ lze jen jediným způsobem vyjádřit ve tvaru (1). Neboť budiž

$$r_1 + s_1\sqrt{n} = r_2 + s_2\sqrt{n}, \tag{3}$$

kde r_1, r_2, s_1, s_2 jsou racionální čísla. Máme dokázati, že je $r_1 = r_2$, $s_1 = s_2$. Položíme-li

$$r = r_1 - r_2, \qquad s = s_1 - s_2, \tag{4}$$

plyne ze (3), že

$$r + s\sqrt{n} = 0. \tag{5}$$

Avšak z (5) plyne, že

$$r = 0, \quad s = 0. \tag{6}$$

Neboť ježto 0 je racionální číslo, plyne z (5) nejprve, že $s = 0$, načež (5) sama dá $r = 0$. Podle (4) a (6) je skutečně $r_1 = r_2$, $s_1 = s_2$.

Součet a součin dvou čísel racionálně závislých na $\sqrt{n}$ je zase racionálně závislý na $\sqrt{n}$. Neboť je-li

$$x_1 = r_1 + s_1\sqrt{n}, \qquad x_2 = r_2 + s_2\sqrt{n},$$

kde r_1, s_1, r_2, s_2 jsou racionální čísla, je

$$x_1 + x_2 = (r_1 + r_2) + (s_1 + s_2)\sqrt{n},$$

$$x_1x_2 = (r_1r_2 + s_1s_2n) + (s_1r_2 + r_1s_2)\sqrt{n}$$

a všecka čísla

$$r_1 + r_2, \quad s_1 + s_2, \quad r_1r_2 + s_1s_2n, \quad s_1r_2 + r_1s_2$$

jsou racionální.

Je-li číslo x racionálně závislé na $\sqrt{n}$, je také opačné číslo $-x$ racionálně závislé na $\sqrt{n}$. Neboť z (1) plyne

$$-x = (-r) + (-s)\sqrt{n}$$

a zároveň s čísly r, s také čísla $-r$, $-s$ jsou racionální.

Je-li číslo $x \neq 0$ racionálně závislé na $\sqrt{n}$, je také převrácená hodnota $\frac{1}{x}$ racionálně závislá na $\sqrt{n}$. To je zřejmé, je-li x racionální. Je-li však x iracionální, je v (1) jistě $s \neq 0$. Potom je $r - s\sqrt{n} \neq 0$, neboť jinak by (viz (5) a (6)) bylo $r = 0$, $s = 0$. Tedy je různý od nuly také součin

$$(r + s\sqrt{n})(r - s\sqrt{n}) = r^2 - s^2n$$

a máme

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{r + s\sqrt{n}} = \frac{r - s\sqrt{n}}{(r + s\sqrt{n})(r - s\sqrt{n})} = \frac{r - s\sqrt{n}}{r^2 - s^2n} =$$

$$= \frac{r}{r^2 - s^2n} - \frac{s}{r^2 - s^2n}\sqrt{n} = r' + s'\sqrt{n}$$

s racionálními r', s'.

Rozdíl a podíl dvou čísel racionálně závislých na $\sqrt{n}$ je zase racionálně závislý na $\sqrt{n}$; v případě podílu musí ovšem dělitel býti různý od nuly. Neboť

$$x_1 - x_2 = x_1 + (-x_2),$$

$$x_1 : x_2 = x_1 \cdot \frac{1}{x_2}.$$

Cvičení.

220. Dokažte, že součin tří činitelů, z nichž každý je racionálně závislý na $\sqrt{n}$, je také racionálně závislý na $\sqrt{n}$. Platí to i pro větší počet činitelů?

221. Dokažte, že zlomek, jehož čitatel i jmenovatel je součin několika činitelů racionálně závislých na $\sqrt{n}$, je také racionálně závislý na $\sqrt{n}$.

222. Dokažte, že každá mocnina čísla racionálně závislého na $\sqrt{n}$ s libovolným celým mocnitelem je opět číslo racionálně závislé na $\sqrt{n}$.

223. Je možné, aby součet dvou iracionálních čísel byl číslo racionální? Udejte příklad.

224. Je možné, aby součin dvou iracionálních čísel byl číslo racionální? Udejte příklad.

225. Napište ve tvaru čísla racionálně závislého na odmocnině:

a) $(1 + \sqrt{3})\sqrt{3}$; b) $(3 + 2\sqrt{2})(2 - 3\sqrt{2})$; c) $\frac{6}{\sqrt{2}}$; d) $\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; e) $\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$; f) $\frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}$; g) $\frac{2 - 3\sqrt{7}}{1 + \sqrt{7}}$.

226. Dokažte, že číslo $x = s\sqrt{m} + t\sqrt{n}$ je vždy iracionální, jsou-li čísla m, n dvě různá čísla prostá čtverců a s, t jsou dvě čísla racionální, při čemž není současně $s = 0$, $t = 0$.

227. Dokažte, že není možno, aby $r_1 + s\sqrt{m} = r_2 + t\sqrt{n}$, pokud m, n jsou dvě různá čísla prostá čtverců a r_1, r_2, s, t čísla racionální, při čemž není současně $s = 0$, $t = 0$.

VI. KVADRATICKÉ ROVNICE.

1. Opakování o rovnicích.

V matematice máme velmi často před sebou úkol vypočítat neznámé číslo, které má vyhovovat předepsaným podmínkám. V nejjednodušších případech je bezprostředně patrné, kterými početními výkony se žádané číslo vypočte, a celý úkol spočívá vlastně pouze v dovednosti provádět ty početní výkony. Ale na střední škole jste se naučili také řešit úkoly, ve kterých není bezprostředně patrné, kterých početních výkonů je třeba. V takových případech si pomáháme usuzováním. Příklad: Ze dvou míst vzdálených 27 km vyjdou zároveň dva chodci a jdou si vstříc. První ujde za hodinu 5 km, druhý 4 km. Za jakou dobu se setkají? Usuzujeme takto: Protože $5 + 4 = 9$, přibliží se chodci za každou hodinu o 9 km. Protože $27 : 9 = 3$, setkají se za tři hodiny.

Již na střední škole jste poznali, že v podobných případech můžeme místo přímého usuzování postupovati také takto. Neznámé číslo si označíme nějakým písmenem, nejčastěji písmenem x. Potom si na základě podmínek úlohy vyjádříme postupně všecka čísla, o kterých je v úloze řeč, pomocí neznámé hodnoty x. Posléze dojdeme k takovému číslu, které je vyjádřeno pomocí x dvěma různými způsoby. Zapíšeme-li, že oba výrazy vyjadřující to číslo si jsou rovny, dostaneme rovnici s neznámou x. Tuto rovnici řešíme a její řešení neboli kořen je hledaná hodnota x. V předcházejícím případě bude postup tento. Chodci se setkají za x hodin. Za tuto dobu ujde první chodec $5x$ km, druhý $4x$ km. Obě tyto vzdálenosti dají dohromady $(5x+4x)$ km, což se musí rovnati 27 km. Máme tedy rovnici $5x + 4x = 27$ a snadno najdeme její řešení neboli kořen $x = 3$, čímž je úloha řešena.

V uvedeném případě je přímé řešení úlohy úsudkem vlastně jednodušší než řešení pomocí rovnice. Vezměme však jiný příklad: Čtverec a obdélník mají týž obsah. Délka obdélníka je o 5 m větší než strana čtverce. Šířka obdélníka je o 4 m menší než strana čtverce. Čemu se rovná strana čtverce? Zde už přímé řešení úsudkem je obtížnější a nebudeme je prováděti. Pomocí rovnice se však úloha rozřeší velmi snadno. Zvolíme 1 m za jednotku délky, 1 m^2 za jednotku plošnou. Je-li strana čtverce rovna x m, jsou obsahy čtverce a obdélníka vyjádřeny čísly x^2, $(x + 5)(x - 4)$. Máme tedy rovnici $(x + 5)(x - 4) = x^2$ a snadno vypočteme, že $x = 20$. Tedy strana čtverce je rovna 20 m.

Řešení jednoduchých rovnic spočívá na známých zákonech platných pro základní početní výkony. U první z našich rovnic $5x + 4x = 27$ uvedeme $5x + 4x$ pomocí distributivního zákona na tvar $(5 + 4)x$ neboli $9x$ a máme novou rovnici $9x = 27$, k jejímuž řešení potřebujeme pouze věděti, že neznámý činitel součinu se najde dělením. U druhé z našich rovnic $(x + 5)(x - 4) = x^2$ uvedeme $(x + 5)(x - 4)$ pomocí distributivního zákona na tvar $x^2 + x - 20$ a máme novou rovnici

$$x^2 + x - 20 = x^2. \tag{1}$$

Úprava rovnice (1) se provádí podle pravidla, že každý člen rovnice můžeme převésti na druhou stranu se změnou znamení. Odůvodněte toto pravidlo na základě pravidel pro sčítání relativních čísel. Převedeme-li v (1) člen x^2 nalevo a člen -20 napravo, dostaneme

$$x^2 + x - x^2 = 20.$$

Levá strana je rovna $x^2 - x^2 + x$ podle komutativního zákona sčítání, tedy je rovna $0 + x$ neboli x, takže dostáváme řešení $x = 20$.

Rozřešíme ještě úlohu: Ze dvou kovů, jejichž měrné váhy jsou s_1 g/cm³ a s_2 g/cm³ ($s_1 < s_2$), je utvořena slitina o měrné váze s g/cm³. Kolik procent (co do váhy) každého kovu slitina obsahuje?

Obsahuje-li slitina x% prvního kovu, znamená to, že ve 100 g slitiny je x g prvního kovu. Označme pro okamžik písmenem y, kolik g druhého kovu obsahuje 100 g slitiny, t. j. kolik % druhého kovu slitina obsahuje. Součet čísel x a y činí právě 100, proto platí rovnice

$$x + y = 100. \tag{2}$$

1 cm³ prvního kovu váží s_1 g, x g má tedy objem $\frac{x}{s_1}$ cm³; 1 cm³ druhého kovu váží s_2 g, y g má objem $\frac{y}{s_2}$ cm³; 1 cm³ slitiny váží s g, 100 g má objem $\frac{100}{s}$ cm³, při čemž objem slitiny je roven součtu objemů obou součástí. To vede k rovnici

$$\frac{x}{s_1} + \frac{y}{s_2} = \frac{100}{s}. \tag{3}$$

Z rovnice (2) plyne

$$y = 100 - x, \tag{4}$$

což dosazeno do (3) dává

$$\frac{x}{s_1} + \frac{100 - x}{s_2} = \frac{100}{s}.$$

Odtud vypočteme

$$x = 100 \cdot \frac{s_1(s_2 - s)}{s(s_2 - s_1)} \tag{5}$$

a dále podle (4)

$$y = 100 \cdot \frac{s_2(s - s_1)}{s(s_2 - s_1)}. \tag{6}$$

Čísla s, s_1, s_2 jsou podle smyslu úlohy kladná čísla. Aby vypočtené řešení mělo význam, musí také oba nalezené výsledky (5), (6) býti kladné. Poněvadž předpokládáme, že $s_1 < s_2$, jsou oba jmenovatelé ve výrazech (5), (6) kladná čísla; musí tedy také čitatelé být kladní, t. j. musí platit

$$s < s_2,\ s > s_1, \tag{7}$$

t. j. číslo s musí býti voleno co do velikosti mezi oběma čísly s_1, s_2.

Je-li tomu tak, potom z druhé nerovnosti (7) plyne

$$ss_2 > s_1 s_2,$$

$$ss_2 - ss_1 > s_1 s_2 - ss_1,$$

$$\frac{s_1(s_2 - s)}{s(s_2 - s_1)} < 1,$$

takže $x = 100 \cdot \dfrac{s_1(s_2 - s)}{s(s_2 - s_1)} < 100$ a ovšem $x > 0$. Podobně z prvé nerovnosti (7) plyne

$$- s_2 < - s,$$

$$- s_1 s_2 < - ss_1,$$

$$ss_2 - s_1 s_2 < ss_2 - ss_1,$$

$$\frac{s_2(s - s_1)}{s(s_2 - s_1)} < 1,$$

takže také $y = 100 \cdot \dfrac{s_2(s - s_1)}{s(s_2 - s_1)} < 100$ a ovšem $y > 0$. Výrazy (5), (6) tedy skutečně udávají, kolik procent každého kovu slitina obsahuje.

Cvičení.

228. Převrátím-li pořádek číslic ve dvojciferném čísle, dostanu číslo o 1 menší než dvojnásobek původního čísla. Druhá číslice je o 4 větší než první. Které je to číslo?

229. Jestliže jedno ze dvou neznámých čísel zvětším o 5, dostanu číslo, které je třikrát větší než druhé číslo; jestliže však druhé číslo zmenším o 7, dostanu číslo, které je čtyřikrát menší než první číslo. Která jsou to čísla?

230. Dvě kapaliny mají měrné váhy 1,2 g/cm^3 a 0,9 g/cm^3. Kolik které musíme smísiti, abychom dostali 100 cm^3 směsi o měrné váze 1 g/cm^3?

231. Za 5 kg hrachu a 3 kg krup bylo zaplaceno 136 Kčs; za 4 kg hrachu a 5 kg krup bylo zaplaceno 140 Kčs. Kolik stojí 1 kg hrachu a 1 kg krup?

232. Určitou vzdálenost projede jeden vlak za 6 hodin 25 minut a druhý vlak za 7 hodin. Prvý vlak urazí za každou hodinu o 3 km více než druhý. Kolik km ujede každý vlak za 1 hodinu? Jaká je to vzdálenost?

233. Projede-li vlak 1 km za $2\frac{2}{5}$ min., dojede do cílové stanice o $\frac{1}{2}$ hodiny později, než je v jízdním řádu. Projede-li však 1 km za 2 minuty, dojede do cílové stanice o 2 hodiny dříve, než je v jízdním řádu. Najděte vzdálenost obou stanic a dobu, za kterou má vlak tuto vzdálenost projeti.

234. Po dvou rovnoběžných kolejích jedou týmž směrem dva vlaky: rychlík 105 m dlouhý rychlostí 57 km/hod a osobní vlak 75 m dlouhý rychlostí 39 km/hod. a) Jak dlouho trvá, než každý vlak mine pozorovatele sedícího ve druhém vlaku? b) Jak dlouhá doba uplyne od okamžiku, v němž se střetne lokomotiva rychlíku s posledním vozem osobního vlaku, do okamžiku, v němž poslední vůz rychlíku předjede lokomotivu osobního vlaku?

235. Předcházející cvičení řešte pro případ, že oba vlaky jedou proti sobě.

236. a) Najděte čitatele zlomků $\dfrac{A}{x+1}$, $\dfrac{B}{x-1}$ tak, aby pro každé x součet obou zlomků byl $\dfrac{4x+2}{x^2-1}$. b) Podobně rozložte zlomek $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ v součet dvou zlomků s jmenovateli $x+1$ a $x+2$.

237. Číslo a rozložte na tři sčítance tak, aby prvý byl o 5 větší než druhý a třikrát menší než třetí.

238. Číslo 15 rozložte na dva sčítance tak, aby prvý sčítanec dělený číslem a dával podíl o 3 větší než druhý sčítanec dělený číslem b. Má úloha vždy řešení?

239. Ve výrazu $y = Ax + B$ ustanovte čísla A a B tak, aby pro $x = a$ bylo $y = b$ a pro $x = a'$ bylo $y = b'$; při tom je $a \neq a'$.

240. Chci vyplatit 100 Kčs v pětikorunách a desetikorunách tak, aby celkový počet státovek byl n. Kolik jich bude od každého druhu? Jak třeba voliti číslo n, aby úloha měla řešení?

241. Obvod obdélníka je $2s$ m; zvětšíme-li jeden jeho rozměr o 5 m a druhý rozměr o 3 m, zvětší se obsah o 195 m^2. Jaké jsou rozměry obdélníka? Pro která s má úloha řešení?

242. Za několik metrů sukna bylo zaplaceno a Kčs. Kdyby ho bylo o 2 m více, stálo by b Kčs. Kolik m bylo koupeno a co stál 1 m? Jak třeba voliti čísla a, b, aby úloha měla smysl?

243. Mám dvě kapaliny o měrných vahách s_1 g/cm^3 a s_2 g/cm^3. Smísím jich stejná množství a) co do objemu, b) co do váhy. Jakou měrnou váhu má směs?

244. Chceme dostati n kg směsi po b Kčs za 1 kg ze dvou druhů zboží, která stojí p Kčs a q Kčs za 1 kg ($p > q$). Kolik kg z každého druhu je třeba vzít? Kdy má úloha řešení?

245. Mám dva druhy zboží. Vezmu-li a kg jednoho druhu a b kg druhého druhu, dostanu směs v ceně m Kčs za 1 kg. Vezmu-li b kg prvého druhu a a kg druhého druhu, dostanu směs v ceně n Kčs za 1 kg. Kolik Kčs stojí 1 kg každého zboží? Jak třeba voliti čísla a, b, m, n, aby úloha měla smysl?

2. *Pojem kvadratické rovnice.*

Nejčastěji se vyskytují rovnice tvaru

$$V_1(x) = V_2(x), \tag{1}$$

kde obě strany jsou výrazy utvořené ze známých čísel a z neznámého čísla x sčítáním a násobením (nebo také odčítáním, ale odčítání můžeme po zavedení relativních čísel nahradit sčítáním). Takové výrazy, jak je vám známo, se jmenují **mnohočleny.** Převedením všech členů s pravé strany na levou dostaneme z (1) rovnici tvaru

$$V_1(x) - V_2(x) = 0, \tag{2}$$

kde na pravé straně je nula. Přechod od tvaru (1) ke tvaru (2) se jmenuje **anulování** rovnice; říkáme také, že (2) je anulovaný tvar rovnice (1). Výraz $V_1(x) - V_2(x)$ je, jak je vám známo, zase mnohočlen a proto rovnice (2) zní takto:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{3}$$

kde n je přirozené číslo a $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou známá čísla, která se jmenují koeficienty (česky součinitelé) rovnice (3). Jsou-li všecky koeficienty rovné nule, dostaneme identitu, které vyhovuje každé číslo x vůbec. Jsou-li všecky koeficienty rovné nule až na koeficient a_0, kterému se říká prostý člen rovnice (3), nemá rovnice žádný kořen. Tyto dva případy necháme stranou. Potom můžeme předpokládati, že koeficient a_n, kterému se říká nejvyšší koeficient rovnice (3), je rozdílný od nuly. Potom říkáme, že (3) je algebraická rovnice n-tého stupně. Pro $n = 1$ máme rovnici prvního stupně neboli lineární rovnici

$$a_1 x + a_0 = 0, \tag{4}$$

pro $n = 2$ máme rovnici druhého stupně neboli kvadratickou rovnici

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0. \tag{5}$$

O lineární rovnici (4) víme, že má jediný kořen,

$$x = -\frac{a_0}{a_1}.$$

Kvadratickou rovnici (5) se teprv naučíme řešit. Mnohé úlohy se řeší kvadratickou rovnicí. Takové úlohy se obyčejně těžko řeší přímým úsudkem bez rovnic. Je proto nauka o kvadratických rovnicích velmi důležitá. Protože v (5) je $a_2 \neq 0$, můžeme položiti

$$\frac{a_1}{a_2} = p, \quad \frac{a_0}{a_2} = q$$

a uvésti kvadratickou rovnici (5) na tvar

$$x^2 + px + q = 0, \tag{6}$$

jehož nejvyšší koeficient je roven jedné a který se jmenuje **normální tvar** kvadratické rovnice. Každý z koeficientů p, q může býti kladný nebo záporný nebo rovný nule. Dokud nebyla všeobecně uznávána záporná čísla, rozeznávaly se různé druhy kvadratických rovnic:

$$x^2 = px + q, \quad x^2 + px = q, \quad x^2 + q = px,$$

což bylo velmi nepohodlné. Tvar (6) s kladnými p, q se neprobíral vůbec, protože se hledaly pouze kladné kořeny a rovnice (6) při kladných p, q zřejmě nemůže míti žádný kladný kořen.

V tomto článku si probereme ty velmi jednoduché případy, v nichž některý z obou koeficientů p, q rovnice (6) je roven nule. Jsou-li oba koeficienty rovny nule, rovnice (6) zní $x^2 = 0$ a zřejmě má jediný kořen $x = 0$. Budiž dále $q = 0$, ale $p \neq 0$. Rovnice (6) zní $x^2 + px = 0$ neboli

$$x(x + p) = 0. \tag{7}$$

Součin na levé straně v (7) je roven nule, je-li některý činitel roven nule; obráceně, je-li součin roven nule, je aspoň jeden činitel rovný nule. Tedy rovnici (7) lze vyhověti dvěma způsoby: předně tak, že $x = 0$, za druhé tak, že $x + p = 0$ neboli $x = -p$.

Budiž posléze v rovnici (6) $p = 0$. Dostaneme t. zv. **ryze kvadratickou rovnici** $x^2 + q = 0$ neboli

$$x^2 = a, \tag{8}$$

kde $a = -q$. Řekli jsme už, že pro $a = 0$ má rovnice (8) jediné řešení $x = 0$.

Pro kladné a má rovnice (8) dvě řešení: kladné řešení $x = \sqrt{a}$ a záporné řešení $x = -\sqrt{a}$. Pro záporné a nemá rovnice (8) žádné řešení. Proč?

Pozorujeme, že když některý z obou koeficientů p, q v rovnici (6) je roven nule, má rovnice (6) buďto dva kořeny nebo jediný kořen nebo žádný kořen. Dále pozorujeme, že i když koeficienty jsou čísla racionální, mohou kořeny býti irracionální; tak tomu je na př. u rovnice $x^2 - 2 = 0$. V dalších článcích shledáme, že výsledky našich pozorování jsou správné, i když žádný z koeficientů p, q není roven nule.

Cvičení.

246. Dokažte: a) Každé číslo r, které je kořenem rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, je také kořenem rovnice $k(ax^2 + bx + c) = 0$, kde k je libovolné číslo. b) Obráceně každé číslo r, které je kořenem rovnice $k(ax^2 + bx + c) = 0$, kde $k \neq 0$, je také kořenem rovnice $ax^2 + bx + c = 0$.

247. Dokažte: Má-li rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$, kladný kořen, je aspoň jedno z čísel a, b, c kladné a aspoň jedno záporné.

248. Dokažte: Má-li rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ kořen $r = 0$, je $c = 0$.

249. Dokažte: Má-li rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ dva kořeny stejné absolutní hodnoty a opačných znamení, je $b = 0$.

250. Dokažte: Má-li rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ tři navzájem různé kořeny r, s, t, je $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$.

251. Nalezněte kořeny rovnic: a) $x^2 - 5x = 0$; b) $x^2 + 3{,}7x = 0$; c) $3x^2 = 10x$; d) $(2x + 3)(x - 2) = (4x - 3)(3x + 2)$; e) $(x + 3)^2 + (x + 4)^2 = (x + 5)^2$; f) $x - \dfrac{1}{x - 1} = 1 + \dfrac{x}{x - 1}$; g) $\dfrac{x - 2}{x - 3} + \dfrac{x - 3}{x - 2} = 2\frac{1}{6}$;

h) $\dfrac{x}{x - 1} + \dfrac{x - 1}{x} = \dfrac{1}{x(x - 1)}$.

252. Těleso bylo vrženo svisle vzhůru počáteční rychlostí 50 m/vteř. Za jak dlouho dopadne zpět na zem, je-li výška tělesa (v m) nad zemí vyjádřena vzorcem $s = ct - \frac{1}{2} gt^2$, kde c (v m/vteř) je počáteční rychlost, t čas (ve vteřinách) a $g \doteq 9{,}81$.

253. Určete a tak, aby daná rovnice měla jeden kořen rovný nule a stanovte její druhý kořen: a) $2ax^2 - 7(a + 1)x + a - 1 = 0$; b) $(a - 1)x^2 - (a - 2)x + a(a - 3) = 0$.

254. Nalezněte kořeny rovnic: a) $4x^2 = 9$; b) $3x^2 - 2 = 0$; c) $(x + 2)^2 + (x - 2)^2 = 40$; d) $(2x - 3)(3x + 2) + (2x + 3)(3x - 2) = 0$; e) $\dfrac{x}{x + 3} + \dfrac{3}{x - 3} = 2\frac{1}{8}$;

f) $\dfrac{x + 1}{x - 1} + \dfrac{x - 1}{x + 1} = 6$; g) $\dfrac{x - 2}{x - 1} - 2 \cdot \dfrac{x - 1}{x - 2} = \dfrac{1}{(x - 1)(x - 2)}$;

h) $\dfrac{x + 2}{x - 2} - \dfrac{x - 2}{x + 2} = \dfrac{32}{x(x^2 - 4)}$.

255. Určete a) x, b) y tak, aby rovnice $4x^2 + 16xy + 25y^2 + 4x + 8y - 8 = 0$ se stala ryze kvadratickou, a potom tuto rovnici řešte.

3. *Kvadratická rovnice se známými kořeny.*

Zvolme si dvě libovolná čísla r, s. Snadno sestavíme kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou daná čísla r, s. Je to rovnice

$$(x - r)(x - s) = 0. \tag{1}$$

Proč jsou čísla r, s kořeny rovnice (1)? Proč nemá rovnice (1) žádný jiný kořen?

Na tvar (1) můžeme upravit kvadratickou rovnici v normálním tvaru

$$x^2 + px + q = 0, \tag{2}$$

jestliže je

$$r + s = -p, \; rs = q. \tag{3}$$

Tedy: Jestliže platí vztahy (3), potom kvadratická rovnice (2) má dva kořeny: $x = r$, $x = s$.

Při tom jsme měli na mysli především ten případ, že je $r \neq s$. Ale naše úvaha je správná i pro případ $r = s$. V tomto případě má rovnice (2) jediný kořen $x = r$. Na př. rovnice $(x - 3)^2 = 0$ neboli $x^2 - 6x + 9 = 0$ má jediný kořen $x = 3$. Jest $p = -6$, $q = 9$ a vztahy (3) platí pro $r = 3$, $s = 3$.

Kvadratická rovnice nemusí míti vůbec žádný kořen; příkladem je ryze kvadratická rovnice $x^2 + q = 0$ s libovolným kladným q. Jestliže však kvadratická rovnice (2) má kořen, má buďto přesně dva kořeny nebo jediný kořen. Přesvědčíme se o tom takto: Vyjděme od libovolné kvadratické rovnice v normálním tvaru (2) a předpokládejme, že se nám podařilo nějakým způsobem určit kořen $x = r$ této rovnice. Jelikož číslo r je kořenem rovnice (2), jest $r^2 + pr + q = 0$ neboli

$$q = -r(r + p). \tag{4}$$

Nyní určeme číslo s z podmínky

$$r + s = -p; \tag{5}$$

je jediné takové číslo, totiž číslo

$$s = -(r + p). \tag{6}$$

Avšak ze (4) a (6) plyne

$$q = rs. \tag{7}$$

Podle (5) a (7) platí oba vztahy (3); víme, že z toho plyne, že rovnice (2) má kořeny $x = r$, $x = s$ a žádný jiný kořen. Jestliže $s \neq r$, má rovnice (2) přesně dva kořeny, jestliže však $s = r$, má rovnice (2) jediný kořen, který se jmenuje **dvojný** (dvojnásobný) **kořen** rovnice (2).

Příklad 1. V rovnici

$$x^2 + 5x + q = 0 \tag{8}$$

určeme q tak, aby rovnice měla kořen $x = 3$. Dosazením hodnoty $x = 3$ do rovnice (8) najdeme snadno $q = -24$, takže rovnice zní

$$x^2 + 5x - 24 = 0. \tag{9}$$

Ve vztahu (5) je v našem případě $r = 3$, $p = 5$, takže $s = -8$. Tedy rovnice (9) má dva kořeny $x = 3$, $x = -8$.

Příklad 2. V rovnici

$$x^2 + px + 16 = 0$$

určíme p tak, aby rovnice měla kořen $r = -4$. Snadno zjistíme, že musí býti $p = 8$, takže rovnice zní

$$x^2 + 8x + 16 = 0. \tag{10}$$

Ze vztahu (5) vypočteme $s = -4$. Tedy rovnice (10) má dvojný kořen $r = -4$.

Cvičení.

256. Dokažte větu: Má-li rovnice $x^2 + px + q = 0$ dva kořeny kladné, je $q > 0$, $p < 0$; má-li dva kořeny záporné, je $q > 0$, $p > 0$; má-li dva kořeny různých znamení, je $q < 0$.

257. Má-li kvadratická rovnice s racionálními koeficienty dvojný kořen, je ten kořen racionální. Dokažte.

258. Má-li kvadratická rovnice s racionálními koeficienty jeden kořen iracionální, má také druhý kořen iracionální a oba ty kořeny jsou navzájem různé. Dokažte.

259. Má-li kvadratická rovnice $x^2 + px + q = 0$ dvojný kořen r, dokažte že a) $r = -\frac{p}{2}$; b) $|r| = \sqrt{q}$; c) $p^2 - 4q = 0$.

260. Jestliže v rovnici $x^2 + px + q = 0$ platí $p^2 - 4q = 0$, má rovnice dvojný kořen. Dokažte.

261. Má-li rovnice $x^2 + px + q = 0$ dva kořeny $r \neq s$, je $p^2 - 4q > 0$. Dokažte.

262. Rovnice $x^2 + px + q = 0$ má dva kořeny. Určete vztah, který musí platit mezi součiniteli p a q, má-li jeden z těchto kořenů býti a) o n, b) n-krát větší než druhý.

263. Jestliže rovnice $x^2 + px + q = 0$, v níž je $p \neq 1$, má dva kořeny, z nichž jeden je druhou mocninou druhého, pak $p^3 - 3pq + q + q^2 = 0$. Dokažte.

264. Jsou-li r, s kořeny rovnice $x^2 + px + q = 0$, vyjádřete pomocí p a q výrazy:

a) $(r + 1)(s + 1)$; b) $r^2 + s^2$; c) $r^3 + s^3$; d) $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s}$; e) $\dfrac{r}{s} + \dfrac{s}{r}$.

265. Sestavte kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou: a) 5 a 8; b) -2 a 3; c) 1,2 a $-1{,}3$; d) $-\frac{3}{4}$ a $-\frac{4}{5}$; e) $2 + \sqrt{5}$ a $2 - \sqrt{5}$; f) $-1 + \sqrt{2}$ a $-1 - \sqrt{2}$.

266. Jsou-li r, s kořeny rovnice $x^2 + px + q = 0$, sestavte rovnici, která má kořeny a) $-r$ a $-s$; b) $r - n$ a $s - n$, kde n je dané číslo; c) rn a sn, kde n je dané číslo; d) $\dfrac{1}{r}$ a $\dfrac{1}{s}$; e) r^2 a s^2; f) r^3 a s^3; g) $\dfrac{r}{s}$ a $\dfrac{s}{r}$.

267. Je dána kvadratická rovnice a jeden její kořen r, stanovte druhý kořen v případech: a) $x^2 - 7x - 30 = 0$, $r = 10$; b) $x^2 + 5x - 2346 = 0$, $r = -51$; c) $x^2 - 2x - 3 = 0$, $r = 1 + \sqrt{2}$; d) $x^2 - 4x + 1 = 0$, $r = 2 - \sqrt{3}$.

268. Určete q tak, aby rovnice $x^2 - 6x + q = 0$ měla daný kořen r. Jaký je druhý kořen v případech: a) $r = 7$; b) $r = -5$; c) $r = 3$; d) $r = 3 + 2\sqrt{5}$?

269. Určete p tak, aby rovnice $x^2 + px + 36 = 0$ měla daný kořen r. Jaký je druhý kořen v případech: a) $r = 12$; b) $r = -\frac{9}{2}$; c) $r = -6$; d) $r = 7 - \sqrt{13}$?

270. Má-li rovnice $x^2 + px + q = 0$ kořeny r, s, potom je

$$x^2 + px + q = (x - r)(x - s)$$

pro každé x. Dokažte. Jak je tomu, má-li daná rovnice dvojný kořen r? (Rozklad kvadratického trojčlenu $x^2 + px + q$ v součin dvou lineárních dvojčlenů.)

271. Má-li rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ kořeny r, s, potom je

$$ax^2 + bx + c = a(x - r)(x - s)$$

pro každé x. Dokažte. Jak je tomu, má-li daná rovnice dvojný kořen r?

272. Má-li rovnice $x^2 + px + q = 0$ kořeny r a s a rovnice $x^2 + p'x + q' = 0$ kořeny r' a s', které vyhovují vztahu $\dfrac{r - r'}{r - s'} = -\dfrac{s - r'}{s - s'}$, potom je $pp' = 2q + 2q'$. Dokažte.

273. Mají-li rovnice $x^2 + px + q = 0$ a $x^2 + p'x + q' = 0$ společný kořen r, je $r = -\dfrac{q - q'}{p - p'}$ a $(q - q')^2 + (p - p')(pq' - p'q) = 0$. Dokažte.

4. *Celé kořeny kvadratické rovnice.*

Kvadratická rovnice s racionálními koeficienty p, q

$$x^2 + px + q = 0 \tag{1}$$

nemusí míti vůbec žádný kořen (příklad: $x^2 + 1 = 0$) nebo může míti dva iracionální kořeny (příklad: $x^2 - 3 = 0$). Jestliže však rovnice (1) má kořen $x = r$, víme ze článku 3, že má ještě kořen $s = -(r + p)$; jestliže kořen r i koeficient p jsou čísla racionální, je také kořen s racionální a rovněž koeficient q je racionální, neboť víme, že $q = rs$. Může se ovšem státi, že $s = r$, t. j, že kořen r je dvojný.

Jestliže kořeny rovnice (1) jsou celá čísla r, s, pak ze známých vztahů

$$r + s = -p, \quad rs = q \tag{2}$$

plyne, že také koeficienty jsou čísla celá. Při tom nevylučujeme případ $r = s$ dvojného kořenu r.

Jestliže kořeny rovnice (1) s celými koeficienty p, q jsou celá čísla r, s, můžeme tyto kořeny snadno určit zkusmo na základě vztahů (2). Při tom můžeme vyloučit případ $q = 0$ probraný už ve článku 2. Podle druhého ze vztahů (2) je

$$|q| = |r| \cdot |s|,$$

kde všecka tři čísla $|q|$ (toto číslo známe), $|r|$, $|s|$ (tato čísla hledáme) jsou přirozená čísla. Abychom určili kořeny r, s, rozložíme především přirozené číslo $|q|$ všemi možnými způsoby na součin $|r| . |s|$ dvou přirozených čísel; to umíme už ze střední školy provésti na základě rozkladu čísla $|q|$ na prvočinitele. Obyčejně číslo $|q|$ není příliš veliké a můžeme všecky rozklady prostě uhodnouti. Další postup si objasníme na příkladě.

Příklad. U rovnice

$$x^2 + px - 24 = 0 \tag{3}$$

vyjdeme od rozkladů

$$24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6,$$

takže máme pouze čtyři možnosti

$$\begin{array}{llll} \pm r = 1, & \pm s = 24; & \pm r = 2, & \pm s = 12; \\ \pm r = 3, & \pm s = 8; & \pm r = 4, & \pm s = 6. \end{array} \tag{4}$$

Protože číslo $rs = q$ neboli $rs = -24$ je záporné, musí z čísel r, s býti jedno kladné a druhé záporné. Je-li na př. $p = -5$, potom vztahy (2) znějí

$$r + s = 5, \qquad rs = -24$$

a snadno zjistíme, že jim vyhovuje jediná z možností (4), totiž $r = -3$, $s = 8$. Tedy rovnice

$$x^2 - 5x - 24 = 0$$

má kořeny $r = -3$, $s = 8$. Podobně zjistíme na př., že rovnice

$$x^2 + 10x - 24 = 0$$

má kořeny $r = 2$, $s = -12$. Jinak je tomu s rovnicí

$$x^2 + 14x - 24 = 0; \tag{5}$$

zde žádná z možností (4) nevyhovuje vztahu $r + s = -14$. (Možnost $r = -2$, $s = -12$ by dala $rs = 24$ a tedy čísla $r = -2$, $s = -12$ nejsou kořeny rovnice (5), nýbrž to jsou kořeny rovnice $x^2 + 14x + 24 = 0$.) Proto rovnice (5) nemá za kořen žádné celé číslo.

Nasnadě je otázka, zdali rovnice (1) s celými koeficienty p, q může mít za kořen racionální číslo, které není celé. Odpověď je záporná. Předpokládejme, že rovnice (1) s celými koeficienty p, q má kořen tvaru

$$x = \pm \frac{m}{n}, \tag{6}$$

kde m, n jsou dvě nesoudělná přirozená čísla a jmenovatel n je větší než 1. Snadno shledáme, že je to nemožné. Dosazením kořenu (6) do rovnice (1) dostaneme

$$\frac{m^2}{n^2} \pm p \cdot \frac{m}{n} + q = 0$$

a po úpravě

$$m^2 = -n(qn \pm pm). \tag{7}$$

Protože čísla m^2, n jsou kladná, můžeme (7) přepsati ve tvaru

$$m^2 = n\,|qn \pm pm|. \tag{8}$$

Protože přirozené číslo n je větší než 1, je dělitelné nějakým prvočíslem k. Vztah (8) ukazuje, že prvočíslem k je dělitelné také číslo m^2 a tudíž také číslo m. Tedy nesoudělná přirozená čísla m, n jsou obě dělitelná týmž prvočíslem k. To je ovšem nemožné.

Tedy na př. rovnice (5) nemůže míti za kořen žádné racionální číslo. Položíme-li

$$r = \sqrt{73} - 7, \qquad s = -(\sqrt{73} + 7), \tag{9}$$

vypočteme snadno, že pro $p = 14$, $q = -24$ čísla (9) vyhovují vztahům (2). Tedy rovnice (5) má dva iracionální kořeny (9). Jak se hledají iracionální kořeny kvadratické rovnice, poznáme v následujícím článku.

Cvičení.

274. Jestliže v rovnici $x^2 + px + q = 0$ jsou obě čísla p, q lichá, rovnice nemá celočíselný kořen. Dokažte.

275. Má-li rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ dva navzájem různé celočíselné kořeny r a s, je $b = ka$, $c = ha$, kde k, h jsou vhodná čísla celá. Dokažte.

276. Má-li rovnice $x^2 + px + q = 0$ celočíselné kořeny, je $p^2 - 4q$ druhou mocninou celého čísla. Dokažte.

277. Určete kořeny rovnic: a) $x^2 - 5x + 6 = 0$; b) $x^2 + 5x + 6 = 0$; c) $x^2 - 5x - 6 = 0$; d) $x^2 - 13x + 30 = 0$; e) $x^2 + 13x - 30 = 0$; f) $x^2 - 10x + 9 = 0$; g) $x^2 + 4x - 21 = 0$; h) $x^2 - 3x - 40 = 0$; i) $x^2 - x - 30 = 0$; j) $x^2 - 20x + 96 = 0$.

278. Rozložte v součin lineárních dvojčlenů: a) $x^2 + 6x + 8$; b) $x^2 - 5x + 4$; c) $x^2 + 4x - 12$; d) $x^2 - 3x - 18$; e) $x^2 - 4x - 45$; f) $x^2 - 23x + 120$.

279. Vypočtěte: a) $\dfrac{2x+5}{x^2+3x+2} - \dfrac{x+5}{x^2+x-2}$; b) $\dfrac{1}{x^2-3x+2} - \dfrac{1}{x^2-4x+3} + \dfrac{1}{x^2-5x+6}$; c) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+x-12} \cdot \dfrac{x^2-x-6}{x^2-x-12}$.

280. Má-li rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde a, b, c jsou čísla celá a $a \neq 0$, racionální kořen v základním tvaru $r = \dfrac{m}{n}$, je číslo $|c|$ násobkem čísla $|m|$ a číslo $|a|$ násobkem čísla $|n|$. Dokažte.

281. Má-li rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, kde a, b, c jsou čísla celá a $a \neq 0$, racionální kořen r, má rovnice $y^2 + by + ac = 0$ celočíselný kořen ar. Dokažte. — (Návod: Danou rovnici násobte číslem a.)

282. Podle cvičení 281 stanovte kořeny rovnic: a) $2x^2 - 3x - 2 = 0$; b) $6x^2 - 7x + 2 = 0$; c) $9x^2 - 9x - 4 = 0$; d) $4x^2 - x - 5 = 0$.

283. Rozložte v součin lineárních činitelů: a) $3x^2 - 5x + 2$; b) $3x^2 + 5x - 2$; c) $4x^2 - 4x - 3$; d) $6x^2 + 13x + 6$.

5. *Řešení kvadratické rovnice doplněním na čtverec.*

Jsou-li n, d daná čísla, pak rovnice

$$(x + n)^2 = d \tag{1}$$

je kvadratická rovnice. Považujeme-li za neznámou $x + n$, je rovnice (1) ryze kvadratická. O řešení ryze kvadratické rovnice jsme již mluvili ve článku 2.

Snadno usoudíme: (1) je-li $d < 0$, nemá rovnice (1) žádný kořen; (2) je-li $d = 0$, má rovnice (1) dvojný kořen $x = -n$; (3) je-li $d > 0$, má rovnice (1) dva kořeny:

$$r = -n + \sqrt{d}, \qquad s = -n - \sqrt{d}. \tag{2}$$

Nejdůležitější je případ, že čísla n, d jsou racionální. Je-li $d > 0$, mohou kořeny (2) býti racionální nebo iracionální. Záleží na tom, zda je racionální či iracionální číslo $\sqrt{d}$. O tom dovedeme rozhodnouti podle článku 6 kapitoly V; v případě iracionálním uvádíme zpravidla $\sqrt{d}$ na základní tvar (zase podle článku 7 téže kapitoly).

Rovnici (1) můžeme uvésti na tvar

$$x^2 + 2nx + n^2 - d = 0, \tag{3}$$

t. j. na normální tvar

$$x^2 + px + q = 0, \tag{4}$$

ve kterém je

$$p = 2n, \qquad q = n^2 - d. \tag{5}$$

Obráceně, máme-li řešit kvadratickou rovnici v normálním tvaru (4), stačí určit čísla n, d ze vztahů (5). Rovnice (4) přejde tím na tvar (1), který dovedeme řešit, t. j. dovedeme rozhodnout, zda kořeny existují či ne, a existují-li kořeny, dovedeme je určit. Tato methoda vede k cíli při každé kvadratické rovnici, neboť vztahům (5) vyhovují čísla

$$n = \frac{p}{2}, \qquad d = n^2 - q.$$

Jak se při tom prakticky postupuje, vyložíme si na příkladech. Je třeba si pouze pamatovat, že

$$n = \frac{p}{2}. \tag{6}$$

Danou rovnici neuvádíme na normální tvar (4), nýbrž raději na tvar

$$x^2 + px = t, \tag{7}$$

kde tedy $t = -q$. Ze (6) určíme n a napíšeme rovnici (1), ve které n známe a d určíme porovnáním s rovnicí (7).

Příklad 1.

$$x^2 - 10x = 56. \tag{8}$$

Podle (6) je $n = -5$, tedy rovnici (8) uvedeme na tvar

$$(x-5)^2 = d,$$

kde je třeba určit d. Jelikož $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$, porovnání s (8) dá, že $d = 56 + 25$, takže rovnice nabude tvaru

$$(x-5)^2 = 81. \tag{9}$$

Ježto $\sqrt{81} = 9$, plyne z (9), že $x - 5 = \pm 9$. Tedy daná rovnice má kořeny $r = 14$, $s = -4$. Od tvaru (8) jsme přešli ke tvaru (9) tím, že jsme na obou stranách přičtli takové číslo, aby se levá strana stala druhou mocninou neboli čtvercem výrazu tvaru $(x+n)^2$. Proto se této methodě řešení kvadratické rovnice říká doplnění na čtverec. V jednoduchých případech poznáme zpaměti, které číslo je třeba přičíst na obou stranách rovnice (7), aby levá strana byla doplněna na čtverec.

Příklad 2. $x^2 + 5x + 7 = 0$. Zde jest $n = \frac{5}{2}$ a doplnění na čtverec dá $(x + \frac{5}{2})^2 = -\frac{3}{4}$, kde pravá strana je záporná. Tedy daná rovnice nemá žádné řešení.

Příklad 3. $(4x-9)^2 + (3x+2)^2 = 97$. Postupnými úpravami najdeme

$$16x^2 - 72x + 81 + 9x^2 + 12x + 4 = 97,$$
$$25x^2 - 60x = 12,$$
$$x^2 - \tfrac{12}{5}x = \tfrac{12}{25},$$
$$(x - \tfrac{6}{5})^2 = \tfrac{48}{25},$$

tedy

$$x = \tfrac{6}{5} \pm \sqrt{\tfrac{48}{25}}.$$

Odmocninu $\sqrt{\frac{48}{25}}$ uvedeme na základní tvar $\frac{4}{5}\sqrt{3}$ a máme výsledek, že daná rovnice má irracionální kořeny

$$r = \tfrac{2}{5}(3 + 2\sqrt{3}),\ s = \tfrac{2}{5}(3 - 2\sqrt{3}).$$

Podle tabulek je

$$r \doteq 2{,}5856, \qquad s \doteq -0{,}1856. \tag{10}$$

Přesvědčte se, s jakou přesností vyhovují přibližné hodnoty (10) kořenů r, s vztahům $r + s = \frac{12}{5} = 2{,}4$; $rs = -\frac{12}{25} = -0{,}48$!

Cvičení.

284. Doplněním na čtverec řešte rovnice: a) $x^2 - 6x + 5 = 0$; b) $x^2 - 6x + 9 = 0$; c) $x^2 - x = 42$; d) $x^2 - 5x = 84$; e) $x^2 - 2x - 1 = 0$; f) $x^2 + 5x - 5 = 0$; g) $2x^2 - x - 1 = 0$; h) $3x^2 - 32x + 20 = 0$; i) $9x^2 - 30x + 25 = 0$; j) $8x^2 + 38x + 35 = 0$.

285. Upravte a řešte doplněním na čtverec: a) $(3x - 2)(2x - 3) = 1$; b) $(3x + 5)^2 + 3(x + 5)^2 = 37$; c) $(2x + 1)(3x - 2) = (4x - 1)(x - 2)$; d) $(x + 2)x + 2(x + 2)(x - 2) + 9 = 0$; e) $\frac{x}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{11}{8}$; f) $\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} = 1$; g) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{2x^2+x} = 0$; h) $\frac{x+2}{x+3} = \frac{2x-1}{3x+1}$.

286. Jak třeba voliti c, aby rovnice $x^2 - 7x + c = 0$ měla a) dva kořeny; b) dvojný kořen; c) neměla řešení?

287. Jak třeba voliti b, aby rovnice $2x^2 + bx + 24 = 0$ měla a) dva kořeny; b) dvojný kořen; c) neměla řešení.

288. Jak třeba voliti a, aby rovnice $ax^2 + 3x - 4 = 0$ měla a) dva kořeny; b) dvojný kořen; c) neměla řešení.

289. Je možno určit znamení čísla q tak, aby rovnice $x^2 + px + q = 0$ měla aspoň jeden kořen bez ohledu na to, jaké znamení má číslo p?

290. Je-li v kvadratické rovnici $x^2 + px + q = 0$ výraz $p^2 - 4q > 0$, má rovnice dva kořeny; je-li $p^2 - 4q = 0$, má rovnice dvojný kořen; je-li $p^2 - 4q < 0$, nemá rovnice žádný kořen. Dokažte.

291. Je-li v kvadratické rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ výraz $b^2 - 4ac > 0$, má rovnice dva kořeny; je-li $b^2 - 4ac = 0$, má rovnice dvojný kořen; je-li $b^2 - 4ac < 0$, nemá rovnice žádný kořen. Dokažte.

6. Řešení kvadratické rovnice vzorcem.

V jednoduchých případech řešíme kvadratickou rovnici doplněním na čtverec. Ale ve složitějších případech je výhodnější užíti vzorce, který dá naráz kořeny, jestliže existují, a dovolí naráz rozhodnout o existenci řešení. Při odvození vzorce vyjdeme od t. zv. obecného tvaru kvadratické rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad (1)$$

Normální tvar $\quad x^2 + px + q = 0$

je zvláštní případ obecného tvaru (1), ve kterém nejvyšší koeficient a je roven jedné. Od obecného tvaru (1) přejdeme k normálnímu tvaru, položíme-li

$$p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}.$$

Jestliže koeficienty normálního tvaru jsou racionální čísla, která nejsou celá, můžeme obecný tvar (1) volit tak, aby jeho koeficienty a, b, c byly celými čísly. V tom je výhoda obecného tvaru.

Koeficienty a, b, c obecného tvaru kvadratické rovnice jsou libovolná daná čísla až na to, že musí býti

$$a \neq 0, \tag{2}$$

neboť jinak by (1) vůbec nebyla kvadratická rovnice. Abychom dospěli ke vzorci pro řešení rovnice (1), přepíšeme ji ve tvaru

$$a(ax^2 + bx + c) = 0$$

neboli

$$a^2x^2 + abx = - ac.$$

Zde můžeme na obou stranách přičíst $\frac{b^2}{4}$ a dostaneme

$$a^2x^2 + abx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - ac$$

neboli

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{D}{4}, \tag{3}$$

kde jsme položili

$$D = b^2 - 4ac. \tag{4}$$

Od tvaru (3) je už snadné přejít ke vzorci pro řešení. Především je patrné, že existence řešení závisí na znamení čísla D, které se jmenuje **diskriminant** kvadratické rovnice (1).

Je-li diskriminant (4) záporný, nemá rovnice (1) žádný kořen.

Je-li diskriminant (4) kladný, má rovnice (1) dva kořeny dané vzorcem

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \tag{5}$$

t. j. rovnice (1) má kořeny

$$r = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad s = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Je-li diskriminant (4) roven nule, má rovnice (1) dvojný kořen $x = -\frac{b}{2a}$, **který je také dán vzorcem** (5), neboť $\sqrt{0} = 0$.

Pro řešení kvadratické rovnice je třeba si pamatovat vzorce (4), (5). Nejdříve vypočteme diskriminant D podle vzorce (4). Je-li $D < 0$, nemá rovnice (1) žádný kořen a jsme hotovi. Je-li $D = 0$, má rovnice (1) dvojný kořen $x = -\frac{b}{2a}$; jestliže koeficienty a, b, c jsou čísla celá, je dvojný kořen racionální číslo. Je-li $D > 0$, rozložíme D na prvočinitele a podle článku 8 kapitoly V uvedeme D na tvar

$$D = n^2k,$$

kde n, k jsou přirozená čísla a číslo k je prosté čtverců. Je-li $k = 1$, je $\sqrt{D} = n$ a oba kořeny jsou racionální čísla. Je-li $k > 1$, je $\sqrt{D} = n \cdot \sqrt{k}$ a kořeny píšeme ve tvaru

$$r = -\frac{b}{2a} + \frac{n}{2a}\sqrt{k}, \qquad s = -\frac{b}{2a} - \frac{n}{2a}\sqrt{k};$$

oba kořeny jsou irracionální čísla tvaru probíraného ve článku 8 kapitoly V.

Příklad 1. $2x^2 + 3x + 5 = 0$. Zde je $D = 9 - 40$, tedy $D < 0$ a rovnice nemá žádné řešení.

Příklad 2. $(2x - 7)^2 - (3x + 2)^2 = 125$. Rovnici upravíme postupně:

$$4x^2 - 28x + 49 - (9x^2 + 12x + 4) = 125,$$
$$-5x^2 - 40x - 80 = 0,$$
$$x^2 + 8x + 16 = 0. \tag{6}$$

Diskriminant rovnice (6) je $D = 8^2 - 4 \cdot 16 = 0$; tedy daná rovnice má dvojný kořen $x = -4$.

Příklad 3. $12x^2 + 38x - 23 = 0$. Výpočet zjednodušíme, jestliže si uvědomíme, že podle (4) diskriminant D je dělitelný čtyřmi, jestliže koeficient b je číslo sudé. V našem případě je

$$D = 4(19^2 + 12 \cdot 23) = 4 \cdot 637 = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 13$$

a proto $\sqrt{D} = 14 \cdot \sqrt{13}$. Ze vzorce (5) dostaneme, že daná rovnice má irracionální kořeny

$$r = \frac{-19 + 7 \cdot \sqrt{13}}{12}, \qquad s = \frac{-19 - 7 \cdot \sqrt{13}}{12}.$$

Podle tabulek je na tři desetinná místa

$$r \doteq 0{,}520; \qquad s \doteq -3{,}687. \tag{7}$$

Vypočítejte, s jakou přesností vyhovují přibližné hodnoty (7) známým vztahům

$$r + s = -\tfrac{38}{12}, \qquad rs = -\tfrac{23}{12}.$$

Příklad 4.

$$tx^2 + 2(3t - 1)x + 9t - 7 = 0, \tag{8}$$

kde t znamená dané číslo a x je neznámá. Jestliže $t = 0$, je (8) lineární rovnice $-2x - 7 = 0$ s jediným kořenem $x = -\frac{7}{2}$. Jestliže $t \neq 0$, je (8) kvadratická rovnice s diskriminantem

$$D = 4[(3t - 1)^2 - t(9t - 7)]$$

neboli po úpravě

$$D = 4(t + 1).$$

Jestliže

$$t < 0, \quad |t| > 1,$$

je diskriminant záporný a rovnice (8) nemá žádný kořen. Jestliže $t = -1$, je $D = 0$; rovnice zní $-x^2 - 8x - 16 = 0$ a má dvojný kořen $x = -4$. Jestliže

$$t < 0, \quad |t| < 1 \quad \text{nebo} \quad t > 0,$$

je diskriminant kladný a rovnice (8) má dva kořeny

$$x = \frac{1 - 3t \pm \sqrt{t + 1}}{t}.$$

Vraťme se k obecné kvadratické rovnici (1), ve které musí býti $a \neq 0$ (jinak by to nebyla kvadratická rovnice). Má-li rovnice (1) dva kořeny a označíme-li je r, s, platí známé vztahy

$$r + s = -\frac{b}{a}, \tag{9}$$

$$rs = \frac{c}{a}. \tag{10}$$

Tyto vztahy platí i pro případ, že rovnice (1) má dvojný kořen $r = s$. Vztahy (9), (10) nemají ovšem smyslu v případě $D < 0$, neboť v tomto případě rovnice (1) nemá žádný kořen. Jestliže

$$a > 0, \quad c < 0 \qquad \text{nebo} \qquad a < 0, \quad c > 0,$$

jest $ac < 0$, takže podle (4) je $D > 0$ a rovnice (1) má dva kořeny; z (10) plyne, že jeden kořen je kladný a druhý záporný. Je-li

$$a > 0, \quad c > 0 \qquad \text{nebo} \qquad a < 0, \quad c < 0,$$

může býti $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$. V případě $D > 0$ má rovnice (1) dva kořeny a z (10) plyne, že tyto kořeny jsou oba rozdílné od nuly a mají stejné znamení, které určíme nejrychleji podle (9). Jak je tomu v případě $c = 0$?

Cvičení.

292. Ze vzorce pro kořeny r, s rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ dokažte, že $r + s = -\frac{b}{a}$, $rs = \frac{c}{a}$.

293. Podle znaménka diskriminatu rozhodněte, mají-li následující kvadratické rovnice kořeny, a v případě, že mají kořeny, určete je: a) $2x^2 - 9x + 7 = 0$; b) $6x^2 + 7x + 1 = 0$; c) $x^2 + x - 1 = 0$; d) $x^2 + 3x + 3 = 0$; e) $3x^2 - 5x + 3 = 0$; f) $3x^2 + 5x + 1 = 0$; g) $10x^2 + 27x - 63 = 0$; h) $x^2 - x - 272 = 0$.

294. Jsou-li v rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ čísla a, b, c celá a je-li diskriminant $D = b^2 - 4ac$ dělitelný čtyřmi, je číslo b sudé. Dokažte.

295. Má-li rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ celočíselné koeficienty, při čemž b je liché, nemůže mít dvojný kořen. Dokažte.

296. Užívajíce toho, že diskriminant je dělitelný čtyřmi, řešte rovnice: a) $7x^2 - 22x + 3 = 0$; b) $45x^2 - 106x + 45 = 0$; c) $2x^2 - 14x + 25 = 0$; d) $4x^2 - 4x - 1 = 0$; e) $3x^2 + 2x - 2 = 0$; f) $63x^2 - 4x - 35 = 0$; g) $64x^2 - 144x + 81 = 0$; h) $x^2 + 4x + 1 = 0$; i) $x^2 - 6x + 10 = 0$; j) $x^2 + 36x + 323 = 0$.

297. Jestliže v rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ součinitelé b, c jsou násobky prvočísla p, při čemž c není násobkem čísla p^2 a a není násobkem čísla p, a má-li rovnice dva kořeny, pak jsou ty kořeny irracionální. Dokažte.

298. Jestliže v rovnici $ax^2 + bx + c = 0$ součinitelé a, b jsou násobky prvočísla p, při čemž a není násobkem čísla p^2 a c není násobkem čísla p, a má-li rovnice dva kořeny, jsou ty kořeny irracionální. Dokažte.

299. Nemá-li rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ kořen, mají čísla a, c totéž znamení. Dokažte.

300. Řešte rovnice: a) $12x = 1 + x^{-1}$; b) $5x^{-2} - 9x^{-1} + 4x^0 = 0$; c) $\frac{x+3}{2} - \frac{2}{x+5} = 0$; d) $\frac{x}{x+2} + \frac{x+2}{x} = 3$; e) $\frac{2x-1}{2} + \frac{2}{2x-1} = 2$; f) $\frac{5}{3-x} + \frac{8}{x-4} = \frac{10}{x+2}$; g) $\frac{x+3}{x^2+x} + \frac{x+1}{x^2-x} + \frac{x-3}{x^2-1} = 0$; h) $\frac{x-3}{x^2-1} + \frac{x-5}{x^2-3x+2} + \frac{x+7}{x^2-x-2} = 0$.

301. Jak třeba voliti číslo u, aby dané rovnice měly společný kořen, a který je ten kořen v případech:

a) $3x^2 - 14x + u - 2 = 0$,
$2x^2 - 11x + u + 2 = 0$;

b) $3x^2 + 4x - 3u - 12 = 0$,
$2x^2 - 5x - 2u + 15 = 0$.

302. Řešte následující rovnice a proveďte rozbor řešení (neznámá je x):

a) $mx^2 - (m + 1)x + 1 = 0$;
b) $mx^2 + 2(m + 1)x + m = 0$;
c) $(m + 1)x^2 + 2mx + (m - 1) = 0$;
d) $(m - 1)x^2 - mx - (m + 1) = 0$;
e) $(m - 1)x^2 - mx - (m - 1) = 0$.

303. Řešte rovnice a proveďte rozbor řešení (neznámá je x):

a) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$;
b) $ax^2 + (a + b)x + b = 0$;
c) $abx^2 + (a^2 - b^2)x - ab = 0$;
d) $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$;
e) $a(a + b)x^2 + 4abx + (a + b)b = 0$.

304. Jestliže jsou aspoň dvě z čísel a, b, c různá, má rovnice

$$(x - a)(x - b) + (x - a)(x - c) + (x - b)(x - c) = 0$$

dvě řešení. Dokažte.

305. Pokud rovnice $\dfrac{a^2}{x - p} + \dfrac{b^2}{x - q} = 1$ vede k rovnici kvadratické, má vždy dva různé kořeny. Dokažte.

7. *Slovní úlohy.*

Řešení slovních úloh pomocí rovnic jste probírali důkladně již na střední škole. Jelikož nyní umíme řešit také rovnice kvadratické, můžeme pomocí rovnic snadno rozřešit rozmanité slovní úlohy, které by bylo zpravidla mnohem obtížnější řešit přímým úsudkem než pomocí rovnice.

Příklad 1. Při studentské akademii bylo prodáno celkem 256 lístků a vybráno za lístky I. místa 2 800 Kčs, za lístky II. místa 2 160 Kčs. Kolik bylo kterých a zač byly které, bylo-li I. místo o 10 Kčs dražší než druhé?

Můžeme zvolit za neznámou x cenu II. místa v Kčs. Cena I. místa je $(x + 10)$ Kčs. Počet prodaných I. míst bude $\dfrac{2\,800}{x + 10}$, počet prodaných II. míst $\dfrac{2\,160}{x}$. Jelikož bylo prodáno celkem 256 lístků, máme rovnici

$$\frac{2\,800}{x + 10} + \frac{2\,160}{x} = 256$$

Pozorujeme, že lze krátit číslem 16 a máme jednodušeji

$$\frac{175}{x + 10} + \frac{135}{x} = 16.$$

Odstraníme zlomky tím, že obě strany znásobíme součinem $x(x + 10) = x^2 + + 10x$ a dostaneme

$$175x + 135(x + 10) = 16(x^2 + 10x)$$

neboli

$$16x^2 - 150x - 1\,350 = 0$$

a po krácení dvěma

$$8x^2 - 75x - 675 = 0.$$

Na základě poznámek učiněných ke konci minulého článku pozorujeme, že naše rovnice má jeden kladný a jeden záporný kořen. Pro slovní úlohu má význam pouze kladný kořen. Vypočteme diskriminant

$$D = 75^2 + 4 \cdot 8 \cdot 675 = 75 \cdot (75 + 4 \cdot 8 \cdot 9) =$$
$$= 75 \cdot 3 \cdot (25 + 4 \cdot 8 \cdot 3) = 75 \cdot 3 \cdot 121 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2;$$

tedy $\sqrt{D} = 3 \cdot 5 \cdot 11 = 165$ a podle vzorce kladný kořen je

$$x = \frac{75 + 165}{16} = \frac{240}{16} = 15.$$

Dále máme

$$x + 10 = 25, \qquad \frac{2\,800}{x + 10} = 112, \qquad \frac{2\,160}{x} = 144.$$

Tedy I. místo stálo 25 Kčs, druhé 15 Kčs, prodáno bylo 112 prvních a 144 druhých míst. Snadno se přesvědčíme, že tato čísla vyhovují dané slovní úloze.

Mohli jsme ovšem neznámou volit jinak. Jestliže na př. označíme y počet prodaných I. míst, bude $256 - y$ počet prodaných II. míst, cena I. místa bude $\frac{2\,800}{y}$ Kčs, cena II. místa $\frac{2\,160}{256 - y}$ Kčs a dostaneme rovnici:

$$\frac{2\,800}{y} - \frac{2\,160}{256 - y} = 10.$$

Krátíme deseti:

$$\frac{280}{y} - \frac{216}{256 - y} = 1.$$

Násobíme výrazem $y(256 - y)$:

$$280(256 - y) - 216y = 256y - y^2$$

a po úpravě

$$y^2 - 752y + 280 \cdot 256 = 0. \tag{1}$$

Výpočet diskriminantu se zjednoduší, rozložíme-li 752 na prvočinitele; jest $752 = 2^4 \cdot 47 = 16 \cdot 47$, tedy

$$D = (16 \cdot 47)^2 - 4 \cdot 280 \cdot 256 = 16^2 \cdot (47^2 - 4 \cdot 280) =$$
$$= 16^2 \cdot (2\,209 - 1\,120) = 16^2 \cdot 1\,089.$$

Je-li úloha řešitelná, musí býti $\sqrt{1\,089} = n$ přirozené číslo, které je patrně dvojciferné a má první číslici 3 (protože $30^2 < 1\,189$, $1\,189 < 40^2$) a druhou číslici buďto 3 nebo 7; tedy buďto $n = 33$ nebo $n = 37$. Jest $33^2 = 1\,089$, tedy $n = 33$, $\sqrt{D} = 16 \cdot 33$. Podle vzorce má rovnice (1) řešení

$$\frac{752 \pm 16 \cdot 33}{2} = 376 \pm 8 \cdot 33.$$

Podle významu neznámé y je $y < 256$; proto musíme volit znamení minus a máme

$$y = 376 - 8 \cdot 33 = 112$$

(počet prodaných I. míst), dále $256 - y = 144$ (počet prodaných II. míst), $\frac{2\,800}{112} = \frac{100}{4} = 25$ (cena I. místa je 25 Kčs), $\frac{2\,160}{144} = \frac{180}{12} = 15$ (cena II. místa je 15 Kčs) v souhlase s předcházejícím řešením.

Příklad 2. Počet úhlopříček mnohoúhelníka je o n větší než počet stran. Kolik má stran?

Budiž x počet stran, tedy také počet vrcholů. Úhlopříčku dostaneme, spojíme-li úsečkou kterýkoli vrchol A s kterýmkoli vrcholem B, který není sousední s A. Počet všech vrcholů A je x; při zvoleném vrcholu A máme $x - 3$ možných vrcholů B; to by dalo $x(x - 3)$ úhlopříček, ale při tom je každá počítaná dvakrát. Tedy je

$$\text{počet stran } x; \text{ počet úhlopříček } \frac{x(x-3)}{2}$$

a máme rovnici

$$\frac{x(x-3)}{2} = x + n$$

neboli

$$x^2 - 5x - 2n = 0. \tag{2}$$

Při každé volbě přirozeného čísla n má rovnice (2) jeden kladný a jeden záporný kořen; v úvahu přichází pouze kladný kořen x. Zvolíme-li n namátkou, bude x iracionální a úloha bude neřešitelná. Má-li býti úloha řešitelná, musí $\sqrt{D}$ býti racionální. Jest $D = b^2 - 4ac = 25 + 8n$, tedy číslo n musí býti tak voleno, aby bylo

$$D = 25 + 8n = m^2 \tag{3}$$

kde m je přirozené číslo, které zřejmě musí býti liché. Má-li n býti na př. trojciferné, bude

$$n > 100 \text{ nebo } n = 100, \quad n < 1\,000,$$

tedy podle (3)

$$m^2 > 825 \quad \text{nebo} \quad m^2 = 825,$$

$$m^2 < 8\,025.$$

Z tabulky druhých mocnin najdeme okamžitě, že možné hodnoty m jsou všecka lichá čísla počínajíc číslem 29 a končíc číslem 89. Na př. pro $m = 65$ bude podle (3)

$$25 + 8n = 4\,225,$$

tedy $n = 525$ a rovnice (2) zní

$$x^2 - 5x - 1\,050 = 0;$$

má diskriminant $D = 4\,225 = 65^2$ a kladný kořen

$$x = \frac{5 + 65}{2} = 35.$$

Počet úhlopříček 35-úhelníka je

$$\frac{x(x-3)}{2} = \frac{35 \cdot 32}{2} = 35 \cdot 16 = 560,$$

což je skutečně číslo o $n = 525$ větší než je počet stran $x = 35$.

Cvičení.

306. Součet dvou čísel je 20, jejich součin je 96. Která jsou to čísla?

307. Součin dvou po sobě jdoucích lichých čísel je 399. Která to jsou čísla?

308. Součet čtverců tří po sobě jdoucích celých čísel je 1202. Která jsou to čísla?

309. Součet číslic dvojciferného čísla je 7. Zaměníme-li pořadí obou číslic, dostaneme nové číslo, které znásobeno původním dá 1462. Které je to číslo?

310. Úloha Bhaskarova (XII. stol.): Stádo opic se bavilo. Čtverec jedné osminy jejich počtu dováděl v lese. Zbývajících 12 křičelo na pahorku. Řekni mi, kolik bylo všech opic.

311. Úloha Bézoutova (XVIII. stol.): Někdo koupil koně a po nějakém čase jej prodal za 24 pistolí. Při tom ztratil tolik procent, kolik pistolí ho stál kůň. Zač jej koupil?

312. Úloha Maclaurinova (XVIII. stol.): Několik přátel obědvalo společně a měli zaplatit celkem 175 šilinků. Ukázalo se však, že dva nemají s sebou peněz, a tak každý z ostatních musel zaplatiti o 10 šilinků více, než na něho mělo připadnout. Kolik lidí bylo u oběda?

313. Vzdálenost 36 km projel jeden ze dvou lyžařů za dobu o půl hodiny kratší než druhý. Rychlost prvního byla o 1 km/hod větší než rychlost druhého. Určiti rychlost každého lyžaře.

314. Jednotné zemědělské družstvo obhospodařovalo 300 ha pozemků. Kdyby měli na práci o 3 traktory více, skončili by práci o 6 dní dříve. Kolik měli traktorů, jestliže každý traktor obdělá 15 ha denně?

315. Každý ze dvou dělníků měl zhotoviti 400 stejných součástek. Jeden z nich zhotoví za hodinu o 5 součástek více než druhý. Kolik hodin pracoval každý, jestliže na celou práci bylo třeba celkem 36 pracovních hodin?

316. Plavec proplul na řece vzdálenost 480 m po proudu i proti proudu za $12\frac{1}{2}$ minuty. Jaká je rychlost proudu, je-li vlastní rychlost plavce 80 m/min?

317. Dva turisté vyšli současně z míst A a B proti sobě a potkali se za 3 hodiny. První přišel do B o $2\frac{1}{2}$ hodiny později, než druhý přišel do A. Za jak dlouho každý z nich prošel celou vzdálenost?

318. Ze dvou brigád jedna vykoná určitou práci za dobu o 10 hodin kratší než druhá. Kdyby pracovaly společně, vykonaly by tu práci za 12 hodin. Za jak dlouho vykoná práci každá brigáda sama?

319. Dva mnohoúhelníky mají dohromady 18 stran a 55 úhlopříček. Které to jsou mnohoúhelníky?

320. V jedné bedničce bylo 152 pomerančů, ve druhé 70 a ve třetí 23. Kolik pomerančů je třeba přendati z prvé bedničky do třetí, aby v prvé bylo právě tolikrát více než ve druhé, kolikrát více bude ve druhé než ve třetí? (Ze sbírky úloh K. Krajeviče z roku 1882.)

321. Z vesnice poslali do města vzdáleného $10\frac{1}{2}$ versty posla pro nákup. Po 30 minutách poslali za ním druhého, aby dohonil prvního a vyřídil mu jakýsi vzkaz. Druhý posel, který ušel za každou hodinu 4 versty, nejen že dohonil prvního, ale vrátil se domů v týž okamžik, když první došel do města. Kolik verst za hodinu ušel první posel? (Z téže sbírky.)

322. Dvě vesničanky přinesly na trh 140 jablek a prodavše je po různých cenách, utržily stejně. „Kdybych měla tvoje jablka," pravila jedna z nich, „a prodávala je za svoji cenu, dostala bych za ně 90 kopějek." „A kdybych já," odvětila druhá, „měla tvoje jablka a prodávala je za svoji cenu, stržila bych 1 rubl 60 kopějek." Kolik jablek měla každá? (Podle L. Eulera.)

323. Obvod obdélníka je o délkových jednotek, obsah P odpovídajících jednotek čtverečných. Stanovte jeho strany. Kdy má úloha řešení?

324. Strany obdélníka měří a m a b m. O kolik třeba prodloužiti každou stranu, má-li se jeho obsah zvětšit o m m^2? Jak by tomu bylo, kdyby se měl obsah zmenšit o m m^2? Má úloha vždy řešení?

325. Obvod obdélníka měří o m, jeho úhlopříčka u m. Stanovte jeho rozměry. Má úloha vždy řešení?

326. Rozdíl třetích mocnin dvou přirozených čísel po sobě následujících je n. Stanovte ta čísla. Určete, jaký tvar musí mít číslo n, aby úloha měla řešení.

327. Pravidelný mnohoúhelník má o n úhlopříček více než je dvojnásobný počet stran. Kolik má stran? Jaká je podmínka pro n, aby úloha měla řešení?

328. Do propasti byl puštěn kámen a po uplynutí t vteřin bylo slyšet náraz na dno. Jak hluboká je propast? (Pád kamene je pohyb rovnoměrně zrychlený se zrychlením $g \doteq 9{,}81$ m/sec^2; pohyb zvuku je rovnoměrný s rychlostí $c \doteq 333$ m/sec.) Má úloha vždy řešení?

329. Těleso bylo vrženo svisle vzhůru rychlostí c m/sec. Za jak dlouho bude ve výšce s m? (Viz úlohu 252.) Jaká je podmínka, aby úloha měla řešení?

330. Zvětší-li se nějaké číslo o a, jeho převrácená hodnota se zvětší o $-a$. Které je to číslo? Má úloha vždy řešení? Jak musíme voliti číslo a, aby úloha měla řešení racionální?

VÝSLEDKY CVIČENÍ

I. Přirozená čísla.

1. a) V souboru A možno přiřaditi každý předmět sám sobě. b) Jestliže každému předmětu ze souboru A je možno přiřaditi jeden a jen jeden předmět ze souboru B, pak je také možno každému předmětu ze souboru B přiřaditi jeden a jen jeden předmět souboru A. c) Jestliže každému předmětu ze souboru A je možno přiřaditi jeden a jen jeden předmět souboru B a každému předmětu ze souboru B je možno přiřaditi jeden a jen jeden předmět souboru C, pak je také možno každému předmětu ze souboru A přiřaditi jeden a jen jeden předmět souboru C. — **2.** Je-li možno každému předmětu ze souboru A přiřaditi jeden a jen jeden předmět souboru B, pak je také možno každému předmětu ze spojení disjunktních souborů A a C přiřaditi jeden a jen jeden předmět ze spojení disjunktních souborů B a C. — **3.** Z rovnosti $a = b$ plyne $a + c = b + c$ podle cvič. 2, podobně z rovnosti $c = d$ plyne $b + c = b + d$. Proto podle cvič. 1c je $a + c = b + d$. — **4.** Přiřazujeme-li každému předmětu souboru A jeden a jen jeden předmět souboru B, jsou možné tyto případy: a) buď vyčerpáme oba soubory současně, b) nebo vyčerpáme dříve soubor A, c) nebo vyčerpáme dříve soubor B. — **5.** Daný součet je $a + b$; $a + (b + c) = (a + b) + c$. — **6.** $(a + b) + (c + d) = a + [b + (c + d)] = a + [(b + c) + d] = a + [(c + b) + d] = a + [c + (b + d)] = (a + c) + (b + d)$. — **7.** Pomocí obecného zákona asociativního a komutativního. — **8.** Sčítáme dané sčítance v jiném pořádku. — **9.** Každému předmětu je možno přiřaditi dvě čísla, z nichž první udává, v kolikáté řadě je předmět, a druhé udává, kolikátý je to předmět v té řadě. Tím je ke každému předmětu přiřazena dvojice přirozených čísel. — **10.** Každému předmětu možno přiřaditi tři čísla, z nichž první udává, v kolikáté vrstvě je předmět, druhé udává, v kolikáté řadě té vrstvy je předmět, a třetí udává, kolikátý je to předmět v té řadě. —

11. Je-li možno každému předmětu x ze souboru A přiřaditi jeden a jen jeden předmět y ze souboru B, pak dvojici (x, z) možno přiřaditi dvojici (y, z); při tom z je libovolný předmět souboru C. — **12.** Z rovnosti $a = b$ plyne $ac = bc$ podle cvič. 11, podobně z rovnosti $c = d$ plyne $bc = bd$. Proto podle cvič. 1c je $ac = bd$. — **13.** Daný součin je ab; $a(bc) = (ab)c$. — **14.** $(abc \dots p) . x = abc \dots px = axbc \dots p = (ax) . bc \dots p = \dots$ — **15.** $(ab)(cd) = a[b(cd)] = a[(bc)d] = a[(cb)d] = a[c(bd)] = (ac)(bd)$. — **16.** Pomocí obecného zákona asociativního a komutativního. — **17.** $ka + kb + \dots + kp = k(a + b + \dots + p)$. — **18.** $a(b + c) = (b + c)a$, $ab + ac = ba + ca$, proto $(b + c)a = ba + ca$. — **19.** $(a + b)(c + d + e) = a(c + d + e) + b(c + d + e) =$

... nebo $(a + b)(c + d + e) = (a + b)c + (a + b)d + (a + b)e = \ldots$ — **20.** Každý sčítanec výsledku je součin jednoho sčítance prvního součtu a jednoho sčítance druhého součtu; výsledek má tolik sčítanců, kolik je možno utvořiti dvojic, z nichž každá obsahuje jednoho sčítance prvního součtu a jednoho sčítance druhého součtu. —

21. Výsledek má tolik sčítanců, kolik je možno utvořiti trojic, z nichž každá obsahuje jednoho sčítance prvního součtu, jednoho sčítance druhého součtu a jednoho sčítance třetího součtu. — **22.** a) $6q(2p + 1)$, b) $(2a + b)(x + 1)$, c) $(u + 1)(v + 1)$. — **23.** $ap + bp + \ldots + mp = = (a + b + \ldots + m)p$. — **24.** a) Spojením dvou prázdných souborů je opět prázdný soubor. b) Jsou-li soubory A, B prázdné, je prázdný i soubor (A, B), neboť neexistují předměty, z nichž by bylo lze tvořit dvojice. — **25.** Ano, pro $x = 0$. — **26.** Není možné. — **27.** Pomocí úvah o prázdných souborech. — **28.** Přiřadíme-li každý předmět souboru A sám sobě, nezbude na soubor X, který je s ním disjunktní, žádný předmět. — **29.** Je-li spojení dvou souborů prázdné, musí být prázdný každý z obou souborů. — **30.** Obsahuje-li spojení dvou disjunktních souborů jediný předmět, patří tento předmět do jednoho z obou souborů, kdežto druhý je prázdný. —

31. Z každého předmětu souboru A vznikne tolik dvojic, kolik předmětů obsahuje soubor X. Má-li býti každá dvojice přiřazena jednomu a jen jednomu předmětu z A, musí z každého předmětu z A vzniknouti jen jediná dvojice; proto X obsahuje jediný předmět. — **32.** Nelze-li ze dvou souborů tvořiti dvojice, musí být aspoň jeden z obou souborů prázdný. — **33.** Lze-li ze souborů A, X utvořiti jen jedinou dvojici, musí každý z obou souborů obsahovati pouze jediný předmět. — **34.** Je-li soubor A početnější než soubor B, je soubor B méně početný než soubor A a naopak. — **35.** Je-li soubor A početnější (méně početný) než soubor B a soubor B početnější (méně početný) než soubor C, je soubor A početnější (méně početný) než soubor C. — **36.** Buď je soubor A početnější než soubor B nebo jsou oba stejně početné nebo je soubor A méně početný než soubor B. — **37.** Je-li soubor A početnější (méně početný) než soubor B, je spojení disjunktních souborů A a C početnější (méně početné) než spojení disjunktních souborů B a C. — **38.** Je-li soubor A početnější (méně početný) než soubor B, je také soubor dvojic (A, C) početnější (méně početný) než soubor dvojic (B, C). — **39.** a) Z nerovnosti $a > b$ plyne $a + c > b + c$, z nerovnosti $c > d$ plyne $b + c > b + d$; proto podle cvič. 35 je $a + c > b + d$. b) Z nerovnosti $a > b$ plyne $ac > bc$, z nerovnosti $c > d$ plyne $bc > bd$; proto podle cvič. 35 je $ac > bd$. — **40.** $a - b = x$ je totéž jako $b + x = a$. Proto a) $b + (x + c) = (b + x) + c = a + c$, čili $x + c = (a + c) - b$; b) $(b + c) + x = b + (c + x) = b + (x + c) = (b + x) + c = a + c$, čili $x = (a + c) - (b + c)$.

41. a) Označme $b - c = x$, t. j. $b = c + x = x + c$. Pak $a + b = a + (x + c) = (a + x) + c$, takže $a + x = a + b - c$. b) Označme $b - c = x$, $a - x = y$, t. j. $b = c + x = x + c$, $a = x + y$. Pak $a + c = (x + y) + c = x + (y + c) = x + (c + y) = (x + c) + y = b + y$, takže $y = a + c - b$. — **42.** a) Je-li $a - a = x$, je $a = a + x$, proto $x = 0$ (cvič. 28). b) Je-li $a - 0 = y$, je $a = 0 + y = y$. — **43.** a) Je-li $a = c + x$, $b = c + y$ a $a > b$, musí být $x > y$. Kdyby bylo $x \leqq y$, bylo by $c + x \leqq c + y$ (cvič. 37 a 3), čili $a \leqq b$. b) Je-li $c = a + x$, $c = b + y$ a $a > b$, musí být $x < y$. Kdyby bylo $x \geqq y$, bylo by $a + x > b + y$ (cvič. 39 a 37), čili $c > c$. —

44. a) $10a$, b) $100\,a$, c) $0{,}001\,a$. — **45.** a) $\frac{1}{60}\,t$, b) $60\,t$. — **46.** a) $\frac{10}{9}$, $\frac{1}{54}$, $\frac{1}{3240}$; b) $54'$, $5'24''$, $32{,}4''$. — **47.** a) 10, b) $0{,}1\,a$. — **48.** 20. — **49.** a) 7,8, b) 7,8. — **50.** $\frac{1}{2} < \frac{4}{7} < \frac{3}{5} < < \frac{5}{8} < \frac{2}{3}$. —

51. Neplyne. — **52.** Zlomek $\frac{65}{169}$ není v základním tvaru, neboť $169 > 91$. Zlomek $\frac{35}{91}$ není v základním tvaru, neboť 169 není násobek čísla 91. — **53.** Z rovnosti $ad = bc$ plyne $ab - ad = ab - bc$. — **54.** $\frac{65-35}{169-91} = \frac{30}{78} = \frac{35-30}{91-78} = \frac{5}{13}$; čísla 5 a 13 jsou nesoudělná. — **55.** Kdyby byly oba sudé, bylo by možno krátit aspoň dvěma. Větu obrátit nelze. — **56.** Z rovnosti $ad = bc$ plyne $adf = bcf$ (cvič. 11); z rovnosti $cf = de$ plyne $bcf = bde$. Proto $adf = bde$ (cvič. 1). Kdyby bylo $af > be$, musilo by být $adf > bde$ (cvič. 38). Kdyby bylo $af < be$, musilo by být $adf < bde$. Musí tedy $af = be$ (cvič. 36). —

57. a) Z nerovnosti $\frac{a}{b} > \frac{c}{b}$ plyne $ab > cb$. Kdyby bylo $a \leqq c$, bylo by $ab \leqq cb$ (cvič. 38 a 11). Musí tedy $a > c$. b) Z nerovnosti $\frac{a}{b} > \frac{a}{c}$ plyne $ac > ab$. Kdyby bylo $c \leqq b$, bylo by $ac \leqq ab$. — **58.** Kdyby bylo sudé, bylo by dělitelné dvěma. — **59.** $n^2 - 1 = (n + 1)(n - 1)$; je-li $n > 2$, je $n - 1 > 1$. — **60.** p je liché, čísla $p - 1$, $p + 1$ jsou sudá, t. j. $p - 1 = 2k$, $p + 1 = 2(k + 1)$. Je-li k liché, je $k + 1$ sudé a naopak. —

61. Čísla $p - 1$, $p + 1$ jsou sudá. Jedno z čísel $p - 1$, p $p + 1$ je dělitelné třemi, ale p to není. Je tedy jedno z čísel $p - 1$, $p + 1$ současně dělitelné dvěma a třemi. — **62.** $p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1)$; jedno z čísel $p + 1$, $p - 1$ je dělitelné dvěma, druhé čtyřmi a vedle toho jedno z nich ještě třemi. — **63.** Je-li n liché, je jedno z čísel $n - 1$, $n + 1$ dělitelné dvěma, druhé čtyřmi; dále jedno z čísel $n - 1$, n, $n + 1$ je dělitelné třemi. — **64.** Kdyby prvočinitel p z rozkladu čísla a byl prvočinitelem v rozkladu čísla b, nebyla by to čísla nesoudělná. — **65.** Je-li dělitelné číslem a, obsahuje všecky jeho prvočinitele, je-li dělitelné číslem b, obsahuje rovněž všecky jeho prvočinitele, ale žádný prvočinitel čísla b není prvočinitelem čísla a (cvič. 64). — **66.** Jde o čísla menší než 30, která neobsahují žádného z prvočinitelů 2, 3, 5. Ale všecka čísla menší než 30 (dokonce menší než $7^2 = 49$), která nejsou dělitelná žádným z čísel 2, 3, 5, jsou prvočísla. — **67.** $a \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{a} = b$. — **68.** $cx \pm cy = c(x \pm y) = a \pm b$, $x \pm y = \frac{a \pm b}{c}$. — **69.** $bx \cdot dy = bd \,.\, xy = ac$, $xy = \frac{ac}{bd}$. — **70.** $\frac{c}{d} \cdot x \cdot \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \,.\, \frac{d}{c}$, $x = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$. —

71. Z rovnosti $a \cdot x \cdot \frac{1}{x} = a$ plyne $a \cdot x = a : \frac{1}{x}$. — **72.** Z rovnosti $ad = bc$ plyne $adf^2 = bcf^2$, $adf^2 + bdef = bcf^2 + bdef$. — **73.** Z rovnosti $ad = bc$ plyne $ad \,.\, ef = bc \,.\, ef$. — **74.** Je-li $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ celé číslo, je čitatel dělitelný předně číslem b, proto musí ad být dělitelné číslem b; ale a není dělitelné číslem b, je tedy $d = bk$, kde k je přirozené číslo. Za druhé je čitatel dělitelný číslem d, proto musí číslo bc být dělitelné číslem d; ale c není dělitelné číslem d, je tedy $b = dh$, kde h je opět přirozené číslo. Odtud plyne $kh = 1$, čili $k = h = 1$ (cvič. 33), takže $b = d$ proti předpokladu. — **75.** Lze-li zlomek $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ krátit, je čitatel soudělný s číslem b nebo s číslem d. V prvém případě je číslo ad soudělné s číslem b, ale číslo a není soudělné s číslem b; musí tedy čísla b, d být soudělná, ale tomu tak není. Ve druhém případě je číslo bc soudělné s číslem d, ale c není soudělné s číslem d; musí tedy čísla b, d být soudělná opět proti předpokladu.

III. Čísla záporná.

76. $v + c$. — **77.** $a + (c_2 - c_1)h$. — **78.** a) Za 15 let, b) před 5 lety. — **79.** Je-li $a > 0$, je $|a| = a$; $|0| = 0 = -0$; je-li $a < 0$, je $|a| = -a$. — **80.** Je-li $a \geqq 0$, je $|a| = a$; je-li $a < 0$, je $|a| = -a > 0$, proto $|a| > a$. —

81. Je-li $a \geqq 0$, je $|a| = a$; potom $-a \leqq 0$, $|-a| = -(-a) = a$. Je-li $a < 0$, je $|a| = -a$; potom $-a > 0$, $|-a| = -a$. — **82.** $x + 1 = -(x - 2)$, $x = \frac{1}{2}$. — **83.** a) Třeba vyšetřit dvě možnosti: $x \geqq 1$, $x < 1$; výsledek $x = \frac{1}{2}$; b) nemá řešení. — **84.** $a \leqq 1$. — **85.** a) $a = 0$, $b = 0$; b) $a = b$ nebo $a = -b$. — **86.** Složíme-li posunutí (a) a $(-a)$, dostaneme (0). — **87.** $-3a + 2b - 5c$. — **88.** $b - a$. — **89.** a) $a - b$, b) $a + b$. — **90.** Plyne z platnosti asociativního zákona. —

91. $a - b$ je součet čísel a a $-b$. a) $(a - c) - b = a + (-c - b) = a + (-b - c) = (a - b) - c$. b) $a - (b - c) = a + [-(b - c)] = a + (-b + c) = (a - b) + c$. — **92.** Je-li $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, je $a + b \geqq 0$; pak $|a| = a$, $|b| = b$, $|a + b| = a + b$. Je-li $a \geqq 0$, $b < 0$, je $|a| = a$, $|b| = -b$; pak buď $a + b \geqq 0$ a $|a + b| = a + b = |a| - |b| < |a| + |b|$ nebo $a + b < 0$, $|a + b| = -a - b = -|a| + |b| \leqq |a| + |b|$. Je-li $a < 0$, $b \geqq 0$, je $|a| = -a$, $|b| = b$; pak buď $a + b \geqq 0$, $|a + b| = a + b = -|a| + |b| < |a| + |b|$ nebo $a + b < 0$, $|a + b| = -a - b = |a| - |b| \leqq |a| + |b|$. Je-li $a < 0$, $b < 0$, je $a + b < 0$; pak $|a| = -a$, $|b| = -b$, $|a + b| = -a - b$. Rovnost tedy nastává, mají-li buď obě čísla totéž znamení nebo je-li jedno z nich rovno nule. — **93.** Podle cvič. 92 je $|a + c| \leqq |a| + |c|$. Je-li $c = -b$, je $|c| = |-b| = |b|$. Pak $|a - b| \leqq |a| + |b|$. — **94.** Je-li $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, je $a + b \geqq 0$; pak $|a| = a$, $|b| = b$, $|a + b| = a + b = |a| + |b| \geqq |a| - |b|$, příp. $\geqq |b| - |a|$. Je-li $a \geqq 0$, $b < 0$, je $|a| = a$, $|b| = -b$; pro $|a| \geqq |b|$ je $a \geqq -b$, $a + b \geqq 0$, takže $|a + b| = a + b = |a| - |b|$; pro $|a| < |b|$ je $a < -b$, $a + b < 0$, takže $|a + b| = -a - b = |b| - |a|$. Je-li $a < 0$, $b \geqq 0$, je $|a| = -a$, $|b| = b$; pro $|a| \geqq |b|$ je $-a \geqq b$, $a + b \leqq 0$, takže $|a + b| = -a - b = |a| - |b|$; pro $|a| < |b|$ je $-a < b$, $a + b > 0$, takže $|a + b| = a + b = |b| - |a|$. Je-li $a < 0$, $b < 0$, je $a + b < 0$; potom $|a| = -a$, $|b| = -b$, $|a + b| = -a - b = |a| + |b| > |a| - |b|$, příp. $> |b| - |a|$. Rovnost nastane, mají-li obě čísla buď různá znamení nebo je-li aspoň jedno z nich rovno nule. — **95.** Podle cvič. 94 je $|a + c| \geqq |a| - |c|$ pro $|a| \geqq |c|$ a $|a + c| \geqq |c| - |a|$ pro $|c| > |a|$. Je-li $c = -b$, je $|c| = |-b| = |b|$. Potom $|a - b| \geqq |a| - |b|$ pro $|a| \geqq |b|$, $|a - b| \geqq |b| - |a|$ pro $|a| < |b|$. — **96.** Na základě vět: Součin dvou záporných činitelů je kladný; součin dvou činitelů, z nichž jeden je kladný a druhý záporný, je záporný; součin kladných činitelů je kladný. — **97.** Kdyby nebyl žádný činitel roven nule, nebyl by podle uvedených pravidel ani jejich součin roven nule. — **98.** Oba zákony platí pro čísla kladná a pro nulu. Vhodnými změnami znamení lze každý součin čísel relativních převésti na součin čísel kladných nebo nuly. — **99.** a) $(a + b) \cdot 0 = 0$, $a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0 + 0 = 0$; b) $(0 + b)r = br$, $0 \cdot r + br = br$; c) $(a + 0)r = ar$, $ar + 0 \cdot r = ar$. — **100.** $a \cdot (-a) = -a^2 \leqq 0$. —

101. $[a + (-a)]\,b = ab + (-a)b$, $[a + (-a)]\,b = 0 \cdot b = 0$; proto $ab + (-a)b = 0$, $(-a)b = -ab$. — **102.** $x = \frac{a}{b}$ je totéž jako $bx = a$. Jsou-li čísla a, b různá od nuly a téhož znamení, je x kladné; kdyby totiž bylo x záporné, nemohla by obě čísla býti téhož znamení. Jsou-li čísla a, b různých znamení, je x záporné; kdyby totiž bylo kladné, nemohla by obě čísla být různých znamení. — **103.** $\frac{x}{y} = z$ je totéž jako $x = yz$. Proto $|x| = |y| \cdot |z|$, $|z| = \frac{|x|}{|y|}$. — **104.** a) Je-li obraz čísla a vpravo od obrazu čísla b, je obraz čísla b vlevo od obrazu čísla a. b) Je-li obraz čísla a vlevo od obrazu čísla b, je obraz čísla b vpravo od obrazu čísla a. c) Buď je obraz čísla a vpravo od obrazu čísla b nebo oba obrazy splynou nebo je obraz čísla a vlevo od obrazu čísla b. d) Je-li obraz čísla a vpravo od obrazu čísla b a ten opět vpravo od obrazu čísla c, je obraz čísla a vpravo od obrazu čísla c. — **105.** a) Je li některý sčítanec záporný; b) jsou-li oba sčítanci záporní. — **106.** $a > 0$, $b > 1$ nebo $a < 0$, $b < 1$; b) $a > 0$, $b < 1$ nebo $a < 0$, $b > 1$. — **107.** a) $a > 1$, $b > 1$ nebo $a < 0$, $b < 0$; b) $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ nebo $a > 1$, $b < 0$ nebo $a < 0$, $b > 1$. — **108.** Nerovnost $a > b$ násobíme číslem $\frac{1}{ab}$. Jsou-li čísla a, b téhož znamení, vyjde $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, jsou-li různých znamení, vyjde $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

109. a) $x > 1{,}8$, b) $x < -1$, c) $x > -2{,}4$. — **110.** $\frac{2}{3}r < s < \frac{3}{2}r$. —

111. a) Z nerovnosti $a > b$ plyne $2a > a + b$ a také $a + b > 2b$. b) Jsou-li čísla a, b racionální, je také $\frac{1}{2}(a + b)$ racionální. — **112.** a) $a > b$, $a + c > b + c$; b) $a < b$, $a + c < b + c$. — **113.** Je-li $ad > bc$, je $ab + ad > ab + bc$ a také $ad + cd > bc + cd$; je-li $ad < bc$, je $ab + ad < ab + bc$ a také $ad + cd < bc + cd$.

IV. Desítková soustava.

114. $7^5 = 16807$. — **115.** $2^2 - 1 = 3$, $2^4 - 1 = 5.3$, $2^6 - 1 = 9.7$, $2^{10} - 1 = 93.11$, $2^{12} - 1 = 315.13$. — **116.** $2^{23} = 8388608$ hal. — **117.** a) 0, b) $2a^2$, c) 0, d) 0, e) $2x^5$. — **118.** a) $a > 1$ nebo $a < 0$, b) $a = 1$ nebo $a = 0$, c) $0 < a < 1$. — **119.** a) $a > 1$ nebo $-1 < a < 0$, b) $a = 1$ nebo $a = 0$ nebo $a = -1$, c) $a < -1$ nebo $0 < a < 1$. — **120.** a) $a > 1$, b) $a = 0$, $a = 1$, c) $a < 1$, $a \neq 0$.

121. a) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}$, b) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, c) 1, 10, 100, 1000. — **122.** a) $\frac{4}{9}, \frac{9}{4}, \frac{9}{4}, \frac{4}{9}$, b) $\frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{9}{16}$. — **123.** a) $\frac{a}{b}, \frac{1}{ab}$, b) $\frac{a}{b^2}, \frac{1}{a^2b^2}$, c) $-\frac{a}{b}, -\frac{1}{ab}, -\frac{1}{ab}$, d) $-\frac{a}{b^2}, \frac{1}{a^2b^2}$. — **124.** a) $\frac{1}{a}, a, \frac{1}{a^5}$, b) $\frac{1}{a^5}, a^5, a$. — **125.** a) $\frac{1}{a} + 1 + a$, b) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2$. — **126.** $a^{r-s} \cdot a^s = a^r$. — **127.** $\left(\frac{a}{b}\right)^r \cdot b^r = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)^r = a^r \cdot$ — **128.** Platí pro $r \geqq 0$, $s \geqq 0$. — **129.** Je pravda pro $r \geqq 0$. — **130.** a) 90, *b*) 900, c) 9000.

131. a) 18, b) 192. — **132.** a) $10y + x + 10x + y = 11(x + y)$, b) $10y + x - 10x - y = 9(y - x)$. — **133.** $100x + 10y + z - (100z + 10y + x) = 99(x - z)$. — **134.** $N = 100x + y$, $y = 4q + z$, $N = 100x + 4q + z = 4(25x + q) + z$. — **135.** $N = 1000x + y$, $y = 8q + z$, $N = 1000x + 8q + z = 8(125x + q) + z$. — **136.** a) 10^r, b) $n - 1$. — **137.** Viz cvič. 136. — **138.** a) 570,3, b) 3,065. — **139.** a) 563, b) 827, c) 1523. — **140.** $a \,.\, 10^r \,.\, b \,.\, 10^s = ab \,.\, 10^{r+s}$. —

141. a) 4550, b) 1200, c) 1 500 000. — **142.** a) $a \cdot 10^r \cdot b \cdot 10^s = ab \,.\, 10^{r+s}$, b) $ab \cdot 10^r : a \cdot 10^s = b \cdot 10^{r-s}$. — **143.** $(10a + b)(10c + d) = 100ac + 10(ad + bc) + bd$. — **144.** $(10a + b)[10a + (10 - b)] = 100a(a + 1) + b(10 - b)$. — **145.** $(10a + b)[10(10 - a) + b] = 100[a(10 - a) + b] + b^2$. — **146.** $10^{n-1} \leqq a < 10^n$, $10^{m-1} \leqq b < 10^m$ (viz cvič. 137); odtud $10^{n+m-2} \leqq ab < 10^{n+m}$, součin má buď $n + m$ nebo $n + m - 1$ číslic. — **147.** Je-li $r \geqq s$, je $\frac{a}{2^r \cdot 5^s} = \frac{a \cdot 5^{r-s}}{10^r}$; je-li $r < s$, je $\frac{a}{2^r \,.\, 5^s} = \frac{a \cdot 2^{s-r}}{10^s}$. — **148.** Daný zlomek má tvar $\frac{a}{10^k} = \frac{a}{2^k \,.\, 5^k}$; lze-li krátit, je to možno buď některou mocninou čísla 2 nebo některou mocninou čísla 5, ale ne oběma současně. — **149.** a) 38,00, 420,00 nebo 420,01, 0,71; b) 38,0, 420,0, 0,7; c) 38, 420, 1. — **150.** Absolutní hodnota rozdílu činí nejvýše $\frac{1}{2}$ jednotky řádu *n*-tého. —

151. *p*-tá platná číslice je řádu $n - p + 1$, proto rozdíl činí nejvýše $5 \cdot 10^{n-p}$ (viz cvič. 150). — **152.** a) 38,235, 38,125; b) 179,63375, 178,75875; c) 27,275, 27,165; d) 5,981735, 5,952598 (hodnoty zaokrouhlené). — **153.** $k \cdot 5 \cdot 10^{n-1} = \frac{1}{2}k \cdot 10^n$ (viz cvič. 150). — **154.** $5 \,.\, 10^{n-1} + 5 \,.\, 10^{n-1} = 10^n$. —

V. Druhá odmocnina.

155. Když buď $a = 0$ nebo $b = 0$. — **156.** $(50 + a)^2 = 100(25 + a) + a^2$. — **157.** $(a + x)^2 - a^2 = x(2a + x)$. — **158.** $a_1 - a_2 = x$, $a_1^2 - a_2^2 = x(a_1 + a_2)$. — **159.** $(a - b)^2 \geqq 0$. — **160.** $(a - 1)^2 \geqq 0$, $a^2 + 1 \geqq 2a$, $a + \frac{1}{a} \geqq 2$; rovnost nastane pro $a = 1$. —

161. a) Proveďte naznačené výkony. b) Je-li $|a| \neq |b|$ a $|x| \neq |y|$. — **162.** Položíme-li $x = b, y = a$ nebo $x = a, y = b$. — **163.** Proveďte naznačené výkony. — **164.** Položíme-li $x = a$, $y = b$, $z = -c$. — **165.** Položíme-li $x = b$, $y = c$, $z = a$ nebo $x = c$, $y = a$, $z = b$. — **166.** a) $x^2 - y^2 - 2yz - z^2$, b) $x^2 - y^2 + 2yz - z^2$, c) $-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2$. — **167.** a) $(x + y - z)(x - y + z)$, b) $(u^2 + v^2)(u + v)(u - v)$, c) $(p + q)^2(p - q)^2$, d) $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$, výraz upravte na tvar $(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - a^2b^2$. — **168.** Všecka čísla uvedená v prvém sloupci. — **169.** Jsou to čísla tvaru $(a + 0{,}05)^2 = a(a + 0{,}1) + 0{,}0025$, kde a (a také $a + 0{,}1$) má jedno desetinné místo. — **170.** $(a + 0{,}5)^2 = a^2 + a + 0{,}25$, při čemž číslo $a + 0{,}25$ má dvě desetinná místa. —

171. $(5 + a)^2 = 25 + 10a + a^2$; číslo $25 + 10a$ má jedno desetinné místo. — **172.** $(2{,}5 + a)^2 = 6{,}25 + 5a + a^2$; číslo $6{,}25 + 5a$ má jedno desetinné místo. — **173.** a) 10,69, 1665, 974200, 0,01513, 0,0004285; b) 5,693, 75,78 nebo 75,77, 154,0, 208500, 0,04032. — **174.** a) $40{,}6^2 - 7{,}9^2 \doteq 1586$; b) $67{,}78^2 - 59{,}52^2 \doteq 1052$. — **175.** Nejsou, neboť $9^2 + 5^2 = 106$, $1^2 + 8^2 = 65$; poslední číslice prvního výrazu je 6, druhého 5. — **176.** Platí; obě strany jsou pak rovny nule. — **177.** Je možné, aby $a = 0$, pak jsou oba výrazy rovny nule; není možné, aby $b = 0$. — **178.** a) $23^2 = 529$; b) $317^2 = 100489$. — **179.** a) Rovnice $x^2 = 7$ značí buď $x = \sqrt{7}$ nebo $x = -\sqrt{7}$; b) $|a|$. — **180.** a) 28, b) 48, c) 504. —

181. a) 5, b) 6, c) 30. — **182.** a) $1\frac{1}{4}$, b) 1,8, c) 4,5. — **183.** a) 9, b) $\sqrt{41}$, c) 21. — **184.** a) $1{,}96 < 2 < 2{,}25$, b) $1{,}998 < 2 < 2{,}016$. — **185.** Obdélník, jehož úhlopříčka je $\sqrt{52}$; úhlopříčka čtverce je $\sqrt{50}$. — **186.** 2,58, 6,72, 26,9, 94,7, 0,983, 0,235, 0,0613, 0,0197. — **187.** 1,111, 1,859, 6,758, 7,453 nebo 7,454, 24,61, 87,03 nebo 87,04, 0,7564 nebo 0,7565, 0,2477, 0,08534 nebo 0,08535, 0,02846 nebo 0,02847. — **188.** 2,646, 8,944 nebo 8,945, 28,28, 0,5477, 0,1304, 0,04796, 0,03162. — **189.** 11,18 cm. — **190.** 45,62 cm. —

191. 154,2 m. — **192.** 46,67 mm. — **193.** a) 25,02 cm, 38,59 cm, 42,28 cm; b) 44,17 cm. — **194.** 3,5 vteř. — **195.** a) 0,709 vteř., b) 0,549 vteř. — **196.** $\sqrt{a} - b - x =$ $= \dfrac{2b\sqrt{a} - b^2 - a}{2b} = -\dfrac{(\sqrt{a} - b)^2}{2b} < 0$. — **197.** Je-li $\sqrt{a} < b$, je $x < 0$ a $b - \sqrt{a} -$ $- (b + x - \sqrt{a}) > 0$. Je-li $\sqrt{a} > b$, je $\sqrt{a} - b - (b + x - \sqrt{a}) =$ $= \dfrac{4b\sqrt{a} - 4b^2 - (a - b^2)}{2b} = \dfrac{(\sqrt{a} - b)(3b - \sqrt{a})}{2b} > 0$. — **198.** $b + x - \sqrt{a} =$ $= \dfrac{(\sqrt{a} - b)^2}{2b} < \dfrac{25 \cdot 10^{2(n-p)}}{2 \cdot 10^n} = \dfrac{1}{8} \cdot 10^{n-2p+2}$; jednotka stojící na místě k-té platné číslice má místní hodnotu 10^{n-k+1}, tedy $k = 2p - 1$. — **199.** Pro $p = 4$ plyne $k = 7$; pro $p = 7$ plyne $k = 13$. — **200.** a) 1,732051, b) 2,236068, c) 2,449490, d) 3,162278. —

201. 1,732050807569. — **202.** Racionální jsou odmocniny čísel: 1296, 1764, 2304. — **203.** Budiž $a = b^2$, kde b je přirozené. Je-li $b^2 = pk$, musí $b = ph$, čili $a = p^2h^2$. — **204.** $\sqrt{mnp} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{p}$; věta platí pro libovolný počet činitelů. — **205.** Jsou-li čísla m, n, p po dvou nesoudělná, jsou také čísla m, np nesoudělná; proto $\sqrt{m}$, $\sqrt{np}$

(a v důsledku toho i $\sqrt{n}$, $\sqrt{p}$) jsou čísla přirozená. — **206.** $m = k^2r$, $n = h^2r$, kde k, h, r jsou čísla přirozená. — **207.** Je to možné, je-li $m = k^2r$, $n = h^2r$, kde k, h, r jsou čísla přirozená. — **208.** a) 72, b) 210, c) 420. — **209.** První a poslední. — **210.** 210. —

211. 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 46, 47. — **212.** a) Je to možné, jsou-li obě čísla stejná. b) Je to možné, jsou-li to čísla tvaru rs, rt, st, kde r, s, t jsou čísla prostá čtverců po dvou nesoudělná. Jedno z čísel r, s, t může býti také rovno jedné. — **213.** Je-li $m = kr$, $n = hr$, kde k, h jsou dvě nesoudělná čísla (prostá čtverců), je $u\sqrt{m} \,.\, v\sqrt{n} = uvr\sqrt{kh}$, při čemž kh je prosté čtverců. — **214.** Je-li $u\sqrt{m} = v\sqrt{n}$, je $u^2m = u\sqrt{m} \,.\, v\sqrt{n}$, ale to není možné (viz cvič. 213). — **215.** a) $2\sqrt{10}$, b) $3\sqrt{5}$, c) $4\sqrt{3}$, d) $5\sqrt{2}$, e) $2\sqrt{14}$, f) $6\sqrt{2}$, g) $7\sqrt{3}$, h) $13\sqrt{2}$, i) $11\sqrt{3}$, j) $10\sqrt{10}$. — **216.** a) $\frac{1}{4}\sqrt{2}$, b) $\frac{1}{4}\sqrt{6}$, c) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$, d) $\frac{5}{6}\sqrt{3}$, e) $\frac{4}{5}\sqrt{5}$, f) $\frac{3}{4}\sqrt{6}$, g) $\frac{5}{7}\sqrt{2}$, h) $\frac{8}{3}\sqrt{3}$, i) $0{,}6\sqrt{10}$, j) $0{,}4\sqrt{305}$. — **217.** a) $p\sqrt{p}$, b) $q^2\sqrt{q}$, c) $r^3\sqrt{r}$, d) $p\sqrt{q}$, e) $r\sqrt{pr}$, f) $qr\sqrt{q}$, g) $3p^2q^3r^3\sqrt{pr}$ h) $2qr^3\sqrt{2p}$. — **218.** a) $\frac{p}{q}\sqrt{p}$, b) $\frac{p}{q^2}\sqrt{q}$, c) $\frac{q}{r^2}\sqrt{pr}$, d) $\frac{3p}{2rs}\sqrt{qr}$, e) $\frac{2q}{9rs^2}\sqrt{6pqs}$. — **219.** a) $2\sqrt{19}$, b) $9\sqrt{3}$. — **220.** $abc = (ab)c$; čísla ab, c jsou racionálně závislá na $\sqrt{n}$, proto i číslo abc je racionálně závislé na $\sqrt{n}$. To platí pro každý počet činitelů. —

221. Čitatel i jmenovatel je racionálně závislý na $\sqrt{n}$, proto je i zlomek racionálně závislý na $\sqrt{n}$. — **222.** Plyne z cvič. 220 pro $a = b = c = \ldots$ a z cvič. 221. — **223.** Je to možné; příklad: $(a + b\sqrt{n}) + (c - b\sqrt{n}) = a + c$, kde a, b, c jsou racionální, n prosté čtverců. — **224.** Je to možné; příklad: $(a + b\sqrt{n})(a - b\sqrt{n}) = a^2 - b^2n$, a, b jsou racionální, n prosté čtverců. — **225.** a) $3 + \sqrt{3}$, b) $-6 - 5\sqrt{2}$, c) $3\sqrt{2}$, d) $1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$, e) $-1 + \sqrt{2}$, f) $-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$, g) $-\frac{23}{6} + \frac{5}{6}\sqrt{7}$. — **226.** $x^2 = s^2m + t^2n + 2s\sqrt{m} \cdot t\sqrt{n}$; viz cvič. 213. — **227.** Z rovnice $r_1 + s\sqrt{m} = r_2 + t\sqrt{n}$ plyne $r_1 - r_2 = t\sqrt{n} - s\sqrt{m}$, $(r_1 - r_2)^2 = t^2n + s^2m - 2t\sqrt{n} \cdot s\sqrt{m}$; viz cvič. 213. —

VI. Kvadratické rovnice.

228. 37. — **229.** 64 a 23. — **230.** $33\frac{1}{3}$ cm^3 a $66\frac{2}{3}$ cm^3. —

231. 20 Kčs a 12 Kčs. — **232.** 36 km/hod, 33 km/hod, 231 km. — **233.** 375 km, $14\frac{1}{2}$ hod. — **234.** a) 21 vteř. a 15 vteř. b) 36 vteř. — **235.** a) $3\frac{15}{16}$ vteř. a $2\frac{13}{16}$ vteř. b) $6\frac{3}{4}$ vteř. — **236.** a) $A = 1$, $B = 3$; b) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$. — **237.** $\frac{1}{5}(a + 5)$, $\frac{1}{5}(a - 20)$, $\frac{3}{5}(a + 5)$. — **238.** $\dfrac{3a(5+b)}{a+b}$, $\dfrac{3b(5-a)}{a+b}$, $a + b \neq 0$. — **239.** $A = \dfrac{b - b'}{a - a'}$, $B = \dfrac{ab' - a'b}{a - a'}$. — **240.** $2n - 20$, $20 - n$, $10 \leq n \leq 20$, n celé. —

241. $\frac{1}{2}(5s - 180)$, $\frac{1}{2}(180 - 3s)$, $36 < s < 60$. — **242.** $2a : (b - a)$ m, $\frac{1}{2}(b - a)$ Kčs, $b > a$. — **243.** a) $\frac{1}{2}(s_1 + s_2)$; b) $2s_1s_2 : (s_1 + s_2)$. — **244.** $n(b - q) : (p - q)$, $n(p - b) : (p - q)$, $p \geqq b \geqq q$. — **245.** $(am - bn) : (a - b)$, $(an - bm) : (a - b)$; je-li $a > b$, třeba voliti m, n tak, aby $\frac{a}{b} > \frac{m}{n} > \frac{b}{a}$, je-li $a < b$, musí $\frac{a}{b} < \frac{m}{n} < \frac{b}{a}$. — **246.** a) Platí-li $ar^2 + br + c = 0$, platí $k(ar^2 + br + c) = 0$. b) Platí-li $k(ar^2 + br + c) = 0$, $k \neq 0$, platí $ar^2 + br + c = 0$. — **247.** Kdyby bylo $a > 0$, $b \geqq 0$, $c \geqq 0$, bylo by $ar^2 + br + c > 0$; kdyby bylo $a < 0$, $b \leqq 0$, $c \leqq 0$, bylo by $ar^2 + br + c < 0$. — **248.** Z rovnice $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0$ plyne $c = 0$. — **249.** Z rovnic $ar^2 + br + c = 0$, $ar^2 - br + c = 0$ plyne $br = 0$, ale $r \neq 0$. — **250.** Vypočtěte a, b, c z rovnic $ar^2 + br + c = 0$, $as^2 + bs + c = 0$, $at^2 + bt + c = 0$ za předpokladu, že $r \neq s$, $r \neq t$, $s \neq t$. —

251. a) 0, 5; b) 0, $-3{,}7$; c) 0, $3\frac{1}{3}$; d) 0; e) 0, -4; f) 0, 3; g) 0, 5; h) nemá řešení. — **252.** $2c : g \doteq 10{,}2$ vteř. — **253.** a) $a = 1$, $r = 7$; b) $a = 0$, $r = 2$ nebo $a = 3$, $r = \frac{1}{2}$. — **254.** a) $1\frac{1}{2}$, $-1\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}\sqrt{6}$, $-\frac{1}{3}\sqrt{6}$; c) 4, -4; d) 1, -1; e) 5, -5; f) $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$; g) -1; h) nemá řešení. — **255.** a) $x = -\frac{1}{2}$, $r = \frac{3}{5}$, $s = -\frac{3}{5}$; b) $y = -\frac{1}{4}$, $r = \frac{3}{8}\sqrt{5}$, $s = -\frac{3}{8}\sqrt{15}$. — **256.** Je-li $r > 0$, $s > 0$, je $rs > 0$, $r + s > 0$; je-li $r < 0$, $s < 0$, je $rs > 0$, $r + s < 0$; je-li $r > 0$, $s < 0$, je $rs < 0$. — **257.** $r + s = -p = -b : a$; je-li $r = s$, je $r = -b : 2a$. — **258.** $s = -p - r = -\frac{b}{a} - r$; je-li r iracionální, je i s iracionální; kdyby bylo $r = s$, bylo by r racionální podle cvič. 257. — **259.** a) Z rovnice $r + s = -p$ pro $r = s$ plyne $r = -\frac{1}{2}p$. b) Z rovnice $sr = q$ pro $r = s$ plyne $|r| = \sqrt{q}$. c) $\frac{1}{2}|p| = \sqrt{q}$, odtud $p^2 - 4q = 0$. — **260.** Pak z rovnice $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = 0$ plyne $(x + \frac{1}{2}p)^2 = 0$; jeden kořen je $r = -\frac{1}{2}p$ a druhý $s = -p - r = -\frac{1}{2}p$. —

261. Ze vztahů $r + s = -p$, $rs = q$ plyne $p^2 - 4q = (r - s)^2 > 0$. — **262.** a) $n^2 = p^2 - 4q$; b) $p^2n = q(n + 1)^2$. — **263.** Musí platit (1) $r + r^2 = -p$, (2) $r \cdot r^2 = q$; vedle toho $r^2 + pr + q = 0$, takže $r^2 = -p - r = -pr - q$; odtud $r = \frac{p - q}{p - 1}$, $r^2 = \frac{q - p^2}{p - 1}$, neboť $p \neq 1$, což dosadíme do (2). — **264.** a) $q - p + 1$; b) $p^2 - 2q$; c) $-p^3 + 3pq$; d) $-\frac{p}{q}$; e) $\frac{p^2}{q} - 2$. — **265.** a) $x^2 - 13x + 40 = 0$; b) $x^2 - x - 6 = 0$; c) $x^2 + 0{,}1x - 1{,}56 = 0$; d) $20x^2 + 31x + 12 = 0$; e) $x^2 - 4x - 1 = 0$; f) $x^2 + 2x - 1 = 0$. — **266.** a) $x^2 - px + q = 0$; b) $x^2 + (p + 2n)x + q + pn + n^2 = 0$; c) $x^2 + pnx + qn^2 = 0$; d) $qx^2 + px + 1 = 0$; e) $x^2 - (p^2 - 2q)x + q^2 = 0$; f) $x^2 + (p^3 - 3pq)x + q^3 = 0$; g) $qx^2 - (p^2 - 2q)x + q = 0$. — **267.** a) $s = -3$; b) $s = 46$; c) $s = 1 - \sqrt{2}$; d) $s = 2 + \sqrt{3}$. — **268.** a) $q = -7$, $s = -1$; b) $q = -55$, $s = 11$; c) $q = 9$, $s = 3$; d) $q = -11$, $s = 3 - 2\sqrt{5}$. — **269.** a) $p = -15$, $s = 3$; b) $p = \frac{25}{2}$, $s = -8$; c) $p = 12$, $s = -6$; d) $p = -14$, $s = 7 + \sqrt{13}$. — **270.** $p = -r - s$, $q = rs$, proto $x^2 + px + q = x^2 - (r + s)x + rs$; má-li rovnice dvojný kořen r, je $x^2 + px + q = (x - r)^2$. —

271. $\frac{b}{a} = -r - s$, $\frac{c}{a} = rs$, proto $ax^2 + bx + c = ax^2 - a(r + s)x + ars$;

má-li dvojný kořen r, je $ax^2 + bx + c = a(x - r)^2$. — **272.** Z daného vztahu plyne $rs - r's - rs' + r's' = - rs + rr' + ss' - r's'$ čili $2rs + 2r's' = (r + s)(r' + s')$. — **273.** Z rovnic $r^2 + pr + q = 0$, $r^2 + p'r + q' = 0$ plyne $(p - p')r + q - q' = 0$, $r = -(q - q') : (p - p')$. Dosadíme-li nalezený kořen do některé z daných rovnic, dostaneme hledaný vztah. Mohou mít dané rovnice také druhý společný kořen? — **274.** Má-li rovnice $x^2 + px + q = 0$, kde p, q jsou čísla celá, celočíselný kořen r, je také $s = - p - r$ celočíselný kořen. Jsou-li oba kořeny sudé, je p i q sudé; je-li jeden kořen sudý a druhý lichý, je q sudé; jsou-li oba kořeny liché, je p sudé. — **275.** Z rovnic $ar^2 + br + c = 0$, $as^2 + bs + c = 0$, vypočteme b a c. Je-li $r \neq s$, vyjde $b = - a(r + s)$, $c = ars$. — **276.** $p^2 - 4q = (r - s)^2$. — **277.** a) 2, 3; b) -2, -3; c) -1, 6; d) 3, 10; e) 2, -15; f) 1, 9; g) 3, -7; h) -5, 8; i) -5, 6; j) 8, 12. — **278.** a) $(x + 2) \cdot (x + 4)$; b) $(x - 1)(x - 4)$; c) $(x - 2)(x + 6)$; d) $(x + 3)(x - 6)$; e) $(x + 5)(x - 9)$; f) $(x - 8)(x - 15)$. — **279.** $\frac{x - 5}{x^2 - 1}$, $x \neq 1$, $x \neq -1$, $x \neq -2$; b) $\frac{1}{x^2 - 4x + 3}$, $x \neq 1$, $x \neq 2$, $x \neq 3$; c) $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 16}$, $x \neq 3$, $x \neq -3$, $x \neq 4$, $x \neq -4$. — **280.** $a \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^2 + b \cdot \frac{m}{n} + c = 0$, $am^2 + bmn + cn^2 = 0$; odtud jednak $m(am + bn) + cn^2 = 0$, jednak $am^2 + n(bm + cn) = 0$. —

281. Z dané rovnice plyne $(ar)^2 + b \cdot ar + ac = 0$; kořen ar je celočíselný kořen rovnice $y^2 + by + ac = 0$, která má u kvadratického členu koeficient 1 (viz cvič. 280). — **282.** a) Rovnice $y^2 - 3y - 4 = 0$ má kořeny -1, 4, proto $r = -\frac{1}{2}$, $s = 2$; b) $y^2 - 7y + 12 = 0$ má kořeny 3, 4, $r = \frac{1}{2}$, $s = \frac{2}{3}$; c) $y^2 - 9y - 36 = 0$ má kořeny -3, 12, $r = -\frac{1}{3}$, $s = \frac{4}{3}$; d) $y^2 - y - 20 = 0$ má kořeny -4, 5, $r = -1$, $s = \frac{5}{4}$. — **283.** a) $(3x - 2)(x - 1)$; b) $(3x - 1)(x + 2)$; c) $(2x + 1)(2x - 3)$; d) $(2x + 3)(3x + 2)$. — **284.** a) 1, 5; b) 3; c) 7, -6; d) 12, -7; e) $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$; f) $-\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}$, $-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5}$; g) 1, $-\frac{1}{2}$; h) 10, $\frac{2}{3}$; i) $\frac{5}{3}$; j) $-\frac{5}{4}$, $-\frac{7}{2}$. — **285.** a) $\frac{5}{3}$, $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{3}{2}$, $-\frac{7}{2}$; c) $-2 + \sqrt{6}$, $-2 - \sqrt{6}$; d) nemá řešení; e) $\frac{10}{3}$, -6; f) $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$; g) $-\frac{2}{3}$; h) nemá řešení. — **286.** a) $c < 12\frac{1}{4}$; b) $c = 12\frac{1}{4}$; c) $c > 12\frac{1}{4}$. — **287.** a) $b > 8\sqrt{3}$ nebo $b < -8\sqrt{3}$; b) $b = 8\sqrt{3}$ nebo $b = -8\sqrt{3}$; c) $-8\sqrt{3} < b < 8\sqrt{3}$. — **288.** a) $a > -\frac{9}{16}$; b) $a = -\frac{9}{16}$; c) $a < -\frac{9}{16}$. — **289.** $\frac{1}{4}p^2 - q$ není záporné, když $q \leq 0$. — **290.** Danou rovnici lze psát ve tvaru $(2x + p)^2 = p^2 - 4q$. —

291. Danou rovnici lze psát ve tvaru $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$. — **293.** a) $\frac{7}{2}$, 1; b) $-\frac{1}{6}$, -1; c) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$; d) nemá kořeny; e) nemá kořeny; f) $-\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{13}$, $-\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{13}$; g) 1,5, -4,2; h) 17, -16. — **294.** Je-li $D = 4k$, je $b^2 = 4(k + ac)$. — **295.** Je-li b liché, je b^2 také liché a $D = b^2 - 4ac$ je rovněž liché a není možné, aby $D = 0$. — **296.** a) 3, $\frac{1}{7}$; b) $\frac{9}{5}$, $\frac{5}{9}$; c) nemá kořeny; d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$; e) $-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}$, $-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}$; f) $\frac{7}{9}$, $-\frac{5}{7}$; g) $\frac{9}{8}$; h) $-2 + \sqrt{3}$, $-2 - \sqrt{3}$; i) nemá kořeny; j) -17, -19. — **297.** Je-li $b = pk$, $c = ph$ a h ani a není násobkem čísla p, pak $D = b^2 - 4ac = p(pk^2 - 4ah)$. Je-li $p \neq 2$, není číslo $pk^2 - 4ah$ dělitelné prvočíslem p; je-li $p = 2$, je $D = 4(k^2 - 2ah)$, při čemž čísla a, h jsou lichá. Je-li k sudé, t. j. je-li $k = 2m$, je $D =$

$= 8(2m^2 - ah)$; výraz v závorkách je číslo liché. Je-li k liché, t. j. je-li $k = 2m + 1$, je $k^2 - 2ah = 4m^2 + 4m + 1 - 2ah$; ah je rovněž liché, t. j. $ah = 2n + 1$. Je tedy $k^2 - 2ah = 4(m^2 + m - n) - 1$ číslo liché, které však není druhou mocninou celého čísla, neboť každá druhá mocnina lichého čísla, t. j. čísla tvaru $2u + 1$ je tvaru $4(u^2 + u) + 1$. — **298.** Je-li $b = pk$, $a = ph$ a h ani c není násobkem prvočísla p, pak $D = b^2 - 4ac = p(pk^2 - 4ch)$; další úvahy jako ve cvič. 297. — **299.** Kdyby neměla totéž znamení, bylo by $D = b^2 - 4ac \geq 0$. — **300.** a) $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$; b) $\frac{5}{4}$, 1; c) $-4 + \sqrt{5}$, $-4 - \sqrt{5}$; d) $-1 + \sqrt{5}$, $-1 - \sqrt{5}$; e) $\frac{3}{2}$; f) 8, $\frac{16}{7}$; g) $\frac{2}{3}$; h) nemá řešení. —

301. a) $u = 10$, $x = 4$ nebo $u = -15$, $x = -1$; b) $u = 9$, $x = 3$. — **302.** a) $m = 0$, $x = 1$; $m \neq 0$, $x = 1$ nebo $x = 1 : m$; b) $m = 0$, $x = 0$; $m \neq 0$, $m > -\frac{1}{2}$, $x = \dfrac{m + 1 + \sqrt{2m + 1}}{m}$ nebo $x = \dfrac{m + 1 - \sqrt{2m + 1}}{m}$; $m = -\frac{1}{2}$, $x = -1$; $m < -\frac{1}{2}$, nemá řešení; c) $m = -1$, $x = -1$; $m \neq -1$, $x = -1$ nebo $x = \dfrac{-m + 1}{m + 1}$; d) $m = 1$, $x = -2$; $m \neq 1$, $m > \frac{2}{5}\sqrt{5}$, nebo $m < -\frac{2}{5}\sqrt{5}$, $x = \dfrac{m + \sqrt{5m^2 - 4}}{2(m - 1)}$ nebo $x = \dfrac{m - \sqrt{5m^2 - 4}}{2(m - 1)}$; $m = \frac{2}{5}\sqrt{5}$, $x = -2 - \sqrt{5}$; $m = -\frac{2}{5}\sqrt{5}$, $x = -2 + \sqrt{5}$; $-\frac{2}{5}\sqrt{5} < m < \frac{2}{5}\sqrt{5}$, nemá řešení; e) $m = 1$, $x = 0$; $m \neq 1$, $x = \dfrac{m + \sqrt{5m^2 - 4m + 4}}{2(m - 1)}$ nebo $x = \dfrac{m - \sqrt{5m^2 - 4m + 4}}{2(m - 1)}$. — **303.** a) $x = a + b$ nebo $x = a - b$; b) $a = 0$, $b = 0$, rovnici vyhovuje každé x; $a = 0$, $b \neq 0$, $x = -1$; $a \neq 0$, $x = -b : a$ nebo $x = -1$; c) $a = 0$, $b = 0$, rovnici vyhovuje každé x; $a = 0$, $b \neq 0$ nebo $a \neq 0$, $b = 0$, $x = 0$, $ab \neq 0$, $x = b : a$ nebo $x = -a : b$; d) $a = 0$, $b = 0$, rovnici vyhovuje každé x; $a = 0$; $b \neq 0$, nebo $a \neq 0$, $b = 0$, $x = 0$; $ab \neq 0$, $x = a : b$ nebo $x = b : a$; e) $a = 0$, $b = 0$, rovnici vyhovuje každé x; $a = 0$, $b \neq 0$, nemá řešení; $a = -b \neq 0$, $x = 0$; $a(a + b) \neq 0$, $ab < 0$, $x = \dfrac{-2ab + (a - b)\sqrt{-ab}}{a(a + b)}$ nebo $x = \dfrac{-2ab - (a - b)\sqrt{-ab}}{a(a + b)}$; $a(a + b) \neq 0$, $ab > 0$, $a \neq b$, nemá řešení; $a = b \neq 0$, $x = -1$. — **304.** $D = 4[(a + b + c)^2 - 3(ab + ac + bc)] = 2[(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2] > 0$, pokud není $a = b = c$. — **305.** $D = (a^2 + b^2 + p + q)^2 - 4(a^2q + b^2p + pq) = (a^2 - b^2 + p - q)^2 + (2ab)^2 > 0$. — **306.** 12 a 8. — **307.** 19 a 21. — **308.** 19, 20, 21. — **309.** 43 nebo 34. — **310.** 48 nebo 16. —

311. 60 nebo 40. — **312.** 7. — **313.** 9 km/hod a 8 km/hod. — **314.** 2. — **315.** 20 hod. a 16 hod. — **316.** 16 m/min. — **317.** 5 hod., $7\frac{1}{2}$ hod. — **318.** 30 hod. a 20 hod. — **319.** Desetiúhelník a osmiúhelník. — **320.** 12. —

321. 3 versty. — **322.** 80 a 60 jablek. — **323.** $\frac{1}{4}o + \sqrt{\frac{1}{16}o^2 - P}$ a $\frac{1}{4}o - \sqrt{\frac{1}{16}o^2 - P}$, $o \geq 4\sqrt{P}$. — **324.** $\sqrt{\frac{1}{4}(a + b)^2 + m} - \frac{1}{2}(a + b)$; $\frac{1}{2}(a + b) -$

$\sqrt{\frac{1}{4}(a+b)^2 - m}$, pokud $m < ab$. — **325.** $\frac{1}{4}o + \sqrt{\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{16}o^2}$, $\frac{1}{4}o - \sqrt{\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{16}o^2}$, $2u < o \leqq 2u\sqrt{2}$. — **326.** $\frac{1}{6}(\sqrt{12n-3} - 3)$, $\frac{1}{6}(\sqrt{12n-3} + 3)$, $n = 3k^2 + 3k + 1$, $k \geqq 1$ celé. — **327.** $\frac{1}{2}(\sqrt{49+8n} + 7)$, $n = \frac{1}{2}k(k+7)$, $k > -4$ celé. — **328.** $\frac{c}{g}(c + gt - \sqrt{c^2 + 2cgt})$, úloha má vždy řešení. — **329.** V čase $(c + \sqrt{c^2 - 2gs}) : g$ nebo $(c - \sqrt{c^2 - 2gs}) : g$, $c^2 \geqq 2gs$. — **330.** $\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2+4})$ nebo $\frac{1}{2}(-a - \sqrt{a^2+4})$; aby bylo řešení racionální, musí $\sqrt{a^2+4} = \frac{k}{h}$, kde k, h jsou celá čísla ($h \neq 0$). Odtud $a^2 = \frac{(k+2h)(k-2h)}{h^2}$. Položíme $k + 2h = u^2$, $k - 2h = v^2$; potom $h = \frac{1}{4}(u^2 - v^2)$, takže $a = \frac{4uv}{u^2 - v^2}$, kde u, v jsou čísla celá taková, že $|u| \neq |v|$.

GEOMETRIE

ROZVRH UČIVA.

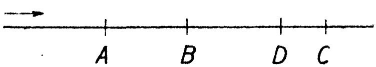
Září:	Uspořádání bodů na přímce Roviny a poloroviny Úhly
Říjen:	Trojúhelníky Mnohoúhelníky Rovnoběžky
Listopad:	Základní vlastnosti velikosti Velikost úseček Velikost úhlů Shodnost trojúhelníků
Prosinec:	Osová souměrnost Posouvání
Leden:	Středová souměrnost; rovnoběžky a úhly Otáčení
Únor:	Úvodní úvahy o podobnosti Podobnost trojúhelníků
Březen:	Věty Eukleidovy a věta Pythagorova Goniometrie ostrého úhlu Tabulky goniometrických funkcí
Duben:	Užití goniometrických funkcí Stejnolehlost Kružnice: opakování o kružnici
Květen:	Obvodové a úsekové úhly Mocnost bodu ke kružnici
Červen:	Opakování

I. ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI POLOHY.

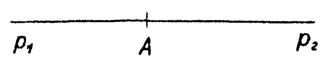
1. Uspořádání bodů na přímce.

Předmětem geometrie je studium **prostoru.** Prostor se skládá z **bodů,** které značíme velkými písmeny A, B, C atd., někdy opatřené indexy (dole) nebo čárkami a hvězdičkami (nahoře), na př.: S_1, S_2, K', K'', P^* atd.

Nejdůležitější částí prostoru jsou **přímky.** Základní vlastnost přímky zní: **Dvěma různými body** A, B **prochází právě jedna přímka,** které říkáme přímka AB nebo přímka BA. Přímky a jejich části značíme také malými písmeny, nejčastěji písmeny p, q, r. Ze základní vlastnosti plyne, že dvě různé přímky mají nejvýš jeden společný bod. Dvě různé přímky p, q, které mají společný bod C, jmenují se **různoběžné přímky,** krátce **různoběžky;** bod C je jejich **průsečík.** Také říkáme, že se přímky p, q **protínají** v bodě C.



Obr. 1.

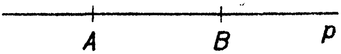


Obr. 2.

Bod může probíhati přímku dvěma způsoby, z nichž jeden je v obr. 1 vyznačen šipkou; říkáme, že bod může probíhati přímku ve dvojím **smyslu.** Někdy volíme jeden smysl za kladný a druhý za záporný. Zejména u vodorovných přímek obyčejně považujeme za kladný smysl od leva do prava, u svislých přímek smysl zdola nahoru. Smysl vyznačený šipkou v obr. 1 můžeme nazvat smysl AB (t. j. smysl, v kterém je A před B) nebo smysl AD nebo smysl BC atd. **Opačný smysl** je smysl BA nebo DA nebo CB atd. Bez ohledu na smysl můžeme říci, že v obr. 1 máme na přímce čtyři body **v pořádku** $ABDC$ nebo v pořádku $CDBA$; každý z obou pořádků odpovídá jedné volbě smyslu.

Bod A zvolený na dané přímce (obr. 2) rozdělí tuto přímku na dvě **polopřímky** p_1, p_2, které jsou navzájem **opačné.** Bod A náleží do obou polopřímek a je jejich **počátek.** Každý jiný bod přímky leží **uvnitř** p_1 nebo uvnitř p_2. Při jedné volbě smyslu body uvnitř p_1 jsou před bodem A a body uvnitř p_2 za bodem A; při opačném smyslu je to obráceně.

Jsou-li A, B dva různé body na přímce p (obr. 3), pak polopřímka AB má počátek A a prochází bodem B; polopřímka BA má počátek B a prochází bodem A. Tyto dvě polopřímky jsou různé; body oběma společné tvoří **úsečku** AB neboli úsečku BA. Body A, B jsou **krajní body** úsečky AB; ostatní body úsečky AB leží **uvnitř** této úsečky. Ve smyslu AB vnitřek úsečky AB se skládá z těch bodů, které jsou zároveň za bodem A a před bodem B; ve smyslu BA je tomu naopak. Bez ohledu na smysl můžeme říci, že vnitřek úsečky AB se skládá z těch bodů, které leží **mezi** A a B. Celá přímka p se skládá ze tří částí; jsou to:



Obr. 3.

1. úsečka AB,

2. **prodloužení úsečky** AB **za bod** A, t. j. polopřímka opačná k polopřímce AB,

3. prodloužení úsečky AB za bod B, t. j. polopřímka opačná k polopřímce BA.

Každá polopřímka obsažená v přímce p určuje smysl přímky p, totiž ten smysl, při kterém počátek je před ostatními body polopřímky. Dvě polopřímky obsažené v téže přímce p jsou **souhlasné**, určují-li obě týž smysl; jinak jsou **nesouhlasné**. Opačné polopřímky jsou dvě nesouhlasné polopřímky s týmž počátkem; dvě souhlasné polopřímky s týmž počátkem splynou.

Cvičení.

1. Přímku $ABDC$ v obr. 1 zapište jiným způsobem, a to tak, že v zápise budou označení a) všech čtyř bodů, b) jen tří, c) jen dvou z bodů A, B, C, D. Rozhodněte, kolika způsoby to lze provést, jestliže přihlížíte i ke smyslu v přímce, který udává takový zápis.

2. Je dáno n různých přímek, každá je s každou různoběžná a nikdy neprocházejí tři jedním bodem. Kolik celkem mají průsečíků. (Kolik průsečíků má jedna z daných přímek se všemi ostatními? Kolikrát tu byl každý průsečík počítán?)

3. Na přímce AB v obr. 3 zvolte bod C tak, aby: a) ležel uvnitř úsečky AB, b) na prodloužení úsečky AB za bod B, c) na prodloužení úsečky AB za bod A. V každé úloze zapište dvojím způsobem pořádek vyznačených bodů A, B, C.

4. Načrtněte přímku $MABN$! Co vyplní body, které jsou společné:

a) polopřímkám BA a AN,
b) polopřímkám AM a AN,
c) polopřímkám AM a BN,
d) úsečce NA a polopřímce BN,
e) úsečce AN a polopřímce BM,
f) úsečkám MN a AB?

5. Které různé polopřímky z obr. 1 můžete zapsat užitím názvů bodů v obrázku vyznačených? Které z nich jsou a) opačné, b) souhlasné, c) nesouhlasné, ale přitom nejsou opačné?
6. Co řeknete o smyslech dvou polopřímek, víte-li, že jedna je částí druhé?
7. Mohou dvě souhlasné polopřímky dohromady vyplnit celou přímku?
8. Musí dvě nesouhlasné polopřímky vyplnit celou přímku?
9. Na přímce si zvolte dvě polopřímky nesouhlasných smyslů. Které body jsou oběma polopřímkám společné? (3 možnosti.)

2. *Roviny a poloroviny.*

Připomeňme si nyní známý pojem **roviny.** Základní vlastnost roviny zní: **Leží-li dva různé body** A, B **v rovině, leží v ní celá přímka** AB. Dvě různé přímky p, q, které nemají žádný společný bod, jmenují se:

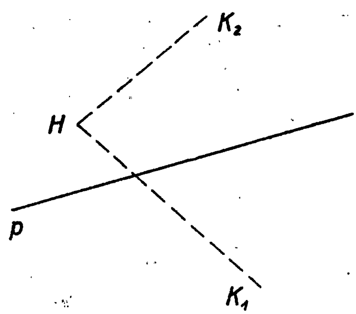
rovnoběžné přímky (rovnoběžky), jestliže leží obě v téže rovině;

mimoběžné přímky (mimoběžky), jestliže neleží obě v téže rovině.

Ale také dvě splývající přímky považujeme za rovnoběžky.

Ta část geometrie, ve které studujeme jenom útvary, které leží v určité rovině, nazývá se **planimetrie.** V tomto roce budeme probírat skoro výhradně planimetrii. Mimoběžky se ovšem v planimetrii nevyskytují.

Každá přímka p rozdělí rovinu na dvě **poloroviny** a tvoří **hranici** obou polorovin; každý bod rovinv mimo p leží **uvnitř** jedné z obou polorovin. Pravíme, že ty dvě poloroviny jsou **vyťaty** přímkou p a že jsou navzájem **opačné.** Leží-li bod C uvnitř jedné z obou polorovin, říkáme jí polorovina pC nebo také polorovina ABC (nebo BAC), jsou-li A, B dva různé body přímky p. Někdy je výhodné označit polorovinu jediným písmenem; užíváme k tomu řeckých písmen ϱ, σ, τ.



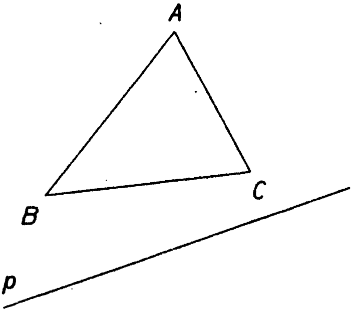
Obr. 4.

Pojem poloroviny velmi úzce souvisí s následujícím pojmem. Budiž dána v rovině přímka p a mimo ni dva různé body H, K (obr. 4). Pravíme, že **přímka** p **odděluje bod** H **od bodu** K, jestliže úsečka HK protne přímku p (viz body H, K_1 v obr. 4); přímka p tedy neodděluje bod H od bodu K, jestliže úsečka HK

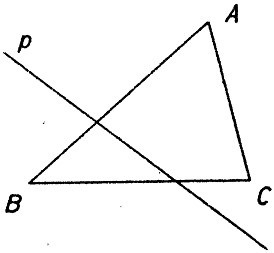
neprotne přímku p (viz body H, K_2 v obr. 4). Zřejmě:

$$\text{přímka } p \begin{matrix}\text{odděluje}\\ \text{neodděluje}\end{matrix} H \text{ od } K, \text{ jestliže poloroviny } pH,\ pK \begin{matrix}\text{jsou opačné;}\\ \text{splynou.}\end{matrix}$$

Bude účelné již nyní se zmínit o pojmu trojúhelníka, který budeme podrobněji probírat v článku 4. Tři body A, B, C, které neleží v jedné přímce (tedy jsou různé), určují **trojúhelník** ABC, krátce $\triangle ABC$. Body A, B, C jsou jeho **vrcholy**, úsečky AB, AC, BC jsou jeho strany. Vrchol A a strana BC jsou navzájem **protější**, stejně vrchol B a strana AC, vrchol C a strana AB. Všecky tři strany dohromady tvoří **obvod trojúhelníka**; pod názvem trojúhelník rozumíme obyčejně plochu složenou z obvodu a vnitřku (viz článek 4).



Obr. 5 a).



Obr. 5 b).

Nyní si řekneme důležitou větu: **Jestliže přímka p neprochází žádným vrcholem trojúhelníka, potom p neprotne žádnou stranu** (obr. 5a) **nebo protne právě dvě strany** (obr. 5b). Tato věta byla přes svou velkou důležitost po prvé vyslovena teprve roku 1882 německým matematikem Moritzem Paschem; budeme jí říkat **Paschova věta.** Její správnost plyne z vlastností polorovin. Jestliže všecky tři vrcholy A, B, C jsou uvnitř jediné poloroviny vyťaté přímkou p, máme případ obr. 5a; není-li tomu tak, jsou dva z nich uvnitř jedné a třetí uvnitř druhé poloroviny vyťaté přímkou p a máme případ obr. 5b.

Cvičení.

10. Víte, že dvě různoběžky AM, AN leží vždy v jedné rovině ϱ.
a) Proč i přímka MN leží v této rovině?
b) Jestliže P je libovolný bod přímky MN, proč i přímka AP leží v rovině ϱ?

11. Každé dvě přímky, které mají společný bod, leží v jedné rovině. (1) Lze tuto větu obrátit? (2) Co z ní plyne o dvou přímkách, které neleží v žádné společné rovině? Jak se jmenují takové přímky?

12. Mohou dvě a) rovnoběžky, b) různoběžky splývat? Jak to zapíšete?

13. V rovině leží přímka p a čtyři různé body mimo ni; kolik úseček spojujících dva z nich protne přímku p a kolik jich přímku p neprotíná? (Jsou 3 různé možnosti.)

14. Předchozí cvičení 13 opakujte pro pět bodů. (Opět jsou tři možnosti.)

15. Přímka p vytíná opačné poloroviny ϱ_1, ϱ_2; uvnitř ϱ_1 leží body H_1, K_1, uvnitř ϱ_2 body H_2, K_2. Na přímce H_1K_1 máte zvolit bod V_1, na přímce H_2K_2 bod V_2.

a) Udejte, jak tyto volby musíte provést, aby úsečka V_1V_2 zcela určitě protala hranici p.

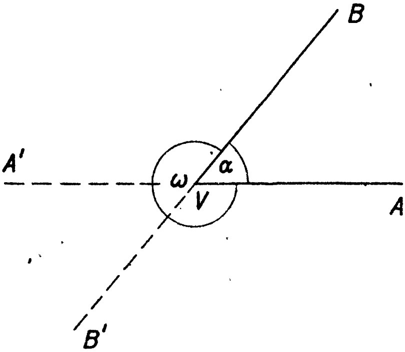
b) Udejte, jakou polohu musí mít přímky H_1K_1, H_2K_2 vzhledem k hranici p, aby každá úsečka V_1V_2 protínala přímku p.

c) Co vyplní bod V_1 a co bod V_2, jestliže celá úsečka V_1V_2 leží uvnitř ϱ_2? (Jakou polohu musí mít přímka H_1K_1 vzhledem k hranici p?)

3. *Úhly.*

Všecky polopřímky s daným počátkem V tvoří **svazek polopřímek,** který se vytvoří, otáčíme-li polopřímku kolem jejího počátku. Toto otáčení se může díti ve dvojím **smyslu**; buďto ve smyslu **kladném,** t. j. do leva nebo proti pohybu hodinových ručiček, nebo ve smyslu **záporném,** t. j. doprava.

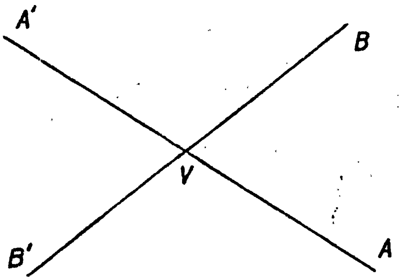
Dvě různé polopřímky VA, VB téhož svazku rozdělí svazek na dvě části, kterým říkáme **úhly.** Bod V je **vrchol** obou úhlů, polopřímky VA, VB jsou jejich **ramena.** Bod, který neleží na žádném z obou ramen, leží **uvnitř** jednoho úhlu a zároveň **vně** druhého. V obrazcích vyznačujeme obyčejně obloučkem úhel, který máme na mysli. Úhly značíme často písmeny malé řecké abecedy, nejčastěji písmeny α, β, γ, δ, ω. Jsou-li obě ramena VA, VB dvě opačné polopřímky, ležící v přímce p, vyplní každý z obou úhlů jednu polorovinu vyťatou přímkou p; takové úhly se jmenují úhly **přímé.** Jestliže však ramena VA, VB neleží obě v téže přímce (obr. 6), pak jeden z obou úhlů se jmenuje **dutý** a druhý **vypuklý**; polopřímky VA',



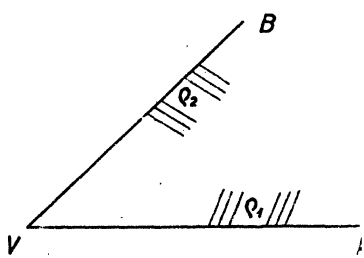
Obr. 6.

VB' leží obě uvnitř vypuklého úhlu s rameny *VA*, *VB*. V obr. 6 je α du úhel, ω vypuklý. Duté úhly, které se vyskytují mnohem častěji než přím úhly, značí se $\sphericalangle$; na př. $\sphericalangle$ *AVB* neboli $\sphericalangle$ *BVA* je úhel α v obr. 6; znač vrcholu se píše doprostřed. Není-li obavy z nedorozumění, můžeme psá stručně $\sphericalangle$ *V* místo $\sphericalangle$ *AVB*. **Značky $\sphericalangle$ užíváme pouze pro duté** úhl

Dvě různoběžky (obr. 7) s průsečíkem *V* rozdělí rovinu na čtyři du úhly se společným vrcholem *V*. Dva z nich se jmenují **úhly vedlejší,** mají společné rameno, a jmenují se **úhly vrcholové,** nemají-li společné ramen K danému $\sphericalangle$ *AVB* máme jediný $\sphericalangle$ *A'V'B'* k němu vrcholový; ale k $\sphericalangle$ *AV* máme dva úhly k němu vedlejší $\sphericalangle$ *AVB'*, $\sphericalangle$ *A'VB*, které jsou navzáje vrcholové.



Obr. 7.



Obr. 8.

Vysvětlení nového pojmu pomocí pojmů známých se jmenují **defini** nového pojmu; **definovati** pojem znamená vyslovit jeho definici. Nejjednodu definice dutého úhlu zní: $\sphericalangle$ *AVB* **se skládá z těch bodů, které** nálež **do poloroviny** *AVB* (v obr. 8 označené ϱ_1) **a zároveň do poloroviny** *BV* (v obr. 8 označené ϱ_2).

Při tom ty body $\sphericalangle$ *AVB*, které leží na hranici poloroviny ϱ_1, t. j. na přím *VA*, tvoří polopřímku *VA* a ty body $\sphericalangle$ *AVB*, které leží na hranici poloroviny t. j. na přímce *VB*, tvoří polopřímku *VB*.

Tedy: **Vnitřek $\sphericalangle$ *AVB* se skládá z těch bodů, které leží** uvni **poloroviny *AVB* a zároveň uvnitř poloroviny *BVA*.**

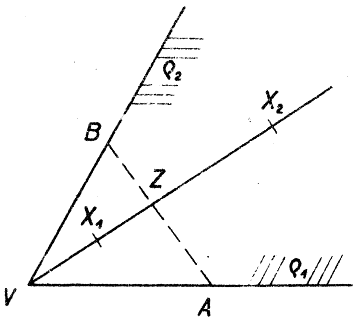
Dosud jsme pouze popisovali známé skutečnosti na základě názor Nyní si už můžeme provésti na podkladě známých skutečností některé jedn duché důkazy.

Bod X leží uvnitř $\sphericalangle AVB$, jestliže polopřímka VX obsahuje bod Z ležící mezi A a B.

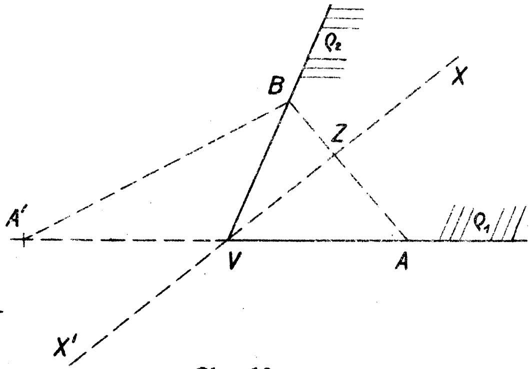
Důkaz (obr. 9). Označme ϱ_1 polorovinu AVB, ϱ_2 polorovinu BVA. Bod B leží uvnitř ϱ_1 a úsečka BZ neprotne přímku VA; proto také Z leží uvnitř ϱ_1. Bod A leží uvnitř ϱ_2 a úsečka AZ neprotne přímku VB; proto také Z leží uvnitř ϱ_2. Bod X splyne s bodem Z nebo úsečka XZ neprotne ani přímku VA, ani přímku VB; proto zároveň s bodem Z také bod X leží uvnitř obou polorovin ϱ_1, ϱ_2, t. j. X leží uvnitř $\sphericalangle AVB$.

Nyní si dokážeme obrácenou větu.

Jestliže bod X leží uvnitř $\sphericalangle AVB$, potom polopřímka VX obsahuje bod Z ležící mezi A a B.



Obr. 9.



Obr. 10.

Důkaz (obr. 10). Opět označme ϱ_1 polorovinu AVB, ϱ_2 polorovinu BVA. Bod X leží uvnitř obou polorovin ϱ_1, ϱ_2. Zvolme bod A' tak, aby V ležel mezi A a A'. Vznikne nám $\triangle AA'B$; žádný jeho vrchol neleží na přímce VX, ale tato přímka protne stranu AA' v bodě V. Podle Paschovy věty musí přímka VX protnout stranu AB nebo stranu $A'B$. Přímka VX se skládá z polopřímky VX a z opačné polopřímky VX', která leží v polorovině opačné k ϱ_1, kdežto úsečky AB, AB' leží v polorovině ϱ_1. Proto musí polopřímka VX protnout stranu AB nebo stranu $A'B$ a my máme dokázat, že protne stranu AB. Tedy zbývá dokázat, že polopřímka VX neprotne stranu $A'B$. To je jasné, neboť polopřímka VX leží v polorovině ϱ_2, kdežto úsečka $A'B$ leží v polorovině opačné.

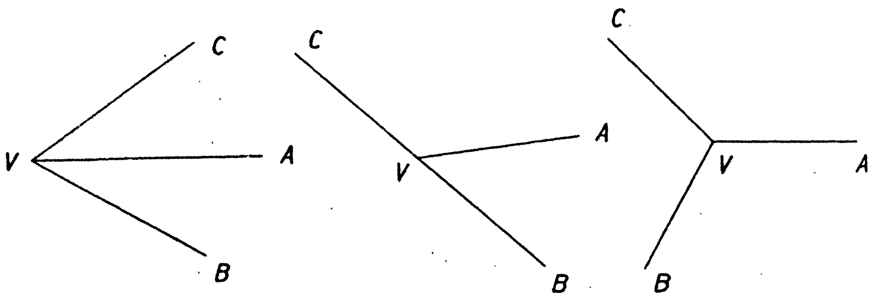
Obě právě dokázané věty můžeme spojit v jedinou větu:

Vnitřek $\sphericalangle AVB$ se skládá z těch bodů X, pro které platí, že polopřímka VX obsahuje bod Z ležící mezi A a B.

$\sphericalangle AVB$ vznikne ze svého vnitřku připojením obou ramen. Tedy:

$\sphericalangle AVB$ se skládá z těch bodů X, pro které platí, že polopřímka VX obsahuje bod úsečky AB.

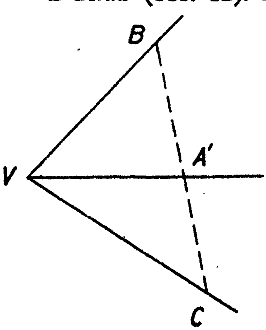
Styčné úhly jsou takové dva duté úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$, které mají společné rameno VA (tedy i společný vrchol), kdežto druhá dvě ramena leží každé v jiné polorovině vyťaté přímkou VA, takže oba úhly nemají mimo společné rameno společný bod. Oba styčné úhly dohromady tvoří úhel s rameny VB, VC, který může býti dutý (obr. 11a), přímý (obr. 11b), nebo vypuklý (obr. 11c). V případě obr. 11b máme dva úhly vedlejší.



Obr. 11 a), b), c).

Jestliže polopřímka VA leží (až na bod V) uvnitř $\sphericalangle BVC$, potom oba úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$ jsou styčné a dohromady tvoří $\sphericalangle BVC$.

Důkaz (obr. 12). Bod A leží uvnitř $\sphericalangle BVC$, a proto polopřímka VA protne úsečku BC v bodě A'. Protože úsečka BC protne přímku VA (v bodě A'), leží body B, C a tedy i polopřímky VB, VC v opačných polorovinách vyťatých přímkou VA. Proto oba úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$ jsou styčné. Nyní $\sphericalangle BVC$ se skládá ze všech polopřímek VX, kde X probíhá úsečku BC. Podobně $\sphericalangle AVB$ neboli $\sphericalangle A'VB$ se skládá ze všech polopřímek VX, kde X probíhá úsečku $A'B$; stejně $\sphericalangle AVC$ neboli $\sphericalangle A'VC$ se skládá ze všech polopřímek VX, kde X probíhá



Obr. 12.

úsečku $A'C$. Protože úsečky $A'B$, $A'C$ dohromady tvoří úsečku BC, tvoří $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle AVC$ dohromady $\sphericalangle BVC$.

Cvičení.

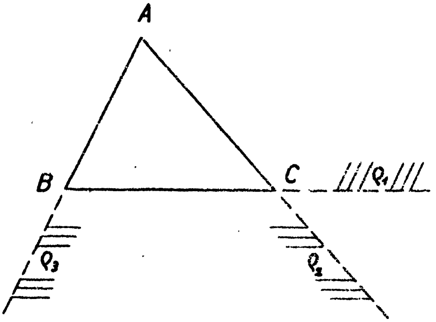
16. Kolik úhlů určují dvě polopřímky o společném počátku?
    a) Kdy jsou tyto úhly přímé a jak je pak rozlišíme?
    b) Kdy je jeden z těchto úhlů nulový? Který další úhel je pak ještě určen?
    c) Kdy je jeden z těchto úhlů dutý? Jak se jmenuje potom druhý úhel?
17. a) Vyslovte definici dutého úhlu.
    b) Zvolte 3 body V, A, B, které neleží v jedné přímce. Polorovinu VAB položte barvou červenou a polorovinu VBA barvou modrou; jakou barvu má $\sphericalangle AVB$?
    c) Co vyplývá ze zápisu $\sphericalangle AVB$ o vzájemné poloze polopřímek VA, VB?
18. Narýsujte vypuklý úhel o ramenech VA, VB. Polorovinu opačnou k polorovině VAB položte modře a polorovinu opačnou k polorovině VBA červeně. Víte-li, že dutý úhel je společnou částí dvou polorovin, co řeknete o úhlu vypuklém?
19. Vysvětlete, co znamená, že bod X leží a) uvnitř úhlu $\sphericalangle AVB$, b) uvnitř ramene VA, c) uvnitř druhého úhlu určeného polopřímkami AV, BV než je $\sphericalangle AVB$.
20. Polopřímka VX' v obr. 10 neobsahuje žádný bod úsečky AB. Dokažte, že úsečka VX' s výjimkou bodu V leží uvnitř vypuklého úhlu o ramenech VA, VB.
21. Uvnitř dvou úseček VA, VB, které neleží v jedné přímce, zvolte po jednom bodu A', B'. Dokažte:
    a) úsečky AB, $A'B'$ nemají žádný společný bod,
    b) úsečky AB', $A'B$ mají společný bod X, který leží uvnitř $\sphericalangle AVB$.
22. Odůvodněte: a) Zvolíte-li dva různé body P, Q uvnitř $\sphericalangle MVN$, potom celá úsečka PQ leží uvnitř úhlu $\sphericalangle MVN$.
    b) Platí výsledek předchozího cvičení 22a i pro úhel přímý? Proč?
    c) Jak zvolíte dva různé body P, Q uvnitř vypuklého úhlu α', aby část úsečky PQ ležela vně úhlu α'?
23. Narýsujte vypuklý úhel ω s rameny VH, VK. Jak zvolíte bod Z, aby při každé volbě bodů X, Y uvnitř úhlu ω byly obě úsečky ZX, ZY celé uvnitř úhlu ω? Odůvodněte. (Jsou-li VH', VK' opačné polopřímky k polopřímkám VH, VK, zvolte Z uvnitř $\sphericalangle H'VK'$.)

4. Trojúhelníky.

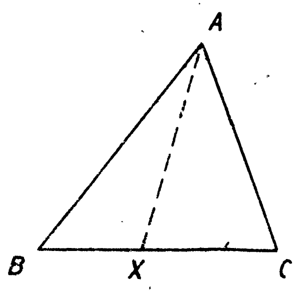
Již na straně 118 jsme mluvili o trojúhelníku ABC, ale definici trojúhelníka, jakožto plochy, vyslovíme teprve nyní takto:

$\triangle ABC$ se skládá z bodů, které leží zároveň ve všech třech polorovinách BCA (ϱ_1 v obr. 13), ACB (ϱ_2 v obr. 13), ABC (ϱ_3 v obr. 13). Při tom ty body, které jsou na hranici jedné ze tří polorovin ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, tvoří jednu

stranu $\triangle ABC$, neboť na př. hranicí poloroviny ϱ_1 je přímka BC. Ty přímky BC, které leží v polorovině ϱ_2, tvoří polopřímku CB; ty body p˝ BC, které leží v polorovině ϱ_3, tvoří polopřímku BC. Společnou částí o polopřímek CB, BC je však úsečka BC, t. j. jedna strana $\triangle ABC$. Ods me-li z $\triangle ABC$ jeho strany, zbude jeho vnitřek. Tedy: **Vnitřek $\triangle A$ se skládá z těch bodů, které leží zároveň uvnitř všech tří poloro** BCA, ACB, ABC.



Obr. 13.



Obr. 14.

Společná část obou polorovin ABC (ϱ_3 v obr. 13) a ACB (ϱ_2 v obr. 1 je úhel $\sphericalangle BAC$, který se jmenuje **úhel trojúhelníka** ABC **při vrcholu**. podobně máme $\sphericalangle ABC$ při vrcholu B, $\sphericalangle ACB$ při vrcholu C. Z defin trojúhelníka plyne, že $\triangle ABC$ se skládá z těch bodů úhlu $\sphericalangle BAC$, leží v polorovině BCA. Z článku 3 však víme, že $\sphericalangle BAC$ se skládá ze vše polopřímek AX, kde X probíhá úsečku BC. Z každé takové polopřímky leží v polorovině BCA pouze úsečka AX. Tedy:

$\triangle ABC$ se skládá ze všech úseček AX, kde X probíhá úsečka B (obr. 14). Podobně:

Vnitřek $\triangle ABC$ se skládá z vnitřků všech úseček AX, kde X prob vnitřek úsečky BC.

Geometrický útvar **K** se jmenuje **konvexní**, jestliže pro každé dva body X, Y útvaru **K** platí, že celá úsečka XY je částí útvaru **K**. Konvexní na př. každá úsečka, vnitřek každé úsečky, každá polorovina, vnitřek poloroviny. Jestliže společnou částí několika konvexních útvarů $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ a je útvar **K**, potom také útvar **K** je konvexní. Neboť jestliže dva různé bo X, Y náležejí do **K**, potom body X, Y náležejí do každého z útvarů $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ a otože všecky tyto útvary jsou konvexní, náleží celá úsečka XY do každého tvarů $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ atd., t. j. úsečka XY náleží do útvaru $\mathbf{K}$. Protože trojúhelník společná část tří polorovin a protože polorovina je konvexní, **je každý trojelník konvexní útvar.** Podobně i **vnitřek trojúhelníka je konvexní var.**

Cvičení.

4. Narýsujte dosti velký $\triangle ABC$. Polorovinu ABC položte žlutě, polorovinu BCA červeně a polorovinu CAB modře.
   a) Jakou barvu má vnitřek $\triangle ABC$?
   b) Která část roviny má barvu: 1. oranžovou, 2. zelenou, 3. fialovou?
   c) Která část roviny má barvu: 1. žlutou, 2. červenou, 3. modrou?

5. Zvolte $\triangle ABC$; uvnitř strany BC zvolte bod X, uvnitř strany CA bod Y. Dokažte, že úsečky AX, BY mají společný bod U, který leží uvnitř trojúhelníka ABC.

6. Které úhly jsou konvexní? Odůvodněte.

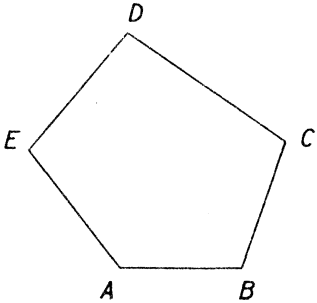
7. a) Narýsujte různoběžky AOC, BOD. Dokažte, že bod C leží v $\sphericalangle BAD$, bod A v $\sphericalangle BCD$. b) Nechť trojúhelníky ACB, ACD leží v různých polorovinách, vyťatých přímkou AC, body B, A, D i B, C, D neleží v přímce a nechť bod C leží v $\sphericalangle BAD$, bod A v $\sphericalangle BCD$. Pak se úsečky AC, BD protínají. Dokažte!

8. Zvolte dvě různoběžné úsečky AOC, BDO. Oba trojúhelníky ABD, BCD svými vnitřky určují čtyrúhelník $ABCD$, který není konvexní. [(1) Dokažte, že přímka, která protíná strany AD, DC trojúhelníka ADC ve vnitřních bodech M, N, protne i strany AB, BC ve vnitřních bodech P, Q. Úsečka MN leží vně čtyrúhelníka. (2) Zvolte uvnitř úsečky PM bod U a uvnitř úsečky NQ bod V. Dokažte, že U, V jsou vnitřní body čtyrúhelníka $ABCD$ a že úsečka UV obsahuje body, které leží vně tohoto čtyrúhelníka.]

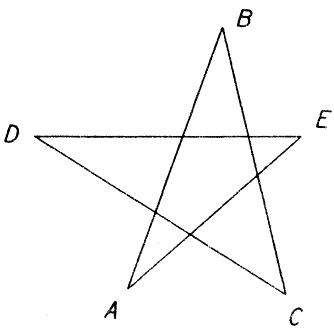
5. *Mnohoúhelníky.*

Pojem trojúhelníka je zvláštním případem pojmu **mnohoúhelníka.** dle počtu **vrcholů** rozeznáváme trojúhelníky, čtyrúhelníky, pětiúhelníky atd. becně mluvíme o n-úhelníku, je-li počet vrcholů roven n; při tom je n přirozené lo větší než 2. Pro $n = 3$ nezáleží na pořádku vrcholů, ale pro $n > 3$ je řádek vrcholů určen do té míry, že ke každému vrcholu máme dva **vrcholy** ním **sousední,** při čemž žádný vrchol nesmí s oběma sousedními ležet téže přímce. Vrcholy mnohoúhelníka píšeme za sebou podle následujících avidel: Začneme zcela libovolným vrcholem. Potom napíšeme jeden z obou cholů sousedních a dále píšeme tak, aby každý následující vrchol byl sousední předcházejícím; mimo to je poslední vrchol sousední s prvním. U pětiúhelníka v obr. 15 máme pro vrcholy 10 různých pořádků: *ABCDE*, *BCDE*[A], *CDEAB*, *DEABC*, *EABCD*, *AEDCB*, *BAEDC*, *CBAED*, *DCBAE*, *EDCB*[A]. Obecně vrcholy n-úhelníka můžeme psát za sebou $2n$ různými způsob[y]. Počneme kterýmkoli z n vrcholů a po každé máme ještě dvě možnosti p[ro] druhý vrchol.

Strana mnohoúhelníka je úsečka, jejíž krajní body jsou dva soused[ní] vrcholy. Z každého vrcholu vycházejí dvě strany, kterým říkáme **soused[ní] strany.** Počet stran je vždy roven počtu vrcholů. Dvě soused[ní] strany mají společný krajní bod **(vrchol),** ale o dvou nesousedních str[a]nách budeme předpokládati, že nemají žádný společný bod. Tím vylučuje[me] z našich úvah na př. t. zv. hvězdovité mnohoúhelníky (viz hvězdov[itý] pětiúhelník *ABCDE* v obr. 16).



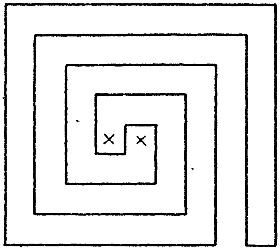
Obr. 15.



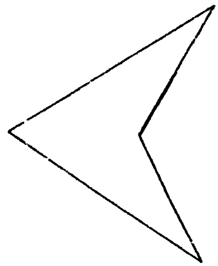
Obr. 16.

Úhlopříčka mnohoúhelníka je úsečka, jejíž krajní body jsou dva n[e]sousední vrcholy. Trojúhelník nemá úhlopříček; je-li $n > 3$ vychází z každé[ho] vrcholu n-3 úhlopříček; to by dalo celkem $n(n$-3) úhlopříček, ale při tom [je] každá počítána dvakrát. Tedy: **n-úhelník má celkem $\frac{1}{2}n(n$-3) úhlopříč[ek].**

Všecky strany mnohoúhelníka dohromady tvoří **obvod mnohoúhelník[u].** Výraz mnohoúhelník znamená obyčejně plochu, která se skládá z obvo[du] a z vnitřku. Co je vnitřek mnohoúhelníka, to se pozná v jednoduchých případe[ch] z názoru na první pohled, ale již v nepříliš složitém obr. 17 je třeba chvilečk[u] přemýšlet, než se pozná, který z obou bodů vyznačených křížky leží uvn[itř] mnohoúhelníka. Proto se v dalším omezíme na zvláště jednoduchý, ale vel[mi] důležitý případ mnohoúhelníka vypuklého. **Mnohoúhelník se nazývá vy[]puklý, jestliže pro každou jeho stranu *AB* platí, že všecky vrchol[y] mimo *A*, *B* leží uvnitř jediné poloroviny vyťaté přímkou *AB*,** kter[á] nazveme **opěrnou polorovinou strany** AB. Počet všech opěrných polorovin je roven počtu stran, tedy počtu vrcholů. Každý trojúhelník je vypuklý, ale čtyrúhelník v obr. 18 není vypuklý. Jestliže, jak je obvyklé, výrazem mnohoúhelník rozumíme jeho plochu, pak **vypuklý mnohoúhelník se skládá**

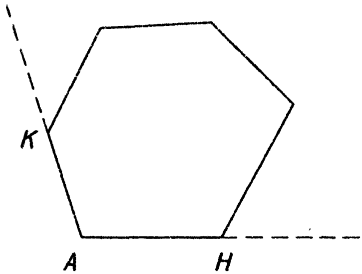


Obr. 17.



Obr. 18.

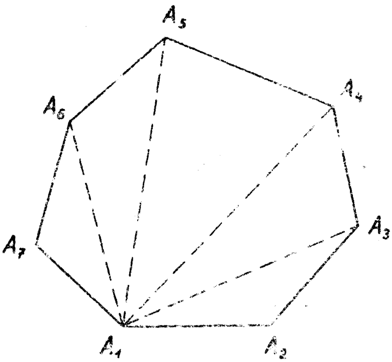
z těch bodů, které leží ve všech opěrných polorovinách. Strana AB leží na hranici své opěrné poloroviny, ale až na oba vrcholy A, B leží uvnitř všech ostatních opěrných polorovin. **Vnitřek vypuklého mnohoúhelníka se skládá z těch bodů, které leží uvnitř všech opěrných polorovin.** Ježto polorovina a vnitřek poloroviny jsou konvexní, **vypuklý mnohoúhelník i jeho vnitřek jsou konvexní útvary.** To znamená, že jestliže oba různé body X, Y náležejí do vypuklého mnohoúhelníka $\mathbf{M}$, celá úsečka XY je částí $\mathbf{M}$, a jsou-li X, Y uvnitř, leží také úsečka XY uvnitř. Snadno poznáme, že vnitřek úsečky XY leží až na jedinou výjimku uvnitř $\mathbf{M}$. Výjimka nastane, leží-li oba body X, Y v jediné straně $\mathbf{M}$. Zejména **každá úhlopříčka vypuklého mnohoúhelníka leží až na své krajní body uvnitř mnohoúhelníka.**



Obr. 19.

Budiž (obr. 19) A vrchol vypuklého mnohoúhelníka a buďtež H, K oba sousední vrcholy. Poloroviny HAK, KAH jsou opěrné poloroviny; jejich společná část je $\sphericalangle HAK$, **úhel vypuklého mnohoúhelníka při vrcholu** A. Tedy vypuklý mnohoúhelník má při každém vrcholu A dutý úhel $\sphericalangle A$ a celý mnohoúhelník je částí $\sphericalangle A$; až na obě strany AH, AK leží mnohoúhelník dokonce uvnitř $\sphericalangle A$.

V obr. 20 jsou vyznačeny všecky úhlopříčky vypuklého sedmiúhelníka $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ vycházející z vrcholu A_1. Všimněme si na př. úhlopříčky A_1A_4. Oba body A_1, A_4 leží na obvodě mnohoúhelníka; vnitřek úhlopříčky A_1A_4 leží uvnitř mnohoúhelníka. Ale jiné body přímky A_1A_4 nemohou náležet do mnohoúhelníka, neboť na př. prodloužení úsečky A_1A_4 za bod A_1 leží vně $\sphericalangle A_2A_1A_7$, jehož částí je mnohoúhelník. Z toho soudíme zejména, že přímka A_1A_4 protne obvod pouze v bodech A_1, A_4. Bod A_4 leží uvnitř $\sphericalangle A_2A_1A_7$, a proto polopřímka A_1A_4 protne úsečku A_2A_7. Tedy body A_2, A_7 jsou od sebe odděleny přímkou A_1A_4. Naproti tomu úsečky A_2A_3, A_7A_6, A_6A_5 neprotnou přímku A_1A_4. Tedy přímka A_1A_4 odděluje body A_2, A_3 od bodů A_5, A_6, A_7. Podobně přímka A_1A_5 odděluje body A_2, A_3, A_4 od bodů A_6, A_7. Protože polopřímka A_1A_4 leží uvnitř $\sphericalangle A_2A_1A_7$, rozděluje tento úhel na dva styčné úhly $\sphericalangle A_2A_1A_4$, $\sphericalangle A_4A_1A_7$. Uvnitř $\sphericalangle A_2A_1A_4$ leží bod A_3; uvnitř $\sphericalangle A_4A_1A_7$ leží body A_5, A_6. Podobně usuzujeme dále: polopřímka A_1A_3 rozdělí $\sphericalangle A_2A_1A_4$ na dva styčné úhly $\sphericalangle A_2A_1A_3$, $\sphericalangle A_3A_1A_4$, polopřímka A_1A_5 rozdělí $\sphericalangle A_4A_1A_7$ na $\sphericalangle A_4A_1A_5$, $\sphericalangle A_5A_1A_7$ a uvnitř druhého z nich leží bod A_6, takže polopřímka A_1A_6 rozdělí $\sphericalangle A_5A_1A_7$ na dva styčné úhly $\sphericalangle A_5A_1A_6$, $\sphericalangle A_6A_1A_7$. Celkem pozorujeme, že úhel $\sphericalangle A_2A_1A_7$ je rozdělen na úhly:



Obr. 20.

$$\sphericalangle A_2A_1A_3,\ \sphericalangle A_3A_1A_4,\ \sphericalangle A_4A_1A_5,\ \sphericalangle A_5A_1A_6,\ \sphericalangle A_6A_1A_7; \qquad (1)$$

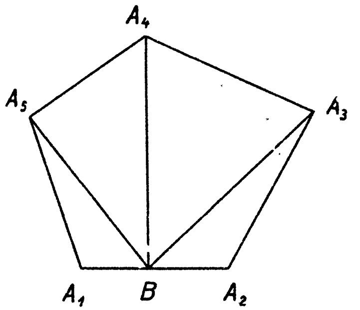
dva sousední z těchto úhlů jsou styčné a dva nesousední nemají mimo vrchol A_1 žádný jiný společný bod. Částí každého z úhlů (1) je trojúhelník:

$$\triangle A_2A_1A_3,\ \triangle A_3A_1A_4,\ \triangle A_4A_1A_5,\ \triangle A_5A_1A_6,\ \triangle A_6A_1A_7; \qquad (2)$$

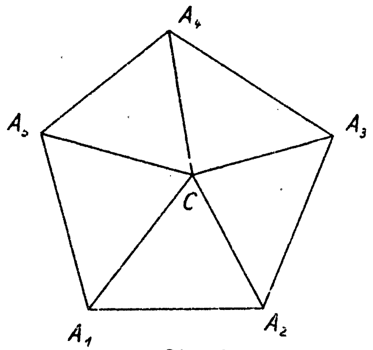
dva sousední z těchto trojúhelníků mají společnou stranu a dva nesousední mají společný pouze vrchol A_1. Každý z trojúhelníků (2) je částí mnohoúhelníka; neboť jestliže na př. bod X různý od A_1 náleží do $\triangle A_4A_1A_5$, potom X leží na úsečce A_1Z, kde Z je bod úsečky A_4A_5, tedy bod mnohoúhelníka, a proto celá úsečka A_1Z i s bodem X je částí mnohoúhelníka. Obráceně jestliže bod X různý od bodu A_1 náleží do mnohoúhelníka, potom X leží v úhlu $\sphericalangle A_2A_1A_7$ a tudíž X leží v některém z úhlů (1), na př. v $\sphericalangle A_4A_1A_5$. Potom polopřímka A_1X protne úsečku A_4A_5 v bodě Z; bod X náleží do polopřímky A_1Z a musí dokonce náležet do úsečky A_1Z; neboť kdyby bod X ležel na prodloužení této úsečky za bod Z, byl by oddělen od bodu A_1 přímkou A_4A_5 a nenáležel by do opěrné poloroviny $A_4A_5A_1$, jejíž částí je mnohoúhelník, jehož bodem je X. Tím jsme dokázali větu:

Úhlopříčky vycházející z jednoho vrcholu vypuklého n-úhelníka rozdělí n-úhelník na $n-2$ trojúhelníky. Tato věta platí pro $n > 3$.

Podobně se dokáží následující dvě věty správné také pro $n = 3$:



Obr 21.



Obr. 22.

Leží-li bod B uvnitř strany A_1A_2 vypuklého n-úhelníka $A_1A_2 \dots A_n$, potom úsečky $BA_3, \dots, BA_n$ rozdělí n-úhelník na n-1 trojúhelník (obr. 21).

Leží-li bod C uvnitř vypuklého n-úhelníka $A_1A_2 \dots A_n$, potom úsečky $CA_1, \dots, CA_n$ rozdělí n-úhelník na n trojúhelníků (obr. 22).

Cvičení.

29. Zapište šestiúhelník $ABCDEF$ všemi možnými pořádky. Tyto pořádky rozdělte do dvou skupin.

30. Vyložte vznik mnohoúhelníka.

a) Co platí o třech po sobě následujících vrcholech mnohoúhelníka?

b) Co předpokládáme o nesousedních stranách? Které mnohoúhelníky tedy vylučujeme ze svých úvah (načrtněte)?

c) Který mnohoúhelník se jmenuje vypuklý? Co to je opěrná polorovina?

d) Vyložte, proč celý vnitřek vypuklého mnohoúhelníka leží uvnitř kteréhokoli jeho úhlu.

31. Plocha každého vypuklého různoběžníka vznikne dvojím způsobem tak, že od plochy jednoho trojúhelníka se ubere plocha jiného trojúhelníka.
Jak je tomu u lichoběžníka, u rovnoběžníka a u nevypuklého čtyrúhelníka z obr. 18?

32. $A_1A_2 \ldots A_n$ je vypuklý n-úhelník. Uvnitř strany A_1A_2 zvolte bod A'_1 a uvnitř strany $A_n A_1$ bod A'_{n+1}. Potom $A'_1A_2 \ldots A_n A'_{n+1}$ je vypuklý $(n + 1)$ -úhelník. Odůvodněte.

33. Je dán $\triangle ABC$. Kde musíte zvolit bod D, aby vznikl:
a) vypuklý čtyrúhelník $ABCD$ b) čtyrúhelník jako v obr. 18 (vydutý)?

34. Dvě různoběžné úsečky AOC, BOD určují vypuklý čtyrúhelník $ABCD$. Odůvodněte.

35. Dokažte, že úhlopříčka AC vypuklého čtyrúhelníka $ABCD$ dělí $\sphericalangle DAB$ ve dva styčné úhly.

36. Dokažte, že ve vypuklém čtyrúhelníku se obě úhlopříčky navzájem protínají uvnitř čtyrúhelníka.

37. a) Kterému bodu vypuklého mnohoúhelníka říkáme vnitřní bod?
b) Budiž Y vnitřní bod vypuklého mnohoúhelníka. Pak každá polopřímka p s počátkem Y obsahuje právě jeden bod obvodu mnohoúhelníka. Dokažte pomocí rozkladu mnohoúhelníka v trojúhelníky.
c) V kolika bodech protíná obvod vypuklého mnohoúhelníka přímka, která obsahuje vnitřní bod mnohoúhelníka?

38. Podle vzoru textu učebnice v odst. 5 dokažte předposlední větu vyslovenou na konci zmíněného odstavce.

6. *Rovnoběžky.*

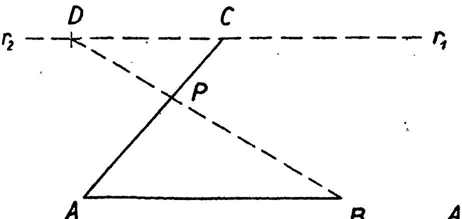
Pojem rovnoběžek jsme si připomněli již v článku 2; připomeňme si znovu, že dvě splývající přímky považujeme také za rovnoběžné. Základní vlastnost rovnoběžek zní: **Daným bodem můžeme vésti k dané přímce právě jednu rovnoběžku.** Ze základní věty plyne: **Jsou-li obě přímky p_1, p_2 rovnoběžné s třetí přímkou q, jsou přímky p_1, p_2 také mezi sebou rovnoběžné.**

Tato věta platí, i když neleží všecky tři přímky p_1, p_2, q v jedné rovině, ale důkaz je dosti složitý a nebudeme jej prováděti. Důkaz pro případ, že p_1, p_2, q leží v jedné rovině: Splynou-li přímky p_1, p_2, jsou jistě rovnoběžné. Nesplynou-li, je třeba pouze dokázati, že přímky p_1, p_2 nemají žádný společný bod. To je však jasné, neboť kdyby měly společný bod C, pak by bodem C procházely dvě různé rovnoběžky p_1, p_2 s přímkou q, což je nemožné.

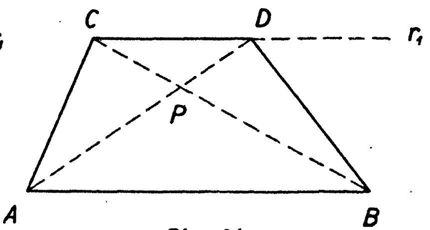
Dvě **úsečky** nebo **polopřímky** nazýváme **rovnoběžné**, jsou-li rovnoběžné přímky je obsahující.

Jestliže strany AB, CD čtyrúhelníka $ABCD$ jsou rovnoběžné, potom čtyrúhelník $ABDC$ se jmenuje **lichoběžník**; strany AB, CD jsou jeho **základny**, strany AC, BD jsou jeho **ramena**.

Protože strany AB, AC lichoběžníka $ABDC$ jsou sousední, nemohou všecky tři vrcholy A, B, C ležet na jedné přímce. Jinak je však poloha bodů A, B, C libovolná. Čtvrtý vrchol D musí ležet na rovnoběžce r vedené bodem C k přímce AB. Tato rovnoběžka je bodem C rozdělena na dvě polopřímky r_1, r_2 (obr. 23) tak, že r_1 leží v polorovině ACB, r_2 v polorovině opačné. Vrchol D nemůže ležet na polopřímce r_2, neboť zvolíme-li bod D různý od C na polopřímce r_2, jsou body B, D od sebe odděleny přímkou AC, a proto úsečka BD



Obr. 23.



Obr. 24.

protne přímku AC v bodě P. Vznikne $\triangle ABP$, jehož strany AB, BP neprotnou přímku r; podle Paschovy věty ani třetí strana AP neprotne přímku r, t. j. úsečka AP neobsahuje bod C, tedy P leží na polopřímce CA. Dále vznikne $\triangle CDP$, jehož strany CD, DP neprotnou přímku AB; tedy ani třetí strana CP neprotne přímku AB, t. j. úsečka CP neobsahuje bod A, tedy P leží na polopřímce AC. Celkem P leží na obou polopřímkách CA, AC, t. j. P leží na úsečce AC. Tedy úsečky AC, BD se protnou v bodě P, a proto $ABDC$ není čtyrúhelník.

Jestliže však zvolíme bod D různý od C na polopřímce r_1 (obr. 24), nejsou body B, D od sebe odděleny přímkou AC, a proto úsečky AC, BD se neprotnou, je $ABCD$ čtyrúhelník; snadno se přesvědčíme, že je vypuklý. Je to ovšem lichoběžník. Tedy: **každý lichoběžník je vypuklý čtyrúhelník.** Bod D leží uvnitř $\sphericalangle A$, a proto polopřímka AD protne úsečku BC v bodě P. Mimo to bod C leží uvnitř $\sphericalangle B$, a proto polopřímka BC protne úsečku AD v bodě, který musí splynout s P. Tedy bod P je **průsečík úhlopříček** lichoběžníka $ABDC$.

Zvolme dvě různé rovnoběžky: na první zvolme dva různé body A, B, na druhé dva různé body C, D. Potom nastane jeden z obou případů naznačených v obr. 23 a v obr. 24. V případě obr. 24 úsečky AC, BD se neprotnou, úsečky AD, BC se protnou a vznikne lichoběžník $ABDC$. V případě obr. 23 se protnou úsečky AC, BD; avšak úsečky AD, BC se v tomto případě neprotnou, neboť každá z nich leží v jiné polorovině vyťaté přímkou AC. Proto v případě obr. 23 dostaneme lichoběžník $ABCD$ (v obrazci nevyznačený).

Jsou-li AB, CD dvě různé rovnoběžky, řekneme, že jsou **souhlasně rovnoběžné,** a napíšeme

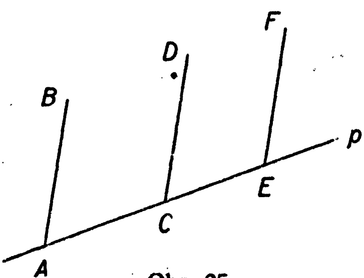
$$AB \parallel CD \quad \text{nebo} \quad BA \parallel DC, \tag{1}$$

jestliže $ABDC$ je lichoběžník. Při tom nezáleží na poloze bodů A, B, C, D, nýbrž pouze na s m y s l e c h AB, CD obou rovnoběžek. Neboť vztah (1) se dá popsati tak, že oba body B, D leží v téže polorovině ϱ vyťaté přímkou AC. Nahradíme-li body B, D jinými body B', D' tak, aby smysly zůstaly zachovány, zůstanou body B', D' v polorovině ϱ a budeme míti

$$AB' \parallel CD'. \tag{2}$$

Vztah (2) se dá také popsati tak, že oba body A, C leží v téže polorovině σ vyťaté přímkou $B'D'$. Nahradíme-li body A, C jinými body A', C' tak, aby smysly zůstaly zachovány, zůstanou body A', C' v polorovině σ a budeme míti

$$A'B' \parallel C'D'.$$



Obr. 25.

Je výhodné nevylučovat možnost, že obě rovnoběžky AB, CD splynou. V tomto případě vztah (1) znamená, že smysl AB je t ý ž jako smysl CD.

Jsou-li dvě přímky AB, CD **souhlasně rovnoběžné s přímkou třetí** EF, **jsou** AB, CD **také mezi sebou souhlasně rovnoběžné.**

D ů k a z: Snadno si promyslíme, že věta je správná, jestliže některé dvě ze tří přímek AB, CD, EF splynou. Jsou-li však ty tři přímky různé, můžeme volit body A, C, E tak, aby ležely v jedné přímce p (obr. 25). Potom vztahy

$$AB \parallel EF, \qquad CD \parallel EF$$

znamenají, že oba body B, D leží v téže polorovině vyťaté přímkou p neboli přímkou AC, takže

$$AB \parallel CD.$$

Značky $\parallel$ užíváme pouze pro **souhlasnou** rovnoběžnost.

Cvičení.

39. a, c jsou dvě rovnoběžky a přímka b přímku a protíná. Potom přímka b protne i přímku c. Dokažte.

40. Vyslovte definici lichoběžníka. Je to čtyrúhelník vypuklý?

41. Vedeme-li vrcholem C trojúhelníka ABC rovnoběžku r k přímce AB, prochází celá tato přímka r až na bod C vnějškem trojúhelníka ABC. Odůvodněte.

42. Načrtněte od ruky dvě rovnoběžky AB, CD a vysvětlete, jak rozhodnete, zda jsou obě přímky souhlasně nebo nesouhlasně rovnoběžné.

43. AB, CD jsou dvě nesouhlasné různé rovnoběžky. Na polopřímce AB zvolte vnitřní bod B' a na polopřímce CD vnitřní bod D'. Dokažte, že se obě úsečky AC, $B'D'$ protínají.

44. Předchozí cvičení 43 opakujte s tou změnou, že je $AB \parallel CD$ (ale různé) a dokažte, že: a) úsečky AC a $B'D'$ se neprotnou, b) úsečky AD', $B'C$ se protnou.

45. Zvolte uvnitř strany EB trojúhelníka EBC bod A a veďte jím rovnoběžku r ke straně BC. Dokažte, že a) přímka r protne stranu EC ve vnitřním bodě D, b) čtyrúhelník $ABCD$ je lichoběžník.

46. Uvnitř strany AC trojúhelníka ABC zvolte body M_1, M_2 tak, aby byly v pořádku AM_1M_2C, a veďte jimi přímky r_1, r_2 rovnoběžné ke straně AB. Dokažte, že oba průsečíky N_1, N_2 těchto přímek s přímkou AB leží uvnitř úsečky BC v pořádku BN_1N_2C a že je $M_1N_1 \parallel M_2N_2$.

II. ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI VELIKOSTI.

1. Velikost úseček.

Dvě dané úsečky A_1B_1, A_2B_2 buďto mají stejnou **velikost** neboli **délku**, pročež říkáme, že jsou si rovny, a píšeme

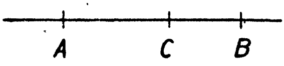
$$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} \quad \text{nebo} \quad \overline{A_2B_2} = \overline{A_1B_1},$$

nebo je jedna z nich **menší** neboli kratší a druhá **větší** neboli delší. Je-li na př. $\overline{A_1B_1}$ menší než $\overline{A_2B_2}$, píšeme

$$\overline{A_1B_1} < \overline{A_2B_2} \quad \text{nebo} \quad \overline{A_2B_2} > \overline{A_1B_1}.$$

Vzdálenost dvou bodů A, B je totéž jako velikost úsečky AB, jsou-li ty body různé; vzdálenost dvou splývajících bodů je rovna nule.

Leží-li bod C mezi body A, B (obr. 26), jest $\overline{AC} < \overline{AB}$, $\overline{CB} < \overline{AB}$; úsečka AB je **součet** úseček AC, CB, což píšeme $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$, a úsečka CB je **rozdíl** úseček AB, AC, což píšeme $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}$; zároveň je $\overline{AB} - \overline{CB} = \overline{AC}$.



Obr. 26.

Součet a rozdíl dvou úseček jsou určeny pouze co do velikosti, nikoli co do polohy.

Můžeme také sčítati tři nebo více úseček. Zvláště důležitý je případ, že všichni sčítanci jsou si rovni. Součet CD n úseček rovných úsečce AB se jmenuje n-násobek úsečky AB a píšeme $\overline{CD} = n \cdot \overline{AB}$. Úsečka AB je potom n-tina úsečky CD a píšeme $\overline{AB} = \frac{1}{n} \cdot \overline{CD}$.

Obecněji, jsou-li m, n celá kladná čísla, znamená

$$\overline{UV} = \frac{m}{n} \cdot \overline{PQ},$$

že úsečka UV je m-násobek n-tiny úsečky $\overline{PQ}$. Zlomek $\frac{m}{n}$ je **poměr** úsečky $\overline{UV}$ k úsečce PQ a píšeme

$$\frac{m}{n} = \frac{\overline{UV}}{\overline{PQ}} \quad \text{nebo} \quad \frac{m}{n} = \overline{UV} : \overline{PQ}.$$

Poměr úsečky PQ k úsečce UV je zlomek $\frac{n}{m}$.

Poměr dvou úseček může býti také číslo iracionální. Na př. pro úhlopříčku HL čtverce $HKLM$ se stranou HK plyne ze známé Pythagorovy věty

$$\overline{HL} : \overline{HK} = \sqrt{2},$$

kde číslo $\sqrt{2} = 1{,}4142136\ldots$ je číslo iracionální. Prakticky můžeme iracionální číslo vždy nahraditi zlomkem, který se od něho liší tak málo, že na tom nezáleží. V našem případě je

$$\frac{1414213}{1000000}\,\overline{HK} < \overline{HL} < \frac{1414214}{1000000}\,\overline{HK},$$

kde úsečka nalevo i úsečka napravo se liší od úsečky HL o úsečku kratší než je miliontina úsečky HK.

Obyčejně se volí určitá délka $\overline{PQ}$ za **délkovou jednotku**; nejčastěji je to 1 cm. Poměr x libovolné úsečky UV k délkové jednotce PQ je **měrné číslo** úsečky PQ. Jest $\overline{UV} = x \cdot \overline{PQ}$; často je délková jednotka známa ze souvislosti a píšeme jednoduše $\overline{UV} = x$.

Je-li zvolena určitá délková jednotka, pak při sčítání nebo odčítání úseček sečteme nebo odečteme jejich měrná čísla; podobně je tomu při násobení úsečky kladným číslem (celým, lomeným nebo irracionálním).

Jestliže body A, B, C neleží v jedné přímce, je vám známo, že každá ze tří úseček AB, AC, BC je menší než součet a zároveň větší než rozdíl ostatních dvou. Jestliže však leží A, B, C v jedné přímce, potom jedna ze tří úseček AB, AC, BC je rovna součtu ostatních; každá jiná je rovna rozdílu ostatních.

Jsou-li A, B, C tři různé body na přímce, označíme (ABC) a nazveme **dělicím poměrem** bodů A, B, C (v tomto pořádku psaných) číslo

$$(ABC) = \pm\frac{AC}{BC}$$

se znamením plus, je-li smysl AC týž jako smysl BC a se znamením minus, jsou-li ty smysly opačné. Zřejmě $(ABC) < 0$, jestliže C leží uvnitř úsečky AB, $(ABC) > 0$, jestliže C leží vně úsečky AB. Dělicí poměr se často označuje řeckým písmenem λ.

Leží-li C na prodloužení úsečky AB za bod B, je $(ABC) > 1$. To je zřejmé. Obráceně, **jsou-li dány dva různé body A, B a číslo $\lambda > 1$, potom na prodloužení úsečky AB za bod B existuje právě jeden bod C tak,** že $(ABC) = \lambda$. Položíme-li $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = x$, bude $\overline{AC} = a + x$; kladné číslo a známe a kladné číslo x máme určit z rovnice

$$\frac{a+x}{x} = \lambda,$$

která má jediný kořen, a to kladný

$$x = \frac{a}{\lambda - 1}.$$

Leží-li C na prodloužení úsečky AB za bod A, je $(ABC) > 0$, $(ABC) < 1$. To je zřejmé. Obráceně, **jsou-li dány dva různé body A, B a kladné číslo $\lambda < 1$, potom na prodloužení úsečky AB za bod A existuje právě jeden bod C tak, že $(ABC) = \lambda$.** Položíme-li $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = x$, bude $\overline{BC} = a + x$; kladné číslo a známe a kladné číslo x máme určit z rovnice

$$\frac{x}{a+x} = \lambda,$$

která má jediný kořen, a to kladný

$$x = \frac{a\lambda}{1-\lambda}.$$

Leží-li C uvnitř úsečky AB, je $(ABC) < 0$. To je zřejmé. Obráceně, **jsou-li dány dva různé body A, B a záporné číslo λ, potom uvnitř úsečky AB existuje právě jeden bod C, tak že** $(ABC) = \lambda$. Položíme-li $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = x$, bude $\overline{BC} = a - x$; kladné číslo a známe; máme určit x tak, aby bylo $x > 0$, $a - x > 0$ a aby byla splněna rovnice

$$\frac{x}{a-x} = \lambda_0, \text{ kde } \lambda_0 = -\lambda \text{ je kladné,}$$

která dává

$$x = \frac{a\lambda_0}{1+\lambda_0}, \quad a - x = \frac{a}{1+\lambda_0}, \quad x > 0, \quad a - x > 0.$$

Závěr: Dělicí poměr (ABC) nemůže býti roven 0 ani 1. Obráceně, jsou-li dány dva různé body A, B a číslo $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$, potom na přímce AB existuje právě jeden bod x takový, že $(ABC) = \lambda$.

V přehledu lze říci:

Jestliže bod C leží na prodloužení úsečky AB za bod B, je $\overline{AC} > \overline{BC}$ a tudíž $(ABC) > 1$.

Jestliže bod C leží na prodloužení úsečky AB za bod A, je $\overline{AC} < \overline{BC}$ a tudíž $0 < (ABC) < 1$.

Jestliže bod C leží uvnitř úsečky AB, potom podle definice je $(ABC) < 0$ a může nabývat kterékoli záporné hodnoty. Zvláště zajímavý je případ $(ABC) = -1$; zde C je **střed** úsečky AB.

Cvičení.

47. Čtyři body A, B, C, D na přímce jsou v pořádku $ABCD$. Je-li $\overline{AC} = x$, $\overline{BD} = y$, $\overline{AD} = z$, určete $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$.

48. Pro různých pět bodů na přímce platí
$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}.$$
Které z ostatních vzdáleností dvou z našich pěti bodů musí býti sobě rovny?

49. Vysvětlete význam zápisů: a) $\overline{AB} = \frac{7}{5} \cdot \overline{CD}$; b) $\overline{AB} = \frac{7}{5}$ cm; c) $\overline{AB} = \frac{7}{5}$.

50. Která rovnost platí o velikostech úseček AB, BC, AC, leží-li na přímce ABC?

51. Úsečka AB má střed S. Dokažte:
a) Na prodloužení úsečky AB leží bod C; potom platí $\overline{CS} = \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB})$.
b) Uvnitř úsečky BS leží bod C; potom platí $\overline{CS} = \frac{1}{2}(\overline{CA} - \overline{CB})$. (V náčrtku vyznačte bod D tak, aby $\overline{SD} = \overline{SC}$.)

52. Na přímce AB, kde $\overline{AB} = 4$ cm, je dán bod C. Určete dělicí poměr (ABC), víte-li, že bod C:
a) leží na prodloužení úsečky AB za bod B a je $\overline{AC} = 6$ cm;
b) leží na prodloužení úsečky AB za bod A a je $\overline{BC} = 5$ cm;
c) leží uvnitř úsečky AB a je $\overline{BC} = 3$ cm.

53. Který bod C na přímce AB nemá dělicí poměr (ABC)?

54. Narýsujte přímku a na ní zvolte úsečku AB tak, aby $\overline{AB} = 4$ cm.
Určete na přímce AB bod C tak, aby platilo:
a) $(ABC) = 3$; b) $(ABC) = \frac{2}{5}$; c) $(ABC) = \sqrt{2}$ (určete úsečku $\overline{C_1C_2} < 1$ mm, uvnitř které bod C leží; volte $\lambda_1 = 1{,}414$; $\lambda_2 = 1{,}415$ a určete $x_2 - x_1$, kde $x_1 = \overline{BC_1}$, $x_2 = \overline{BC_2}$); d) $(ABC) = -1$; e) $(ABC) = -\frac{3}{2}$. (Zaveďte jako v textu pomocnou hodnotu x a užitím měřítka sestrojte bod C.)

55. Jaké hodnoty mají dělicí poměry (vzhledem k bodům A, B) těch bodů, které leží a) na prodloužení úsečky AB za bod A, b) na prodloužení úsečky AB za bod B, c) uvnitř úsečky AB?

2. *Velikost úhlů.*

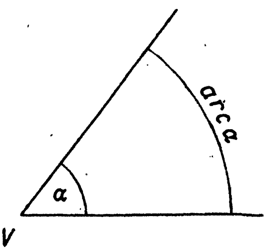
Jako úsečky třídíme také úhly podle velikosti. Dva úhly α, β si mohou býti rovny ($\alpha = \beta$) nebo je α menší než β a β větší než α ($\alpha < \beta$, $\beta > \alpha$) nebo je obrácené ($\alpha > \beta$, $\beta < \alpha$). Všecky přímé úhly jsou si rovny. Každý dutý úhel je menší než přímý, každý vypuklý úhel je větší než přímý. Podobně jako u úseček zavádíme i u úhlů pojem součtu $\alpha + \beta$ (a také pojem součtu více úhlů), pojem rozdílu $\alpha - \beta$ a pojem součinu $x \cdot \alpha$, kde x je kladné číslo (celé, lomené nebo irracionální). Polovina přímého úhlu je úhel pravý; tedy všecky pravé úhly jsou si rovny.

Úhel ostrý je menší než pravý, úhel tupý je větší než pravý, ale menší než přímý.

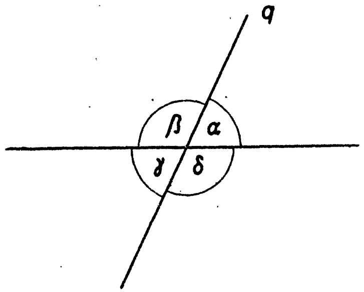
V praxi se od pradávna bere za úhlovou jednotku stupeň, t. j. $\frac{1}{90}$ pravého úhlu; menší jednotky jsou minuta a vteřina. Tyto jednotky jsou vám dobře známy; příklad 36°25′34″.

Důležitá je však také oblouková míra úhlů. Měrné číslo úhlu α v obloukové míře je rovno velikosti uvnitř úhlu obsaženého oblouku kružnice, jehož poloměr je délková jednotka; toto měrné číslo značíme arc α (čteme: arkus α; obr. 27). O velikosti oblouku kružnice budeme mluvit v druhé třídě; ale seznamujte se již nyní s obloukovou mírou, která je důležitá ve fysice. Je-li α° velikost úhlu α ve stupních, platí vzorce

$$\operatorname{arc}\alpha = \frac{\pi}{180}\cdot\alpha^\circ; \qquad \alpha^\circ = \frac{180}{\pi}\cdot\operatorname{arc}\alpha.$$



Obr. 27.



Obr. 28.

Pro převod stupňů na arc a obráceně užíváme obyčejně tabulek. Číslo π je známé Ludolfovo číslo

$$\pi = 3{,}141592653589\ldots;$$

budeme o něm mluvit v druhé třídě. Pro praxi stačí obyčejně hodnota $\pi \doteq 3{,}14$ nebo přesněji hodnota $\pi \doteq 3\frac{1}{7} \doteq 3{,}1428\ldots$. V obloukové míře velikost přímého úhlu je π, velikost pravého úhlu je $\frac{1}{2}\pi$. Dále je na př.

$$\operatorname{arc}60^\circ = \tfrac{1}{3}\pi,\ \operatorname{arc}30^\circ = \tfrac{1}{6}\pi,\ \operatorname{arc}45^\circ = \tfrac{1}{4}\pi.$$

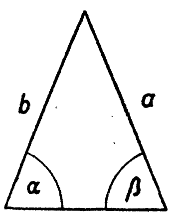
Velikost jednoduchých úhlů budeme obyčejně psát v obloukové míře.

Dva úhly α, β se jmenují **výplňkové**, jestliže $\alpha + \beta = \pi$. Důležitým příkladem výplňkových úhlů jsou úhly vedlejší. Dvě různoběžky p, q tvoří (obr. 28) čtyři úhly α, β, γ, δ. Jest

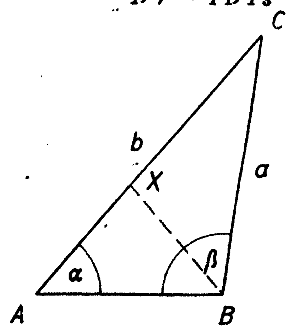
$$\alpha + \beta = \pi, \quad \beta + \gamma = \pi, \quad \gamma + \delta = \pi, \quad \delta + \alpha = \pi \qquad (1)$$

a z toho se vypočte $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$. Dva vrcholové úhly si jsou rovny. Z rovnic (1) se vypočte, že jestliže jeden ze čtyř úhlů α, β, γ, δ je roven $\frac{1}{2}\pi$ (je pravý), je každý roven $\frac{1}{2}\pi$. O takových dvou přímkách p, q říkáme, že jsou navzájem **kolmé**, že jedna z nich je kolmicí k druhé, že **stojí na sobě kolmo.** Je vám známo, že **daným bodem lze vésti k dané přímce právě jednu kolmici.**

Jsou-li obě přímky p_1, p_2 kolmé na přímku q, jsou p_1, p_2 mezi sebou rovnoběžné. To je zřejmé, splynou-li p_1, p_2; jsou-li však p_1, p_2 dvě různé přímky, nemohou míti společný bod C. Kdyby takový bod existoval, pak by jím procházely dvě různé rovnoběžky k přímce q, což je nemožné. Obráceně platí: Jsou-li p_1, p_2 dvě rovnoběžky a stojí-li p_1 kolmo na přímce q, stojí také p_2 kolmo na q. Přímky p_2, q nejsou rovnoběžné, protože potom by byly p_1, q rovnoběžné a ne kolmé. Tedy se p_2, q protnou v bodě C. Bodem C lze vésti kolmici p_3 na přímku q. Ježto obě přímky p_1, p_3 stojí kolmo na q, jsou p_1, p_3 mezi sebou rovnoběžné, t. j. p_3 je rovnoběžka k p_1 vedená bodem C. Proto přímky p_2, p_3 splynou a p_2 stojí kolmo na q.



Obr. 29.



Obr. 30.

Důležité jsou vztahy mezi velikostmi stran a úhlů trojúhelníka. Je vám známo (obr. 29), že **jsou-li si rovny dvě strany a, b trojúhelníka, jsou si rovny také protější úhly α, β; obráceně, jsou-li si rovny dva úhly α, β trojúhelníka, jsou si rovny také protější strany a, b.** K odůvodnění se vrátíme v článku 3. Trojúhelník, v kterém $a = b$ nebo, což je totéž, $\alpha = \beta$, jmenuje se **rovnoramenný** a stranám a, b se říká ramena; třetí strana se jmenuje **základna.**

Jestliže $\triangle ABC$ není rovnoramenný se základnou AB, není $\alpha = \beta$ (obr. 30); pro určitost budiž $\alpha < \beta$. Uvnitř úsečky AC existuje potom bod X tak, že $\sphericalangle ABX = \alpha$. Z toho plyne, že $\triangle ABX$ je rovnoramenný se základnou AB; tedy $\overline{AX} = \overline{BX}$, takže $b = \overline{AC} = \overline{BX} + \overline{XC}$. Avšak $\triangle BCX$ dá $\overline{BX} + \overline{XC} > > \overline{BC}$. Ježto $b = \overline{BX} + \overline{XC}$, $a = \overline{BC}$, jest $a < b$. Tedy: **Jestliže o dvou úhlech α, β trojúhelníka platí $\alpha < \beta$, potom o protějších stranách a, b**

platí $a < b$. Obráceně, jestliže o dvou stranách a, b trojúhelníka platí $a < b$, potom o protějších úhlech α, β platí $\alpha < \beta$. Neboť $\alpha = \beta$ by dalo $a = b$, což je nemožné; $\alpha > \beta$ by dalo $a > b$, což je také nemožné.

Cvičení.

56. Sestrojte eukleidovsky úhly $\alpha = 225°$, $\beta = 75°$. Určete graficky úhel ω, je-li: a) $\omega = \alpha + \beta$; b) $\omega = \frac{3}{2}\alpha - 2\beta$; c) $\omega = \frac{7}{2}\beta - \frac{3}{4}\alpha$.

57. Dokažte: a) Oba vedlejší úhly jsou pravé nebo je jeden ostrý a druhý tupý. b) Polovina dutého úhlu je vždy úhel ostrý. c) Dvojnásobek ostrého úhlu je vždy dutý. d) Dva styčné úhly, které jsou výplňkové, jsou vedlejší.

58. Vyslovte nějakou poučku, kterou a) lze obrátit, b) nelze obrátit.

59. Budiž $\alpha = 40°$. V jakých mezích musí ležet úhel β, má-li býti $\alpha + \beta$ úhel ostrý, ale $\alpha + 2\beta$ úhel tupý? Stanovte meze pro β také obecně, není-li velikost ostrého úhlu α číselně dána.

60. Ze dvou výplňkových úhlů je jeden n-násobek druhého. Jak velké jsou ty úhly? Pro která n je velikost obou úhlů dána celým počtem stupňů? (Je 16 takových n, počítáme-li i hodnotu $n = 1$.)

61. Určete v obloukové míře těchto úhlů: 360°; 180°; 90°; 45°; 120°; 60°; 30°; 135°; 225°; 270°; 330°; 124°.

62. Určete v míře stupňové velikosti úhlů daných v míře obloukové: 2π; π; $\frac{1}{2}\pi$; $\frac{3}{4}\pi$; $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{3}{2}\pi$; 1 (t. zv. radiant, *t* se nečte); 2,1.

63. Která podmínka musí platit, aby přímky p, q v obr. 28 stály navzájem kolmo (4 možnosti)?

64. V lichoběžníku $ABCD$ je $AB \| DC$.
a) V bodě A byla vztyčena kolmice $m \perp AB$, v bodě C byla vztyčena kolmice $n \perp CD$. Dokažte, že přímky m, n jsou rovnoběžné.
b) $\sphericalangle\, DAB$ je kosý. Proč je i $\sphericalangle\, ADC$ kosý?

65. V $\triangle ABC$ je $\overline{AB} = \overline{AC}$; uvnitř strany AC leží bod X. Dokažte, že $\overline{BX} > \overline{CX}$.

66. Co soudíte o velikostech stran trojúhelníka ABC, jestliže o jeho úhlech platí: a) $\beta < \alpha$; $\beta > \gamma$; b) $\alpha = \gamma$; $\beta < \alpha$; c) $\beta > \alpha$; $\beta > \gamma$?

3. Shodnost trojúhelníků.

Jeden z nejzákladnějších pojmů v geometrii je obecný pojem **shodnosti**. Dva geometrické útvary se jmenují shodné, je-li možné přemístit první beze změny velikosti úseček a úhlů tak, aby se kryl s druhým.

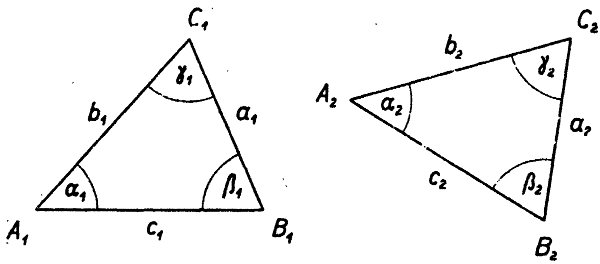
Důležitá je shodnost trojúhelníků. Píšeme $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$ (obr. 31), (1) jestliže je možné přemístit $\triangle A_1B_1C_1$ beze změny velikosti úseček a úhlů tak, aby se kryl vrchol A_1 s vrcholem A_2, vrchol B_1 s vrcholem B_2, vrchol C_1 s vrcholem C_2, tedy také strana a_1 se stranou a_2, strana b_1 se stranou b_2, strana c_1 se stranou c_2, úhel α_1 s úhlem α_2, úhel β_1 s úhlem β_2, úhel γ_1 s úhlem γ_2. Tedy ze vztahu (1) plynou vztahy

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2. \qquad (2)$$

Obráceně, jak je vám známo, nejen že ze vztahů (2) plyne (1), ale i když víme, že jsou splněny některé tři ze vztahů (2), už můžeme v určitých případech usuzovat, že platí vztah (1) a tedy všecky vztahy (2). To je předmětem známých **vět o shodnosti trojúhelníků.** Jsou to čtyři věty:

I. **Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a v úhlu jimi sevřeném,** t. j. (1) platí, je-li na př.

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2.$$



Obr. 31.

II. **Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně a v obou úhlech přilehlých,** t. j. (1) platí, je-li na př.

$$a_1 = a_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2.$$

III. **Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve všech třech stranách,** t. j. (1) platí, je-li

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2.$$

IV. **Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a v úhlu proti větší z nich,** t. j. (1) platí, je-li na př.

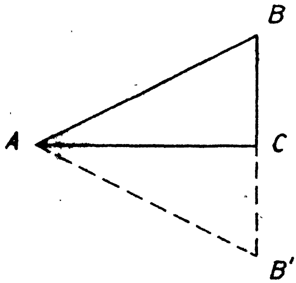
$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad a_1 > b_1.$$

Pro tyto základní věty o shodnosti trojúhelníků se zavádějí známé značky: sus pro větu I, usu pro větu II, sss pro větu III, Ssu pro větu IV.

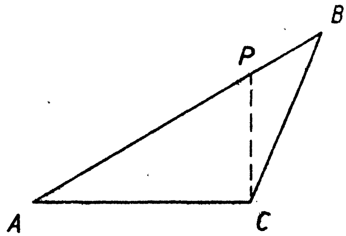
Jestliže na př. v $\triangle ABC$ je $\overline{BC} = \overline{AC}$ neboli $a = b$, je $\triangle ABC \cong \triangle BAC$ podle sus a tudíž $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$ neboli $\alpha = \beta$ (proti rovným stranám leží rovné úhly). Jestliže v $\triangle ABC$ je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$ neboli $\alpha = \beta$, je $\triangle ABC \cong \triangle BAC$ podle usu a tudíž $\overline{BC} = \overline{AC}$ neboli $a = b$ (proti rovným úhlům leží rovné strany). O těchto dvou větách jsme mluvili již na str. 139. Odvodíme si pomocí shodných trojúhelníků ještě několik jiných známých skutečností.

Je-li jeden úhel trojúhelníka pravý, jsou oba ostatní úhly ostré.

V $\triangle ABC$ budiž $\sphericalangle C = \frac{\pi}{2}$ (obr. 32); dokažme, že $\sphericalangle A < \frac{\pi}{2}$. Na prodloužení úsečky BC za bod C určeme B' tak, aby bylo $\overline{BC} = \overline{B'C}$. Oba trojúhelníky $\triangle ABC$, $\triangle AB'C$ mají při vrcholu C úhel pravý, mají společnou



Obr. 32.



Obr. 33.

stranu AC a jest $\overline{BC} = \overline{B'C}$. Proto $\triangle ABC \cong \triangle AB'C$ a z toho soudíme, že $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'AC$. Avšak oba tyto úhly dohromady tvoří dutý úhel $\omega = \sphericalangle BAB'$; tedy $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}\omega$. Avšak $\omega < \pi$, tedy $\sphericalangle BAC < \frac{1}{2}\pi$.

Trojúhelník, který má jeden úhel pravý (a tedy dva ostré), jmenuje se **pravoúhlý trojúhelník.** Strana proti pravému úhlu se jmenuje **přepona,** strany při pravém úhlu se jmenují **odvěsny.** Platí známá věta: **Přepona pravoúhlého trojúhelníka je větší než odvěsna.** Neboť proti přeponě leží úhel pravý, proti odvěsně úhel menší než pravý a proti většímu úhlu leží větší strana.

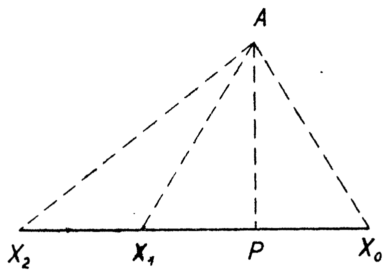
Je-li jeden úhel trojúhelníka tupý, jsou oba ostatní úhly ostré a strana proti tupému úhlu je větší než obě ostatní strany.

V $\triangle ABC$ budiž $\sphericalangle C > \frac{\pi}{2}$ (obr. 33); dokažme, že $\sphericalangle A < \frac{\pi}{2}$. Ježto

$\sphericalangle ACB$ je větší než pravý, můžeme uvnitř úsečky AB určit bod P tak, že $\sphericalangle ACP$ je pravý; potom $\triangle ACP$ má při vrcholu C úhel pravý, tedy při vrcholu A úhel ostrý. Ale oba trojúhelníky $\triangle ACP$, $\triangle ABC$ mají při vrcholu A týž úhel. Že strana AB je nejdelší strana $\triangle ABC$, plyne opět z věty, že proti většímu úhlu leží větší strana.

Z předcházejícího je patrné, že každý trojúhelník má aspoň dva úhly ostré. Jsou-li všecky tři úhly ostré, máme **ostroúhlý trojúhelník**; o pravoúhlém trojúhelníku jsme již mluvili; je-li jeden úhel tupý, máme **tupoúhlý trojúhelník.**

Leží-li bod A mimo přímku p, máme na přímce p jediný bod P, pro který AP stojí kolmo na p; P se jmenuje **pata kolmice spuštěné** s bodu A na přímku p. Je-li X kterýkoli jiný bod přímky p, je $\overline{AP} < \overline{AX}$, neboť AP je odvěsna a AX je přepona pravoúhlého $\triangle APX$. Proto úsečka $\overline{AP}$ se jmenuje **vzdálenost bodu A od přímky p.** Mimo to platí: **Pata P kolmice spuštěné s bodu A na přímku p rozdělí p na dvě polopřímky; jestliže bod X se na jedné z těch polopřímek vzdaluje od bodu P, potom se vzdálenost AX stále zvětšuje a úhel $\sphericalangle AXP$ se stále zmenšuje.** Důkaz (obr. 34):



Obr. 34.

Máme dokázati, že je $\overline{AX_1} < \overline{AX_2}$, $\sphericalangle AX_2P < \sphericalangle AX_1P$. V pravoúhlém $\triangle AX_1P$ je $\sphericalangle AX_1P$ ostrý, a proto vedlejší $\sphericalangle AX_1X_2$ je tupý. Z $\triangle AX_1X_2$ pak plyne ihned, že $\overline{AX_1} < \overline{AX_2}$ (proti tupému úhlu je nejdelší strana). Abychom dokázali tvrzení o úhlech, určeme na opačné polopřímce bod X_0 tak, aby bylo $\overline{PX_1} = \overline{PX_0}$; trojúhelníky $\triangle APX_1$, $\triangle APX_0$ mají při vrcholu P pravý úhel, mají společnou stranu AP a jest $\overline{PX_1} = \overline{PX_0}$; proto $\triangle APX_1 \cong$ $\cong \triangle APX_0$ podle sus a z toho soudíme jednak, že $\overline{AX_1} = \overline{AX_0}$, jednak, že $\sphericalangle AX_1P = \sphericalangle AX_0P$. Ježto $\overline{AX_1} < \overline{AX_2}$, je $\overline{AX_0} < \overline{AX_2}$; avšak AX_0, AX_2 jsou dvě strany $\triangle AX_0X_2$; protože proti menší straně je menší úhel, máme $\sphericalangle AX_2X_0 < \sphericalangle AX_0X_2$ neboli $\sphericalangle AX_2P < \sphericalangle AX_0P$. Avšak $\sphericalangle AX_1P =$ $= \sphericalangle AX_0P$; tedy $\sphericalangle AX_2P < \sphericalangle AX_1P$.

Leží-li bod A mimo přímku BC, potom pata P kolmice spuštěné s bodu A na přímku BC padne,

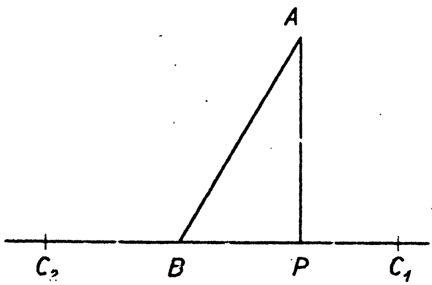
je-li $\sphericalangle ABC$ pravý, do bodu B;
je-li $\sphericalangle ABC$ ostrý, dovnitř polopřímky BC;
je-li $\sphericalangle ABC$ tupý, dovnitř opačné polopřímky.

Důkaz. Případ pravého $\sphericalangle ABC$ je zřejmý. Není-li $\sphericalangle ABC$ pravý (obr. 35), vznikne $\triangle ABP$ s pravým úhlem při vrcholu P; při vrcholu B máme ostrý $\sphericalangle ABP$ a úhel k němu vedlejší je tupý. S jedním z těch dvou úhlů však splyne $\sphericalangle ABC$.

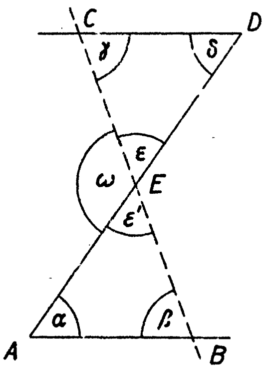
Cvičení.

67. a) Kolika jinými, ale zaručeně správnými zápisy lze nahradit zápis $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$?

b) Jestliže je $\triangle JKL \cong \triangle XYZ$, rozhodněte, které z těchto zápisů jsou jistě správné. (1) $\triangle LJK \cong \triangle ZYX$; (2) $\triangle YXZ \cong \triangle KLJ$; (3) $\triangle ZXY \cong \triangle LJK$; (4) $\triangle JKL \cong \triangle XZY$.



Obr. 35.



Obr. 36.

Cvičení 68 a 69 se vztahují k obr. 36, který není správně narýsován a vysvětluje jen označení. Víme však, že bod E je středem úsečky AD. Po každé si načrtněte vlastní obrazec a pomocí určité věty shodnosti řešte příslušné cvičení.

68. Body B, E, C v obr. 36 leží v jedné přímce. Při tom je a) $\overline{EB} = \overline{CE}$, b) $\alpha = \delta$. Které další úsečky a úhly jsou v obrázku sobě rovny?

69. V obr. 36 je $\alpha = \delta$, $\overline{AB} = \overline{CD}$. Dokažte, že body B, E, C leží v jedné přímce a vyhledejte sobě rovné úsečky a úhly.

70. V obr. 37 je $\overline{BD} = \overline{DC}$, $\overline{AD} = \overline{DE}$ a body A, D, E leží v jedné přímce. Dokažte, že a) polopřímka BE leží v úhlu $\sphericalangle CBF$, b) $\triangle ADC \cong \triangle EDB$, c) úhel $\gamma < \sphericalangle CBF$ (vnější úhel při vrcholu B). Vyslovte výsledek.

71. Z vět shodnosti trojúhelníků odvoďte věty shodnosti trojúhelníků pravoúhlých.

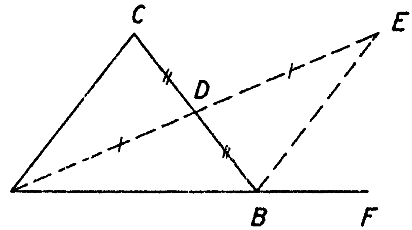
72. Užitím vlastností úhlů v pravoúhlém trojúhelníku dokažte, že:

a) s bodu B lze k přímce AC (obr. 32) spustit nejvýše jednu kolmici,

b) přenesením úhlu $\sphericalangle BAC$ v obr. 32 do polohy $\sphericalangle CAB'$ tak, že $\overline{AB'} = \overline{AB}$ získáme právě jedinou kolmici BB' s bodu B na přímku AC spuštěnou.

73. Kolik úhlů v každém trojúhelníku je vždy ostrých?

74. Jestliže platí $\triangle ABC \cong \triangle ACB \cong \triangle CAB$, co soudíte o stranách a úhlech tohoto trojúhelníka?



Obr. 37.

75. V rovnoramenném trojúhelníku ABC je BC základna. Dokažte: a) Oba úhly β, γ při základně jsou vždy ostré; které máme tedy druhy rovnoramenných trojúhelníků? Proč nemohou být úhly β, γ pravé nebo tupé?
b) Je-li D střed strany BC, je $AD \perp BC$ a $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD$ (úsečka AD se jmenuje osa rovnoramenného $\triangle ABC$).
c) Z výsledku cvičení 75b a z existence jediné kolmice k spuštěné s bodu A na přímku BC dokažte, že pata kolmice k je bod D.

76. V $\triangle ABC$ je $\sphericalangle ABC$ tupý nebo pravý. Je-li X vnitřní bod strany BC, potom platí $\overline{AB} < \overline{AX} < \overline{AC}$.

77. Je-li v trojúhelníku ABC $\beta < \gamma$ a je-li P pata výšky $AP \perp BC$, pak je $\sphericalangle CAP <$ $< \sphericalangle BAP$. Důkaz proveďte pro případ, že β i γ jsou úhly ostré i pro případ, že úhel γ je pravý nebo tupý, a to bez poučky o součtu úhlů v trojúhelníku.

78. Dokažte: Součet dvou stran v trojúhelníku je menší než strana třetí. [Pro $\gamma \geqq R$ je jistě $a < b + c$. Je-li $\beta < R$, $\gamma < R$, potom výška $AP \perp BC$ má patu P uvnitř BC. Uvažujte $\triangle ABP$, $\triangle ACP$ a sečtěte $(\overline{AB} + \overline{AC})$ a $(\overline{BP} + \overline{CP})$.]

79. Z výsledku cvičení 78 odvoďte poučky o rozdílech dvou stran v trojúhelníku.

80. Součet dvou úhlů v trojúhelníku je menší než $2R$. Pro které dva úhly je to zřejmé? [Je-li $\sphericalangle AX_1X_2$ v $\triangle AX_1X_2$ (obr. 34) tupý, je $\sphericalangle AX_2X_1$ ostrý; ten nahraďte větším úhlem $\sphericalangle AX_1P$.]

III. SHODNOST.

1. *Osová souměrnost.*

Důležitý pojem shodnosti jsme dosud probírali pouze potud, že jsme zopakovali známé věty o shodnosti trojúhelníků. Nyní budeme studovati pojem shodnosti obecně, při čemž jako obvykle se omezíme na dva útvary, které leží oba v téže rovině ϱ. Body prvního útvaru nazveme **vzory**, body druhého útvaru nazveme **obrazy** a označíme je čárkou; na př. bude A' obraz bodu A a zároveň bude A vzor bodu A'. Podobně bude na př. p' obraz přímky p a p

bude vzor přímky p'. Bod, který splyne se svým obrazem, je **samodružný bod**; takový bod splyne ovšem i se svým vzorem.

Představme si naši rovinu ϱ jako stránku sešitu (která ve skutečnosti je ovšem jen části roviny), na které je narýsován první útvar U. Tento útvar přeneseme na průsvitný papír, jehož polohu změníme, a v nové poloze přeneseme útvar narýsovaný na průsvitném papíře zpět do sešitu. Tím dostaneme v sešitě druhý útvar U' shodný s útvarem U. Změna polohy průsvitného papíru může býti dvojí. Buďto je při výsledné poloze stejně jako při počáteční líc průsvitného papíru nad rubem, nebo obrátíme průsvitný papír na ruby. V prvém případě máme **shodnost přímou**, v druhém **shodnost nepřímou**. Oba případy se liší jeden od druhého co do smyslu otáčení (viz článek 3). Při přechodu od vzoru U k obrazu U' kladný smysl otáčení zůstane kladným a záporný zůstane záporným, jde-li o shodnost přímou; naproti tomu kladný smysl otáčení přejde v záporný a přejde v kladný, jde-li o shodnost nepřímou.

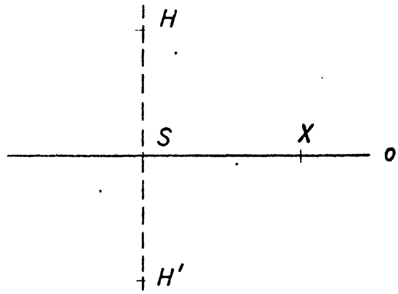
Základní vlastnost obecného pojmu shodnosti je tato:

Jsou-li A, B dva různé body rovinného útvaru U a máme-li sestrojit jeho shodný obraz U', můžeme polohu obrazů A', B' zvolit libovolně až na to, že musí býti $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Je-li provedena volba obrazů A', B' zbývá právě dvojí možnost pro polohu útvaru U; shodnost je při jedné možnosti přímá, při druhé nepřímá.

Všimněme si zejména případu, že dané dva různé body A, B jsou samodružné. Shodnost je jednoznačně určena, víme-li, zda je přímá či nepřímá. Přímá shodnost je v tomto případě **totožnost**: každý bod je samodružný, splyne se svým obrazem. Tím je zjištěno, že **při přímé shodnosti, která není totožnost, existuje nejvýš jeden samodružný bod.** Nepřímá shodnost, při které oba dané body A, B jsou samodružné, jmenuje se **osová souměrnost**; **přímka** AB je **osa souměrnosti**; označme ji o. Obraz bodu C, přímky p a pod. při osové souměrnosti, jejíž osou je daná přímka o, nazveme krátce **souměrný obraz** bodu C, přímky p a pod. **podle osy** o. Jestliže útvar U je narýsován na listu papíru a je obsažen v jediné polorovině vyťaté osou o, potom jeho souměrný obraz U' podle osy o dostaneme přehnutím papíru podél přímky o.

Každý bod osy o je při osové souměrnosti samodružný. Jestliže (obr. 38) bod H leží mimo osu o, leží jeho obraz H' v polorovině opačné k oH, a proto úsečka HH' protne osu v bodě S. Bod S je samodružný, a proto obrazem úsečky HS je úsečka $H'S$, takže $\overline{HS} = \overline{H'S}$, t. j. S je střed úsečky HH'.

Je-li X kterýkoli jiný bod osy o, je také X samodružný, a proto obrazem $\sphericalangle HSX$ je $\sphericalangle HSX'$. Oba tyto úhly jsou si tudíž rovny, a protože jsou vedlejší, jsou to úhly pravé. Jak víte, nazýváme **osou úsečky** HH' přímku vedenou středem této úsečky kolmo na přímku HH'. Tedy: Leží-li bod H mimo přímku o a je-li H' jeho souměrný obraz podle osy o, je přímka o osou úsečky HH'. Zřejmě platí také obrácení: **Je-li o osa úsečky HH', je každý z obou bodů H, H' souměrný obraz druhého podle přímky o.** Je-li X libovolný bod osy o, potom obrazem úsečky HX je úsečka HX', takže $\overline{HX} = \overline{H'X}$. Tedy: **Každý bod na ose úsečky H, H' je stejně vzdálen od H jako od H'.** Obráceně: **Každý bod stejně vzdálený od obou různých bodů H, H' leží na ose úsečky H, H'.** To by se snadno dokázalo přímo, ale také to plyne z následující věty:



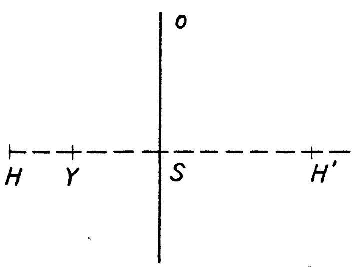
Obr. 38.

Jestliže bod Y neleží na ose o úsečky HH', je Y blíže tomu z bodů H, H', od něhož není oddělen osou o.

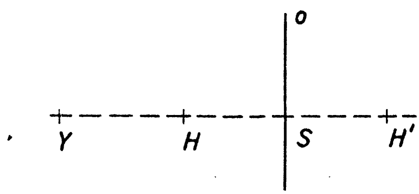
Důkaz. Můžeme předpokládat, že bod Y leží uvnitř poloroviny oH. Máme dokázati, že $\overline{HY} < \overline{H'Y}$.

I. Splyne-li bod Y s bodem H, je to zřejmé.

II. Leží-li Y uvnitř úsečky HH', musí ležet uvnitř úsečky HS (obr. 39a). Potom je $\overline{HY} < \overline{HS}$, $\overline{HS} = \overline{H'S}$, $\overline{H'S} < \overline{H'Y}$, tedy $\overline{HY} < \overline{H'Y}$.



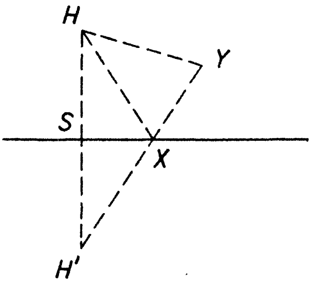
Obr. 39 a).



Obr. 39 b).

III. Leží-li Y na přímce HH', ale mimo úsečku HH', musí Y ležet na prodloužení úsečky HH' za bod H. V tomto případě je zřejmé (obr. 39b), že $\overline{HY} < \overline{HY'}$.

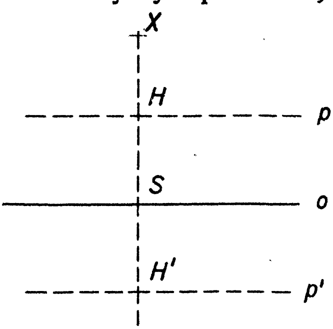
IV. Zbývá případ, že bod Y leží mimo přímku o (obr. 39c). Body H', Y jsou od sebe odděleny přímkou o, a proto úsečka $H'Y$ protne přímku o v bodě X, který musí býti různý od S. Jest $\overline{H'Y} = \overline{H'X} + \overline{XY}$, $\overline{HX} = \overline{H'X}$, tedy $\overline{H'Y} = \overline{HX} + \overline{XY}$. Naproti tomu plyne z $\triangle HXY$, že $\overline{HY} < \overline{HX} + \overline{XY}$, takže skutečně $\overline{HY} < \overline{H'Y}$.



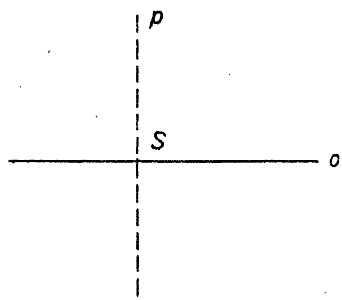
Obr. 39 c).

Nyní budem zkoumati souměrný obraz p' přímky p vzhledem k přímce o, při čemž počneme případem, že p je rovnoběžná s o. Případ, že p splyne s o, můžeme vyloučit.

Přímka p tedy neprotne přímku o, a proto leží celá uvnitř jedné poloroviny, vyťaté osou o. Obraz p' přímky p leží uvnitř opačné poloroviny, a proto žádné dvě z přímek p, p', o nemají společný bod; tedy přímky p, p', o jsou mezi sebou rovnoběžné. Každý bod na ose o je samodružný a musí tedy mít stejnou vzdálenost od obou přímek p, p'. Žádný jiný bod X však nemůže býti stejně vzdálen od p jako od p'. Neboť jestliže X neleží na ose o, leží X uvnitř jedné z obou polorovin vyťatých přímkou o, na př. (obr. 40) uvnitř té, uvnitř které leží



Obr. 40.

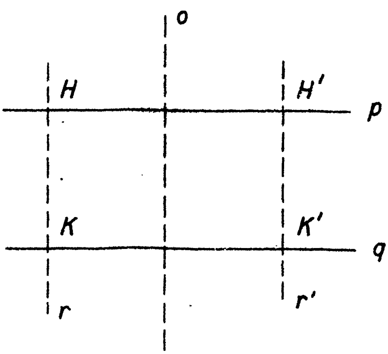


Obr. 41.

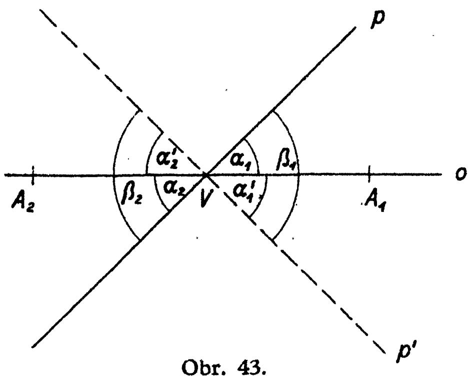
přímka p. Kolmice spuštěná s bodu X na přímku o stojí kolmo také na rovnoběžných přímkách p, p' a protne je v bodech H, H'. Vzdálenosti bodu X od přímek p, p' jsou rovny $\overline{HX}$, $\overline{H'X}$; avšak o je osa úsečky HH' a víme, že $\overline{HX} < \overline{H'X}$. Tedy X je blíže přímce p než přímce p'.

Jsou-li dány dvě různé rovnoběžky p, p', snadno určíme přímku o, podle které je každá z přímek p, p' souměrným obrazem druhé. Stačí (obr. 40) vésti libovolnou kolmici na p, která je kolmá i na p' a protne p, p' v bodech H, H'. Žádaná přímka o jde středem S úsečky H, H' rovnoběžně s oběma přímkami p, p'. Přímku o nazveme **osou rovnoběžek** p, p'. Uveďme si větu, kterou jsme již dokázali: **Jsou-li p, p' dvě různé rovnoběžky a je-li o jejich osa, je každý bod přímky o stejně vzdálen od obou přímek p, p'. Obráceně každý bod stejně vzdálený od p jako od p' leží na ose o. Jestliže bod X neleží na o, je touto přímkou oddělen od jediné z obou přímek p, p'. Jestliže o odděluje na př. X od p', je X blíže přímce p než přímce p'.**

Jestliže přímka p stojí kolmo na ose souměrnosti o (obr. 41), je při osové souměrnosti samodružná, t. j. splyne se svým obrazem. Obsahuje jediný samodružný bod S, který rozdělí p na dvě polopřímky, z nichž každá je při osové souměrnosti obrazem druhé. Všimněme si, že jsou-li X_1, X_2 dva různé body přímky p a X_1', X_2' jejich obrazy, jsou úsečky X_1X_2, $X_1'X_2'$ ovšem sobě rovny, ale mají opačný smysl; budeme to potřebovat v kap. III., čl. 2.



Obr. 42.

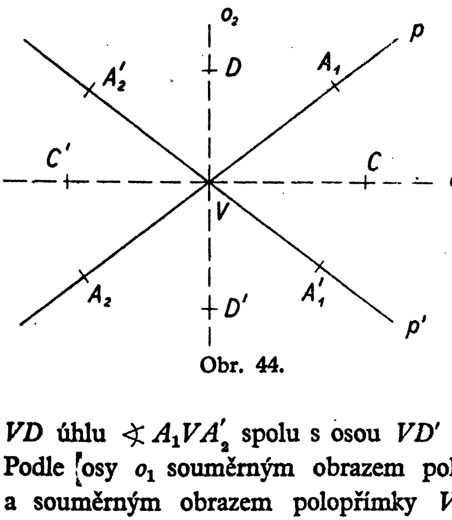


Obr. 43.

Jsou-li p, q dvě různé rovnoběžky, jsou si rovné všecky úsečky kolmé na obě a mající jeden krajní bod na p a druhý na q. Společná velikost těchto úseček je **vzdálenost rovnoběžek** p, q. (Splynou-li obě rovnoběžky, je jejich vzdálenost rovna nule.)

Důkaz (obr. 42). Buďtež H, H' dva různé body přímky p a budiž o osa úsečky HH'. Při osové souměrnosti s osou o obrazem bodu H je bod H', obrazem přímky r vedené bodem H rovnoběžně s o je přímka r' vedená bodem H' rovnoběžně s o. Přímka q stojí kolmo na o a je tedy samodružná. Proto obrazem průsečíku K přímek q, r je průsečík K' přímek q, r'. Obě přímky HK, $H'K'$ stojí kolmo na p i na q a jest $\overline{HK} = \overline{H'K'}$.

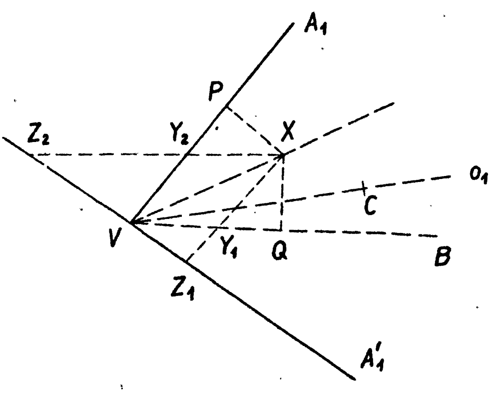
Jestliže přímka p protne osu souměrnosti o v bodě V, ale nestojí kolmo na o (obr. 43), tvoří přímky o, p čtyři úhly, z nichž dva jsou ostré a sobě rovné a v obrazci jsou označeny α_1, α_2; druhé dva v obrazci nevyznačené jsou také sobě rovné, ale tupé. Souměrné obrazy ostrých úhlů α_1, α_2 jsou ostré úhly α_1', α_2' s týmž vrcholem V; všecky čtyři úhly α_1, α_2, α'_1, α'_2 jsou si rovny. Ramena úhlů α_1', α_2' leží jednak v přímce o, jednak v té přímce p', která je souměrným obrazem přímky p. Oba ostré úhly α_1, α_1' tvoří dohromady dutý úhel β_1; podobně oba ostré úhly α_2, α_2' tvoří dohromady dutý úhel β_2. Úhly β_1, β_2 jsou navzájem vrcholové; jejich ramena leží v přímkách p, p'. Jak víte, **nazýváme osou úhlu** polopřímku, jejíž počátek je ve vrcholu úhlu a která prochází vnitřkem úhlu tak, že jej dělí na dva sobě rovné úhly. V našem případě bod V dělí přímku o na dvě polopřímky VA_1, VA_2, z nichž prvá je osou úhlu β_1, druhá osou úhlu β_2.



Obr. 44.

Osou dvou různoběžek p, p' s průsečíkem V nazveme každou přímku o, podle které jsou přímky p, p' každá souměrným obrazem druhé. Z předchozího plyne, že **dvě různoběžky p, p' mají dvě osy** o_1, o_2. Dostaneme je, sestrojíme-li osy všech čtyř dutých úhlů tvořených různoběžkami p, p' (obr. 44). Osa VC úhlu $\sphericalangle A_1VA_1'$ spolu s osou VC' úhlu $\sphericalangle A_2VA_2'$ tvoří dohromady přímku o_1, osa VD úhlu $\sphericalangle A_1VA_2'$ spolu s osou VD' úhlu $\sphericalangle A_1'VA_2$ tvoří dohromady o_2. Podle osy o_1 souměrným obrazem polopřímky VA_1 je polopřímka VA_1' a souměrným obrazem polopřímky VA_2 je polopřímka VA_2'. Podle osy o_2 naopak souměrným obrazem polopřímky VA_1 je polopřímka VA_2' a souměrným obrazem polopřímky VA_2 je polopřímka VA_1', úhly $\sphericalangle A_1VA_2'$, $\sphericalangle A_1VA_1'$ jsou vedlejší, a proto jejich součet je π; úhly $\sphericalangle CVA_1$, $\sphericalangle A_1VD$ jsou poloviční, a proto jejich součet je $\frac{1}{2}\pi$. Tedy: **Obě osy o_1, o_2 dvou různoběžek p, p' stojí na sobě kolmo.** Každá z obou přímek p, p' je souměrným obrazem druhé jak podle osy o_1, tak podle osy o_2; protože každý bod osy souměrnosti je samodružný a protože osová souměrnost je shodnost, máme: **Každý bod kterékoli z obou os o_1, o_2 dvou různoběžek p, p' je stejně**

vzdálen od p jako od p'. Obráceně: **Každý bod, který má stejné vzdálenosti od obou různoběžek p, p', leží na jedné z obou os těchto různoběžek.** Jinak řečeno, bod X, který neleží ani na o_1, ani na o_2 nemůže býti stejně vzdálen od p jako od p'. To by se dalo dokázat přímo. My však vyšetříme určitěji, které z obou přímek je takový bod X blíže. To je zcela zřejmé, jestliže bod X leží na jedné z obou přímek p, p', protože potom jeho vzdálenost od té přímky, na které leží, je rovna nule, je tedy menší než vzdálenost bodu X od přímky druhé. Jestliže však X neleží na žádné z obou přímek p, p', potom X leží uvnitř některého ze čtyř úhlů tvořených těmito přímkami. Pro určitost nechť bod X leží uvnitř $\sphericalangle A_1VA_1'$ (obr. 45). Osou tohoto úhlu je polopřímka VC, která je částí přímky o_1; proto bod X na ní neleží. Polopřímka VC dělí dutý $\sphericalangle A_1VA_1'$ na dva sobě rovné, tedy ostré úhly $\sphericalangle A_1VC$, $\sphericalangle CVA_1'$. Bod X musí ležeti uvnitř jednoho z těchto úhlů; pro určitost nechť X leží uvnitř $\sphericalangle A_1VC$. Za tohoto předpokladu dokážeme, že b o d X je b l í ž e p ř í m c e p n e b o l i p ř í m c e VA_1 n e ž p ř í m c e p' n e b o l i p ř í m c e VA_1'. Úhel $\sphericalangle A_1VX$ je menší než ostrý $\sphericalangle A_1VC$, tedy $\sphericalangle A_1VX$ je ostrý; mimo to se snadno dokáže, že $\sphericalangle A_1VX < \sphericalangle XVA_1'$. Proto jestliže sestrojíme polopřímku VB tak, aby ostré úhly $\sphericalangle A_1VX$, $\sphericalangle XVB$ si byly rovny a byly styčné, bude polopřímka VB ležet uvnitř $\sphericalangle A_1VA_1'$, a proto přímka VA_1' bude až na bod V ležet celá vně $\sphericalangle A_1VB$. S bodu X spusťme kolmice na přímky VA_1, VB a označme P, Q jejich paty. Protože úhly $\sphericalangle A_1VX$, $\sphericalangle XVB$ jsou ostré, leží body P, Q uvnitř polopřímek VA_1, VB. Bod X leží na ose $\sphericalangle A_1VB$, a proto obě vzdálenosti PX, QX jsou si rovny. Také jest $\overline{PX} < \overline{VX}$. Je-li Z_1 bod přímky VA_1' různý od bodu V, máme ještě dokázati, že $\overline{PX} < \overline{ZX}$ neboli $\overline{QX} < \overline{ZX}$. To je snadné. Neboť bod Z leží vně úhlu $\sphericalangle A_1VB$, uvnitř kterého leží bod X. Avšak $\sphericalangle A_1VB$ je společná část obou polorovin A_1VB, BVA_1. Proto uvnitř úsečky XZ musí býti bod Y, který leží na hranici jedné z obou polorovin, t. j. buďto na přímce VA_1 nebo na přímce VB. Proto vzdálenost $\overline{XZ}$



Obr. 45.

je větší než vzdálenost $\overline{XY}$, která je alespoň rovna (není-li větší než) $\overline{XP}$.
Tedy $\overline{XZ} > \overline{XP}$.

Cvičení.

81. Narýsujte dosti velký $\triangle ABC$ a stranou přímku $A'B'$ tak, aby $\overline{A'B'} = \overline{AB}$. $\triangle ABC$ přemístěte do nové polohy $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$; to lze učinit dvěma způsoby. Jak rozlišíte oba výsledky? Užívejte věty určenosti (sss). Sledujte smysly $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle B'A'C'$.

82. Cvičení 81 opakujte s pětiúhelníkem, který není konvexní. Jak dopadne výsledek, zvolíte-li $A' \equiv A$, $B' \equiv B$?

83. Je dána osa $o \equiv SX$ souměrnosti a mimo ni bod H; určete jeho obraz H'. Konstrukci proveďte tak, že

a) užitím dvou trojúhelníkových pravítek určíte přímku $HSH' \perp o$ (viz obr. 38),
b) přenesete $\sphericalangle SXH$ do polohy $\sphericalangle SXH'$ (viz obr. 39c),
c) ze dvou na ose o zvolených bodů X, X' opíšete kružnice (X; $r = \overline{XH}$), (X'; $r = \overline{XH'}$). Dokažte, že obě kružnice mají na přímce HSH' společné pouze body H, H'. [Viz výklad k obr. 34 na str. 143.]

84. Zvolte pětiúhelník $ABCDE$ a osu o souměrnosti, která a) pětiúhelník neprotíná, b) prochází body A, D, c) protíná strany AB, DE mimo jejich vrcholy. Určete obraz pětiúhelníka. (Užijte při konstrukci samodružných bodů.)

85. V trojúhelníku ABC je $\overline{AB} = \overline{AC}$. Potom přímka $o \perp BC$, procházející bodem A je jeho osou; co to znamená? Načrtněte jiné útvary, které mají osu.

86. o je osa úsečky $\overline{AB} = 100$ (rozměry v mm). Rozhodněte úsudkem o poloze bodu X vzhledem k ose o a vzhledem k úsečce AB i bodům A, B; víte-li, že a) $\overline{XA} = 37$ $\overline{XB} = 64$; b) $\overline{XA} = 32$; $\overline{XB} = 68$; c) $\overline{XA} = 110$; $\overline{XB} = 10$; d) $\overline{XA} = 23$ $\overline{XB} = 120$; e) $\overline{XA} = 140$; $\overline{XB} = 139$; f) $\overline{XA} = 60 = \overline{XB}$; g) $\overline{XA} = 50 = \overline{XB}$ h) $\overline{XB} = 30$ a bod X je na přímce AB. Je možné, aby platilo: $\overline{AX} = 73$; $\overline{XB} = 26$

87. Osy stran trojúhelníka ABC se protínají v jediném bodě O, který je středem kružnice trojúhelníku opsané. Dokažte a proveďte konstrukci.

88. Zvolte přímku o za osu souměrnosti. Na jednotlivé otázky odpovězte a doprovoďte je náčrtem od ruky.

a) Může bod splynout s bodem souměrně sdruženým? Kde leží takové body a jak se jmenují?
b) Jakou polohu musí míti úsečka, aby její obraz byl na jejím prodloužení? Co platí o smyslech obou úseček?
c) Jaká úsečka splyne se svým obrazem? (2 možnosti.)
d) Jaká přímka splyne se svým obrazem? (2 možnosti.)
e) Jaká přímka je rovnoběžná se svým obrazem? Co víte o této rovnoběžnosti
f) Může přímka stát kolmo na svém obraze? Kolik takových přímek prochází daným bodem?
g) Jsou-li přímky souměrně sdružené různoběžné, kde leží jejich průsečík?

89. Narýsujte dvě rovnoběžky p, p' a úsečku AB. Určete bod X, který je stejně vzdálen od přímek p, p' a který je také stejně vzdálen od daných bodů A, B. Vyšetřte podmínky řešitelnosti.

90. Určete eukleidovsky osu vypuklého úhlu.

91. Na přímce p, protínající obě ramena daného $\sphericalangle MUN$, vyšetřte bod X stejně vzdálený od obou ramen.

92. (Úhel α' vedlejší k vnitřnímu úhlu α trojúhelníka ABC se jmenuje vnější úhel.) Dokažte:

a) Osy u_1, u_2, u_3 vnitřních úhlů se protínají uvnitř trojúhelníka v jednom bodě S, který je středem kružnice vepsané.

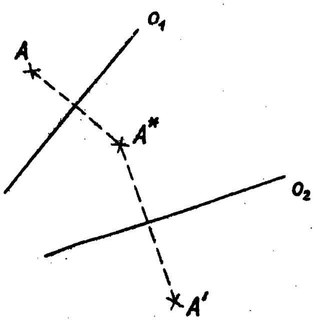
b) Dvě osy vnějších úhlů a jedna osa úhlu vnitřního se protínají ve středu kružnice trojúhelníka vně vepsané (na př. osy u_1', u_2', u_3 se protnou v bodě S_3). Vysvětlete, jak obratně sestrojíte osu u_1', znáte-li osu u_1!

c) Strany a osy tvoří zajímavé seskupení bodů a přímek. Čím je bod S v $\triangle S_1S_2S_3$?

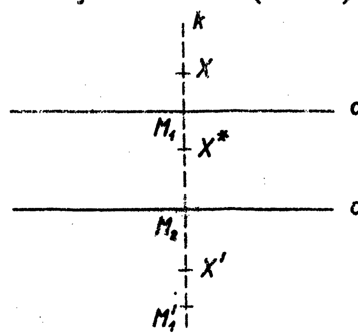
2. *Posouvání.*

Jsou-li dány obě různé přímky o_1, o_2, můžeme si (obr. 46) k libovolnému bodu A nejprve sestrojit jeho souměrný obraz A^* podle osy o_1 a potom sestrojit souměrný obraz A' bodu A^* podle osy o_2. Tím dostaneme novou shodnost, při které je obrazem libovolného bodu A právě sestrojený bod A'. O této shodnosti řekneme, že je **složena ze dvou osových souměrností** s osami o_1, o_2 (v tomto pořádku!) a označíme tuto shodnost v tomto článku (o_1, o_2). Každá osová souměrnost je nepřímá shodnost; snadno se dokáže, že (o_1, o_2) **je přímá shodnost**, kterou budeme nyní podrobněji studovat. Při tom musíme rozeznávat dva případy podle toho, zda přímky o_1, o_2 jsou rovnoběžné či různoběžné.

Nejprve budeme studovat (o_1, o_2) za předpokladu, že obě navzájem různé přímky o_1, o_2 jsou rovnoběžné. Budiž X libovolný bod a budiž (obr. 47) k

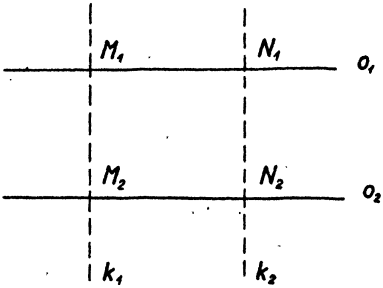


Obr. 46.

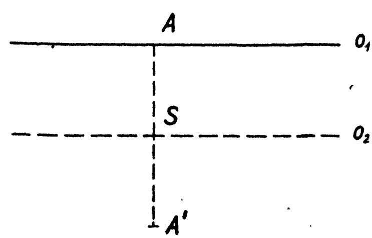


Obr. 47.

kolmice vedená bodem X na přímku o_1, pak k stojí kolmo také na o_2. Přímka k protne přímky o_1, o_2 v bodech M_1, M_2; protože M_1 leží na o_1, splyne M_1^* s M_1 a bod M_1' je souměrný obraz bodu M_1 podle osy o_2. Bod X' sestrojíme, jestliže sestrojíme napřed souměrný obraz X^* bodu X podle osy o_1 a potom souměrný obraz X' bodu X^* podle osy o_2. Víme (viz str. 149), že úsečky M_1X, M_1X^* jsou si rovny, ale mají opačný smysl; rovněž úsečky M_1X^*, $M_1'X'$ jsou si rovny, ale mají opačný smysl. Z toho plyne, že úsečky M_1X, $M_1'X'$ jsou si rovny a mají týž smysl, a z toho usoudíme snadno, že také úsečky M_1M_1', XX' jsou si rovny a mají týž smysl. Avšak úsečka M_1M_1' je dvojnásobek úsečky M_1M_2 a má s ní týž smysl. Tedy také úsečka XX' je dvojnásobek úsečky M_1M_2 a má s ní týž smysl.



Obr. 48.



Obr. 49.

Jsou-li nyní (obr. 48) k_1, k_2 dvě přímky, které stojí obě kolmo na o_1 a tedy také kolmo na o_2 a jsou-li M_1, N_1 jejich průsečíky s přímkou o_1, M_2, N_2 jejich průsečíky s přímkou o_2, víme, že $\overline{M_1M_2} = \overline{N_1N_2}$, a je zřejmé, že M_1M_2 a N_1N_2 jsou souhlasně rovnoběžné. Z toho soudíme:

Jsou-li o_1, o_2 dvě různé rovnoběžky, potom pro všechny polohy bodu X úsečky XX', kde X' je obraz bodu X při shodnosti (o_1, o_2), jsou si rovny a mají týž smysl.

Každá úsečka XX' je rovna dvojnásobku vzdálenosti obou rovnoběžek o_1, o_2. Je-li k libovolná kolmice na přímky o_1, o_2 a jsou-li M_1, M_2 průsečíky přímky k s přímkami o_1, o_2, je XX' rovné dvojnásobku úsečky M_1M_2 a obě úsečky XX', M_1M_2 jsou souhlasně rovnoběžné.

Takové shodnost se jmenuje **posouvání** neboli **translace.** Posouvání je jednoznačně určeno, volíme-li libovolně bod A a také libovolně jeho obraz A', který musí býti různý od A. Obraz X' libovolného bodu X je jednoznačně určen tím, že je

$$\overline{XX'} = \overline{AA'}, \quad XX' \parallel AA'.$$

Obě osy o_1, o_2 lze zvolit rozmanitými způsoby. Abychom sestrojili osy o_1, o_2, můžeme postupovat na př. takto (obr. 49):

Přímku o_1 vedeme bodem A kolmo na AA'; přímku o_2 vedeme rovnoběžně s o_1 středem S úsečky AA'.

Cvičení.

93. Dokažte o posunutí (o_1, o_2):
   a) V posunutí, které není totožností, žádný bod X nesplývá se svým obrazem X'. [Veďte osu o_1 bodem X.]
   b) Jestliže přímka a není kolmá k o_1, pak také obraz a' není kolmý k o_1.
   c) Jestliže přímka b má společný bod se svým obrazem b', je kolmá k o_1 a tedy splývá se svým obrazem b'. [Určete obraz X' společného bodu X přímek b, b'.]
   d) Přímka c, která není kolmá k o_1, nemá se svým obrazem společný bod.
   e) Každá přímka je rovnoběžná se svým obrazem. [Viz 93c, d.]

94. Narýsujte dvě rovnoběžky, aby jejich vzdálenost byla 5,5 (cm) a zvolte na nich úsečky AB, $A'B'$ tak, aby platilo

$$AB \parallel A'B', \quad \overline{AB} = \overline{A'B'} = 4.$$

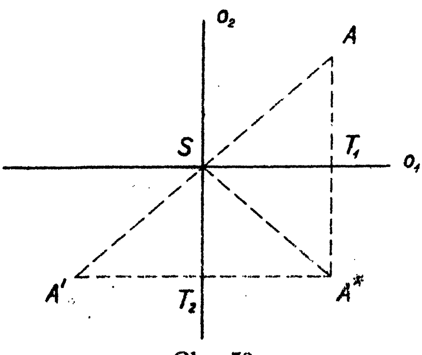
Pak sestrojte $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, je-li dáno $\overline{BC} = 5{,}5$, $\overline{AC} = 6{,}5$, tak, aby oba trojúhelníky byly přímo shodné. (Jak to zařídíte?) Dokažte:
   a) $\triangle A'B'C'$ je obrazem trojúhelníka ABC při posunutí určeném tím, že je $XX' \parallel AA'$, $\overline{XX'} = \overline{AA'}$, kde X' je obraz libovolného bodu X roviny.
   b) Zvolte třemi různými způsoby osy o_1, o_2 souměrnosti tak, aby shodnost (o_1, o_2) byla posunutím, které převádí $\triangle ABC$ do polohy $\triangle A'B'C'$. Platí, že (o_1, o_2) je táž shodnost jako (o_2, o_1)? Kterou z os můžete zvolit libovolně?
   c) Uvažujte i o případu, kdy přímky AB, $A'B'$ navzájem splývají. [Ve cvičení b) jsou osy kolmé k AA'. Volte: (1) o_1 libovolně, (2) o_1 bodem A, (3) o_2 bodem A'].

95. Je dán $\triangle ABC$ a dva libovolné body A_1, A_2. Proveďte posunutí tak, aby bod A přešel do polohy A_1 a druhé posunutí, při němž bod A_1 přejde do bodu A_2. Dokažte, že týž výsledek obdržíme, když bod A posuneme hned do bodu A_2. [Užijte výsledku ze cvičení 94.]

96. Zvolte $\triangle ABC$ a dvě různoběžky m, n. Sestrojte $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$ tak, aby body A', B' ležely na přímce m a bod C' na přímce n.

3. Středová souměrnost; rovnoběžky a úhly.

Nyní budeme probírati přímou shodnost (o_1, o_2) složenou ze dvou osových souměrností za předpokladu, že o_1, o_2 jsou dvě různoběžky s průsečíkem S. Počneme tím případem, že o_1, o_2 stojí na sobě kolmo (obr. 50). Bod S je samodružný při shodnosti (o_1, o_2). Je-li A bod, který neleží ani na o_1 ani na o_2, utvoříme nejprve jeho souměrný obraz A^* podle osy o_1 a potom souměrný obraz A' bodu A^* podle osy o_2; bod A' je obrazem bodu A při shodnosti (o_1, o_2). Je-li T_1 průsečík přímky AA^* s osou o_1, T_2 průsečík přímky A^*A' s osou o_2, potom $\sphericalangle A^*ST_1$ je souměrný obraz $\sphericalangle AST_1$ podle osy o_1, a proto polopřímka ST_1 je osa úhlu $\sphericalangle ASA^*$, takže tento úhel je dvojnásobek úhlu $\sphericalangle T_1SA^*$; podobně $\sphericalangle A^*SA'$ je dvojnásobek $\sphericalangle A^*ST_2$. Protože $\sphericalangle T_1SA^*$, $\sphericalangle A^*ST_2$ mají součet rovný $\frac{1}{2}\pi$, mají $\sphericalangle ASA^*$, $\sphericalangle A^*SA'$ součet rovný π, t. j. A' leží na prodloužení úsečky AS za bod S. Mimo to je zřejmě $\overline{AS} = \overline{A'S}$, takže S je střed úsečky AA', čímž je poloha obrazu A' bodu A jednoznačně popsána. K témuž výsledku dojdeme velmi snadno i v těch případech, že bod A leží buďto na o_1 nebo na o_2. Naše shodnost se jmenuje **středová souměrnost** a bod S se jmenuje **střed souměrnosti.** Obraz bodu A, přímky p atd. při středové souměrnosti, jejímž středem je daný bod S, nazveme krátce souměrný obraz bodu A, přímky p atd. podle středu S. Podle předchozího platí:



Obr. 50.

Je-li bod A různý od bodu S a je-li A' souměrný obraz bodu A podle středu S, je S střed úsečky AA'. Zřejmě platí také obráceně:

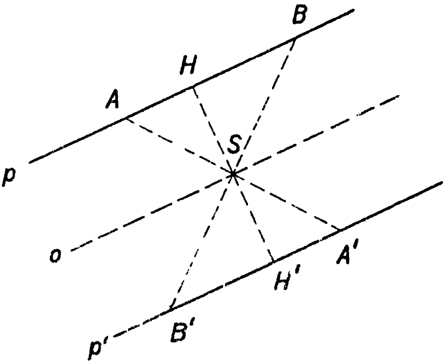
Je-li S střed úsečky AA', je každý z obou bodů A, A' souměrný obraz druhého podle středu S.

Jestliže přímka p prochází středem souměrnosti S, je při středové souměrnosti samodružná, t. j. splyne se svým obrazem. Obsahuje jediný samodružný bod S, který rozdělí p na dvě polopřímky, z nichž každá je při středové souměrnosti obrazem druhé. Jsou-li X_1, X_2 dva různé body přímky p, X_1', X_2' jejich obrazy, jsou úsečky X_1X_2, $X_1'X_2'$ ovšem sobě rovny, ale mají o p a č n ý s m y s l.

Je-li p' souměrný obraz přímky p podle středu S, jsou přímky p, p' nesouhlasně rovnoběžné. To je zřejmé, jestliže p prochází bodem S. Jestliže p neprochází bodem S (obr. 51), veďme bodem S přímku o rovnoběžnou s p; přímky p, o nemají společného bodu, a proto ani jejich obrazy p', o' nemají polečného bodu. Protože přímka o je samodružná, znamená to, že p' je rovnoběžná s o, tedy i s p. Jsou-li A, B dva různé body přímky p, potom úsečky AA', BB' se protnou v bodě S a tedy $AB \parallel B'A'$ ve smyslu vyloženém na str. 132. To znamená nesouhlasnou rovnoběžnost přímek p, p'. Je-li zejména H pata kolmice spuštěné s bodu S na přímku p, potom H' je pata kolmice spuštěné s bodu S na přímku p' a S je střed úsečky HH'. Tedy (viz str. 149): Je-li p' souměrný obraz přímky p podle středu S, který neleží na přímce p, potom osa rovnoběžek p, p' prochází bodem S.

Obráceně:

Jsou-li p, p' dvě různé rovnoběžky a je-li o jejich osa, je každá z obou přímek p, p' souměrným obrazem druhé podle středu S ležícího kdekoli na přímce o.



Obr. 51.

Důkaz: (obr. 51). Podle definice osy dvou rovnoběžek má bod S libovolně zvolený na přímce o stejné vzdálenosti od obou přímek p, p'. Jsou-li tedy H, H' průsečíky přímek p, p' s přímkou vedenou bodem S kolmo na p a tedy i kolmo na p', je S střed úsečky HH', a proto je H' souměrný obraz bodu H podle středu S. Souměrný obraz přímky p jde bodem H' rovnoběžně s p, t. j., je to přímka p'.

Dvě **polopřímky** V_1A_1, V_2A_2 jsou **souhlasně rovnoběžné,** je-li $V_1A_1 \parallel V_2A_2$ neboli $A_1V_1 \parallel A_2V_2$, a jsou **nesouhlasně rovnoběžné,** je-li $V_1A_1 \parallel A_2V_2$ neboli $A_1V_1 \parallel V_2A_2$ (viz kap. I, čl. 6). Z předchozího plyne:

Je-li S střed úsečky V_1V_2 a jsou-li polopřímky V_1A_1, V_2A_2 nesouhlasně rovnoběžné, je každá z obou polopřímek souměrným obrazem druhé podle středu S. Z toho plyne dále:

Dva duté úhly $\sphericalangle A_1V_1B_1$, $\sphericalangle A_2V_2B_2$ s nesouhlasně rovnoběžnými rameny jsou si rovny. Splynou-li vrcholy V_1, V_2, je to jasné, neboť pak máme dva vrcholové úhly. Jinak, je-li S střed úsečky V_1V_2, je každý z obou úhlů souměrným obrazem druhého podle středu S.

Dva duté úhly $\sphericalangle A_1V_1B_1$, $\sphericalangle A_2V_2B_2$ se souhlasně rovnoběžnými rameny jsou si rovny. Je-li totiž $\sphericalangle A_1'V_1B_1'$ vrcholový k $\sphericalangle A_1V_1B_1$, jsou

$\sphericalangle A_1'V_1B_1'$, $\sphericalangle A_2V_2B_2$ dva duté úhly se nesouhlasně rovnoběžnými rameny. Mohli jsme také dokázati, že $\sphericalangle A_2V_2B_2$ vznikne z $\sphericalangle A_1V_1B_1$ posouváním.

Jestliže polopřímky V_1A_1, V_2A_2 jsou souhlasně rovnoběžné a zároveň polopřímky V_1B_1, V_2B_2 jsou nesouhlasně rovnoběžné, jsou $\sphericalangle A_1V_1B_1$ $\sphericalangle A_2V_2B_2$ úhly výplňkové, neboť $\sphericalangle A_1V_1B_1'$ vedlejší k $\sphericalangle A_1V_1B_1$ má ramena souhlasně rovnoběžná s rameny $\sphericalangle A_2V_2B_2$.

Zvláštním případem této věty jest: **Oba úhly při témž rameni lichoběžníka jsou výplňkové.**

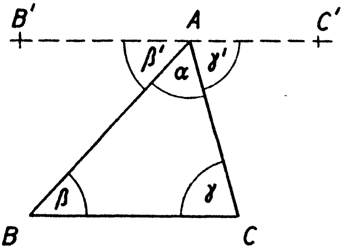
Součet úhlů trojúhelníka je roven π.

Důkaz: (obr. 52a). Vrcholem A trojúhelníka ABC veďme rovnoběžku s přímkou BC a zvolme na ní body B', C' tak, aby bylo

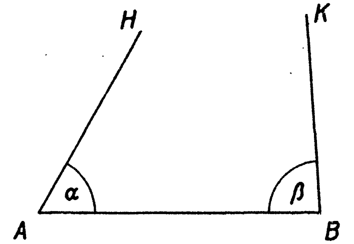
$$BC \| AC', \qquad CB \| AB'$$

(souhlasná rovnoběžnost). Mají-li úhly α, β, γ, α', β', γ' týž význam jako v obrazci, je $\alpha + \beta' + \gamma' = \pi$, neboť všecky tři úhly dohromady tvoří úhel přímý. Mimo to jsou však β, β' úhly s nesouhlasně rovnoběžnými rameny, a proto je $\beta = \beta'$; z téhož důvodu je také $\gamma = \gamma'$, takže $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Součet všech úhlů vypuklého n-úhelníka je roven $(n$-$2)\,\pi$. Neboť úhlopříčky vycházející z jednoho vrcholu rozdělí (obr. 20 na str. 128) n-úhelník na n-2 trojúhelníky a je patrné, že součet úhlů n-úhelníka je roven součtu všech úhlů všech těchto trojúhelníků.



Obr. 52 a).



Obr. 52 b).

Cvičení.

97. Sestrojte útvar souměrně sdružený k čtyrúhelníku $ABCD$ podle středu S, který leží a) vně čtyrúhelníku, b) v jednom vrcholu čtyrúhelníku, c) na straně AB tak, že $\overline{AS} = \frac{1}{4}\,\overline{AB}$, d) uvnitř čtyrúhelníka.

98. (Užitím souměrnosti dokažte dále uvedené poučky o rovnoběžníku). Čtyrúhelník $ABCD$, v němž je $AB \| DC$, $AD \| BC$ se jmenuje rovnoběžník. Označte o_1 osu rovnoběžek AB, DC a o_2 osu rovnoběžek AD, BC.

a) Osy o_1, o_2 se protínají uvnitř rovnoběžníka v bodě S, který je středem souměrnosti rovnoběžníka a bod S je průsečíkem úhlopříček AC, BD.
b) Odvoďte odtud známé poučky o protějších stranách, protějších úhlech a úhlopříčkách rovnoběžníka.

99. Dokažte tyto obrácené poučky o rovnoběžníku:
a) Jestliže u čtyrúhelníku $ABCD$ je $AB \| DC$, $\overline{AB} = \overline{DC}$, je to rovnoběžník. (Střed S úsečky AC zvolte za střed souměrnosti.)
b) Jestliže u čtyrúhelníku $ABCD$ se obě úhlopříčky AC, BD navzájem půlí, je to rovnoběžník.

100. Užitím pouček o úhlech s rovnoběžnými rameny a základní věty o rovnoběžkách (str. 130) dokažte další důležité poučky, které jste již poznali na střední škole: Buďtež A, B dva různé body.
a) Leží-li polopřímky AB', BC (viz obr. 52a) v opačných polorovinách, vyťatých přímkou AB, a je-li $\sphericalangle BAB' = \sphericalangle ABC$, jsou polopřímky AB', BC nesouhlasně rovnoběžné.
b) Leží-li polopřímky AC', BC (viz obr. 52a) v téže polorovině, vyťaté přímkou AB, a je-li $\sphericalangle C'AB + \sphericalangle CBA = 2R$, jsou polopřímky AC', BC souhlasně rovnoběžné.
c) Jestliže v téže polorovině, vyťaté přímkou AB (obr. 52b), jsou dány úhly $\alpha = \sphericalangle BAH$, $\beta = \sphericalangle ABK$ a jestliže je $\alpha + \beta < 2R$, potom polopřímky AH, BK se protnou. (To je proslulý **pátý postulát Eukleidův**, který je rovnocenný se základní větou o rovnoběžkách.) [Veďte $BL \| AH$; je $\beta < \sphericalangle ABL$ a přímky AH, BK jsou nutně různoběžné. Proč se musí protnout v polorovině ABH?]

101. Je dán úhel rovnoramenného trojúhelníka ω. Určete ostatní úhly (dvojí řešení).

102. Co platí o úhlech trojúhelníka ABC, je-li $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$? Odvoďte odtud eukleidovskou konstrukci úhlu 60°.

103. Vnější úhel trojúhelníka je roven součtu protějších úhlů vnitřních. (Viz cvičení 80.)

104. Uvnitř $\triangle ABC$ leží bod U. Dokažte, že $\sphericalangle BUC > \sphericalangle BAC$. [Prodlužte BU, až protne stranu AC v bodě V; uvažujte $\sphericalangle UVC$.]

105. Úhel α trojúhelníku ABC je pravý, ostrý nebo tupý podle toho, zda těžnice AA_1 (kde A_1 je střed strany BC) je rovna $\frac{1}{2}\overline{BC}$, je větší nebo menší než $\frac{1}{2}\overline{BC}$. Dokažte.

106. Co platí o a) sousedních úhlech, b) protějších úhlech rovnoběžníka? Kolik úhlů je v rovnoběžníku třeba znát, abychom mohli určit ostatní?

107. Dokažte: Je-li u čtyrúhelníka každý úhel roven úhlu protějšímu, je to rovnoběžník.

108. Rovnoběžník, který má jeden úhel pravý, se jmenuje obdélník. Dokažte poučky:
a) Čtyrúhelník, který má tři úhly pravé, je obdélník.
b) Obdélník má dvě osy souměrnosti, a proto jsou jeho úhlopříčky sobě rovny.
c) Jestliže jsou v rovnoběžníku obě úhlopříčky sobě rovny, je to obdélník (k důkazu užijte: (1) souměrnosti, (2) vět shodnosti).

109. Rovnoběžník, který má dvě sousední strany stejné, se jmenuje kosočtverec. Dokažte poučky:

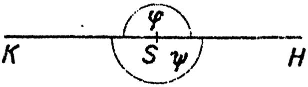
a) Úhlopříčky kosočtverce jsou jeho osami souměrnosti a stojí na sobě kolmo.

b) Úhlopříčka kosočtverce půlí úhel při vrcholu, z něhož vychází.

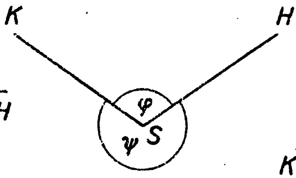
4. Otáčení.

Již na str. 119 byla učiněna zmínka o otáčení kolem bodu S. Dvě různé polopřímky SH, SK s týmž počátkem S jsou rameny dvou úhlů φ, ψ, při čemž rameno SK vznikne z ramene SH jak otáčením v kladném smyslu o úhel φ, tak otáčením v záporném smyslu o úhel ψ. Při tom jsou oba úhly φ, ψ přímé, (obr. 53a) nebo je φ úhel dutý a ψ vypuklý (obr. 53b) nebo je φ úhel vypuklý, ψ dutý. V každém případě je

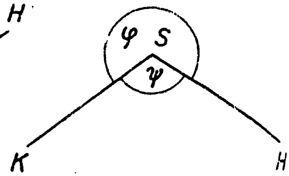
$$\varphi + \psi = 2\pi. \qquad (1)$$



Obr. 53 a).



Obr. 53 b).

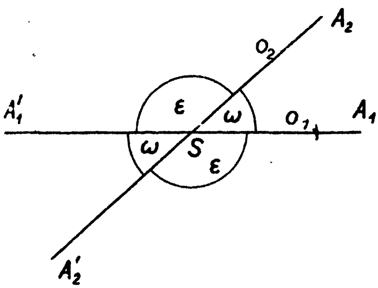


Obr. 53 c.

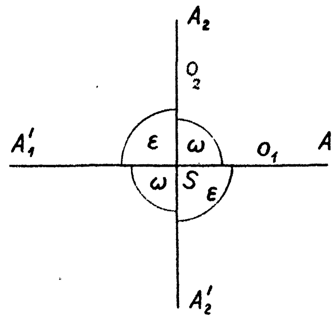
V následujícím budeme o otáčení kolem bodu S o určitý úhel mluvit tak, že je dána pouze v e l i k o s t a s m y s l úhlu, nikoli jeho poloha. Při každém otáčení kolem bodu S bod S sám je samodružný; je-li A kterýkoli jiný bod, potom pro jeho obraz A' při otáčení kolem S o úhel φ v kladném smyslu vždy platí $\overline{SA} = \overline{SA'}$ a ovšem polopřímka SA' vznikne z polopřímky SA otáčením v kladném smyslu o úhel φ. Podobně je tomu při otáčení kolem S v záporném smyslu o úhel ψ. Jestliže platí (1), potom obraz libovolného A při otáčení kolem S v kladném smyslu o úhel φ je totožný s obrazem bodu A při otáčení kolem S v záporném smyslu o úhel ψ. Otáčení kolem bodu S o úhel π je tedy středová souměrnost se středem souměrnosti S, ať už se děje otáčení v kladném či v záporném smyslu. Naproti tomu při otáčení o úhel různý od π musíme pečlivě rozlišovat, zda otáčíme v kladném či v záporném smyslu. Ať již smysl otáčení je kladný či záporný, byla velikost otáčení dosud stále předpokládána menší než 2π. Je však účelné mluvit také o otáčení o úhel, který není menší než 2π. Při otáčení o kterýkoli z úhlů

$$2\pi, \quad 4\pi, \quad 6\pi, \quad 8\pi \quad \text{atd.} \tag{2}$$

je každý bod A samodružný. Arci na př. při otáčení kolem bodu S o úhel 4π v kladném smyslu proběhne bod A dvakrát za sebou kružnici se středem S a poloměrem $\overline{SA}$; ale všímáme-li si pouze počáteční polohy A a konečné polohy A', potom otáčení o kterýkoli z úhlů (2) je prostě totožnost. V této třídě vůbec si při otáčení budeme všímat pouze počáteční a konečné polohy každého bodu; potom otáčení kolem S v kladném smyslu o úhel φ je totožné s otáčením kolem S v kladném smyslu o kterýkoli z úhlů



Obr. 54 a).

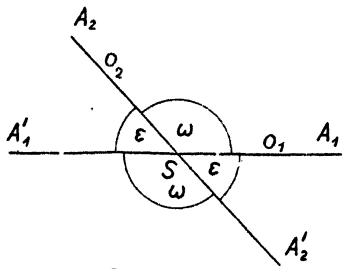


Obr. 54 b).

$$\varphi + 2\pi, \quad \varphi + 4\pi, \quad \varphi + 6\pi, \; . \; . \; . \; ,$$

obecně o kterýkoli z úhlů

$$\varphi + 2n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \; . \; . \; .).$$



Obr. 54c).

Totéž platí i pro otáčení v záporném smyslu. Je nyní zřejmé, že jestliže provedeme napřed otáčení kolem bodu S v kladném smyslu o úhel φ_1 a potom otáčení kolem téhož bodu S v kladném smyslu o úhel φ_2, je výsledek týž, jako kdybychom místo toho provedli jediné otáčení kolem S v kladném smyslu o úhel $\varphi_1 + \varphi_2$. Podobně jestliže provedeme napřed otáčení kolem bodu S v kladném smyslu o úhel φ_1 a potom otáčení kolem téhož bodu S v záporném smyslu o úhel φ_2, potom v případě $\varphi_1 > \varphi_2$ je výsledek týž, jako kdybychom místo toho provedli jediné otáčení kolem S v kladném smyslu o úhel $\varphi_1 - \varphi_2$; v případě $\varphi_1 < \varphi_2$ je výsledek týž, jako kdybychom místo toho provedli jediné otáčení kolem S v záporném smyslu o úhel $\varphi_2 - \varphi_1$.

Buďtež nyní dány dvě různoběžky o_1, o_2 s průsečíkem S. Budeme studovati shodnost (o_1, o_2). Obě přímky o_1, o_2 tvoří čtyři duté úhly

$$\sphericalangle A_1SA_2, \quad \sphericalangle A_1'SA_2, \quad \sphericalangle A_1SA_2', \quad \sphericalangle A_1'SA_2' \quad \text{(obr. 54a až c).}$$

V obrázcích jsou označeny ω oba ty sobě rovné úhly, jejichž rameno ležící v přímce o_1 přejde v rameno ležící v přímce o_2 otáčením v kladném smyslu; ε jsou označeny oba ty úhly, jejichž rameno ležící v přímce o_1 přejde v rameno ležící v přímce o_2 otáčením v záporném smyslu.

V každém případě jest

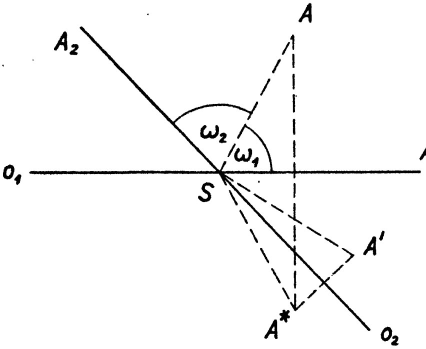
$$\omega + \varepsilon = \pi. \tag{3}$$

Budiž nyní bod A, ležící uvnitř některého z obou úhlů označených ω, na př. uvnitř $\sphericalangle A_1SA_2$ (obr. 55).

Polopřímka SA rozdělí tento úhel na dva, v obrazci označené ω_1, ω_2; je tedy

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega. \tag{4}$$

Je-li A^* souměrný obraz bodu A podle osy o_1 a je-li A' souměrný obraz bodu A^* podle osy o_2, je A' obraz bodu A při shodnosti (o_1, o_2). Úhly $\sphericalangle ASA_1$, $\sphericalangle A_1SA^*$ jsou souměrné obrazy jeden druhého podle osy o_1; mají oba touž velikost ω_1 a dohromady tvoří úhel, jehož velikost je $2\omega_1$. Z polopřímky SA vznikne polopřímka SA^* otočením kolem S v záporném smyslu o úhel $2\omega_1$. Z polopřímky SA^* vznikne polopřímka SA_2 otočením v kladném smyslu o úhel $2\omega_1 + \omega_2$; týmž otočením v kladném smyslu přejde polopřímka SA_2 v polopřímku SA'; tedy z polopřímky SA^* vznikne polopřímka SA' otočením kolem S v kladném smyslu o úhel



Obr. 55.

$$2(2\omega_1 + \omega_2) = 4\omega_1 + 2\omega_2.$$

Celkem tedy z polopřímky SA vznikne polopřímka SA', jestliže otočíme kolem S nejprve v záporném smyslu o úhel $2\omega_1$, a potom v kladném smyslu o úhel $4\omega_1 + 2\omega_1$. Místo obou otočení můžeme provésti jediné otočení kolem S v kladném smyslu o úhel

$$(4\omega_1 + 2\omega_2) - 2\omega_1 = 2(\omega_1 + \omega_2),$$

tedy podle (4) o úhel 2ω. Tím jsme dokázali, že jestliže A leží uvnitř některého z obou úhlů označených ω v obr. 54, vznikne polopřímka SA' z polopřímky SA otočením kolem S v kladném smyslu o úhel 2ω. Docela stejně dokážeme, že jestliže A leží uvnitř některého z obou úhlů označených ε v obr. 54, vznikne polopřímka SA' z polopřímky SA otočením v záporném smyslu o úhel 2ε. Podle (3) je však

$$2\omega + 2\varepsilon = 2\pi,$$

a proto otočení kolem S v záporném smyslu o úhel 2ε má týž účinek jako otočení kolem S v kladném smyslu o úhel 2ω. Proto ať bod A leží uvnitř kteréhokoli ze čtyr úhlů tvořených dvěma různoběžkami o_1, o_2, vznikne bod A' otočením bodu A kolem S o úhel 2ω v kladném smyslu. Snadno se přesvědčíme, že totéž platí, i když bod A leží na přímce o_1 nebo na přímce o_2. Závěr:

Jestliže $\sphericalangle A_1SA_2 = \omega$, při čemž rameno SA_1 leží v přímce o_1, rameno SA leží$_2$ v přímce o_2, a jestliže z ramene SA_1 vznikne rameno SA_2 otáčením v kladném smyslu o dutý úhel ω, potom shodnost (o_1, o_2) je otáčení kolem S v kladném smyslu o úhel 2ω.

To platí, i když přímky o_1, o_2 stojí na sobě kolmo; v tomto případě je $\omega = \frac{1}{2}\pi$, tedy $2\omega = \pi$ a otáčení se děje o úhel přímý. Tedy **středová souměrnost je zvláštní případ otáčení kolem bodu.** Celkový výsledek článků 2 až 4, kap. III: Jsou-li o_1, o_2 dvě různé přímky, potom shodnost (o_1, o_2) je posouvání (jsou-li přímky o_1, o_2 rovnoběžné), nebo je to otočení kolem průsečíku (o_1, o_2) obou různoběžek o_1, o_2.

Dá se dokázati, že každá přímá shodnost je buďto posouvání nebo otáčení kolem určitého bodu S. To nebudeme dokazovat; rovněž nebudeme dokazovat, že každá přímá shodnost je posouvání nebo otáčení. Rovněž tak nebudeme studovat podrobněji nepřímé shodnosti různé od osových souměrností.

Cvičení.

110. Daný $\triangle ABC$ otočte o daný úhel ω (v kladném nebo záporném smyslu), jestliže střed S otáčení leží a) vně trojúhelníka, b) uvnitř trojúhelníka, c) uvnitř strany BC. Otáčení polopřímek SX provádějte pomocí jedné vhodně zvolené kružnice (S, r).

111. Opakujte cvičení 110 tak, že výsledek rotace nahradíte shodností (o_1, o_2), při čemž je $o_1 \equiv SA$. Které úhly tvoří obě osy o_1, o_2? Záleží na pořadí těchto os? (Zvolte bod X na ose o_1 a hledejte shodnosti (o_1, o_2), (o_2, o_1).)

112. Úhel 2π o vrcholu S je rozdělen na n rovných úhlů $\varphi_n = \frac{2\pi}{n}$; tak vzniká n styčných úhlů, jejichž ramena protínají kružnici $k \equiv (S; r)$ po řadě v bodech $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dokažte:

a) Mnohoúhelník $A_1A_2 \ldots\ldots A_n$ je vypuklý, jeho strany a úhly jsou si rovny (Nazývá se mnohoúhelník pravidelný.)

b) Pravidelnému mnohoúhelníku lze kružnici opsat i vepsat. (Bod S se nazývá střed mnohoúhelníka, úhel $\varphi_n = \sphericalangle A_kSA_{k+1}$ je úhel středový; $A_{n+1} \equiv A_1$.)

c) Pravidelný mnohoúhelník má n os (souměrnosti), které vesměs procházejí bodem S; jeden úhel dvou sousedních os je $\frac{1}{2}\varphi_n$. Pro n liché je osa určena vrcholem A_k a bodem S. Pro n sudé jsou dva druhy os: (1) přímky A_kS, (2) kolmice spuštěné s bodu S ke stranám.

d) Lze provést n různých rotací kolem středu S (při kladných úhlech otáčení $\omega_k = k\varphi_n$, kde $k = 0; 1; \ldots ; n-1$), při nichž se nová poloha mnohoúhelníka kryje s původní; pro $k = 0$ máme totožnost.

e) Kteroukoli rotaci lze vytvořit shodností (o_1, o_2), kde o_1, o_2 jsou dvě vhodně zvolené osy mnohoúhelníka. Rozhodněte, kolika způsoby lze užitou rotaci o úhel ω_k nahradit shodnostmi (o_1, o_2).

f) Protože středová souměrnost je shodnost (o_1, o_2) pro $o_1 \perp o_2$, snadno rozhodnete, které pravidelné mnohoúhelníky mají střed souměrnosti.

113. Dokažte: Jestliže o dvou úsečkách AB, $A'B'$ platí:

a) $AB \| A'B'$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, lze jednu v druhou převést posunutím, při čemž bod A přejde v bod A' a B v B'. [Zaveďte shodnost (o_1, o_2), kde o_1 prochází středem úsečky AA'.]

b) $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, ale není $AB \| A'B'$; lze jednu v druhou převést vhodnou rotací, při čemž opět bod A přejde v A' a B v B'. Určete velikost úhlu otáčení z úhlu obou úseček AB, AB. [Zaveďte shodnost (o_1, o_2), kde o_1 je osa úsečky AA'; uvažujte i případ, kdy obě úsečky leží v téže přímce. Je $A \not\equiv A'$?]

114. Narýsujte rovnoramenný trojúhelník, je-li dán vrchol A, úhel α, a to tak, aby vrcholy B, C základny BC ležely po řadě na dvou daných různoběžkách b, c; bod A nesplývá s průsečíkem přímek b, c. [Otočte přímku c kolem bodu A o úhel α v kladném smyslu do polohy c' a v záporném do polohy c''. Průsečík přímek b, c' nebo b, c'', pokud existuje, je bod B.]

IV. PODOBNOST.

1. Úvodní úvahy.

Přistoupíme k studiu pojmu podobnosti, jednoho z nejdůležitějších pojmů v geometrii. Praktický příklad podobnosti poskytují mapy. Krajina ve skutečnosti a její obraz na mapě jsou dva podobné útvary; mají týž tvar, ale různou velikost. Je-li na př. měřítko plánu 1 : 100 000, je každá skutečná délka 1 km znázorněna na plánu délkou 1 cm. Délky na mapě jsou mnohem menší než délky ve skutečnosti. Ale každé dvě ve skutečnosti sobě rovné úsečky jsou i na mapě sobě rovné. Poměr délky na mapě k délce ve skutečnosti je pro všechny délky týž, v našem případě 1 : 100 000; ze skutečné velikosti dostaneme velikost obrazu na plánu, znásobíme-li skutečnou velikost číslem 10^{-5}. Naproti tomu velikost úhlů je táž ve skutečnosti jako na plánu. Na př. dvě silnice, které se křižují v úhlu 60°, jsou na mapě znázorněny čarami, které se protínají v témž úhlu 60°.

Jiný příklad dostaneme, narýsujeme-li na tabuli i v sešitě $\triangle ABC$ se stranami $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 3$, $\overline{BC} = 4$, při čemž na tabuli je jednotkou 1 dm, v sešitě 1 cm. Velikost každé strany v sešitě je rovna $\frac{1}{10}$ velikosti stejně označené strany na tabuli. Ale úhly při stejně označených vrcholech mají touž velikost na tabuli v sešitě; při vrcholu C máme v našem případě úhel pravý.

Geometrický pojem podobnosti těsně souvisí s aritmetickým pojmem úměrnosti, důkladně probraným na střední škole. Máme na mysli t. zv. přímou úměrnost, o nepřímé úměrnosti nebudeme vůbec mluvit, a proto budeme říkat krátce úměrnost. Veličiny

$$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n \tag{1}$$

a

$$b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n \tag{2}$$

jsou si úměrné, jestliže všecky poměry (zlomky)

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots\ldots, \frac{b_n}{a_n} \tag{3}$$

jsou si rovny. Označíme-li k společnou hodnotu čísel (3), platí vztahy

$$b_1 = ka_1, b_2 = ka_2, \ldots\ldots, b_n = ka_n. \tag{4}$$

Přechod od čísel (1) k číslům (2) se děje tedy tak, že se všechna čísla (1) znásobí týmž číslem k, které nazveme **koeficient úměrnosti.** V praxi jsou obyčejně všechna čísla (1), (2) kladná, načež také koeficient úměrnosti k je kladný; je-li $k > 1$, vzniknou čísla (2) z čísel (1) zvětšením, je-li $k < 1$, zmenšením; je-li $k = 1$, je každé z čísel (2) rovné příslušnému číslu (1). Později se nám však vyskytne také případ záporného k. Stále však předpokládáme, že čísla (1), (2) jsou vesměs různá od nuly; také k je tedy různé od nuly.

Vraťme se k pojmu podobnosti. **Dva geometrické útvary $\bar{U}$, U' jsou si podobné, jestliže**

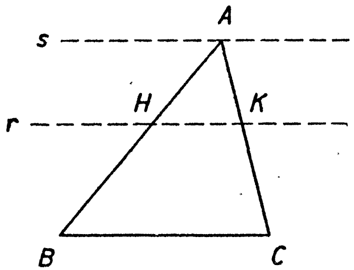
1. sobě odpovídající délky jsou si úměrné,

2. sobě odpovídající úhly jsou si rovny.

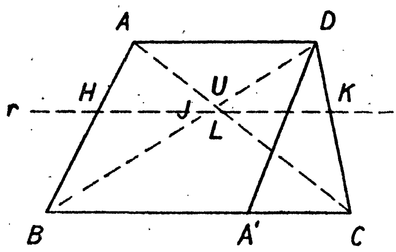
Koeficient úměrnosti délek nazveme koeficientem podobnosti. Je to kladné číslo k; shodnost je ten zvláštní příklad podobnosti, v kterém je $k = 1$. Pro každou dvojici d, d' sobě odpovídajících délek platí vztah $d' = kd$. Vyměníme-li pořádek sobě odpovídajících útvarů U, U', zůstanou si podobné, ale nový koeficient podobnosti bude $\frac{1}{k}$; místo zvětšení budeme míti zmenšení a naopak.

Provedeme ještě několik úvah, kterých užijeme v článku 2 této kapitoly (str. 169) ke studiu podobnosti trojúhelníků.

Leží-li bod *H* uvnitř strany *AB* trojúhelníka *ABC*, pak rovnoběžka *r* s přímkou *BC* vedená bodem *H* obsahuje bod *K* uvnitř strany *AC*.



Obr. 56.



Obr. 57.

Je-li *H* střed strany *AB*, je *K* střed strany $\triangle$*AC* a úsečka *HK* se v tomto případě jmenuje střední příčka *ABC* příslušná straně *BC*.

Důkaz (obr. 56). Přímka r neprochází žádným vrcholem a podle věty Paschovy (str. 118) protne ještě jednu stranu, protože rovnoběžka s BC musí protnout AC. Budiž nyní H střed strany AB. Souměrný obraz přímky BC podle středu H je přímka s, vedená bodem A rovnoběžně s přímkami BC, r. Tedy (viz str. 149) r je osa rovnoběžek BC, s. Z toho plyne, že s je také souměrný obraz přímky BC podle středu K, takže bod A je souměrný obraz bodu C podle středu K, t. j. K je střed úsečky AC.

Leží-li bod *H* uvnitř ramene *AB* lichoběžníku *ABCD*, pak rovnoběžka *r* se základnami *AD*, *BC*, vedená bodem *H*, obsahuje bod *K* uvnitř strany *CD*. Je-li *H* střed ramene *AB*, je *K* střed ramene *CD* a úsečka *HK* se v tomto případě jmenuje střední příčka lichoběžníku.

Důkaz (obr. 57). Podle předchozí věty přímka r prochází bodem L uvnitř strany AC trojúhelníka ABC, která je též stranou $\triangle ADC$, a proto r prochází bodem K uvnitř strany CD tohoto trojúhelníka. Je-li H střed úsečky AB, plyne z téže věty, že L je střed úsečky AC, a z toho dále, že K je střed úsečky CD.

Leží-li bod H uvnitř strany AB, bod K uvnitř strany AC trojúhelníka ABC a jsou-li BC, HK rovnoběžky, jest

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AC}}. \qquad (5).$$

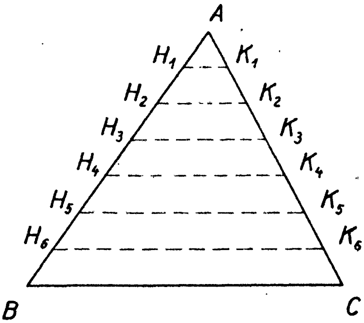
Důkaz provedeme nejprve za předpokladu, že na levé straně v (5) je racionální číslo $\frac{r}{n}$, které je ovšem menší než 1, takže $r < n$. (V obr. 58 je $r = 4$, $n = 7$.) Rozdělíme úsečku AB body

$$H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}$$

na n rovných dílů a vedeme jimi rovnoběžky s BC, které protnou úsečku AC v bodech

$$K_1, K_2, \ldots, K_{n-1}. \qquad (6)$$

Bod H splyne s H_r, bod K splyne s K_r; proto stačí dokázati, že body (6) dělí úsečku AC na n stejných dílů, neboli že K_1 je střed AK_2, K_2 je střed K_1K_3, ..., K_{n-1} je střed $K_{n-2}C$. To plyne z předchozích vět, užijeme-li jich nejprve na $\triangle AH_2K_2$ a potom na lichoběžníky.



Obr. 58.

$$H_1H_3K_3K_1,\ H_2H_4K_4K_2,\ \ldots,\ H_{n-2}BCK_{n-2}.$$

Obecný důkaz. Máme dokázat, že není možné, aby neplatilo (5). Jestliže rovnost (5) neplatí, je jeden z obou poměrů menší než druhý, třeba

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} < \frac{\overline{AK}}{\overline{AC}}.$$

V tom případě musí existovat racionální číslo k tak, že

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} < k,\ \frac{\overline{AK}}{\overline{AC}} > k,$$

neboli $\overline{AH} < k \cdot \overline{AB}, \quad \overline{AK} > k \cdot \overline{AC}.$ (7)

Platí-li (7), je k kladné číslo menší než 1. Proto můžeme určit uvnitř strany AB bod H_0 tak, že

$$\overline{AH_0} = k \cdot \overline{AB} \quad \text{neboli} \quad \frac{\overline{AH_0}}{\overline{AB}} = k. \tag{8}$$

Rovnoběžka s přímkou BC vedená bodem H_0 protne stranu AC v bodě K_0. Protože k je racionální, plyne z předchozího důkazu, že

$$\frac{\overline{AK_0}}{\overline{AC}} = k, \text{ neboli } \overline{AK_0} = k \cdot \overline{AC}. \tag{9}$$

Podle (7) a (8) je $\overline{AH} < \overline{AH_0}$, a proto bod H leží uvnitř strany AH_0 trojúhelníka AH_0K_0. Ježto přímky HK, H_0K_0 jsou rovnoběžné, leží bod K uvnitř strany AK_0 tohoto trojúhelníka. To však je nemožné, neboť ze (7) a (9) plyne, že $\overline{AK} > \overline{AK_0}$.

Cvičení.

115. V kterém poměru jsou oba obrazy vzdáleností dvou míst A, B zobrazených jednak na speciální mapě (měřítko 1 : 50 000), jednak na plánu o měřítku 1 : 20 000?

116. Veličiny $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ jsou úměrné k veličinám $b_1 = 1{,}8$; $b_2 = 1{,}5$; $b_3 = 2{,}4$; $b_4 = 2{,}7$; určete jejich hodnoty, víte-li, že:
a) $a_3 = 3{,}6$;
b) koeficient úměrnosti je $k = \frac{2}{3}$ (t. j. $a_n = k \cdot b_n$);
Určete v obou příkladech hodnoty dalších veličin b_5, b_6, víte-li, že $a_5 = 6{,}4$, $a_6 = 4{,}8$.

117. V obr. 57 protíná střední příčka HK lichoběžníka $ABCD$ úhlopříčku BD v bodě J; je $BC \| AD$, $\overline{BC} > \overline{AD}$.
a) Dokažte, že je $\overline{HK} = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AD})$.
b) Dokažte, že body na střední příčce HK jsou v pořádku $HJLK$ a že $\overline{JL} = \frac{1}{2}(\overline{BC} - \overline{AD})$; v které polorovině vyťaté přímkou HK leží průsečík U obou úhlopříček AC, BD?

118. Narýsujte úsečku AB velikosti 9 cm a graficky určete:
a) úsečku $\overline{AX} = \frac{2}{7} \cdot \overline{AB}$; b) uvnitř úsečky AB body U, V v pořádku $AUVB$ tak, aby platilo $\overline{AU} : \overline{UV} : \overline{VB} = 5 : 4 : 6$. Je úloha možná?

119. Určete graficky velikost úsečky $\overline{AB} = \dfrac{\overline{HK} \cdot \overline{LM}}{\overline{PQ}}$, kde HK, LM, PQ jsou dané úsečky. (Utvořte poměr $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{HK}} = \dfrac{\overline{LM}}{\overline{AB}}$; úsečka AB se podle úměry $\overline{PQ} : \overline{HK} = \overline{LM} : \overline{AB}$ jmenuje **čtvrtá geometrická úměrná**.)

120. V $\triangle ABC$ určete uvnitř strany AB bod D tak, aby $\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{3}{2}$, a veďte jím přímku $DE \| AC$, kde E je bod na přímce BC. Bodem D veďte dále přímku $DF \| AB$ a označte F, její průsečík s přímkou BC. Dokažte, že body E, F leží na přímce BC v pořádku $BFEC$ a určete velikosti úseček EC, FE, víte-li, že $\overline{BF} = 6$.

121. Určete poměr archu normalisovaného papíru, který v půli přeložen dává půlarch, jehož rozměry jsou opět v témže poměru. [$\sqrt{2} : 1$.]

2. *Podobnost trojúhelníků.*

Trojúhelníky $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ se stranami

$$a_1 = \overline{B_1C_1}, \quad b_1 = \overline{A_1C_1}, \quad c_1 = \overline{A_1B_1},$$
$$a_2 = \overline{B_2C_2}, \quad b_2 = \overline{A_2C_2}, \quad c_2 = \overline{A_2B_2}$$

a s úhly

$$\alpha_1 = \sphericalangle A_1, \quad \beta_1 = \sphericalangle B_1, \quad \gamma_1 = \sphericalangle C_1,$$
$$\alpha_2 = \sphericalangle A_2, \quad \beta_2 = \sphericalangle B_2, \quad \gamma_2 = \sphericalangle C_2$$

jsou podobné, což píšeme,

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2, \tag{1}$$

jestliže předně

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = k \tag{2}$$

a za druhé

$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2. \tag{3}$$

Při zápise podobnosti (1) je třeba dbáti pořádku vrcholů podobně jako při zápise shodnosti. Číslo k je koeficient podobnosti. Základním větám o shodnosti trojúhelníků, které jsme si zopakovali na str. 141, odpovídají základní věty o podobnosti trojúhelníků, které jsou hlavním obsahem tohoto článku. Věta odpovídající větě IV o shodnosti (viz str. 141) je méně důležitá a nebudeme k ní přihlížeti. Budeme míti tedy pouze tři základní věty o podobnosti trojúhelníků. Při tom můžeme nechati stranou případ $k = 1$, který dává už probranou shodnost. Budeme při důkazech dokonce předpokládat, že $k < 1$, protože případ $k > 1$ se převede na případ $k < 1$ prostou záměnou obou trojúhelníků.

I. Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se ve dvou úhlech.

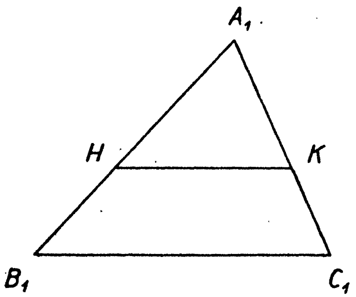
Důkaz. Budiž na př. $\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$; máme dokázat, že platí rovnosti (2). Jelikož $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi$, $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = \pi$, musí platit všecky tři vztahy (3) a ze vztahů (2) postačí odůvodnit jeden, na př.

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}. \tag{4}$$

Označíme-li k pravou stranu ve (4), stačí provésti důkaz za předpokladu, že $k < 1$, neboli že $c_2 < c_1$, t. j. $\overline{A_2B_2} < \overline{A_1B_1}$. Za tohoto předpokladu můžeme (obr. 59) uvnitř strany A_1B_1 určit bod H tak, že

$$\overline{A_1H} = \overline{A_2B_2}. \tag{5}$$

Bodem H vedeme s přímkou B_1C_1 rovnoběžku, na které máme bod K uvnitř strany A_1C_1, a jest



Obr. 59.

$$\frac{\overline{A_1K}}{\overline{A_1C_1}} = \frac{\overline{A_1H}}{\overline{A_1B_1}}. \tag{6}$$

V $\triangle A_1HK$ máme při vrcholu A_1 úhel α_1, který podle (3) je roven α_2. V témže trojúhelníku máme při vrcholu H úhel $\sphericalangle H$, jehož ramena jsou souhlasně rovnoběžná s rameny úhlu β_1, takže (viz str. 157) $\sphericalangle H = \beta_1$, tedy $\sphericalangle H = \beta_2$ podle (3). Ježto platí také (5), máme

$$\triangle A_1HK \cong \triangle A_2B_2C_2 \qquad \text{podle } usu,$$

tedy $\overline{A_1K} = \overline{A_2C_2}$. Z toho a z (5) soudíme, že ze (6) plyne

$$\frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{A_1C_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}},$$

což není nic jiného než (4).

Důsledek: Jestliže bodem H uvnitř strany A_1B_1 trojúhelníka $A_1B_1C_1$ vedeme rovnoběžku se stranou B_1C_1, která protne stranu A_1C_1 v bodě K, jest

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_1HK, \tag{7}$$

neboť oba trojúhelníky mají při vrcholu A_1 týž úhel a $\sphericalangle A_1B_1C_1$, $\sphericalangle A_1HK$ mají souhlasně rovnoběžná ramena, takže i tyto úhly jsou si rovny.

Poznámka. U trojúhelníků můžeme z rovnosti úhlů mluvit o podobnosti, tedy o úměrnosti stran. U čtyrúhelníků už to neplatí, neboť na př. každé dva obdélníky se shodují v úhlech (všechny úhly obdélníka jsou pravé) a přesto dva obdélníky si nemusí být podobné.

II. Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v jednom úhlu a jsou-li tomuto úhlu přilehlé strany jednoho úměrné přilehlým stranám druhého.

Důkaz. Budiž na př.

$$a_1 = a_2 \tag{8}$$

a mimo to

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = k. \tag{9}$$

Máme dokázat, že platí (1). Stačí provésti důkaz za předpokladu, že $k < 1$, tedy $c_2 < c_1$, $b_2 < b_1$. Potom můžeme (obr. 59) uvnitř strany A_1B_1, t. j. strany c_1, určit bod H tak, že

$$\overline{A_1H} = k \cdot \overline{A_1B_1}. \tag{10}$$

Vedeme-li opět bodem H rovnoběžku HK s přímkou BC, která protne stranu AC v bodě K, potom podle důsledku věty I bude platit (7), takže bude

$$\frac{\overline{A_1H}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{A_1K}}{\overline{A_1C_1}}$$

a tedy podle (10) bude

$$\overline{A_1K} = k \cdot \overline{A_1C_1}. \tag{11}$$

Ježto $\overline{A_1B_1} = c_1$, $\overline{A_2B_2} = c_2$, podle (10) a (11) jest

$$\overline{A_1H} = kc_1, \quad \overline{A_1K} = kb_1$$

a tedy podle (9)

$$\overline{A_1H} = c_2, \quad \overline{A_1K} = b_2.$$

Tedy $\triangle\, A_1HK$, $\triangle\, A_2B_2C_2$ se shodují ve dvou stranách a podle (8) se shodují také v úhlu jimi sevřeném, takže podle sus je

$$\triangle\, A_1HK \cong \triangle\, A_2B_2C_2,$$

takže $\sphericalangle\, A_1HK = \sphericalangle\, A_2B_2C_2$, neboli $\sphericalangle\, A_1HK = \beta_2$.

Na druhé straně $\sphericalangle\, A_1HK$ má ramena souhlasně rovnoběžná s $\sphericalangle\, A_1B_1C_1$ neboli s úhlem β_1, takže $\sphericalangle\, A_1HK = \beta_1$. Tedy $\beta_1 = \beta_2$. Z toho a z (8) soudíme podle věty I, že platí (1).

III. Dva trojúhelníky jsou podobné, jsou-li strany jednoho úměrné stranám druhého.

Důkaz. Jestliže platí (2), máme dokázati, že platí (1). Přitom můžeme předpokládati, že $k < 1$. Uvnitř strany A_1B_1 trojúhelníku $A_1B_1C_1$ určíme (obr. 59) bod H tak, aby bylo $\overline{A_1H} = k \cdot \overline{A_1B_1}$ neboli $\overline{A_1H} = c_2$. Rovnoběžka s přímkou A_1B_1 vedená bodem H protne stranu A_1C_1 v bodě K. Podle důsledku věty I platí (7), a jelikož bylo $\overline{A_1H} = k \cdot \overline{A_1B_1}$, bude též $\overline{A_1K} = k \cdot \overline{A_1C_1}$, $\overline{HK} = k \cdot \overline{B_1C_1}$. Podle (2) bude tedy $\overline{HK} = a_2$, $\overline{A_1K} = b_2$, $\overline{A_1H} = c_2$, takže

$$\triangle A_1HK \cong \triangle A_2B_2C_2 \tag{12}$$

podle sss. Ze (7) a (12) plyne (1).

Cvičení.

122. Kolik nezávislých rovnic představují zápisy ve výrazech (2), (3), které nám vyjadřují vztahy mezi základními prvky dvou podobných trojúhelníků $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$. Kolik těchto rovnic, ovšem vhodně vybraných, nám zajišťuje podobnost trojúhelníků?

123. Máme čtyři trojúhelníky, o jejichž úhlech platí (1) $\alpha = 40°$, $\beta = 80°$, $\gamma = ?$; (2) $\varphi = 60°$, $\psi = 72°$, $\omega = ?$; (3) $\alpha_1 = 60°$, $\gamma_1 = \frac{2}{3} \cdot \beta_1$; (4) $\delta = 72°$, $\vartheta = \frac{2}{3} \cdot \delta$, $\varepsilon = ?$. Názvy vrcholů našich trojúhelníků odpovídají názvům příslušných úhlů. Rozhodněte, které dva z našich trojúhelníků jsou podobné; odůvodněte.

124. Jsou dány trojúhelníky ABC, $A'B'C'$:
a) ($a = \frac{5}{3}$; $b = \frac{11}{6}$; $\gamma = 70°$); ($a' = \frac{5}{2}$; $b' = \frac{11}{4}$; $\gamma' = 70°$);
b) ($a = 6$; $b = 8$; $c = 9$); ($a' = 5$; $b' = 6\frac{2}{3}$; $c' = 7\frac{1}{2}$).
Rozhodněte, zda jsou podobné.

125. Dokažte:
a) Jsou-li v rovnoramenných trojúhelnících úhly proti základnám sobě rovny, jsou trojúhelníky podobné.
b) Každé dva rovnostranné trojúhelníky jsou podobné.

126. a) Určete podmínky podobnosti dvou obdélníků.
b) Každé dva čtverce jsou podobné. Co soudíte o dvou pravidelných n-úhelnících?
c) Dva podobné obdélníky mají společnou stranu velikosti 15, obvod jednoho je 36. Určete obvod druhého.

127. Je dán $\triangle ABC$, kde $a = 4{,}8$; $b = 6$; $c = 7{,}2$. Zvolte stranou úsečku $A'B'$ velikosti 6,4 a sestrojte $\triangle A'B'C'$ podobný trojúhelníku ABC. Správnost konstrukce odůvodněte.

128. O výškách trojúhelníka ABC platí:

$$v_1 : v_2 : v_3 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

(Úvahu proveďte odděleně pro trojúhelník a) ostroúhlý, b) pravoúhlý, c) tupoúhlý.)

129. Užitím podobnosti dokažte poučky o střední příčce trojúhelníka.

130. A_1, B_1, C_1 jsou středy stran a, b, c trojúhelníka ABC.

a) Dokažte, že platí $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

b) Označte T průsečík přímek AA_1, BB_1. Tu platí $\triangle TA_1B_1 \sim \triangle TAB$ při konstantě podobnosti $k = \frac{1}{2}$ a dělící poměr $(A_1AT) = -\frac{1}{2}$. Dokažte odtud, že těžnice AA_1, BB_1, CC_1 trojúhelníka ABC se protínají v bodě T (těžiště).

3. Věty Eukleidovy a věta Pythagorova.

V obr. 60 máme pravoúhlý $\triangle ABC$ s pravým úhlem při vrcholu C. Zavedeme obvyklé označení přepony, odvěsen a úhlů:

$$c = \overline{AB},\ a = \overline{BC},\ b = \overline{AC},\ \alpha = \sphericalangle BAC,\ \beta = \sphericalangle ABC.$$

Víme, že oba úhly α, β jsou ostré. Z toho plyne (viz str. 143), že pata P kolmice spuštěné s bodu C na přímku AB padne dovnitř přepony a rozdělí přeponu na dvě úsečky

$c_1 = \overline{BP}$ **(úsek přepony přilehlý odvěsně** a**),**

$c_2 = \overline{AP}$ **(úsek přepony přilehlý odvěsně** b**).**

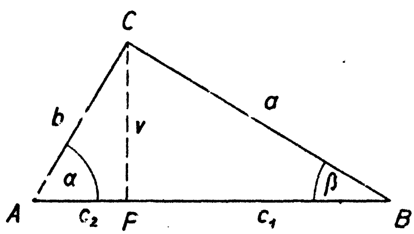
Jest ovšem

$$c_1 + c_2 = c. \qquad (1)$$

Úsečka

$$v = \overline{CP}$$

se jmenuje krátce výška pravoúhlého $\triangle ABC$.



Obr. 60.

Jestliže dva pravoúhlé trojúhelníky se shodují v jednom ostrém úhlu, jsou podobné, neboť se shodují také v pravém úhlu. Toho užijeme na pravoúhlé $\triangle ACP$, $\triangle BCP$; první z nich má s daným $\triangle ABC$ společný úhel α, druhý úhel β. Jsou tedy oba tyto trojúhelníky podobné s původním a tedy i mezi sebou, t. j.

$$\triangle CBP \sim \triangle ABC, \qquad (2)$$

$$\triangle ACP \sim \triangle ABC, \qquad (3)$$

$$\triangle CBP \sim \triangle ACP. \qquad (4)$$

Ze vztahu (2) plyne

$$\frac{c_1}{a} = \frac{v}{b} = \frac{a}{c},$$

což dá jednak

$$ab = cv, \qquad (5)$$

jednak

$$a^2 = cc_1. \qquad (6).$$

Ze vztahu (3) plyne $\frac{c_2}{b} = \frac{v}{a} = \frac{b}{c}$,

což dá jednak opět (5), jednak

$$b^2 = cc_2. \tag{7}$$

Ze vztahu (4) plyne ještě $\frac{v}{c_2} = \frac{c_1}{v}$,

neboli

$$v^2 = c_1c_2. \tag{8}$$

Podle distributivního zákona je $cc_1 + cc_2 = c(c_1 + c_2)$, což je rovné c^2 podle (1). Tedy ze (6) a (7) plyne sečtením

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{9}$$

Vzorec (5) se dá jednoduše odvodit ze známého vzorce pro obsah trojúhelníka; obě strany vyjadřují dvojnásobný obsah $\triangle ABC$, a proto si jsou rovny. Rovněž vzorce (6) až (7) se dají vyslovit pomocí obsahů obdélníků a čtverců; učiňte tak. Vzorci (6), (7), (8) jsou vyjadřeny t. zv. **věty Eukleidovy**, vzorcem (9) **věta Pythagorova.**

Buďtež HK, MN dané nenulové úsečky. Určeme úsečku RS tak, aby o její velikosti platilo

$$\overline{RS} = \sqrt{\overline{HK} \cdot \overline{MN}}.$$

Potom úsečce RS říkáme střední geometrická úměrná úseček HK, MN; je tedy úsečka RS určena pouze co do velikosti, ne co do polohy.

Střední geometrickou úměrnou RS úseček HK, MN můžeme určit užitím Eukleidových vět, na př. podle věty o výšce. Narýsujme na přímce body A, P, B tak, že jsou v pořádku APB a že $\overline{AP} = \overline{HK}$, $\overline{PB} = \overline{MN}$. Potom opišme nad průměrem AB polokružnici; kolmice vztyčená k naší přímce APB v bodě P protne polokružnici v bodě C. Podle Thaletovy věty má $\triangle ABC$ při vrcholu C pravý úhel, úsečka CP je jeho výška, takže úsečky AP, PB jsou úseky přepony. Potom podle Eukleidovy věty o výšce je (obr. 60)

$$\overline{CP} = \sqrt{\overline{AP} \cdot \overline{PB}} = \sqrt{\overline{HK} \cdot \overline{MN}},$$

t. j. úsečka CP je střední geometrická úměrná úseček HK, MN a proto $\overline{RS} = \overline{CP}$.

Za předpokladu, že je na př. $\overline{HK} < \overline{MN}$, můžeme úsečku RS sestrojit užitím Eukleidovy věty o odvěsně (obr. 60). Určeme na přímce opět tři body

A, P, B tak, že jsou v pořádku APB, při čemž je $\overline{AB} = \overline{MN}$, $\overline{AP} = \overline{HK}$. Nad úsečkou AB opišme polokružnici, potom kolmice vztyčená v bodě P k přímce APB protne polokružnici v bodě C. Podle Thaletovy věty má $\triangle ABC$ při vrcholu C pravý úhel, úsečka AB je jeho přeponou a úsečka AP úsekem přilehlým odvěsně AC. Podle Eukleidovy věty o odvěsně platí

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{AP}} = \sqrt{\overline{HK} \cdot \overline{MN}};$$

je tedy úsečka AC střední geometrickou úměrnou úseček HK, MN a proto je $\overline{RS} = \overline{AC}$.

Obrácení věty Pythagorovy: **Jestliže mezi stranami a, b, c trojúhelníka platí vztah (9), je trojúhelník pravoúhlý s přeponou c,** neboť jistě lze sestrojit pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny jsou rovné stranám a, b daného trojúhelníka. Protože (9) platí pro daný trojúhelník i pro pravoúhlý trojúhelník, shodují se oba trojúhelníky ve všech stranách, jsou shodné a daný trojúhelník je pravoúhlý.

Cvičení.

131. a) Vyslovte Eukleidovy věty a větu Pythagorovu užitím obsahů obdélníků a čtverců.

b) Jak užitím Eukleidových vět proměníte obdélník $MNPQ$ na čtverec o rovném obsahu (kvadratura obdélníka).

c) Ve vzorci (8) volte: (1) $c_1 = 2$, $c_2 = 1$ (obr. 60), (2) $c_1 = 3$, $c_2 = 1$; (3) $c_1 = 5$, $c_2 = 3$ a určete graficky hodnoty odmocnin $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$.

d) Cvičení 131c řešte užitím vzorce (6).

e) Narýsujte čtverec $HJKL$, $MNPQ$ a určete čtverec $ABCD$, jehož obsah se rovná součtu obsahů daných čtverců.

132. V kterém poměru jsou strany trojúhelníka ABC, v němž je a) $\alpha = 45°$; $\gamma = 90°$?; b) $\alpha = 30°$; $\gamma = 90°$? [$1 : \sqrt{3} : 2$.]

133. V kterém poměru je výška a strana rovnostranného trojúhelníka (viz cvičení 132b).

134. Rozhodněte, zda trojúhelník určený třemi stranami a) 3; 4; 5, b) 3; 5; 6, c) 5; 12; 13, d) $4n$; $4n^2 - 1$; $4n^2 + 1$ je pravoúhlý.

135. a) Rovnoběžník o úhlopříčkach 5; 12 a straně 6,5 je kosočtverec. Dokažte.

b) Které podmínky musí splňovat úhlopříčky e, f a strana a rovnoběžníka $ABCD$, aby to byl kosočtverec.

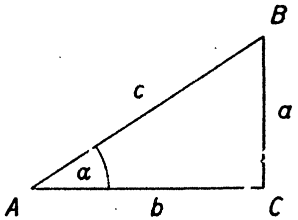
136. V $\triangle ABC$ je $\overline{AB} = \overline{AC}$. Je-li $\overline{AB} = 13$, $\overline{BC} = 10$, určete poloměr r kružnice trojúhelníku opsané. (Je-li D střed strany BC, E průsečík přímky $BE \perp AB$ s osou $AD \perp BC$, je $r = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE}$. Na $\triangle AEB$ užijte vzorce (6); co víte o středu kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku AEB?)

137. $ABCD$ je čtverec o straně a; na polopřímce AB leží bod E tak, že $\overline{AE} = \overline{AC}$. Je-li P pata kolmice spuštěné s bodu A na přímku DE, dokažte, že bod P je v polorovině ACD a že $\overline{DE} = 2 \cdot \overline{DP}$. [Určete AB, DE a na trojúhelník DEA užijte vzorce (6).]

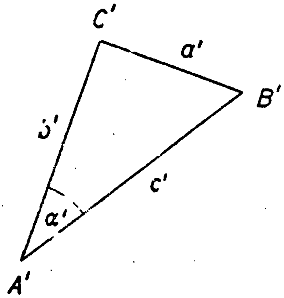
138. Je-li v $\triangle ABC$ $\sphericalangle C = R$ a $v = 1$, je $c_2 = \dfrac{1}{c_1}$. Dokažte odtud geometricky, že součet $c_1 + \dfrac{1}{c_1}$ čísla $c_1 > 0$ a jeho převrácené hodnoty $\dfrac{1}{c_1}$ je vždy větší nebo roven 2; důkaz proveďte také výpočtem. Kdy je $c_1 + \dfrac{1}{c_1} = 2$? (Porovnejte výšku s poloměrem opsané kružnice, viz obr. 60.)

4. *Goniometrie ostrého úhlu.*

Slovo goniometrie je řeckého původu: gony — úhel, metrein — měřiti, tedy vlastně nauka o měření úhlů. Je-li dán ostrý úhel, můžeme sestrojiti pravoúhlý $\triangle ABC$ s úhlem α při vrcholu A, s pravým úhlem při vrcholu C



Obr. 61 a).



Obr. 61 b).

(obr. 61a). Strany trojúhelníka označme jako obvykle $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ a utvořme poměry

$$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}. \tag{1}$$

Jestliže místo $\triangle ABC$ vezmeme jiný $\triangle A'B'C'$ (obr. 61b) s pravým úhlem při C' a úhlem $\alpha' = \alpha$ při A' (při tom úhly α, α' splynou nebo nesplynou, ale rozhodně si jsou rovny), jehož strany označíme $a' = \overline{B'C'}$, $b' = \overline{A'C'}$, $c' = \overline{A'B'}$, budeme místo (1) míti poměry

$$\frac{a'}{c'}, \frac{b'}{c'}, \frac{a'}{b'}, \frac{b'}{a'}. \tag{2}$$

Avšak z rovnosti úhlů $\quad a = a', \ \sphericalangle C = \sphericalangle C'$

následuje podobnost $\quad \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Je-li k koeficient podobnosti, jest

$$a' = ka, \ b' = kb, \ c' = kc,$$

a proto poměry (2) jsou rovné poměrům (1). Jinak řečeno, poměry (1) jsou čísla, jejich hodnoty jsou závislé pouze na velikosti úhlu α, neboli jsou funkce velikosti úhlu α, krátce funkce úhlu α. Slovo funkce znáte ze střední školy. Souhrnný název všech čtyř funkcí je **goniometrické funkce.** Pro jednotlivé z nich máme tyto názvy:

$\dfrac{a}{c}$, t. j. **poměr protější odvěsny k přeponě se nazývá sinus úhlu** α,

$\dfrac{b}{c}$, t. j. **poměr přilehlé odvěsny k přeponě se nazývá kosinus úhlu** α,

$\dfrac{a}{b}$, t. j. **poměr protější odvěsny k přilehlé odvěsně se nazývá tangens úhlu** α,

$\dfrac{b}{a}$, t. j. **poměr přilehlé odvěsny k protější odvěsně se nazývá kotangens úhlu** α.

Obyčejně užíváme zkratek:

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha, \quad \frac{b}{c} = \cos\alpha, \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \frac{b}{a} = \operatorname{cotg}\alpha.$$

Pro každý ostrý úhel α jsou $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$ určitá kladná čísla. Protože přepona c je vždy delší než kterákoli z odvěsen a, b, máme pro každý ostrý úhel α:

$$\sin\alpha < 1, \qquad \cos\alpha < 1; \qquad (3)$$

to je omezující podmínka pro funkce sinus a kosinus. Pro funkce tangens a kotangens neplatí žádná omezující podmínka. Z Pythagorovy věty $a^2 + b^2 = c^2$ plyne

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1,$$

tedy pro každý ostrý úhel α platí důležitá identita (neboli totožnost)

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1,$$

která se však obyčejně píše bez závorek takto:

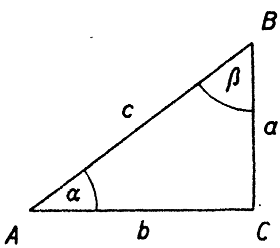
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \tag{4}$$

Platí ještě jiné identity, z nichž si prozatím poznamenejme pouze tyto:

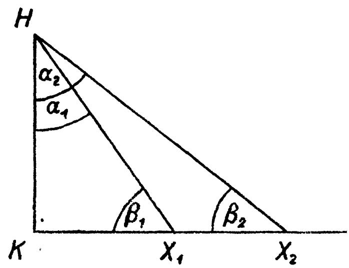
$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}, \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{6}$$

Správnost těchto identit je okamžitě patrná. Podrobněji budeme studovat goniometrické funkce v druhé třídě, kde jednak rozšíříme definici goniometrických funkcí úhlu tak, že budou definovány pro všecky úhly a ne jako dosud pouze pro úhly ostré, a za druhé budeme definovat také goniometrické funkce čísla (ne úhlu), které jsou důležité ve fysice.



Obr. 62.



Obr. 63.

Jsou-li α, β oba ostré úhly pravoúhlého $\triangle ABC$ (obr. 62), víme, že $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ neboli $\alpha^\circ + \beta^\circ = 90^\circ$. Říkáme, že α, β jsou dva **doplňkové úhly.** Odvěsna protější k jednomu z obou úhlů α, β je zároveň přilehlou k druhému. Z toho plyne: **Jsou-li** α, β, **dva doplňkové úhly,** je

$$\sin\beta = \cos\alpha, \qquad \cos\beta = \sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{cotg}\alpha, \qquad \operatorname{cotg}\beta = \operatorname{tg}\alpha. \tag{7}$$

Předpona ko- v názvech kosinus, kotangens pochází z latinského slova complementum — doplněk.

Zvětšuje-li se ostrý úhel α, **zvětšují se také čísla** $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, **kdežto čísla** $\cos\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$ **se zmenšují.**

Důkaz (obr. 63). Zvolme libovolnou úsečku HK a v bodě K veďme polopřímku KX kolmo na HK. Pro každou polohu bodu X budiž α úhel $\sphericalangle KHX$, takže

$$\cos\alpha = \frac{\overline{HK}}{\overline{HX}}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\overline{HK}}{\overline{KX}}.$$

Jestliže α se zvětšuje, zvětšuje se $\overline{KX}$, takže cotg α se zmenšuje. Zároveň (viz str. 143) se zvětšuje také $\overline{HX}$, takže $\cos\alpha$ se zmenšuje. Při zmenšování α se naopak zvětšuje i $\cos\alpha$ i $\operatorname{cotg}\alpha$. Budiž nyní β doplňkový úhel k α. Jestliže α se zvětšuje, β se zmenšuje, tedy se zvětšuje $\cos\beta$, $\operatorname{cotg}\beta$, a podle (7) se zvětšuje $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

Cvičení.

139. Co soudíte o trojúhelnících ABC, $A_1B_1C_1$, o nichž platí:

$$(c = 10;\ \beta = 35°;\ \gamma = 90°),\ (c_1 = 12;\ \alpha_1 = 55°;\ \gamma_1 = 90°)?$$

a) Která je souvislost mezi stranami obou trojúhelníků?

b) Vypočtěte hodnoty goniometrických funkcí úhlů α, α_1. Jakou souvislost mezi výsledky očekáváte?

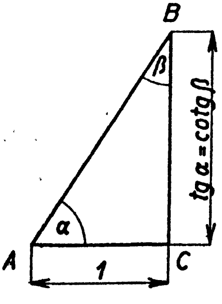
140. Narýsujte $\triangle ABC$, je-li dáno $\overline{AC} = 9$, $\overline{BC} = 6$, $\gamma = R$.

a) Úhloměrem změřte úhly α, β (kontrola!) a vypočtěte přeponu AB.

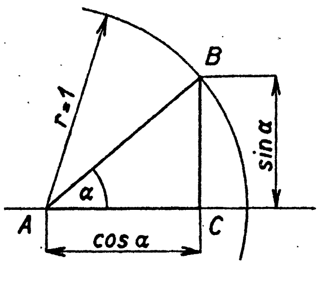
b) Vypočtěte hodnoty goniometrických funkcí obou úhlů α, β. Kolik je to různých čísel? Které z vypočtených funkčních hodnot jsou si rovny?

141. V obr. 63 je $\sphericalangle HKX_1 = R$, $\alpha_1 < \alpha_2$; zvolte $\overline{HK} = 1$ dm. Víte, že je $\overline{KX_1} < \overline{KX_2}$ a $\overline{HX_1} < \overline{HX_2}$. Dokažte znovu jako v textu, že platí $\operatorname{tg}\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_2$, $\sin\alpha_1 < \sin\alpha_2$, $\operatorname{cotg}\alpha_1 > \operatorname{cotg}\alpha_2$, $\cos\alpha_1 > \cos\alpha_2$. Vyslovte větou.

142. Graficky můžeme sestavit tabulky hodnot goniometrických funkcí užitím pravoúhlých trojúhelníků, jejichž jednu stranu zvolíme rovnu jednotce měření (nejlépe 1 dm). Na obr. 64a a 64b jsou takové trojúhelníky vyznačeny; vysvětlete a určete



Obr. 64 a).



Obr. 64 b).

*

graficky tabulky hodnot funkcí úhlů $\alpha = 10°; 20°; \ldots 80°$ (měřte na mm přesně; pro úhly $\alpha > 60°$ narýsujte obr. 64a tak, že $\overline{AC} = 2$ cm a za jednotku měření volte 2 cm).

143. Určete graficky velikost úhlu ω, je-li: a) $\sin\omega = \frac{3}{4}$; 0,46; b) $\operatorname{tg}\omega = 2{,}5$; 0,52; c) $\cos\omega = 0{,}7; \frac{\sqrt{3}}{3}$; d) $\operatorname{cotg}\omega = 2\sqrt{2}$; 0,29.

144. Srovnejte podle velikosti úhly $\varepsilon, \varphi, \psi$, pro něž platí (užijte výsledků cvičení 141; velikosti úhlu neurčujte):

a) $\operatorname{tg}\varepsilon = 1{,}75$; $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}36$; $\operatorname{tg}\psi = 2$;

b) $\cos\psi = 0{,}3$; $\cos\varepsilon = 0{,}58$; $\cos\varphi = 0{,}998$;

c) $\operatorname{tg}\varepsilon = 0{,}36$; $\operatorname{cotg}\psi = \frac{4}{3}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

145. Pomocí obr. 64a ukažte, že funkce $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$ ostrého úhlu α mohou nabýt kterékoli kladné hodnoty. Podobně pomocí obr. 64b dokažte, že funkce $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ostrého úhlu α mohou nabývat kterékoli kladné hodnoty menší než jedna, t. j. $0 < \sin\alpha < 1$, $0 < \cos\alpha < 1$.

146. a) Na základě výsledků cvičení 132 vyjádřete přesně hodnoty goniometrických funkcí úhlů 30°, 45°, 60° a vypočtěte jejich přibližné hodnoty na tři desetinná místa.

b) Na základě výsledků cvičení 142 si ověřte správnost vzorců (4)—(7), které platí identicky pro $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$.

147. Odhadněte velikost úhlů ve cvičení 144 užitím známých hodnot funkcí úhlů 30°, 45°, 60°.

148. Udejte pomocí hodnot funkcí úhlů 30°, 40°, 60° meze, ve kterých leží hodnoty goniometrických funkcí úhlů 20°, 40°, 50°, 70°.

149. Pro každý ostrý úhel platí a) $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$; b) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 < 1$; c) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha \geqq 2$ (kdy platí rovnost?) [ve cvičení a), b) užijte obr. 64b, ve cvičení c) užijte výsledku cvičení 138].

150. Víte, že k dané hodnotě goniometrické funkce přísluší jediný ostrý úhel. Co z toho soudíte o vzájemné velikosti ostrých úhlů ω, φ, o nichž platí: a) $\sin\omega = \cos\varphi$; b) $\operatorname{tg}(R - \omega) = \operatorname{cotg}\varphi$; c) $\operatorname{cotg}(45° - \omega) = \operatorname{tg}(45° + \varphi)$; d) $\operatorname{tg}\omega = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{5}{6}$; e) $\operatorname{cotg}\omega = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{4}\sqrt{5}$; *f*) $\sin\omega = \frac{3}{5}$; $\sin\varphi = \frac{2}{3}$; g) $\cos\omega = \frac{3\sqrt{2}}{5}$; $\cos\varphi = \frac{5\sqrt{3}}{9}$.

151. Upravte výrazy s použitím vlastností kofunkcí: a) $\sin 72° + \operatorname{tg} 75° - \cos 18° - \operatorname{cotg} 15°$; b) $\sin^2 15° + \sin^2 75°$; c) $\operatorname{tg} 56° \cdot \operatorname{cotg} 34°$; d) $\cos(30° - \alpha) + \operatorname{tg} 60° \cdot \operatorname{tg} 30° - \sin(60° + \alpha)$ (pro které α má tento výraz význam?).

152. Aniž počítáte velikost úhlu α, určete hodnoty ostatních funkcí tohoto úhlu, víte-li, že je: a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$; $\frac{3\sqrt{2}}{5}$; c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$; $\sqrt{3}$; d) $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{5}{12}$; $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

5. Tabulky goniometrických funkcí.

Hodnoty goniometrických funkcí hledáme v tabulkách. Popíšeme stručně tabulku na čtyři desetinná místa zaokrouhlených hodnot goniometrických funkcí těch ostrých úhlů, které jsou rovny celému počtu stupňů nebo jsou o 10, 20, 30, 40, 50 minut větší. Tabulka má dvě stránky. Každá strana je svislou čarou rozdělena na dvě části. Levá část první strany udává $\sin\alpha$ pro ostré úhly menší než 45°. Každý řádek odpovídá určitému počtu stupňů. V prvním řádku je udán počet minut. První řádek a řádky odpovídající 25, 26, 27, 29, 30 stupňům jsou:

Stupňů	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′
25	0,4226	4253	4279	4305	4331	4358	4384
26	4384	4410	4436	4462	4488	4514	4540
27	4540	4566	4592	4617	4643	4669	$469\bar{5}$
28	$469\bar{5}$	4720	4746	4772	4797	4823	4848
29	4848	4874	4899	4924	$49\bar{5}0$	$497\bar{5}$	$\dot{5}000$
30	0,5000	5025	5050	5075	5100	5125	5150

Podle toho na př. $\sin 27°40' \doteq 0{,}4643$. Protože $\sin\alpha$ je pro každý ostrý úhel menší než 1, máme ve všech případech před desetinnou čárkou nulu; tato nula je pro stručnost v tabulce uvedena pouze u těch úhlů, které jsou násobky 5°, na př. $\sin 25° \doteq 0{,}4226$; $\sin 30° \doteq 0{,}\dot{5}000$; tečka nad pětkou znamená, že $\sin 30° = 0{,}5$ neboli $\sin 30° = \frac{1}{2}$, ne pouze zaokrouhleně, nýbrž zcela přesně. Naproti tomu máme na př. $\sin 28° \doteq 0{,}469\bar{5}$; zde vodorovný pruh nad pětkou znamená, že zaokrouhlení je vzestupné, že skutečná hodnota je poněkud menší než 0,4695; takže na tři desetinná místa je $\sin 28° \doteq 0{,}469$. Podobně $\sin 29°40' \doteq 0{,}49\bar{5}0$; i zde je zaokrouhlení vzestupné, takže na dvě desetinná místa je $\sin 29°40' \doteq 0{,}49$. Naproti tomu v případě $\sin 30°50' \doteq$ $\doteq 0{,}5125$ nad konečnou pětkou není pruh; zaokrouhlení je zde sestupné a na tři desetinná místa jest $\sin 30°50' \doteq 0{,}513$.

Víme, že zvětšíme-li α, zvětší se také $\sin\alpha$. Dá se dokázat, že při malých zvětšeních je zvětšení čísla $\sin\alpha$ přibližně úměrné zvětšení úhlu α. Toho lze užít k tak zvané interpolaci (to je latinské slovo, které znamená vsunutí). Pomocí interpolace určíme na př. $\sin 27°12'$ takto:

Podle tabulek je $\sin 27°10' \doteq 0{,}4566$; $\sin 27°20' \doteq 0{,}4592$; na zvětšení úhlu α o 10′ připadá zvětšení čísla $\sin\alpha$ o rozdíl $0{,}4592 - 0{,}4566$ neboli o $26 \cdot 10^{-4}$, z toho připadá na zvětšení o 1′ přibližně $2{,}6 \cdot 10^{-4}$, tedy na zvětšení o 2′ přibližně $5{,}2 \cdot 10^{-4}$, zaokrouhleně $5 \cdot 10^{-4}$ neboli 0,0005. Protože 0,4566 + + 0,0005 = 0,4571, je sin 27°12′ $\doteq$ 0,4571. Podobně určíme na př. sin 27°17′. Hodnota úhlu α je zde blíže hodnotě 27°20′ než hodnotě 27°17′. Proto vyjdeme od hodnoty sin27°20′ $\doteq$ 0,4592, kterou je třeba poněkud zmenšit. Výše jsme našli, že na rozdíl 1′ úhlu α připadá rozdíl $2{,}6 \cdot 10^{-4}$ čísla sinα, tedy na rozdíl 3′ úhlu α připadá rozdíl $7{,}8 \cdot 10^{-4}$, přibližně 0,0008; protože 0,4592 — 0,0008 = = 0,4584, jest sin27°17′ $\doteq$ 0,4584. Podobně určíme na př. sin26°55′. Z tabulky čteme sin26°50′ $\doteq$ 0,4514; sin26°60′ $\doteq$ 0,4540; na rozdíl 10′ úhlu připadá rozdíl 0,4540 — 0,4514 = 0,0026 čísla sinα; na poloviční rozdíl 5′ úhlu α připadá poloviční rozdíl 0,0013 čísla sinα a jest sin 26°55′ $\doteq$ 0,4527. Pouze pro pohodlnou interpolaci je v tabulkách udána vedle hodnoty sin 26°50′ $\doteq$ $\doteq$ 0,4514 ještě hodnota sin26°60′ $\doteq$ 0,4540, která se opakuje v následujícím řádku, neboť 26°60′ = 27°.

Pravá část hodnoty první stránky tabulek udává hodnoty tgα pro ostré úhly menší než 45°. Také tyto hodnoty jsou menší než 1, neboť k úhlu $\alpha < 45°$ máme doplňkový úhel $\beta > 45°$; proti α je odvěsna a, proti β je odvěsna b; ale proti většímu úhlu leží větší strana (viz str. 139), takže $b > a$; jelikož tg α = = $a : b$, je tg$\alpha < 1$. Interpolace se děje podle týchž zásad jako u funkce sinus, a není proto třeba ji zde uvádět; pomocí interpolace určíme na př. tg 35°14′ $\doteq$ $\doteq$ 0,7063. Rovněž tak při popisu druhé stránky tabulek nebudeme už mluvit o interpolaci.

Na druhé stránce tabulek jsou v levé části hodnoty cotgα a v pravé části hodnoty cosα pro ostré úhly α menší než 45°. Hodnoty čísla cosα pro ostré úhly $\alpha < 45°$ jsou zase menší než 1; rozdíl proti předcházejícím případům je pouze v tom, že při zvětšení úhlu α číslo cosα se zmenšuje. Naproti tomu hodnoty cotgα pro úhly $\alpha < 45°$ jsou větší než 1 a před desetinnou čárkou tu už není nula. První řádek a řádky odpovídající počtu stupňů 12, 13, 14, 15 zde jsou:

Stupňů	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′
12	4,7046	6382	5736	5107	4494	3897	$331\bar{5}$
13	$331\bar{5}$	2747	2193	1653	1126	0611	0108
14	0108	*9617	*9136	*8667	*8208	*7760	*7321
15	3,7321	6891	6470	6059	5656	5261	4874

Podle toho je na př. $\cotg 13°20' \doteq 4{,}2193$; naproti tomu je na př. $\cotg 14°10' \doteq 3{,}9617$, nikoli 4,9617. Že před desetinnou čárkou nebude číslice 4 nýbrž číslice 3, je patrné z toho, že při zvětšování úhlu α číslo $\cotg \alpha$ se zmenšuje; ale pro pohodlí je tato okolnost v tabulce důkladně připomenuta hvězdičkou.

Dosud jsme mluvili pouze o úhlech menších než 45°; je-li úhel ostrý α větší než 45°, je doplňkový úhel α menší než 45° a hodnoty goniometrických funkcí úhlu β se vyjádří pomocí hodnot goniometrických funkcí úhlu α menšího než 45° na základě vzorců (7) na str. 178. Poslední řádek a poslední sloupec na obou stránkách tabulky ulehčují praktický postup.

Je vám známo, že podle tabulky druhých mocnin můžeme nejen počítat druhé mocniny, nýbrž také druhé odmocniny. Podobně podle tabulky goniometrických úhlů můžeme nejen počítat hodnoty goniometrických funkcí daného ostrého úhlu, nýbrž také počítat, čemu se rovná ostrý úhel α, je-li známa hodnota některé jeho goniometrické funkce. Při tom je třeba nejprve uvážit, zda úhel α bude menší nebo větší než 45° podle toho, že:

pro úhel $\alpha < 45°$ je

$$\sin\alpha < 0{,}7071;\quad \cos\alpha > 0{,}7071;\quad \operatorname{tg}\alpha < 1;\quad \cotg\alpha > 1,$$

pro úhel $\alpha > 45°$ je tomu naopak.

Daná hodnota goniometrické funkce obyčejně nebude přímo v tabulce, nýbrž budeme mezi dvěma hodnotami vyskytujícími se v tabulce. Vezmeme-li tu z nich, která je blíže dané hodnotě, dostaneme hodnotu úhlu α zaokrouhlenou na 10'; to často při praxi postačí. Můžeme však také určit hodnotu úhlu α zaokrouhlenou na minuty pomocí interpolace. Vysvětlíme si to na příkladě:

Určit ostrý úhel α, je-li dáno, že $\operatorname{tg}\alpha = 2$. V tabulce najdeme číslu 2 nejbližší hodnoty tangenty: $\operatorname{tg} 63°20'' \doteq 1{,}9912$, $\operatorname{tg} 63°30' \doteq 2{,}0057$. Druhá hodnota je blíže číslu 2, proto $\alpha \doteq 63°30'$, přesně na desítky minut. Rozdíl mezi oběma tabulkovými hodnotami tangenty je $145 \cdot 10^{-4}$. Z toho připadá na 1' rozdíl $14{,}5 \cdot 10^{-4}$; rozdíl mezi čísly $\operatorname{tg} 63°30' \doteq 2{,}0057$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$ je $57 \cdot 10^{-4}$; je tedy přibližně čtyřikrát větší, což odpovídá 4 minutám; je tedy α asi o 4' menší než 63°30', t. j. $\alpha \doteq 63°26'$ přesně na minuty.

Cvičení.

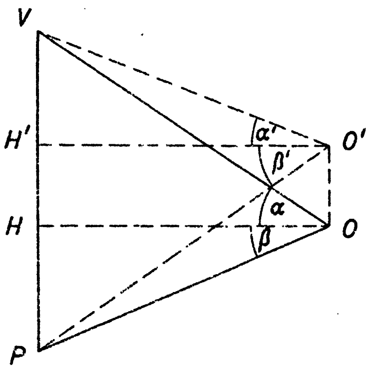
153. Určete hodnoty goniometrických funkcí úhlu: a) $\alpha = 18°36'$, b) $\beta = 73°48'$, c) $\gamma = 58{,}7°$. Správnost výsledků si alespoň zhruba ověřte užitím vzorců (4)—(7) ze str. 178).

154. Určete ostrý úhel α, je-li dáno: a) $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}6$; $1{,}7$; b) $\sin \alpha = 0{,}32$; $0{,}7999$; c) $\operatorname{cotg} \alpha = 1{,}\bar{6}$; $\frac{5}{7}$; d) $\cos \alpha = 0{,}81$; $\frac{7}{22}$.

155. K dané hodnotě funkce určete příslušný ostrý úhel α:
a) $\operatorname{tg} 2\alpha = 1{,}44$; b) $\operatorname{tg}(2\alpha + 10°) = 2{,}66$; c) $\operatorname{cotg}(49° - \alpha) = 1{,}542$; d) $\sin(3\alpha + 12°) = 0{,}7$; e) $-\sin(2\alpha\ 5°18') = 0{,}533$.
Proveďte předem odhad úhlů α na základě dané hodnoty goniometrické funkce; na př. z rovnice $\operatorname{tg}(3\alpha - 15°) = 1{,}84$ plyne $60° < 3\alpha - 15° < 90°$, $15° < \alpha < 25°$.

6. Užití goniometrických funkcí.

Goniometrických funkcí se užívá ve všech početních příkladech, v kterých se má vypočíst velikost nějaké vzdálenosti na základě velikosti nějakého úhlu nebo obráceně velikost nějakého úhlu na základě velikosti nějaké vzdálenosti. To se vyskytuje ve velmi rozmanitých úlohách důležitých v theorii i v praxi. V této třídě se omezíme na takové úlohy, v kterých se snadno najde pomocný pravoúhlý trojúhelník potřebný pro řešení úlohy.



Obr. 65.

Příklad: Z okna, které je 8 m nad zemí, vidíme vrchol věže ve výškovém úhlu 50°, patu ve hloubkovém úhlu 14°.

a) Jak vysoká je věž? b) Jak dalek je dům od věže? c) Jak by se změ hloubkový a výškový úhel, kdyby byl okno 20 m nad zemí?

Řešení: (obr. 65). Označíme: okno, V vrchol věže, P patu věže, H t místo věže, které je v té výši jak okno, takže $\overline{HP} = 8$ m. Dále označím $\alpha = 50°$, $\beta = 14°$ oba naměřené úhly, a předpokládejme, že byly změřen přesně na stupně. Dále předpokládejme, že výška 8 m okna (lépe toho mís v okně, z kterého byly měřeny úhly α, β), byla určena přesně na decimetry V pravoúhlém $\triangle\, HPO$ známe odvěsnu $\overline{HP} = 8$ (volíme 1 m za jednotk délky) a protější úhel β. K řešení úlohy b) máme najít druhou odvěsnu $\overline{HO}$ Jest

$$\frac{\overline{HO}}{\overline{HP}} = \operatorname{cotg}\beta, \quad \overline{HO} = 8 \cdot \operatorname{cotg}\beta.$$

Z tabulek najdeme $\operatorname{cotg}\beta \doteq 4{,}0108$, tedy $\overline{HO} \doteq 32{,}0864$. Protože však úhel byl změřen přesně na stupně, víme o jeho velikosti vlastně pouze tolik, že

$$\beta > 13°30', \qquad \beta < 14°30',$$

a proto o čísle cotg β víme vlastně pouze tolik, že

$$\operatorname{cotg}\beta < 4{,}1653, \quad \operatorname{cotg}\beta > 3{,}8667,$$

a mimo to v rovnici $\overline{HO} = 8 . \operatorname{cotg}\beta$ prvý činitel nemusí ve skutečnosti býti přesně rovný 8, nýbrž víme o něm vlastně pouze tolik, že je:

$$\text{větší než } 8 - \tfrac{1}{20}\,; \quad \text{menší než } 8 + \tfrac{1}{20}.$$

Proto o čísle $\overline{HO}$ víme pouze tolik, že je:

větší než $(8 - \frac{1}{20}) \cdot 3{,}8667$; menší než $(8 + \frac{1}{20}) \cdot 4{,}1653$, neboli že je zaokrouhleně:

$$\text{větší než } 30{,}74, \quad \text{menší než } 33{,}53.$$

Proto nesmíme vypočtenou hodnotu $\overline{HO} \doteq 32{,}0864$ bráti příliš přesně a položíme $\overline{HO} \doteq 32$. Odpověď na otázku b) tedy bude: Vzdálenost od domu k věži je 32 m. Odpověď na otázku a) vyžaduje výpočet délky $\overline{VH}$. V pravoúhlém $\triangle\, VHO$ známe odvěsnu $\overline{HO} \doteq 32$ a přilehlý úhel β. Je tedy

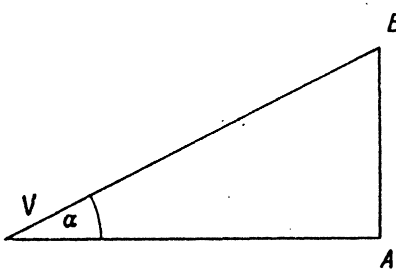
$$\frac{\overline{VH}}{\overline{HO}} = \operatorname{tg}\alpha; \qquad \overline{VH} = 32 \cdot \operatorname{tg}\alpha,$$

při čemž nemá smyslu počítat $\overline{VH}$ přesněji než na metry. Z tabulek najdeme $\operatorname{tg}\alpha \doteq 1{,}1918$, tedy $\overline{VH} \doteq 38$. Ježto $38 + 8 = 46$, odpověď na otázku a) bude: Výška věže je 46 m. Zvýší-li se výška okna z 8 m na 20 m, budeme mít místo bodů H, O body H', O', při čemž $\overline{OO'} = \overline{HH'} = 12$, tedy $\overline{H'P} \doteq 20$, $\overline{H'V} \doteq 26$. V pravoúhlých $\triangle\, H'PO'$, $\triangle\, H'VO'$ známe odvěsny $\overline{H'P}$, $\overline{H'V}$, jakož i společnou odvěsnu $\overline{H'O'} = \overline{HO}$, tedy $\overline{H'O'} = 32$ (obě délky $\overline{HO}$, $\overline{H'O'}$ jsou si rovny, protože obě znamenají vzdálenost rovnoběžek HH', OO'). Tedy

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{\overline{H'V}}{\overline{H'O'}} \doteq \frac{26}{32}, \quad \operatorname{tg}\beta' = \frac{\overline{H'P}}{\overline{H'O'}} = \frac{20}{32}$$

a velikost úhlů α', β' najdeme z tabulek. Nemá smyslu udávat vypočtené úhly α', β' přesněji než přímo měřené úhly α, β. Proto nebudeme určovat úhly α', β' přesněji na stupně. Odpověď na otázku c) tedy je: Zvětší-li se výška okna na 20 m, bude vidět vrchol věže pod výškovým úhlem $\alpha' \doteq 39°$, patu věže pod hloubkovým úhlem $\beta' \doteq 32°$.

Jak bylo již řečeno, budeme podobné úlohy soustavně probírat až v třetí třídě. Již nyní však bude užitečná jedna poznámka týkající se rýsování úhlů dané velikosti. Takové rýsování jsme prováděli dosud pomocí úhloměru. Mnohem přesněji narýsujeme úhel předepsané velikosti pomocí tabulky funkce tangens. Máme-li na př. narýsovat úhel $\alpha = 27°$, najdeme z tabulky, že tg $27° \doteq 0{,}5095$. Je-li polopřímka VA jedním ramenem hledaného úhlu α, zvolíme (obr. 66) bod A na př. tak, že $\overline{VA} = 5$ cm. Na kolmici vztyčené k přímce VA v bodě A určíme nyní bod B tak, aby bylo $\alpha = \sphericalangle AVB$. K tomu cíli je třeba, aby bylo $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\overline{BV}}{\overline{VA}}$, tedy $\overline{BA} \doteq 5.\operatorname{tg}\alpha$ v centimetrech, neboli $\overline{BA} \doteq 2{,}5475$ cm. Tuto délku naneseme pomocí měřítka co nejpřesněji; tím určíme polohu bodu B a dostaneme $\alpha = \sphericalangle BVA$ daleko přesněji než pomocí úhloměru. Volili jsme $\overline{VA} \doteq 5$ cm, což ovšem není podstatné; ale příliš malá volba úsečky VA by vedla k nepřesné konstrukci a příliš velká volba by vedla k tomu, že by bod B vypadl z mezí nákresny. Při velkém úhlu α volíme $\overline{VA}$ podstatně menší než 5 cm; na př. pro $\alpha = 80°$ volíme třeba $\overline{VA} = 1$ cm; ježto podle tabulek je $\operatorname{tg}\alpha \doteq 5{,}6713$, bude $\overline{AB} \doteq 5{,}6713$ cm. Máme-li narýsovat tupý úhel, narýsujeme nejprve ostrý úhel k němu vedlejší.



Obr. 66.

Cvičení.

156. V $\triangle ABC$ je $\sphericalangle C = R$. Určete zbývající strany a úhly, je-li dáno:
a) $a = 48$ cm, $c = 60$ cm; b) $a = 15$ m, $b = 20$ m; c) $c = 2{,}7$ m, $\alpha = 53°17'$; d) $a = 6{,}1$ dm, $\beta = 39°45'$; e) $b = 7{,}6$, $\beta = 73°26'$.

157. V kvádru o rozměrech $a = 6{,}5$ cm, $b = 3{,}7$ cm, $c = 12{,}6$ cm určete: a) velikost všech stěnových úhlopříček a úhlopříčky tělesové; b) úhly, které tvoří tělesová úhlopříčka se stěnovými úhlopříčkami, které s ní mají společný krajní bod; c) úhly, které tvoří jedna tělesová úhlopříčka se třemi zbývajícími tělesovými úhlopříčkami; d) obsah obdélníka, v němž povrch kvádru protíná rovina ϱ položená hranou a, jestliže její úhel s podstavnou rovinou o hranách a, b je $\omega = 36\frac{1}{2}°$.

158. Určete poloviční obvod pravidelného n-úhelníka, který je kružnicí (S; $r = 1$) a) opsán, b) vepsán. Číselné výpočty proveďte pro $n = 6$; 12; 24; 48; seřaďte výsledky podle velikosti a vyslovte výsledek svého pozorování.

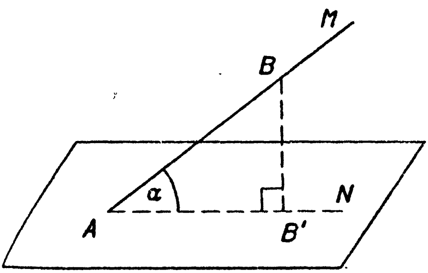
159. Pozorovací balon B se vznáší nad vodorovnou krajinou právě nad místem P. Balon je ozářen paprsky světlometu S, které s vodorovnou (horizontální) rovinou tvoří výškový úhel $\sigma = \sphericalangle PSB = 47°$. Horizontální vzdálenost ($= \overline{SP}$) světlometu a balonu je 3,5 km. Určete výšku balonu nad krajinou a jeho vzdálenost od světlometu. (Výškový úhel σ balonu B v pozorovacím místě S má jedno rameno SB a druhé rameno SP je vždy vodorovné a leží ve svislé (vertikální) rovině položené ramenem SB.)

160. Pod kterým hloubkovým úhlem (jedno jeho rameno je vždy vodorovné) je vidět s vrcholu věže 60 m vysoké předmět, ležící na zemi v horizontální rovině paty věže, je-li od věže vzdálen 96 m?

161. S vrcholu pahorku, který je 75 m nad vodní hladinou, je vidět přesně za sebou dvě loďky. Hloubkový úhel jedné je $\alpha = 64°$, hloubkový úhel druhé je $\beta = 48°$. Určete vzdálenost obou loděk.

162. Letadlo letí k východu ve výši 800 m. Pozorovatel v letadle vidí plynojem směrem k jihu pod hloubkovým úhlem 29°; o 15 vteřin později vidí týž plynojem směrem k jihozápadu. Určete rychlost letadla.

163. Na krajích letiště jsou signalisační stožáry A, B; A je 800 m západně od B. Letadlo letí přímo v kursu J 30° Z (t. j. směrem, který je mezi jihem a západem a tvoří 30° se směrem jižním). Pozorovatel v letadle vidí stožár B ve směru J 10° Z, stožár A ve směru J 40° Z. Jak bude daleko letadlo od A a od B, až se dostane mezi oba stožáry.



Obr. 67.

164. Stoupání a klesání železniční trati nebo silnice se udává v promilích nebo procentech; stoupne-li trať AB (viz obr. 67) na 1 km o 12 m, je stoupání $12^0/_{00}$. Jaké je stoupání trati AB znázorněné v obr. 67, je-li ve skutečnosti $\overline{AB} = t$ metrů a $\overline{BB'} = v$ metrů; o kterou funkci úhlu $\alpha = \sphericalangle BAB'$ vlastně jde?

165. Spádem přímky AB (obr. 67) rozumíme poměr $\dfrac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}}$, jehož číselná hodnota se zpravidla udává ve tvaru $\dfrac{1}{n}$, na př. 1 : 25. O kterou funkci úhlu $\alpha = \sphericalangle BAB'$ tu jde? Seřaďte podle velikosti úhly $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, k nimž přísluší spády 1 : 1; 1 : 0,9; 1 : 1,5.

166. Ve strojnictví se užívá názvu **úkos klínu** ABB' (obr. 67); je to opět poměr $\dfrac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}}$. Narýsujte průřez klínu ABB', je-li $\overline{AB'} = 85$ m a úkos je 1 : 2,5.

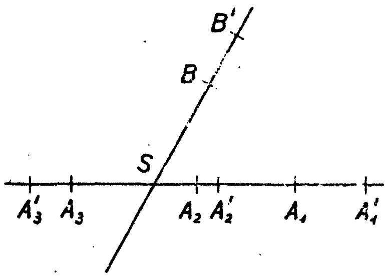
167. Pomocí hodnoty $\operatorname{tg} \alpha$ narýsujte ostrý úhel α, je-li:

a) $\alpha = 45°$; b) $\alpha = 4°37'$; c) $\alpha = 76°34'$.

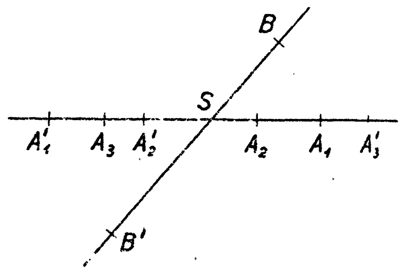
168. Narýsujte libovolný úhel $\alpha = \sphericalangle BAB'$ (viz obr. 67) a určete jeho tangentu a pomocí tabulek udejte jeho velikost v míře a) stupňové, b) obloukové. (Na AN zvolte B' a vztyčte kolmici $BB' \perp AN$; jestliže je $\overline{AB'} = 1$ dm, pak číselná hodnota velikosti $\overline{BB'}$ v dm je $\operatorname{tg}\alpha$; z tabulek určíte α.)

7. *Stejnolehlost.*

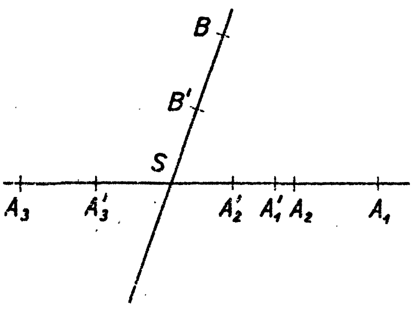
Dosud jsme probírali pouze podobnost trojúhelníků. Nyní si probereme jeden důležitý případ podobnosti libovolných útvarů; je to t. zv. **stejnolehlost.** Zvolme libovolný bod S a libovolné číslo k, kladné nebo záporné, ale různé od nuly; bod S nazveme **středem stejnolehlosti,** číslo k **koeficientem stejnolehlosti.**



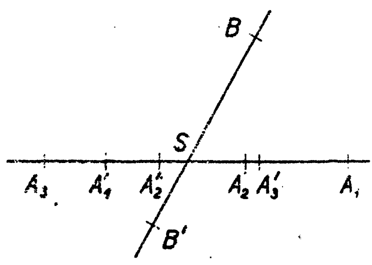
Obr. 68 a).



Obr. 68 b).



Obr. 68 c).



Obr. 68 d).

Nyní přiřadíme každému bodu roviny určitý bod jako obraz takto: Bod S je samodružný, t. j. splyne se svým obrazem. Je-li A bod různý od S, pak jeho obraz A' leží na přímce SA ve vzdálenosti

$$\overline{SA'} = |k| \cdot \overline{SA}$$

d bodu S, a to při kladném k na polopřímce SA, při záporném k na polo-
římce opačné k SA. Viz obr. 68a ($k = \frac{3}{2}$), obr. 68b ($k = -\frac{3}{2}$), obr. 68 ($k = \frac{1}{2}$),
br. 68d ($k = -\frac{1}{2}$); v každém případě jsou v obrazci vyznačeny obrazy dvou
odů A_1, A_2 na stejné polopřímce s počátkem S, bodu A_3 na opačné polo-
římce a bodu B ležícího mimo přímku SA_1.

Pro $k = 1$ stejnolehlost je totožnost; pro $k = -1$ stejnolehlost je středová
ouměrnost, tedy shodnost. Je-li $k \neq 1$, $k \neq -1$, stejnolehlost není shodnost,
le jak uvidíme, je to podobnost.

Je-li A' obraz bodu A při stejnolehlosti (S, k), t. j. při stejnolehlosti
e středem S a koeficientem k, nazveme A vzorem bodu A' při téže stejno-
ehlosti. Bod A je potom obrazem bodu A' při stejnolehlosti $\left(S, \frac{1}{k}\right)$, která
má týž střed, ale obecně jiný koeficient. Dvě stejnolehlosti (S, k_1), (S, k_2)
týmž středem můžeme složit, t. j. k libovolnému bodu A můžeme určit
ejprve jeho obraz A^* při stejnolehlosti (S, k_1) a potom obraz A' bodu A
ři stejnolehlosti (S, k_2). Lehko uvážíme, že bod A' je obrazem bodu A při
tejnolehlosti (S, k_1k_2) s týmž středem S, jejíž koeficient je součin původních
oeficientů. Zejména stejnolehlost $(S, -k)$ dostaneme složením stejno-
ehlosti (S, k) se středovou souměrností, jejíž vlastnosti jsou nám známy.
Můžeme se proto při důkaze vlastností stejnolehlosti omezit na případ kladného
; dokonce se můžeme omezit na případ $k > 1$, neboť případ $k = 1$ je totožnost
případ kladného $k < 1$ přejde ve případ $k > 1$ výměnou vzoru s obrazem.

Jsou-li A', B' obrazy dvou bodů A, B při stejnolehlosti (S, k), jest

$$\overline{A'B'} = |k| \cdot \overline{AB}. \tag{1}$$

Důkaz. To je zřejmé, jestliže A nebo B splyne s bodem S. Jestliže
plynou polopřímky SA, SB a jestliže na př. $\overline{SA} > \overline{SB}$, jest

$$\overline{AB} = \overline{SA} - \overline{SB}, \qquad \overline{A'B'} = \overline{SA'} - \overline{SB'},$$
$$\overline{SA'} = |k| \cdot \overline{SA}, \qquad \overline{SB'} = |k| \cdot \overline{SB'}.$$

toho plyne (1). Jsou-li SA, SB dvě opačné polopřímky, jest

$$\overline{AB} = \overline{SA} + \overline{SB}, \qquad \overline{A'B'} = \overline{SA'} + \overline{SB'},$$
$$\overline{SA'} = |k| \cdot \overline{SA}, \qquad \overline{SB'} = |k| \cdot \overline{SB'}$$

z toho plyne (1). Jestliže posléze body S, A, B neleží v jedné přímce, jest

$$\triangle SAB \sim \triangle SA'B' \tag{2}$$

podle věty II na str. 171, neboť jest

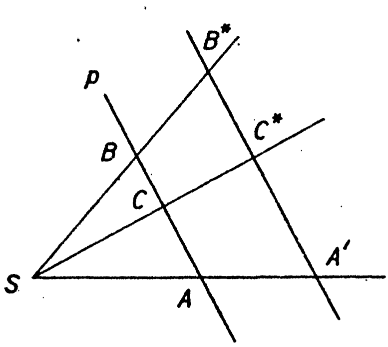
$$\overline{SA'} = |k| \cdot \overline{SA}, \qquad \overline{SB'} = |k| \cdot \overline{SB} \tag{3}$$

a mimo to $\sphericalangle ASB = \sphericalangle A'SB'$ (oba úhly splynou při kladném k a jso[u] vrcholové při záporném k); ze (2) a (3) plyne (1).

Obraz p' přímky p při stejnolehlosti (S, k) je přímka rovnoběžn[á] s přímkou p; rovnoběžnost je souhlasná pro kladné k, nesouhlasn[á] pro záporné k.

Důkaz: V případě $k = -1$ středové souměrnosti je nám to znám[o] (str. 156). Ježto stejnolehlost (S, $-k$) vznikne složením stejnolehlosti (S, k) se středovou souměrnost (S, -1), stačí provésti důkaz pro kladné k. Budem[e] dokonce předpokládati $k > 1$ (jinak stačí vyměnit vzory a obrazy).

Budiž tedy $k > 1$ a buďtež A, B, C tři body na přímce p; máme dokázat, že jejich obrazy A', B', C' leží na přímce souhlasně rovnoběžné s p. To v[šak] je zřejmé, jestliže přímka p prochá[zí] bodem S. Jestliže přímka p neprochá[zí] bodem S a jestliže z bodů A, B, C n[a]př. bod C leží mezi ostatními dvěm[a] (obr. 69), postupujeme takto: Budi[ž] A' obraz bodu A; ježto $k > 1$, le[ží] bod A uvnitř úsečky SA'; rovnoběžk[a] s přímkou AB vedená bodem A prot[ne] přímku SB v bodě B^* a přímku $S[C]$ v bodě C^*. Snadno zjistíme, že body S, A' jsou od sebe odděleny přímkou p, kdežto body A', B^*, C^* nejsou od seb[e] odděleny přímkou p; z toho plyne, že body S, B^* jsou od sebe odděleny přímkou p a že totéž platí o bodech S, C^*. To znamená, že bod B leží uvnit[ř] úsečky SB^* a podobně bod C uvnitř úsečky SC^*. Úsečky AA', BB^* se ne[protnou], takže $AB \parallel A'B^*$ (souhlasná rovnoběžnost!); mimo to leží bod A uvnitř strany SA', bod B uvnitř strany SB^* trojúhelníka $SA'B^*$. Podle důsledk[u] na str. 170 je tedy



Obr. 69.

$$\triangle SAB \sim \triangle SA'B^*$$

a ježto $\overline{SA'} = k \cdot \overline{SA}$, musí býti také $\overline{SB^*} = k \cdot \overline{SB}$. Z toho plyne, že B^* splyne s obrazem B' bodu B při naší stejnolehlosti a stejně se zjistí, že bod C^*

splyne s obrazem C' bodu C. Tedy body A', B', C' leží na přímce a jest $AB \parallel A'B'$, čímž je vše dokázáno.

Obraz $\sphericalangle A'B'C'$ úhlu $\sphericalangle ABC$ při stejnolehlosti je úhel jemu rovný. Neboť podle předcházejícího jsou ramena obou úhlů souhlasně rovnoběžná pro $k > 0$, nesouhlasně rovnoběžná pro $k < 0$, takže oba úhly si jsou rovny podle vět na str. 157.

Právě jsme dokázali, že velikost úhlů se při stejnolehlosti nemění. Na str. 189 jsme dokázali, že při stejnolehlosti si odpovídající úsečky jsou úměrné. Tedy **stejnolehlost je podobnost; je-li k koeficient stejnolehlosti, je kladné číslo $|k|$ koeficientem podobnosti.**

Cvičení.

169. K danému (dosti velikému) čtyrúhelníku $ABCD$ sestrojte stejnolehlé čtyrúhelníky $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ pro koeficienty stejnolehlosti $k_1 = \frac{3}{5}$, $k_2 = -\frac{3}{5}$. Střed stejnolehlosti S zvolte: a) uvnitř čtyrúhelníka, b) vně čtyrúhelníka, c) uvnitř strany AB, d) ve vrcholu C daného čtyrúhelníka.
V jakém vztahu jsou čtyrúhelníky $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$?

170. Narýsujte přímku $ABCDE$ tak, aby bylo $\overline{AB} = 3$; $\overline{BC} = 3{,}6$; $\overline{CD} = 4{,}2$; $\overline{DE} = 1{,}2$ a přímku $A'B'C'D'E'$ s ní rovnoběžnou ve vzdálenosti 5,5 tak, aby bylo $\overline{A'B'} = 2{,}5$; $\overline{B'C'} = 3$; $\overline{C'D'} = 3{,}5$; $\overline{D'E'} = 1$. Dokažte, že body A', B', C', D', E' jsou obrazy bodů A, B, C, D, E v určité stejnolehlosti (S, k). Vyšetřte vzdálenost středu S od obou daných přímek. (Jsou dvě možnosti: $AB \parallel A'B'$; $AB \parallel B'A'$.)

171. a) Je-li $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ a $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, pak je také $CA \parallel C'A'$. Oba trojúhelníky jsou buď stejnolehlé, nebo jsou-li shodné, vznikne jeden z druhého posunutím.
b) Jestliže je $AB \parallel B'A'$, $BC \parallel C'B'$, je také $CA \parallel A'C'$. Trojúhelníky jsou pak stejnolehlé; v případě, že jsou shodné, jsou středově souměrné. Dokažte.

172. $\triangle A_2B_2C_2$ vznikl z $\triangle A_1B_1C_1$ stejnolehlostí (S, k), $\triangle A_3B_3C_3$ vznikl z $\triangle A_1B_1C_1$ stejnolehlostí (S, k'). V jakém vztahu jsou trojúhelníky $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, a v kterém poměru jsou jejich příslušné strany?

173. Obrazem trojúhelníka $A_1B_1C_1$ při stejnolehlosti (S_{12}, k) je $\triangle A_2B_2C_2$, kdežto při stejnolehlosti (S_{13}, k') je to $\triangle A_3B_3C_3$; body S_{12}, S_{13} jsou od sebe různé. Oba trojúhelníky $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ jsou buď stejnolehlé v stejnolehlosti $\left(S_{23}, \frac{k'}{k}\right)$, přičemž střed S_{23} leží na přímce $S_{12}S_{13}$, nebo se dají ztotožnit posunutím. Dokažte. (Užijte výsledku cvičení 171. Pro $k = k'$ jsou přímky $S_{12}S_{23}$, A_2A_3 rovnoběžné. Pro $k \neq k'$ hledejte obrazy X_1, X_3 bodu $X_2 \equiv S_{12}$.)

174. Je-li $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ a jsou-li téhož smyslu, lze určit stejnolehlost a otočení nebo posunutí tak, že jeden přejde v druhý.

175. Každým vrcholem trojúhelníka ABC veďte rovnoběžku k protější straně; tím vznikne $\triangle A'B'C'$. Dokažte:

a) Oba trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ jsou stejnolehlé; středem stejnolehlosti o koeficientu -2 je jejich společné těžiště T, které je průsečíkem těžnic AA', BB', CC' trojúhelníka ABC.

b) Střed S' kružnice opsané trojúhelníku $A'B'C'$ je zároveň průsečíkem V výšek trojúhelníka ABC.

c) Střed S kružnice opsané trojúhelníku ABC leží na přímce TV (t. zv. Eulerova přímka*) tak, že dělící poměr $(SVT) = -\frac{1}{2}$.

d) Střed S kružnice $\triangle A'B'C'$ opsané leží (1) uvnitř, (2) na jedné straně, (3) vně trojúhelníka $A'B'C'$ podle toho, zda je to trojúhelník (1) ostroúhlý, (2) pravoúhlý, (3) tupoúhlý. (K důkazu užijte průsečíku V výšek v $\triangle ABC$.)

176. Jsou dány dvě různoběžky MSM', NSN' a mimo ně bod A. Bodem A veďte přímku, která protne první přímku v bodě U, druhou v bodě V, a to tak, že $\dfrac{\overline{SU}}{\overline{SV}} = \dfrac{2}{3}$. Kolik má úloha řešení?

177. Dvě různoběžky a, b se protínají v bodě S, který leží mimo nákresnu. Daný bod H spojte s bodem S. [Na přímce a zvolte dva různé body A, A' (jiné než S), na přímce b bod B; sestrojte $\triangle A'B'H'$ stejnolehlý k $\triangle ABH$ vzhledem ke středu S stejnolehlosti.]

178. Co vyplňují všechny body, jejichž vzdálenosti od dvou různoběžek a, b jsou v daném poměru $\dfrac{m}{n}$?

179. Pomocí stejnolehlosti sestrojte $\triangle ABC$, je-li dáno:

a) výška $v_3 = 4$; $a : b : c = 4 : 5 : 7$;

b) poloměr vepsané kružnice $\varrho = 1{,}5$; $\alpha = \frac{1}{3}\pi$; $\beta = \frac{5}{12}\pi$.

180. Mějme dva geometrické útvary (na př. mnohoúhelníky) a přemístěme je tak, že každý z nich je v nové poloze shodný s příslušným útvarem původním; podaří-li se provést toto přemístění tak, že oba útvary se v nové poloze stanou stejnolehlými vzhledem k určitému středu S, potom říkáme, že původní útvary jsou navzájem podobné. Dokažte:

a) Příslušné úhly dvou podobných útvarů jsou si rovny.

b) Příslušné úsečky dvou podobných útvarů jsou ve stálém poměru.

181. Dokažte:

a) Každé dva čtverce jsou podobné.

b) Každé dva pravidelné n-úhelníky jsou podobné.

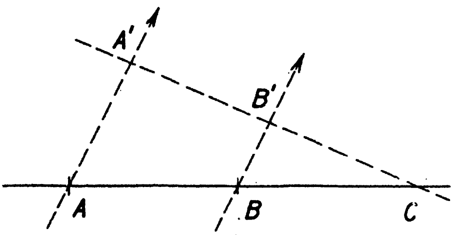
c) Dva kosočtverce jsou podobné, shodují-li se v jednom úhlu.

---

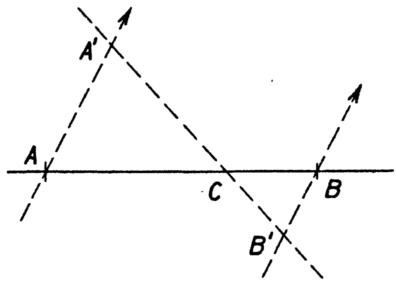
*) Slavný matematik Leonhard Euler (1707—1783), původem švýcarský Němec, byl profesorem tehdy právě založené Akademie věd v Petrohradě, kde také zemřel.

d) Dva rovnoběžníky jsou podobné, shodují-li se v poměru úhlopříček a v úhlu obou úhlopříček nebo v poměru dvou stran, které vycházejí z téhož vrcholu a v jednom úhlu.

182. Úlohu určit bod C na přímce AB tak, aby platilo $(ABC) = \frac{m}{n}$, kde $m \neq 0$, $n > 0$ jsou daná celá čísla, řešte graficky. Dokažte správnost konstrukce bodu C provedenou a) v obr. 70 pro $m > 0$ a b) v obr. 71 pro $m < 0$, kde je $\overline{AA'} = |m|$, $\overline{BB'} = n$ a přímky AA', BB' jsou spolu rovnoběžné. (Uvažujte stejnolehlé trojúhelníky $AA'C$, $BB'C$.)



Obr. 70.



Obr. 71.

183. Určete bod C tak, aby platilo (viz cvič. 182):

a) $(ABC) = 3{,}5$; b) $(ABC) = \frac{3}{4}$; c) $(ABC) = -\frac{2}{3}$;
d) $(ABC) = -\frac{3}{4}$; e) $(ABC) = -1$; f) $(ABC) = -\frac{1}{3}$.

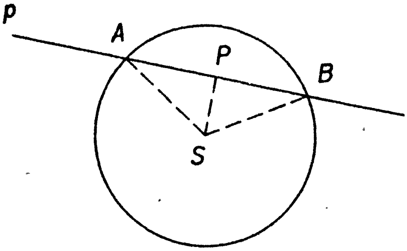
V. KRUŽNICE.

1. Opakování o kružnici.

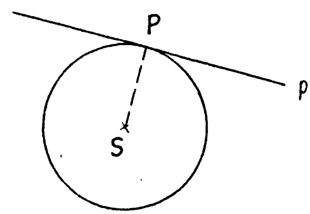
V předcházejících oddílech jsme soustavně zopakovali část geometrických poznatků získaných na střední škole a na ně jsme navázali řadu poznatků nových. Opakování jsme prováděli z toho hlediska, aby ze uplatnila co nejvíc souvislost s novými poznatky tvořícími vlastní program této třídy a aby byla co nejlépe připravena látka určená pro třídy vyšší. Proto různé pojmy známé ze střední školy nenalezly v tomto opakování dosud místa. Některé z těchto pojmů, zejména pojem obsahu a objemu, budou zopakovány v následující třídě. V této třídě se obrátíme nyní k podrobnějšímu studiu jednoho důležitého pojmu, který dosud zůstal stranou, totiž pojmu **kružnice.** Jak víte, kružnice je určena bodem S zvaným **střed kružnice** a délkou r zvanou **poloměr kružnice.** Kružnice se skládá z těch bodů X, pro které úsečka SX má velikost r;

slovem poloměr se často značí také každá z těchto úseček SX. Ty body X, pro něž je $\overline{SK} < r$, leží **uvnitř** kružnice; ty body X, pro něž je $\overline{SX} > r$, leží **vně** kružnice. Kružnici se středem S a poloměrem r může krátce označit kružnice (S, r).

Poloha přímky p vzhledem ke kružnici (S, r) závisí na vzdálenosti v přímky p od středu S. Jestliže p prochází středem S, je zřejmé, že p protne kružnici ve dvou bodech A, B tak, že S je střed úsečky AB; taková úsečka se jmenuje **průměr** kružnice a body A, B se jmenují **protější body** kružnice;



Obr. 72.



Obr. 73.

všecky průměry mají touž velikost $2r$. Vnitřek úsečky AB je částí vnitřku kružnice; naproti tomu ty body přímky p, které nenáležejí do úsečky AB, leží vně kružnice.

Podobně je tomu pro každou přímku p, jejíž vzdálenost v od bodu S je menší než r, i když p neprochází středem (obr. 72). Je-li P pata kolmice spuštěné se středu S na přímku p, je $\overline{SP} = v$, takže P leží uvnitř kružnice. Je-li X kterýkoli jiný bod přímky p, máme $\triangle\, SPX$ s pravým úhlem při P a podle Pythagorovy věty je

$$\overline{SX}^2 = v^2 + \overline{PX}^2;$$

podmínka, aby X ležel na kružnici, je $\overline{SX} = r$ neboli $\overline{PX} = \sqrt{r^2 - v^2}$. Jsou dva takové body X, v obr. 72 označené A, B; bod P je střed úsečky AB. Jestliže se bod X vzdaluje od bodu P po některé z obou polopřímek PA, PB, víme (viz str. 143), že vzdálenost $\overline{SX}$ se stále zvětšuje; proto body uvnitř úsečky AB leží uvnitř kružnice a body přímky p mimo úsečku AB leží vně kružnice.

Přejděme k takové přímce p, jejíž vzdálenost od S je rovna r (obr. 73). Je-li opět P pata kolmice spuštěné s bodu S na přímku p, je tentokrát $\overline{SP} = r$ a bod P leží na kružnici; pro každý jiný bod X přímky p je však $\overline{SX} > \overline{SP}$,

t. j. $\overline{SX} > r$, a X leží vně kružnice. Taková přímka se jmenuje **tečna kružnice** (S, r) v bodě P této kružnice. Zřejmě v každém bodě P kružnice (S, r) máme právě jednu tečnu; je to kolmice k poloměru SP vedená bodem P. Bod P se jmenuje **bod dotyku** tečny p.

Jestliže posléze vzdálenost přímky p od bodu S je větší než r, je také vzdálenost kteréhokoli bodu přímky od bodu S větší než r a celá přímka p leží vně kružnice.

Celkem tedy vzhledem ke kružnici (S, r) máme v rovině troje přímky: předně přímky, které leží celé vně kružnice, t. zv. **nesečny**, jejichž vzdálenost od S je větší než r; za druhé tečny, které mají na kružnici jediný bod (bod dotyku) a jinak jsou vně kružnice, majíce od S vzdálenost rovnou r; posléze máme **sečny** vzdálené od S o méně než r, při čemž sečna může také procházeti středem S. Každá sečna p protne kružnici ve dvou bodech A, B; úsečka AB se jmenuje **tětiva**; vnitřek tětivy leží uvnitř kružnice, kdežto ty body sečny, které neleží na tětivě, leží vně kružnice. Jestliže sečna prochází bodem S, prochází jím i tětiva; tětiva je pak průměr a její velikost je $2r$. Jestliže však sečna p neprochází bodem S, je ten bod P středem tětivy, pro který SP stojí kolmo na p; velikost tětivy je menší než $2r$, neboť v obr. 72 tětiva AB je jednou stranou $\triangle ABS$, je tedy menší než součet $2r$ ostatních dvou stran.

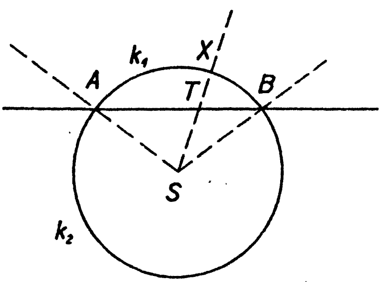
Z předcházejícího plyne řada důsledků. Leží-li bod H uvnitř a bod K vně kružnice, potom úsečka HK protne kružnici v jediném bodě C, který rozdělí úsečku HK na dvě úsečky, z nichž leží jedna (až na bod C) uvnitř kružnice a druhá vně. Leží-li však oba různé body H, K uvnitř kružnice, leží celá úsečka HK uvnitř kružnice; tedy vnitřek kružnice je konvexní útvar. Stejně je konvexním útvarem také **kruh,** t. j. plocha, která vznikne z kružnice připojením jejího vnitřku.

Je-li p nesečna kružnice a jsou-li H, K libovolné dva body kruhu, je celá úsečka HK částí kruhu a tedy neobsahuje žádný bod vně kružnice, zejména žádný bod nesečny p. To znamená, že body H, K nejsou od sebe odděleny přímkou p. Tedy je-li p nesečna kružnice, leží celá kružnice i se svým vnitřkem uvnitř jediné poloroviny vyťaté přímkou p. Je-li p tečna kružnice, platí týž výsledek s tím jediným rozdílem, že bod dotyku neleží uvnitř poloroviny, nýbrž na její hranici, totiž na přímce p.

Je-li však p sečna kružnice (S, r), která protne kružnici ve dvou bodech A, B, potom přímka p rozdělí kružnici na dvě části, z nichž leží každá v jedné polorovině vyťaté přímkou p. Tyto dvě části se jmenují **oblouky** kružnice;

body A, B jsou společné **krajní body** obou oblouků; každý jiný bod kružnice náleží do jediného z obou oblouků a je jeho **vnitřním bodem.** Někdy značíme $\widehat{AB}$ kterýkoli z obou oblouků a chceme-li vyznačiti určitý z nich, můžeme psáti ACB, kde C znamená některý vnitřní bod oblouku. Jestliže sečna p prochází středem S, pak oba oblouky se jmenují **polokružnice**; jejich krajní body A, B jsou dva protější body kružnice. Jsou-li H, K jiné dva protější body, leží H uvnitř jedné a K uvnitř druhé z polokružnic $\widehat{AB}$.

Jestliže sečna p neprochází středem S (obr. 74), označme k_2 ten z obou oblouků AB, který leží v polorovině pS, kdežto oblouk k_1 leží v polorovině opačné. Leží-li bod X uvnitř oblouku k_1, jsou body S, X od sebe odděleny přímkou p a proto úsečka SX protne přímku p v bodě T. Při tom jest $\overline{ST} < \overline{SX}$ neboli $\overline{ST} < r$, t. j. bod T leží uvnitř kružnice, a protože leží zároveň na přímce p, leží T uvnitř úsečky AB a proto celá polopřímka SX i s bodem X leží uvnitř dutého $\sphericalangle ASB$. Obráceně dokážeme, že je-li X takový bod naší kružnice, který leží uvnitř $\sphericalangle ASB$, potom X leží uvnitř oblouku k_1. Neboť jestliže X leží uvnitř $\sphericalangle ASB$, pak polopřímka SX protne úsečku AB v bodě T. Protože T leží uvnitř tětivy AB, leží T uvnitř kružnice, t. j. $\overline{ST} < r$ neboli $\overline{ST} < \overline{SX}$. Protože však T leží na polopřímce SX, musí ležet uvnitř úsečky SX. Tedy úsečka SX protne přímku p v bodě T, body S, X jsou od sebe odděleny přímkou p, bod X leží uvnitř oblouku k_1. Dokázané můžeme shrnouti takto: Je-li AB tětiva neprocházející středem, potom jeden z obou oblouků AB (k_1 v obr. 74) je ta část kružnice, která leží v dutém $\sphericalangle ASB$; druhý oblouk k_2 leží ve vypuklém úhlu s týmiž rameny SA, SB. Ze dvou protějších bodů H, K naší kružnice může nejvýš jeden náležet do oblouku k_1, protože dutý $\sphericalangle ASB$ nemůže obsahovat obě opačné polopřímky SH, SK. Oblouk k_1 nazveme **menší oblouk** $\widehat{AB}$; k_2 je **větší oblouk** $\widehat{AB}$.



Obr. 74.

Z předchozího plyne: Je-li k oblouk kružnice (S, r) s krajními body A, B, pak všecky polopřímky SX s počátkem ve středu S, které procházejí jednotlivými body oblouku k, tvoří úhel s rameny SA, SB, který se nazývá **středový úhel nad obloukem** k. Jsou-li A, B protější body kružnice, je k polokružnice a středový úhel je přímý. Nejsou-li A, B protější body kružnice, je středový úhel dutý, v tom případě, že k je menší oblouk AB, a středový úhel je vypuklý, v tom případě, že k je větší oblouk $\widehat{AB}$. Jestliže body A, B nejsou protější body kružnice k, říkáme, že tětiva AB přísluší dutému úhlu $\sphericalangle ASB$ a tím i menšímu oblouku $\widehat{AB}$.

Cvičení.

184. Co víte o ose tětivy kružnice?

185. Průměr je největší tětiva kružnice. Odůvodněte.

186. Pomocí Pythagorovy věty dokažte: a) Ke dvěma rovným tětivám kružnice příslušejí rovné vzdálenosti od středu kružnice a také rovné středové úhly.
b) K menší tětivě přísluší větší vzdálenost od středu kružnice a menší dutý středový úhel.
c) Vyslovte obrácené poučky.

187. Kterou čáru vyplní středy rovných tětiv kružnice?

188. Je dána kružnice $k \equiv (S; r)$ a bod T jiný než bod S. Bod T leží a) na kružnici, b) vně kružnice, c) uvnitř kružnice. Určete na kružnici k bod A, který je bodu T nejblíže, a bod B, který je od bodu T nejdále. Odůvodněte svá tvrzení. (Body A, B leží na přímce ST; uvažujte rozdíl stran ST, SX trojúhelníka STX, kde X je jiný bod kružnice než A nebo B nebo $\triangle SBX$ a $\triangle TBX$.)

189. Vysvětlete, jakým způsobem rozlišíte menší a větší oblouk AB na téže kružnici. Jaké středové úhly k nim příslušejí?

190. V úhlu $\sphericalangle ASB$ kružnice $k \equiv (S; r)$ zvolte vně kružnice bod Y. Dokažte, že polopřímka SY protne menší oblouk k_1 v bodě X a přímku AB v bodě T, při čemž body leží v pořádku $STXY$. Odůvodněte. [Kde leží bod T vzhledem k bodům AB?]
Jak je tomu, když bod Y leží uvnitř $\sphericalangle ASB$ a uvnitř kružnice k?

191. Narýsujte kružnici $l_1 \equiv (O_1; r_1)$ a sestrojte její obraz l_2 ve stejnolehlosti $(S; k)$. Dokažte, že l_2 je kružnice o středu O_2, který je obrazem bodu O_1 a poloměru $r_2 = |k| r_1$. Co když je $S \equiv O_1$?

192. Dokažte: a) Dvě kružnice $l_1 \equiv (O_1; r_1)$, $l_2 \equiv (O_2; r_2)$, ležící v téže rovině, při čemž je $r_1 \neq r_2$, jsou dvěma způsoby navzájem stejnolehlé. (1) Je-li $O_1 \equiv O_2$, jde o stejnolehlosti $\left(S \equiv O_1;\ k = \pm \frac{r_2}{r_1}\right)$. (2) Je-li $O_1 \not\equiv O_2$, leží středy S_1, S_2 stejnolehlostí $\left(S_1;\ k = \frac{r_2}{r_1}\right)$, $\left(S_2;\ k = -\frac{r_2}{r_1}\right)$ na přímce O_1O_2; je-li $r_2 \neq r_1$, je $\frac{r_2}{r_1} = (O_2O_1S_1) = -(O_2O_1S_2)$.
Jak je tomu v případě, že $r_2 = r_1$ a $O_2 \not\equiv O_1$? [K libovolnému poloměru S_1X_1 kružnice l_1 určete poloměry $O_2X_2 \| O_1X_1$, $O_2X'_2 \| X_1O_1$ kružnice l_2; dvojice bodů: $O_1, O_2; X_1, X_2$ a $O_1, O_2; X_1, X_2'$ určují obě stejnolehlosti.]

b) Společná tečna kružnic l_1, l_2 z předchozího cvičení 192a prochází jedním z obou středů stejnolehlosti. Odvoďte odtud konstrukci společných tečen dvou kružnic.

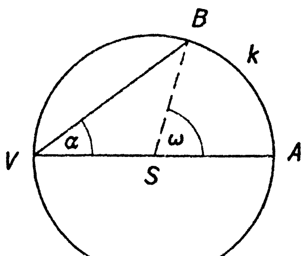
c) Z výsledků předchozích cvičení 192ab rozhodněte, při kterých vzájemných polohách mají dvě kružnice společné tečny. (Je 5 možností, které závisí na veličinách $\overline{O_1O_2}$, r_1+r_2, r_1-r_2.)

193. Užitím výsledků ze cvičení 192 řešte úlohu: Uvnitř úhlu $\sphericalangle MSN$ je dán bod A_1. Sestrojte kružnici k_1, která prochází bodem A_1 a dotýká se obou ramen daného úhlu. (Do úhlu vepište libovolnou kružnici k_2, určete její průsečíky A_2, A'_2 s polopřímkou SA_1 a v stejnolehlostech o středu S hledejte obraz k_1 kružnice k_2 tak, aby si body A_2, A_1 nebo A'_2, A_1 navzájem odpovídaly.)

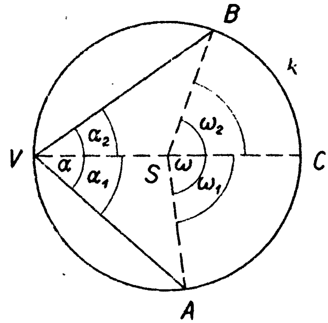
2. *Obvodové a úsekové úhly.*

Je-li k oblouk kružnice $(S; r)$ s krajními body A, B a je-li V kterýkoli bod kružnice, který nenáleží do oblouku k, pak $\sphericalangle AVB$ se jmenuje obvodový úhel nad obloukem k. Tedy obvodový úhel je vždy dutý. Nad každým obloukem k máme co do polohy nekonečně mnoho obvodových úhlů, ale co do velikosti jediný, neboť: **Obvodové úhly nad týmž obloukem jsou si rovny.** To je důsledek následující věty:

Obvodový úhel je roven polovině středového úhlu nad týmž obloukem.



Obr. 75.



Obr. 76.

Důkaz: Budiž k oblouk kružnice $(S; r)$, A, B jeho krajní body, ω středový úhel nad obloukem k, $\alpha = \sphericalangle AVB$ obvodový úhel nad týmž obloukem. Máme dokázati, že $\omega = 2\alpha$. Budeme rozeznávati tři případy podle toho, kde leží střed S vzhledem k obvodovému úhlu α.

I. S leží na jednom rameni úhlu α, třeba na rameni VA (obr. 75). Podle definice obvodového úhlu jeho vrchol V nenáleží do oblouku k, tudíž ani do středového úhlu ω; ježto polopřímka SV je opačná k rameni SA úhlu ω, je ω úhel dutý, tedy $\omega = \sphericalangle ASB$.

V $\triangle\ VBS$ máme proti straně BS úhel α; protože $\overline{BS} = \overline{VS}$, máme proti straně VS úhel rovný α; posléze proti straně BV máme úhel $\pi - \omega$.

Ježto součet úhlů $\triangle\ VBS$ je roven π, jest

$$\alpha + \alpha + (\pi - \omega) = \pi$$

a z toho plyne

$$2\alpha = \omega.$$

II. S leží uvnitř úhlu α (obr. 76). Je-li C protější bod na kružnici k bodu V, leží také bod C uvnitř úhlu α, takže

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2,\ \text{kde}\ \alpha_1 = \sphericalangle AVC,\ \alpha_2 = \sphericalangle BVC.$$

Protože polopřímka VC leží uvnitř $\alpha = \sphericalangle AVB$, protne tato polopřímka úsečku AB a průsečík musí ležet uvnitř kružnice (protože je uvnitř tětivy AB) a tedy uvnitř úsečky VC. Z toho plyne, že body V, C jsou od sebe odděleny přímkou AB, a proto každý z nich náleží do jiného oblouku s krajními body A, B. Protože V jakožto vrchol obvodového úhlu nad obloukem k nenáleží do k, musí C náležeti do k. Tedy bod C leží uvnitř úhlu ω (který v tomto případě může býti dutý, přímý nebo vypuklý); naproti tomu bod V a tudíž celá polopřímka SV opačná k polopřímce SC leží vně úhlu ω. Z toho plyne, že

$$\omega = \omega_1 + \omega_2,\ \text{kde}\ \omega_1 = \sphericalangle ASC,\ \omega_2 = \sphericalangle BSC.$$

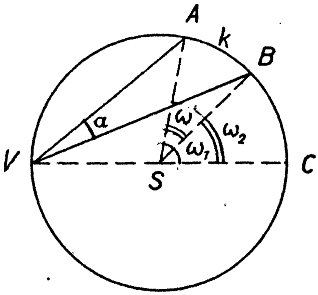
Podle části I našeho důkazu je $\omega_1 = 2\alpha_1$, $\omega_2 = 2\alpha_2$.

Protože

$$\omega = \omega_1 + \omega_2,\ \alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2,\quad \text{je}$$

$$\omega = 2\alpha.$$

III. S leží vně úhlu α (obr. 77); totéž platí ovšem (s výjimkou bodu V) o celé úsečce VC obsahující bod S, je-li C protější bod na kružnici k bodu V. Naproti tomu úsečka AB leží (až na své krajní body) uvnitř úhlu α; proto úsečky AB, VC nemají žádný společný bod a z toho plyne snadno, že úsečka VC (jsouc částí kruhu) neprotne přímku AB. To znamená, že body V, C nejsou od sebe odděleny přímkou A, B, náležejí tedy oba do téhož oblouku s krajními body A, B. To není oblouk k, neboť ten neobsahuje bod V. Tedy body V, C náležejí oba dovnitř téhož oblouku $\widehat{AB}$, různého od oblouku k, a tento oblouk různý od k je větší oblouk $\widehat{AB}$, ježto obsahuje oba protější body V, C. Tedy k je menší oblouk $\widehat{AB}$, a proto ω je úhel dutý, takže $\omega = \sphericalangle ASB$. Zřejmě jeden z obou úhlů $\omega_1 = \sphericalangle ASC$, $\omega_2 = \sphericalangle BSC$ je částí druhého. Pro určitost nechť úhel ω_2 je částí úhlu ω_1 jako v obr. 77; potom je $\omega = \omega_1 - \omega_2$. Ježto B leží uvnitř $\omega_1 = \sphericalangle ASC$, nejsou body B, C od sebe odděleny přímkou AS; ale body V, C od sebe odděleny jsou, a proto totéž platí i o bodech B, V. Tedy úsečka BV protne přímku AS a snadno se zjistí, že potom úsečka BV protne **úsečku** AS. Z toho plyne, že úhel $\alpha_2 = \sphericalangle BVC$ je částí úhlu $\alpha_1 = \sphericalangle AVC$. Ježto $\alpha = \sphericalangle AVB$, je $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$. Podle části I našeho důkazu je $\omega_1 = 2\alpha_1$, $\omega_2 = 2\alpha_2$. Protože $\omega = \omega_1 - \omega_2$, $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$, je $\omega = 2\alpha$.



Obr. 77.

Nejdůležitější případ dokázané věty je případ obvodového úhlu nad polokružnicí, kterému se obyčejně říká **obvodový úhel nad průměrem.** Středový úhel je v tomto případě přímý a jeho polovina je úhel pravý. Tedy: **Obvodový úhel nad průměrem je pravý.** To je známá Thaletova věta, která se ovšem dá jednodušeji dokázati přímo, ale nebudeme zde opakovati důkaz, známý ze střední školy.

Úsekový úhel nad obloukem $k = \widehat{AB}$ má vrchol v jednom z bodů A, B, na př. v bodě A. Je to potom dutý úhel $\sphericalangle BAT$, kde T leží na tečně kružnice v bodě A, a to v té polorovině, jejíž částí je oblouk k. Jsou tedy co do polohy dva úsekové úhly nad obloukem k, jeden s vrcholem A, druhý s vrcholem B. Co do velikosti je však nad obloukem k jediný úsekový úhel rovný obvodovému úhlu, neboť platí věta: **Úsekový úhel je roven polovině středového úhlu nad týmž obloukem.**

Důkaz: I. Je-li k polokružnice, jsou body A, B protější a jest $AT \perp AB$. Úsekový úhel je pravý, středový úhel je přímý.

II. Budiž $k = \widehat{AB}$ menší oblouk kružnice (obr. 78). Budiž T průsečík tečny v bodě A s osou úsečky AB, která prochází středem úsečky AB. Potom je ST osa středového úhlu $\sphericalangle ASB$, který je tedy dvojnásobkem $\sphericalangle AST$. Avšak pravoúhlý $\triangle AST$ ukazuje, že

$$\sphericalangle AST = \tfrac{1}{2}\pi - \sphericalangle ATS;$$

podobně pravoúhlý $\triangle APT$ ukazuje, že

$$\sphericalangle PAT = \tfrac{1}{2}\pi - \sphericalangle ATP,$$

neboli

$$\sphericalangle BAT = \tfrac{1}{2}\pi - \sphericalangle ATS,$$

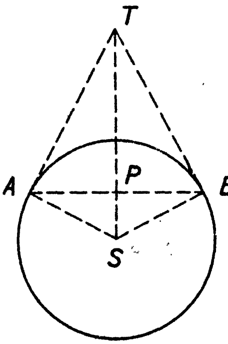
takže

$$\sphericalangle BAT = \sphericalangle AST.$$

III. Je-li k větší oblouk AB, budiž k' menší oblouk AB. Jsou-li α, α' úsekové úhly nad oblouky k, k' a jsou-li ω, ω' středové úhly nad týmiž oblouky, je $\alpha + \alpha' = \pi$, $\omega + \omega' = 2\pi$ a podle části II je $\omega' = 2\alpha'$, takže $\omega = 2\alpha$.

Cvičení.

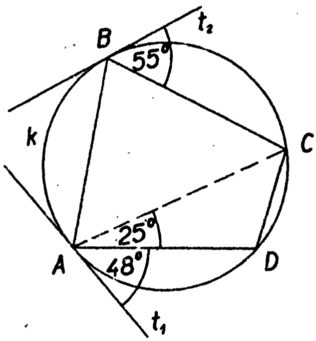
194. a) Je-li AB průměr kružnice $k \equiv (S;\ r)$ a X bod kružnice k jiný než A nebo B, je $\sphericalangle AXB = R$. Dokažte. [Proč je čtyrúhelník $AXBY$, kde XSY je průměr kružnice k, obdélník? Užijte středové souměrnosti nebo určete součet úhlů při vrcholu X v rovnoramenných trojúhelnících AXS, BXS pomocí $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$.]



Obr. 78

b) Je-li v $\triangle ABX$ úhel $\sphericalangle X = R$, pak bod X leží na kružnici k opsané nad průměrem AB. Odůvodněte.

Z obou výsledků cvičení 194ab vyslovte známou větu Thaletovu.



Obr. 79.

195. Úhel α rovnoramenného $\triangle ABC$ je 32°. Určete středové úhly nad oblouky, na které rozdělí strany tohoto trojúhelníka kružnici opsanou. (Dvojí řešení; kterákoli strana může být základnou.)

196. Dvě kružnice $k_1 \equiv (S_1;\ r_1)$, $k_2 \equiv (S_2;\ r_2)$ se protínají v bodech A, B. Dokažte:

a) Jsou-li AC, AD průměry kružnic, leží body B, C, D v přímce rovnoběžné s přímkou S_1S_2 a platí $\overline{CD} = 2 \cdot \overline{S_1S_2}$. (Spojte AB.)

b) Veďte ve cvičení 196a bodem B přímku jinou než CBD a označte U, V její průsečíky s kružnicemi k_1, k_2. Potom je $\overline{CD} > \overline{UV}$. [a) Je $AB \perp BC$, $AB \perp BD$; S_1S_2 je střední příčka v $\triangle ACD$. b) Jsou-li U_1, V_1 středy tětiv UB, VB, je $\overline{S_1S_2} > \overline{U_1V_1}$.]

197. Čtyrúhelník $ABCD$, jehož vrcholy leží v napsaném pořádku na kružnici, se jmenuje *tětivový*. O něm platí: Protější úhly jsou výplňkové.

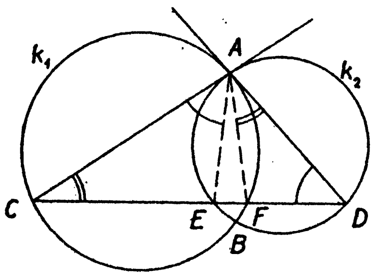
198. Jestliže v tětivovém čtyrúhelníku je $\overline{AB} = \overline{CD}$, je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$. Které mohou nastat případy a co je to za čtyrúhelníky? (Co soudíte o velikostech obvodových úhlů nad dvěma sobě rovnými tětivami téže kružnice? Sledujte $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle CBD$, $\sphericalangle ADB$!)

199. V obr. 79 jsou t_1, t_2 tečny kružnice k v bodech A, B. Určete úhly čtyrúhelníka $ABCD$.

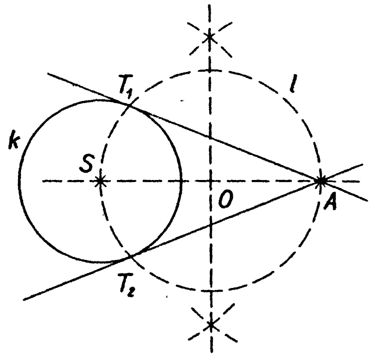
200. V obr. 80 jsou AC, AD tečny kružnic k_1, k_2 v bodě A. Dokažte, že $\overline{AE} = \overline{AF}$.

201. Vysvětlete, jak byly v obr. 81 sestrojeny tečny AT_1, AT_2 ke kružnici $k \equiv (S; r)$.

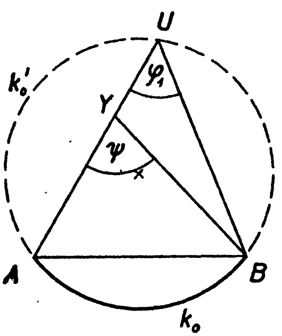
202. Užitím výsledku předchozího cvičení 201 řešte úlohu: Je dána kružnice $(S; r)$ a vně kružnice bod P. Bodem P veďte takovou sečnu kružnice, aby příslušná tětiva měla danou délku.



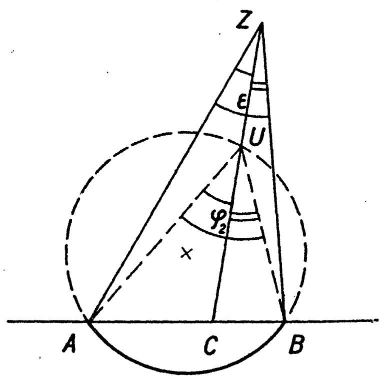
Obr. 80.



Obr. 81.



Obr. 82.

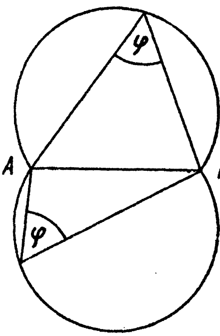


Obr. 83.

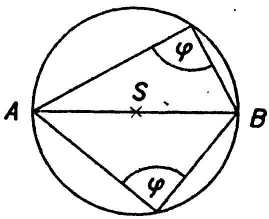
203. a) Kružnice $(S; r)$ je body A, B rozdělena v oblouky k_o, k_o', které leží v opačných polorovinách ϱ, ϱ' o hranici AB. Y je libovolný bod ležící uvnitř kružnice a uvnitř poloroviny ϱ'; Z je libovolný bod ležící vně kružnice a uvnitř poloroviny ϱ'. Dále C je libovolný vnitřní bod úsečky AB. Dokažte, že v obr. 82 je $\psi > \varphi_1$ a v obr. 83 je $\varepsilon < \varphi_2$; spojením výsledků s poučkou o obvodovém úhlu odvoďte poučku:

b) Všechny body X, z nichž je vidět úsečku AB pod daným úhlem φ (t. j. $\sphericalangle AXB = \varphi$), leží na dvou obloucích AB bez bodů A, B; tyto oblouky jsou souměrně položené podle přímky AB (obr. 84a—84c).

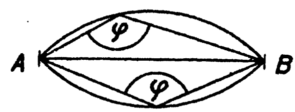
204. Z obr. 85a—85c vysvětlete, jak pomocí úsekového úhlu byl sestrojen jeden z obou oblouků AB, z jehož vnitřních bodů vidíme danou úsečku AB pod daným úhlem φ (BT je polotečna příslušné kružnice).



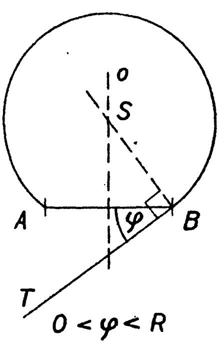
Obr. 84 a).



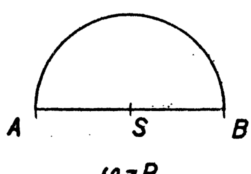
Obr. 84 b).



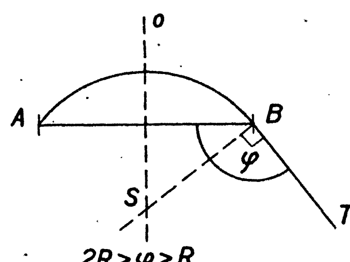
Obr. 84 c).



Obr. 85 a).



Obr. 85 c).



Obr. 85 c).

205. Narýsujte různoběžné úsečky MN, NP a určete bod X tak, aby $\sphericalangle MXN = \alpha$, $\sphericalangle MXP = \beta$, kde α, β jsou dané duté úhly (úloha Snelliova).

206. Střed S kružnice trojúhelníka ABC opsané leží a) uvnitř, b) vně trojúhelníka ABC, podle toho, je-li ostroúhlý nebo tupoúhlý. Kde leží bod S, je-li $\triangle ABC$ pravoúhlý. (K důkazu užijte obvodového úhlu.)

3. Mocnost bodu ke kružnici.

Leží-li bod P vně kružnice $(S; r)$ a jsou-li A, B průsečíky kružnice s libovolnou sečnou procházející bodem P, jest

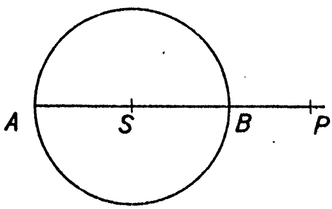
$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = d^2 - r^2,$$

kde

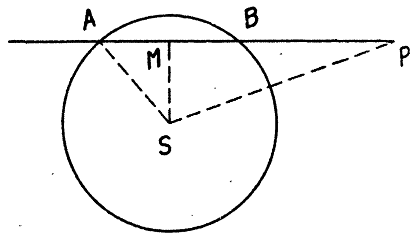
$$d = \overline{SP}.$$

D ů k a z: I. Jestliže sečna prochází středem S (obr. 86) a jestliže na př. B leží blíže než A k bodu P, jest $\overline{PA} = d + r$, $\overline{BP} = d - r$,

tedy $$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (d + r^2)\,(d - r) = d^2 - r^2.$$



Obr. 86.



Obr. 87.

II. Jestliže sečna neprochází středem S (obr. 87), budiž M střed tětivy AB, takže SM stojí kolmo na sečně. Jestliže opět B leží blíže než A k bodu P a jestliže $\overline{AM} = \overline{BM} = e$, $\overline{PM} = f$, jest $\overline{PA} = f + e$, $\overline{PB} = f - e$,

tedy $$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (f + e)(f - e) = f^2 - e^2.$$

Avšak z pravoúhlých $\triangle AMS$, $\triangle PMS$ plyne podle Pythagorovy věty, že

$$r^2 = \overline{SM}^2 + e^2,\; d^2 = \overline{SM}^2 + f^2,$$

tedy $$d^2 - r^2 = f^2 - e^2, \text{ takže } \overline{PA} \cdot \overline{PB'} = d^2 - r^2.$$

Leží-li bod P uvnitř kružnice $(S; r)$ a jsou-li A, B průsečíky kružnice s libovolnou sečnou procházející bodem P, jest

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = r^2 - d^2,$$

kde

$$d = \overline{SP}.$$

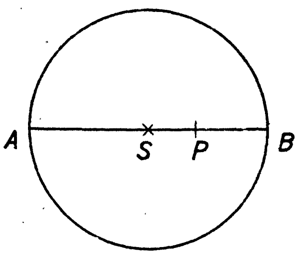
Důkaz: I. Splyne-li P se středem S, je

$$d = 0, \ \overline{PA} = r, \ \overline{PB} = r$$

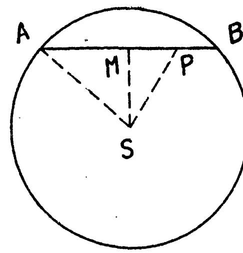
a věta je zřejmá. Budiž tedy bod P různý od S.

II. Jestliže sečna prochází středem S (obr. 88) a jestliže na př. B leží blíže než A k bodu P, jest $\overline{PA} = r + d$, $\overline{PB} = r - d$, tedy

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (r + d)(r - d) = r^2 - d^2.$$



Obr. 88.



Obr. 89.

III. Jestliže sečna neprochází středem S (obr. 89), budiž M střed tětivy AB, takže SM stojí kolmo na sečně. Jestliže opět B leží blíže než A k bodu P a jestliže $\overline{AM} = \overline{BM} = e$, $\overline{PM} = f$, jest $\overline{PA} = e + f$, $\overline{PB} = e - f$, tedy

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (e + f)(e - f) = e^2 - f^2.$$

Avšak z pravoúhlých $\triangle\, AMS$, $\triangle\, PMS$ plyne podle Pythagorovy věty, že

$$r^2 = \overline{SM}^2 + e^2, \quad d^2 = \overline{SM}^2 + f^2,$$

tedy $$r^2 - d^2 = e^2 - f^2, \text{ takže } \overline{PA} \cdot \overline{PB} = r^2 - d^2.$$

Mocností bodu P vzhledem ke kružnici (S, r) rozumíme číslo

$$\pm \overline{PA} \cdot \overline{PB}, \tag{1}$$

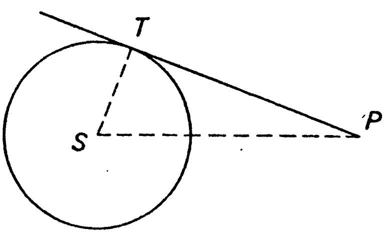
při čemž A, B jsou průsečíky kružnice s libovolnou sečnou, procházející bodem P; při tom platí znamení plus, leží-li P vně kružnice, a znamení minus, leží-li P uvnitř kružnice. Leží-li bod P na kružnici, musí jeden z bodů A, B splynout s bodem P a výraz (1) je roven nule. Mocnost bodu P vzhledem ke kružnici je tedy

kladná, leží-li P vně kružnice;
záporná, leží-li P uvnitř kružnice;
rovná nule, leží-li P na kružnici.

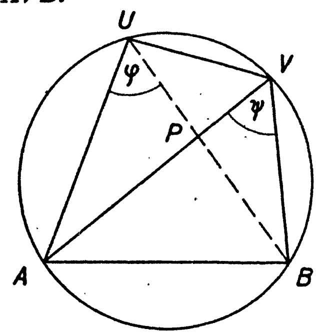
Ve všech třech případech je mocnost nezávislá na volbě sečny (je závislá pouze na kružnici a na bodu P) a je rovna $d^2 - r^2$, kde $d = \overline{SP}$. Leží-li bod P vně kružnice (obr. 90) a je-li T bod dotyku jedné z obou tečen procházejících bodem P, je mocnost také rovna $\overline{PT} \cdot \overline{PT}$ neboli $\overline{PT}^2$, neboť z Pythagorovy věty plyne, že $\overline{PT}^2 = d^2 - r^2$.

Abychom aspoň na jednom příkladě prokázali užitečnost výsledků tohoto článku, dokažme si pomocí nich novým způsobem známou nám větu, že dva obvodové úhly nad týmž obloukem AB jsou si rovny (obr. 91). Dané úhly

buďtež $$\varphi = \sphericalangle AUB, \ \psi = \sphericalangle AVB.$$



Obr. 90.



Obr. 91.

Protože oba úhly jsou obvodové nad týmž obloukem $\widehat{AB}$, leží oba vrcholy U, V v téže polorovině vyťaté přímkou AB, a proto jeden z obou úhlů $\sphericalangle BAU$, $\sphericalangle BAV$ je částí druhého. Je-li na př. $\sphericalangle BAV$ částí $\sphericalangle BAU$, leží polopřímka AV uvnitř $\sphericalangle BAU$, a proto (viz str. 121) úsečka BU protne přímku AV v bodě P. Protože úsečka BU je částí kruhu a z přímky AV pouze úsečka AV je částí kruhu, je P průsečík úseček AV, BU. Bod P leží uvnitř kružnice a přímky AV, BU jsou dvě sečny procházející bodem P.

Z toho plyne, že $$\overline{AP} \cdot \overline{VP} = \overline{BP} \cdot \overline{UP},$$

neboli $$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{UP}}{\overline{VP}}.$$

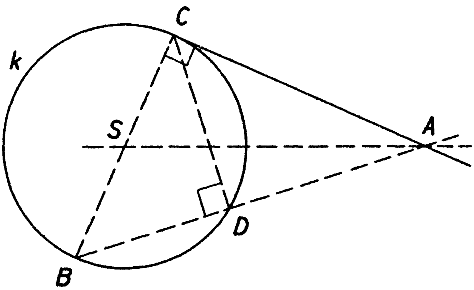
Tedy v trojúhelnících $\triangle APU$, $\triangle BPV$ strany vycházející z vrcholu P jsou si úměrné; mimo to jejich úhly při vrcholu P jsou si rovny (vrcholové úhly); tedy oba trojúhelníky jsou podobné, t. j.

$$\triangle APU \sim \triangle BPV, \text{ takže}$$
$$\sphericalangle AUP = \sphericalangle BVP \text{ neboli } \varphi = \psi.$$

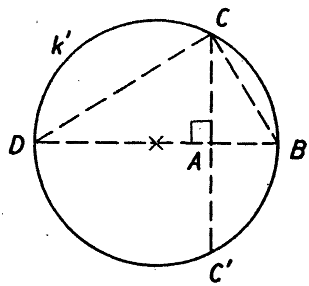
Cvičení.

207. Bod P má od středu kružnice $(S;\ r)$ vzdálenost 5. Vypočítejte mocnost bodu P vzhledem k dané kružnici, je-li: a) $r = 7$; b) $r = 5$; c) $r = 3$.

208. Které body v rovině kružnice $(S,\ r)$ mají vzhledem k této kružnici mocnost, která se rovná danému číslu m? Rozeznávejte: a) $m = q^2$, b) $m = 0$, c) $m = -q^2$, kde číslo $q > 0$; co řeknete o velikosti čísla q v případě cvič. 208c?



Obr. 92.



Obr. 93.

209. Mocnost bodu P vzhledem ke kružnici $(S;\ r = 4)$ je rovna 9; určete vzdálenost $\overline{PS}$.

210. Mocnosti bodů P_1, P_2 vzhledem ke kružnici $(S;\ r = 4)$ jsou 9 a 20. Určete meze pro vzdálenost P_1P_2.

211. Každý bod na společné sečně dvou kružnic má k oběma kružnicím stejné mocnosti; proč?

212. Z obr. 92 vysvětlete, že Eukleidovu větu o odvěsně AC pravoúhlého trojúhelníka ABC (kde $\sphericalangle C = R$) obdržíme při zvláštní poloze sečny ADB kružnice k sestrojené nad odvěsnou BC jako průměrem.
Rovněž Eukleidovu větu o výšce (obr. 93) v $\triangle BDC$ (kde $\sphericalangle C = R$) obdržíme jako zvláštní případ mocnosti bodu A vzhledem ke kružnici k' nad přeponou BD.

213. Jsou dány úsečky $a = 4$, $b = 9$. Užitím mocnosti sestrojte úsečku $x = \sqrt{a \cdot b}$. Uveďte v souvislost s Eukleidovými větami.

214. a) Sestrojte kružnici, která se dotýká dané přímky t a která prochází danými body A, B, které leží uvnitř téže poloroviny, vyťaté přímkou t. (Jsou dvě možné polohy přímek AB a t.) [Existuje-li průsečík O přímek AB a t, jaká je jeho vzdálenost OT dotykového bodu T hledané kružnice s tečnou t?]

b) Na předchozí úlohu 214a lze převést úlohu: Je dán úhel $\sphericalangle MSN$ a uvnitř úhlu bod A. Sestrojte kružnici, která prochází bodem A a dotýká se přímek SM, SN (srovnej též se cvičením 193).

VI. VÝSLEDKY CVIČENÍ

I. Základní vlastnosti polohy.

1. a) $ABDO$; $CDBA$; b) ABD; ABC; ADC; BDC a pořádky opačné; c) AB; AD; AC; BD; BC; DC a pořádky opačné. — 2. $\frac{1}{2}n(n-1)$. — 3. a) ACB; BCA; b) ABC; CBA; c) CAB; BAC. — 4. a) Úsečka AB; b) bod A; c) není společných bodů; d) úsečku BN; e) úsečku AB; f) úsečku AB. — 5. AC, BC, DC; BA, DA, CA; a) BC, BA; DC, DA; b) AC, BC, DC; BA, DA, CA; c) AC, BA; AC, DA; AC, CA; BC, DA; BC, CA; DC, BA; DC, CA. — 6. Jsou souhlasné. — 7. Ne. — 8. Nemusí. — 9. a) Nemají společný bod; b) mají jediný (počátek) a jsou opačné; b) mají společnou úsečku. — 10. a) Body M, N leží v ϱ a je $M \not\equiv N$. b) Přímka MN leží v ϱ, tedy i její bod P a přímka AP má s ϱ společné body $A \not\equiv P$.

11. (1) Nelze; dvě různé rovnoběžky leží také v rovině. (2) Nemají společný bod; jsou to t. zv. mimoběžky. — 12. a) Mohou; b) nemohou. Na př. $a \equiv b$; $m \not\equiv n$. — 13. Uvnitř jedné poloroviny vyťaté přímkou p leží: a) všechny 4 dané body (žádný průsečík); b) 3 z daných bodů (3 průsečíky); c) 2 z daných bodů (4 průsečíky). — 14. Uvnitř jedné poloroviny vyťaté přímkou p leží: a) všech 5 z daných bodů (žádný průsečík); b) 4 z daných bodů (4 průsečíky); c) 3 z daných bodů (6 průsečíků). — 15. a) Stačí volit V_1 na úsečce H_1K_1 a V_2 na úsečce H_2K_2. b) Když je $H_1K_1 \parallel p$; $H_2K_2 \parallel p$. c) Aby tato situace byla možná, musí přímka H_1K_1 protnout přímku p v jistém bodě P_1. Bod V_1 vyplní vnitřek polopřímky opačné k polopřímce P_1H_1. Pokud jde o bod V_2 jsou dvě možnosti: (1) Je-li $H_2K_2 \parallel p$, vyplní V_2 celou přímku H_2K_2. (2) Protíná-li přímka H_2K_2 přímku p v bodě P_2, vyplní V_2 vnitřek polopřímky P_2H_2. — V obou případech musíme vyloučit průsečík přímek H_1K_1, H_2K_2, pokud ovšem vůbec leží uvnitř poloroviny ϱ_2. — 16. Dva. a) Když ramena jsou opačné polopřímky (jako dvě opačné poloroviny, vyťaté touž přímkou). b) Když obě polopřímky splývají. Úhel plný. c) Když jeho ramena nejsou ani opačné ani splývající polopřímky. Vypuklý. — 17. a) Viz text na str. 120 (obr. 8); b) fialovou; c) jsou různé, ale nejsou opačné. — 18. Je to spojení obou položených polorovin (t. j. soubor všech bodů obou polorovin); úhel zaujímá větší část roviny než je jedna polorovina. — 19. a) Viz text na str. 120 (bod X leží současně uvnitř obou polorovin VAB, VBA); b) leží na polopřímce VA mimo počátek V; c) potom polopřímka VX neprotne úsečku AB. — 20. Protože body polopřímky VX' (s výjimkou bodu V) nepatří $\sphericalangle AVB$.

21. a) Přímka $A'B'$ protíná strany VA, VB trojúhelníka VAB, při čemž neprochází žádným jeho vrcholem; podle Paschovy věty neprotne stranu AB. b) Přímka AB'

protíná stranu VB trojúhelníka $VA'B$, kdežto stranu VA' neprotíná (a neprochází žádným jeho vrcholem); proto musí protnout třetí stranu BA'. — **22.** a) $\sphericalangle MVN$ je společná část polorovin VMN, VNM; body P, Q jsou vnitřní body těchto polorovin a proto celá úsečka PQ leží uvnitř těchto polorovin, t. j. uvnitř $\sphericalangle MVN$. b) Platí; jedná se o polorovinu. c) Buďte VM, VN ramena vypuklého úhlu α'. Bod P zvolíme na prodloužení úsečky MN za bod M a bod Q na prodloužení téže úsečky za bod N. — **23.** Když Z je uvnitř $\sphericalangle H'VK'$, potom úsečka XZ leží uvnitř jedné z obou polorovin $H'VK'$ nebo $K'VH'$ (viz cvič. 18). — **24.** a) Theoreticky bílou (prakticky šedou); b) (1) $\sphericalangle ABC$ bez $\triangle ABC$ atd.; c) (1) úhel vrcholový k $\sphericalangle ACB$ atd. — **25.** Polopřímka AX s výjimkou bodu A leží uvnitř $\sphericalangle BAC$ a proto protne úsečku BY v jistém jejím vnitřním bodě U. Ježto vnitřek úsečky BY náleží vnitřku poloroviny BCA, náleží bod U také vnitřku polopřímky XA, t. j. vnitřku úsečky AX. — **26.** Úhly přímé a duté (viz definici dutého úhlu na str. 120 a věty příslušné k obr. 4 na str. 117). **27.** a) Bod C leží v polorovinách ABO, ADO; bod A v polorovinách CBO, CDO. b) Uvnitř úsečky BD leží bod U přímky AC. Ježto vnitřek úsečky BD leží uvnitř $\sphericalangle BAD$, leží bod U na té části přímky AC, která náleží úhlu $\sphericalangle BAD$, t. j. na polopřímce AC. Podobně dokážete: Bod U náleží polopřímce CA. Bod U je tedy bod úsečky AC, avšak zřejmě je $U \neq A$, $U \neq C$. — **28.** Z pořádků AOC, BDO plyne, že O je vnitřní bod úsečky AC a bod D vnitřní bod $\triangle ABC$. (1) Přímka MN protíná strany AD, DC trojúhelníka ACD a proto nemá s úsečkou AC žádný společný bod (Paschova věta). Proto neprotne stranu AO trojúhelníka ADO ani stranu CO trojúhelníka CDO a tudíž nutně protne jejich společnou stranu OD v bodě F, který je uvnitř úsečky MN. — Stejnou úvahu provedeme s $\triangle ABD$ a $\triangle BCD$ a dojdeme k závěru, že přímka MN (která neprotíná úsečku BD) protíná strany AB, BC v bodech P, Q. Body na přímce MN jsou tedy v pořádku $PMFNQ$ a čtyrúhelník $ABCD$ se rozpadá na $\triangle ABD$, $\triangle BCD$, při čemž z úsečky PQ část MN leží vně obou trojúhelníků. (2) Plyne z (1). — **29.** $ABCDEF$, $BCDEFA$, $CDEFAB$, $DEFABC$, $EFABCD$, $FABCD$ a pořádky opačné. — **30.** a) Neleží v přímce. b) Nemají společného bodu (vylučujeme z úvah mnohoúhelníky hvězdovité). c) Viz definici na str. 126—127. d) Vnitřek mnohoúhelníka leží uvnitř každé z obou jeho opěrných polorovin, jejichž hranice jsou určeny dvěma sousedními stranami mnohoúhelníka.

31. (1) Prodloužíme dvě protější strany různoběžníka. (2) Prodloužíme obě ramena lichoběžníka. (3) U rovnoběžníka nelze provést. (4) Spojíme dva protější vrcholy nevypuklého čtyrúhelníka z obr. 18, při kterých není úhel vypuklý. — **32.** Nový $(n + 1)$-úhelník určíme opěrnými polorovinami daného n-úhelníka (v nich leží i body A'_1, A'_{n+1}) a polorovinou ϱ opačnou k polorovině $A'_{n+1}A'_1A_1$; ϱ totiž obsahuje všechny vrcholy daného n-úhelníka až na A_1; o bodech A_2, A_n je to zřejmé. Ale obsahuje na př. vrchol A_3. Polopřímka A_1A_3 leží uvnitř dutého $\sphericalangle A_2A_1A_n$, který je týž jako $\sphericalangle A'_1A_1A'_{n+1}$ a proto protne úsečku A_2A_n v jejím vnitřním bodě T a úsečku $A_1'A'_{n+1}$ v jejím vnitřním bodě V. Body leží v pořádku A_1VT (neboť V je vnitřní bod $\triangle A_1A_2A_n$). Bod T leží uvnitř úhlopříčky A_2A_n, tím i uvnitř úhlopříčky A_1A_3, takže pořádek bodů je A_1VTA_3 a přímka A_2A_n odděluje body A_1, A_3 a bod A_3 leží proto v ϱ. — **33.** a) Vně $\triangle ABC$, avšak uvnitř $\sphericalangle ABC$. b) Uvnitř $\triangle ABC$. — **34.** Buďte X, Y dva libovolné body čtyrúhelníka. Náležejí-li oba jednomu z trojúhelníků ACB, ACD, náleží zřejmě celá úsečka XY tomuto trojúhelníku. Náležejí-li body X, Y dvěma různým trojúhelníkům (t. j. žádný z bodů neleží na přímce AC), je zřejmě $\sphericalangle XAY < \sphericalangle BAD$, $\sphericalangle XCY < \sphericalangle BCD$. Trojúhelníky splňují podmínky cvičení 27b; proto se úsečky XY, AC protínají ve vnitřním bodě U. Úsečky XU, YU jsou tedy každá obsažena v jednom z trojúhelníků ACB, ACD a úsečka XY náleží celá čtyrúhelníku $ABCD$. — **35.** Polopřímka AC leží uvnitř $\sphericalangle BAD$, který je určen opěrnými polorovinami ABC, ADC, takže body B, D jsou odděleny přímkou AC a úhly $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CAD$ o společném ramenu AC leží v opačných polorovinách, vyťatých přímkou AC. — **36.** Podle výsledku cvič. 35 odděluje přímka AC body B, D a úsečka BD protne přímku AC v bodě U. Stejně platí, že přímka BD odděluje body A, C, takže úsečka AC protne přímku BD, t. j. bod U leží uvnitř úsečky AC. — **37.** a) Který leží uvnitř všech opěrných polorovin a tím i uvnitř všech jeho úhlů. b) Podle poslední poučky odst. 5 můžeme n-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ rozdělit na trojúhelníky pomocí úseček YA_1, $YA_2, \ldots, YA_n$. Polopřímka p buď splývá s jednou stranou YA_k těchto trojúhelníků (pak obsahuje vrchol A_k) nebo prochází vnitřkem na př. $\triangle YA_1A_2$ a pak protne stranu A_1A_2 protější bodu Y. c) Ve dvou (viz cvič. 37b). — **38.** (Viz obr. 21.) Budiž B uvnitř strany A_1A_2. Všecky body $A_1, A_2, \ldots A_n$, leží v úhlu $\sphericalangle A_2A_3A_4$ a tím i celá úsečka A_1A_2 (i s bodem B). Proto jsou úhly $\sphericalangle BA_3A_4$, $\sphericalangle BA_3A_2$ styčné a přímka BA_3 rozděluje n-úhelník na $\triangle BA_3A_2$ a na n-úhelník $A_1BA_3 \ldots A_n$, který lze (první poučka na str. 129) rozdělit úhlopříčkami z vrcholu B na (n-2) trojúhelníky. Máme tedy celkem $(n\text{-}2) + 1 = n\text{-}1$ trojúhelníků. — **39.** Případ $a \equiv c$ je zřejmý. Nechť je $a \not\equiv c$. Kdyby b byla s c rovnoběžná, potom by průsečíkem přímek a, b procházely dvě různé přímky a, b rovnoběžné s c; to odporuje základní větě o rovnoběžkách. — **40.** Viz text k obr. 24.

41. Přímka r nesplyne ani s přímkou CA ani s přímkou CB. Kdyby r procházela vnitřkem $\triangle ABC$, protala by stranu AB, což je proti předpokladu (musilo by být $r \equiv AB$ a C ležet na AB). — **42.** Jsou-li obě přímky různé a leží-li D uvnitř poloroviny ACB, jsou souhlasně rovnoběžné, leží-li uvnitř opačné poloroviny jsou nesouhlasně rovnoběžné. — **43.** Body B, B' leží v polorovině ACB, body D, D' v opačné polorovině ACD; proto úsečka $B'D'$ protne přímku AC v bodě Q. Úsečka $B'D'$ náleží polorovině ABC; proto bod Q náleží polopřímce AC. Úsečka $B'D'$ však náleží též polorovině CDA a proto bod Q náleží též polopřímce CA. Bod Q náleží tedy úsečce AC, avšak $Q \not\equiv A$, $Q \not\equiv C$. — **44.** a) Body B', D' leží uvnitř poloroviny ACB. b) Je $AB' \parallel CD'$ a proto přímky AB', $D'C$ jsou nesouhlasně rovnoběžné; dále jako ve cvič. 43. — **45.** a) b) Přímka r protíná stranu EB trojúhelníka EBC v bodě A; stranu BC neprotíná, protože je $r \parallel BC$. Protne tedy stranu EC v bod D, který leží v polorovině EBC (odtud souhlasná rovnoběžnost). — **46.** Výsledku cvič. 45 užijeme na $\triangle ABC$ a přímku r_1; tím dostaneme bod N_1. Podle poslední poučky odst. 6 jsou r_1, r_2 rovnoběžky. Výsledku cvič. 45 užijeme na $\triangle M_1N_1C$ a přímku r_2. Tím dostaneme bod N_2 a pořádek BN_1N_2C. Ježto body N_1, N_2 leží v téže polorovině vyťaté přímkou M_1M_2, je $M_1M_2N_2N_1$ lichoběžník, t. j. $M_1M_2 \parallel N_1N_2$.

47. $\overline{AC} = x$; $\overline{BD} = y$; $\overline{DA} = z$; $\overline{AB} = \overline{AD} - \overline{BD} = z - y$; $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = x - (z - y) = x + y - z$; $\overline{CD} = \overline{AD} - \overline{AC} = z - x$. — **48.** Jest také $\overline{AC} = \overline{BD} = \overline{CE}$ a $\overline{AD} = \overline{BE}$. — **49.** Sedminásobek pětiny úsečky: a) CD; b) jednotkové, t. j. 1 cm; c) jednotkové, kterou jsme si na př. zvolili. — **50.** $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

51. a) Bod C je: (1) buď na prodloužení úsečky AB za bod B nebo (2) za bod A. Případ (1): Je $\overline{AC} = \overline{AS} + \overline{SC}$ a $\overline{SB} + \overline{BC} = \overline{SC}$; odtud sečtením a užitím rovnosti $\overline{AS} = \overline{SB}$ dostaneme hledaný vztah. — Úlohu lze řešit úsudkem takto: Budiž D bod na prodloužení úsečky AB za bod A, o němž platí $\overline{AD} = \overline{BC}$; pak je i $\overline{BD} = \overline{AC}$, $\overline{SD} = \overline{SC}$ a součet úseček BD, BC, AC, AD je zřejmě roven $2 . \overline{CD} = 4 \cdot \overline{SC}$. b) Viz cvič. 51a. — **52.** a) 3; b) $\frac{1}{5}$; c) $-\frac{1}{3}$. — **53.** A; B. — **54.** c) K danému $\lambda = (ABC)$ je $\overline{BC} = x = \dfrac{a\lambda}{\lambda - 1}$ a tedy $x_2 - x_1 = a \cdot \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)}$; pro dané hodnoty λ_1, λ_2 je $\overline{C_1C_2} = x_2 - x_1 \doteq 0{,}02$. — **55.** a) $\lambda > 1$; b) $1 > \lambda > 0$; c) $\lambda < 0$. — **59.** $\alpha + \beta < R$, tedy $\beta < R - \alpha$; dále je $\alpha + 2\beta > R$. Tedy $2\beta > R - \alpha$, $\beta > \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\alpha$, t. j. $\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\alpha < \beta < R - \alpha$. — **60.** Jeden úhel je x°, druhý $n . x^\circ$, t. j. $x = \dfrac{180}{n + 1}$; $n = 1; 2; 3; 4; 5; 8; 9; 11; 14; 17; 19; 29; 35; 44; 59; 89$.

61. 2π; π; $\frac{1}{2}\pi$; $\frac{1}{4}\pi$; $\frac{2}{3}\pi$; $\frac{1}{3}\pi$; $\frac{1}{6}\pi$; $\frac{3}{4}\pi$; $\frac{5}{4}\pi$; $\frac{3}{2}\pi$; $\frac{11}{6}\pi$; $\frac{31}{45}\pi$. — **62.** 360°; 180°; 90°; 135°; 120°; 270°; $\dfrac{180^\circ}{\pi}$; asi $120\frac{1}{3}$°. — **63.** Jeden z úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ je $\frac{1}{2}\pi$. — **64.** a) Je-li $n \perp DC$, $AB \parallel DC$, je $n \perp AB$. Důkaz: Veďme bodem A přímku p kolmou k přímce n. Ježto každé dvě kolmice k téže přímce jsou rovnoběžné, jsou přímky p, CD rovnoběžné a tedy i přímky p, AB; poslední přímky mají společný bod A a proto splývají, t. j. $n \perp AB$. — Je tedy $m \perp AB$, $n \perp AB$. Buď je $m \equiv n$ (rovnoběžky) nebo je $m \not\equiv n$; v posledním případě nemohou mít obě přímky m, n společný bod Y, jinak by jím procházely dvě různé kolmice m, n k AB. Proto jsou přímky m, n rovnoběžné. b) Kdyby byl $\sphericalangle ADC = R$, potom by podle cvič. 64a byl $\sphericalangle DAB = R$. — **65.** Je $\sphericalangle XBC < \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCX$. — **66.** a) $a > b > c$; b) $a = c > b$; c) $b > a$; $b > c$. — **67.** a) $\triangle BCA \cong \triangle B'C'A'$; $\triangle CAB \cong \triangle C'A'B'$; $\triangle ACB \cong \triangle A'C'B'$; $\triangle CBA \cong \triangle C'B'A'$; $\triangle BAC \cong \triangle B'A'C'$. b) Správný je jen zápis (3). — **68.** a) $\sphericalangle DEC = \sphericalangle AEB$; $\sphericalangle EDC = \sphericalangle EAB$; $\sphericalangle DCE = \sphericalangle ABE$; $\overline{CD} = \overline{AB}$. b) $\sphericalangle DEC = \sphericalangle AEB$; $\sphericalangle DCE = \sphericalangle ABE$; $\overline{BE} = \overline{EC}$; $\overline{AB} = \overline{CD}$. — **69.** $\triangle EAB \cong \triangle EDC$ (sus), t. j. $\sphericalangle DEC = \sphericalangle AEB$. Proto leží B, C, E v přímce. Dále viz cvič. 68b. — **70.** a) Body A, E leží v opačných polorovinách BCA, BCF; bod E leží v polorovině AFD (táž jako ABC nebo BFC), neboť je na polopřímce AD, kde A je na hranici a D uvnitř poloroviny AFD. Proto leží v $\sphericalangle CBF$, který je společnou částí polorovin BFC, BCF. b) $\triangle ADC \cong \triangle EDB$ (sus) a tedy $\gamma = \sphericalangle ACD = \sphericalangle DBE$. c) Podle cvič. 70a leží E v $\sphericalangle CBF$ a tedy $\sphericalangle CBF > \sphericalangle CBE = \gamma$ (podle cvič. 70b).

71. Pravoúhlé trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se: (1) v jedné odvěsně a protějším úhlu ostrém; (2) v jedné odvěsně a přilehlém úhlu ostrém; (3) v přeponě a jednom přilehlém úhlu (ostrém); (4) v přeponě a odvěsně; (5) v obou odvěsnách. — **72.** a) Kdyby bylo lze spustit dvě kolmice, vznikl by trojúhelník s dvěma pravými úhly. b) $\triangle ABC \cong \triangle AB'C$ (sus), proto $\sphericalangle BCA = \sphericalangle B'CA = R$. — **73.** Alespoň dva. — **74.** Je $a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma$; rovnostranný. — **75.** a) Oba úhly $\beta = \gamma$ jsou ostré (trojúhelník má nejvýše jeden úhel pravý nebo tupý). Jsou možné rovnoramenné trojúhelníky s úhlem proti základně: (1) tupým, (2) pravým, (3) ostrým (ostroúhlý trojúhelník). b) Je $\triangle ABD \cong ACD$ (sss), t. j. $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC = R$ (vedlejší), tedy $AD \perp BC$; dále $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD$, $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$. c) Je $AD \perp BC$ (viz cvičení 75b) a protože bodem A lze vést jedinou kolmici k BC, splývá tato kolmice s AD a její patou je střed D základny BC. — **76.** Pata P kolmice $AP \perp BC$ padne buď na opačnou polopřímku k polopřímce BC (když je $\sphericalangle ABC$ tupý) nebo je $P \equiv B$ (když totiž je $\sphericalangle ABC = R$). Body jsou proto v pořádku $PBXC$ a z poučky na str. 143 plyne výsledek. — **77.** To je zřejmé pro $\gamma \geqq R$; pro $\gamma < R$ padne bod P nutně dovnitř úsečky BC. Určeme na přímce BPC bod $C' \not\equiv C$ tak, aby $\overline{PC'} = \overline{PC}$; pak je $\overline{PB} > \overline{PC'}$ (jinak by bylo $\gamma = \sphericalangle AC'P \leqq \beta$) a bod C' leží uvnitř úsečky BP. Tím i polopřímka AC' padne dovnitř úhlu $\sphericalangle PAB$ a tedy $\sphericalangle BAP < \sphericalangle C'AP = \sphericalangle CAP$. — **78.** $\triangle ABP$, $\triangle ACP$ jsou pravoúhlé a tudíž $\overline{AB} > \overline{BP}$, $\overline{AC} > \overline{CP}$; proto je $\overline{AB} + \overline{AC} > \overline{BP} + \overline{CP} = \overline{BC}$. — **79.** Je-li $a = b$, zřejmě je $a - b < c$. Můžeme při vhodném označení předpokládat, že $a > b$. Podle cvič. 78 je $a < b + c$; odečtením čísla b od obou stran nerovnosti máme $a - b < c$. — **80.** Zřejmé pro oba úhly ostré nebo pro jeden ostrý a druhý pravý. Zbývá možnost, že v $\triangle AX_1X_2$ je $\sphericalangle X_2X_1A > R$ (obr. 34); pak zbývající úhly jsou ostré. Tu je $\sphericalangle AX_2X_1 < \sphericalangle AX_1P$ (viz str. 143), kde P je pata kolmice $AP \perp X_2X_1$; ale $\sphericalangle AX_1P + \sphericalangle AX_1X_2 = 2R$, takže $\sphericalangle AX_2P + \sphericalangle AX_1X_2 < 2R$.

III. Shodnost.

81. Rozlišení lze provést užitím opačných polorovin o společné hranici $A'B'$. Jeden trojúhelník je shodný přímo, druhý nepřímo. Smysly úhlů při přímé shodnosti jsou souhlasné, při nepřímé nesouhlasné. — **82.** Při $A' \equiv A$, $B' \equiv B$ je jeden pětiúhelník totožný s daným, druhý je k němu souměrně sdružený podle osy AB. — **83.** c) Podle poučky na str. 143 (obr. 34) existuje na přímce X_1P, kde $AP \perp X_1P$ jediný bod $X_0 \not\equiv X_1$, o němž platí, že $\overline{AX_0} = \overline{AX_1}$, takže přímka X_1P má s kružnicí o středu A a poloměru $r = \overline{AX_1}$ pouze dva společné body. — **85.** Viz cvičení 75. Deltoid, kosočtverec, čtverec, pravidelný n-úhelník. — **86.** X je: a) uvnitř poloroviny mimo přímku AB; b) uvnitř úsečky AB a v polorovině oA; c) na polopřímce AB za bodem B; d) uvnitř poloroviny oB mimo přímku AB; e) uvnitř poloroviny oB mimo přímku AB blízko osy o; f) na ose o mimo přímku AB; g) střed úsečky AB; h) uvnitř poloroviny oB a to buď uvnitř úsečky AB nebo na jejím prodloužení za bod B. Není. — **87.** Buďtež o_1, o_2, o_3 osy stran BC, CA, AB trojúhelníka ABC. Není možné, aby bylo na př. $o_1 \parallel o_2$; potom by kolmice $BC \perp o_1$ stála kolmo i na o_2 a bylo by $BC \parallel CA$. Proto jsou o_1, o_2 různoběžky a protínají se v bodě O. Tu je $\overline{OB} = \overline{OC}$ (bod O je na o_1), dále $\overline{OC} = \overline{OA}$ (bod O je na o_2), t. j. $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$. Jiný bod M, o němž platí $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$, musí ležet na o_1 i o_2 a tudíž $M \equiv O$. Osa o_3 bodem O rovněž proc í, neboť je $\overline{OA} = \overline{OB}$.

— **88.** Budiž o osa souměrnosti. a) Bod osy o (samodružný). b) Leží uvnitř jedné z polorovin, vyťatých osou o, a je kolmá k ose; smysly úseček jsou opačné. c) (1) Ležící v o; (2) která má přímku o za svou osu. d) Jednak osa o (totožnost vzoru a obrazu), jednak kolmice k ose o. e) Jednak kolmice k o (nesouhlasná rovnoběžnost; přímky splývají), jednak rovnoběžka s o, včetně o (souhlasná rovnoběžnost). f) Bodem procházejí dvě takové přímky a tvoří s osou úhly 45° a 135°. g) Na ose o. — **89.** Hledaný bod je průsečíkem osy $o_1 \parallel p$ rovnoběžek p, p' a osy o_2 úsečky AB. Nesmí být $AB \perp p$, ledaže by bylo $o_1 \equiv o_2$.

92. a) Osy u_1, u_2, u_3 po řadě protínají strany BC, CA, AB trojúhelníka ABC v bodech A_0, B_0, C_0. Úsečky BB_0, CC_0 se jistě protnou a to uvnitř $\triangle ABC$ v bodě S; ten má jednak od přímek BA, BC, jednak od přímek CB, CA rovné vzdálenosti a tím i od přímek AB, AC. Proto S leží i na ose u_1. b) Rovněž osy u_1, u'_2, u'_3 se protnou v jediném bodě S_1, který má od přímek BC, CA, AB rovné vzdálenosti (střed kružnice trojúhelníku vně vepsané) a který leží v polorovině opačné k polorovině BCA. Je $u'_1 \perp u_1$ atd. c) Osy u'_1, u'_2, u'_3 tvoří $\triangle S_1S_2S_3$ a bod S je v něm průsečíkem výšek. — **93.** a) Osu o_1 shodnosti (o_1, o_2), kde $o_1 \parallel o_2$, položte bodem X; tu je $X \equiv X^* \not\equiv X'$, neboť je $o_1 \not\equiv o_2$. b) Při osové souměrnosti svírá přímka s osou týž úhel jako její obraz; kdyby bylo $a' \perp o_1$, bylo by též $a' \perp o_2$, t. j. $a^* \perp o_2$, t. j. $a^* \perp o_1$ a tím i $a \perp o_1$ (viz cvič. 64). c) Nechť přímky b, b' mají společný bod X; ježto v posouvání (které není totožností) je $X' \not\equiv X$, je $b' \equiv XX'$. Ale $XX' \perp o_1$ a tedy $b' \perp o_1$, tím i $b^* \perp o_1$ a $b \perp o_1$. Ale pak bodem X procházejí dvě kolmice b, b' k ose o_1, což je možné jen tak, že $b \equiv b'$. d) Kdyby přímka c měla společný bod X s c', bylo by $c \perp o_1$ (viz cvič. 93c), což je proti předpokladu. e) Věta je zřejmá pro přímky c, c', které nemají společný bod (neboli jsou navzájem rovnoběžné). Pro přímky b, b', které mají společný bod, je $b \equiv b'$, t. j. $b \parallel b'$ (viz cvič. 93c). — **94.** Předpokládáme, že $A' \not\equiv A$ (jinak by bylo i $B' \equiv B$, což by vedlo k totožnosti). Budiž o_2 osa úsečky AA' a dále $o_1 \parallel o_2$ přímka, jdoucí bodem A (jistě je $o_1 \not\equiv o_2$). Shodnost (o_1, o_2) je posunutí, které převádí bod A v A', úsečku AB v úsečku $A'B_0$, kde $A'B_0 \parallel AB$ a $\overline{A'B_0} = \overline{AB}$, t. j. $B_0 \equiv B'$. Podle základní věty se str. 146 existuje jediná přímá shodnost, která $\triangle ABC$ převádí v $\triangle A'B'C_0$. Proto je $\triangle A'B'C' \cong \triangle A'B'C_0$ a tím $C_0 \equiv C'$. — **95.** Je $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $\overline{AB} = \overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$; dále viz cvič. 93. — **98.** a) Budiž S_0 střed úsečky BD; dvojice přímek BA, DA odpovídá v souměrnosti podle S_0 dvojice DC, BC, průsečíku A prvých dvou, průsečík druhých dvou, to jest bod C. Je tedy $S_0 \equiv S$, $\overline{SA} = \overline{SC}$. b) Viz 98a (souměrnost!) — **99.** a) (Máme dokázat, že $BC \parallel AD$.) Úsečce AB odpovídá v souměrnosti podle S úsečka CD (nesouhlasně rovnoběžná a jí rovná), takže C, D jsou obrazy bodů A, B, t. j. úsečka BD je bodem S rozpůlena. Potom přímka BC je obraz přímky DA a tedy $BC \parallel AD$. b) Plyne z vlastnosti přímek souměrných podle středu. — **100.** a) Budiž AB_0 polopřímka nesouhlasně rovnoběžná s BC; potom B_0 leží v polorovině BAB' a je $\sphericalangle BAB_0 = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAB'$. Proto polopřímka AB' splývá s polopřímkou AB_0. b) Budiž AB_0 polopřímka opačná k polopřímce AC'; potom $\sphericalangle C'AB + \sphericalangle BAB_0 = 2R$ (úhly vedlejší) a vzhledem k předpokladu je $\sphericalangle BAB_0 = \sphericalangle CBA$, čímž je úloha převedena na cvič. 100a. c) Je $\sphericalangle BAH + \sphericalangle ABL = 2R$ (jedna dvojice ramen souhlasně, druhá nesouhlasně rovnoběžných). Tedy $\beta = \sphericalangle ABK < \sphericalangle ABL$. Přímky AH, BK

se nutně protnou v bodě X (jinak by bodem B procházely dvě přímky BL, BK rovnoběžné s AH); bod X nemůže ležet na polopřímce BK', opačné k polopřímce BK (ta leží v polorovině ABH), neboť polopřímka BK' leží celá (až na B) v polorovině opačné k polorovině BLH (a v té leží celá přímka AH).

101. (1) $\omega < R$; $2R - 2\omega$; (2) $R - \frac{1}{2}\omega$; $R - \frac{1}{2}\omega$, kde $\omega < 2R$. — **103.** Na př. vnější úhel $\alpha' = 2R - \alpha = (\alpha + \beta + \gamma) - \alpha = \beta + \gamma$, t. j. $\alpha' > \beta$, $\alpha' > \gamma$. — **104.** Je $\sphericalangle BUC > \sphericalangle UVC > \sphericalangle BAV$ (užijte poučky o vnějším úhlu na $\triangle UVC$ a $\triangle VAB$). — **105.** Budiž A_1 střed úsečky BC. (1) $\overline{AA_1} = \frac{1}{2}\overline{BC}$; pak trojúhelníky $\triangle ABA_1$, $\triangle ACA_1$ jsou rovnoramenné a tedy $\alpha = \sphericalangle BAA_1 + \sphericalangle CAA_1 = \beta + \gamma$ a poněvadž $2R = \alpha + (\beta + \gamma) = 2\alpha$, je $\alpha = R$. (2) $\overline{AA_1} > \frac{1}{2}\overline{BC}$; v $\triangle ABA_1$ a $\triangle ACA_1$ je pak $\overline{AA_1} > \overline{BA_1}$, $\overline{AA_1} > \overline{CA_1}$ a proto $\beta > \sphericalangle BAA_1$, $\alpha > \sphericalangle CAA_1$. Pak je $2R = \alpha + (\beta + \gamma) > \alpha + (\sphericalangle BAA_1 + \sphericalangle CAA_1) = 2\alpha$, t. j. $R > \alpha$. (3) Zaměňte znaménka nerovnosti v případě (2) za opačná. — **106.** Stačí znát jediný. — **107.** Je $\alpha = \gamma$; $\beta = \delta$; odtud: $4R = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta) = 2\alpha + 2\beta$ (součet úhlů ve čtyrúhelníku) a tedy $\alpha + \beta = 2R$. Úhly α, β leží v téže polorovině ABC, jeden pár ramen je nesouhlasně rovnoběžný a protože $\alpha + \beta = 2R$, je druhý pár rovnoběžný souhlasně, t. j. $AD \parallel BC$. Podobně je $AB \parallel DC$. — **108.** a) Pak i čtvrtý úhel je R; podle cvič. 107 je to rovnoběžník a protože má jeden úhel pravý (definice), je to obdélník. b) Budiž o_1 osa úsečky AB; v souměrnosti podle o_1 je B obrazem bodu A a přímka BC obrazem přímky $AD \parallel o_1$ a tedy C obrazem bodu D (je totiž $\overline{AD} = \overline{BC}$). Budiž S průsečík úsečky AC s o_1, v téže souměrnosti je úsečka BD obrazem úsečky AC a bod S průsečíkem obou úhlopříček AC, BD. — Totéž o ose o_2 úsečky BC, při čemž je $o_1 \parallel AD$, $o_2 \parallel AB$. c) (1) Budiž $o_1 \perp AB$ přímka, jdoucí středem S rovnoběžníka $ABCD$; o_1 je zřejmě osou rovnoramenných trojúhelníků SAB, SCD, tedy $\alpha = \sphericalangle DAB = \sphericalangle CBA = \beta$, $\delta = \sphericalangle ADC = \sphericalangle BCD = \gamma$. Stejně osa o_2 úsečky BC je osou rovnoramenných trojúhelníků SBC, SDA a proto je $\beta = \gamma$, $\delta = \alpha$, t. j. $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{1}{4} \cdot 4R = R$ a rovnoběžník je obdélník. (2) V rovnoběžníku $ABCD$ vždy platí $\alpha + \beta = 2R$; ale $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ (sss) a proto $\beta = \alpha = \frac{1}{2} 2 \cdot R = R$. — **109.** Užijte vlastnosti osy rovnoramenného trojúhelníka. —

111. Na pořadí os $o_1 \nparallel o_2$ záleží, pokud není úhel otočení lichým násobkem $2R$ (středová souměrnost). — **112.** a) Budiž A_1A_2 libovolná strana n-úhelníka; všechny body $A_3, A_3, \ldots, A_n$ leží v téže polorovině A_1A_2S (což plyne z rovností $\overline{SA_1} = \overline{SA_2} = \overline{SA_3} = \ldots = \overline{SA_n}$; viz poučka na str. 143); tak jsou určeny opěrné poloroviny našeho mnohoúhelníka. Úhel $\sphericalangle A_1A_2A_3$ je dvojnásobek úhlu $\sphericalangle A_1A_2S$ rovnoramenného $\triangle SA_1A_2 \cong \triangle SA_2A_3$ atd. Mnohoúhelník se rozpadá na n takových shodných rovnoramenných trojúhelníků; říkejme jim pro stručnost částečné trojúhelníky. b) Poloměr opsané kružnice je r; poloměr vepsané kružnice je vzdálenost bodu S od přímky A_1A_2 nebo A_2A_3 atd. c) Uvažujme částečné trojúhelníky $\triangle SA_1A_2$, $\triangle SA_2A_3$. Osami souměrnosti n-úhelníka (jak snadno užitím úhlu φ_n zjistíte) jsou osy těchto trojúhelníků (v počtu n) a na př. také přímka SA_2. To platí o každých takových trojúhelnících příslušných ke dvěma sousedním stranám n-úhelníka. To je celkem n os SA_1, $SA_2, \ldots, SA_n$ a n os částečných trojúhelníků. Při lichém n splývá na př.

přímka SA_2 s osou toho částečného trojúhelníka SA_pA_q, jehož vrchol A_p vznikne otočením bodu A_2 kolem bodu S o úhel $\omega = \frac{n-1}{2} \cdot \varphi_n$ v kladném a bod A_q podobným způsobem, ale v záporném smyslu otáčení. Zbývá tedy n os. Při sudém n splývá osa SA_1 s osou SA_k, kde A_k vznikne otočením bodu A_1 kolem S o úhel $\omega' = \frac{n}{2} \cdot \varphi_n = \pi$ (kladně nebo záporně); právě tak splývá osa strany A_1A_2 s osou strany A_pA_q, kde A_p vznikne otočením bodu A_1 kolem S o úhel $\omega_o = \left(\frac{n}{2} - 1\right)\varphi_n$ ve smyslu kladném a A_q o týž úhel ω_o ve smyslu záporném (snadno zjistíte, že A_p, A_q jsou sousední vrcholy); to je tedy jen $\frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$ os, které všechny jdou bodem S. Jiných os není; kdyby přímka o byla osou úsečky AA', kde A, A' jsou dva různé body z vrcholů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ našeho n-úhelníka, potom uvažujeme takto: Přímka o jde jistě bodem S (úsečka AA' je tětivou kružnice; případ $A \equiv A'$ vede k osám, o nichž jsme mluvili). Potom uvnitř obou oblouků AA' bude v případě sudého n sudý počet vrcholů (nebo žádný vrchol) našeho n-úhelníka; ty si po páru odpovídají a snadno zjistíte, že osa o je osou dvou (protějších) stran n-úhelníka, neboli patří mezi již spočítané osy. V případě lichého n je v jednom oblouku AA' lichý a v druhém sudý (nebo žádný) počet vrcholů; druhý případ je týž jako při n sudém a osa je zase jednou z určených n os. e) n. f) Jde o to, aby $k . \varphi_n = \frac{1}{2}\pi$ (kde k je přirozené číslo). Dvě sousední osy svírají úhel $\frac{1}{2}\varphi_n$; má-li být $o_1 \perp o_2$, položíme $k \cdot (\frac{1}{2}\varphi_n) = \frac{1}{2}\pi$ (kde k je přirozené číslo), t. j. $\frac{2k\pi}{n} = \pi$, tedy $k = \frac{n}{2}$. To je možné jen pro n sudé. — **113.** a) Lze předpokládat, že je současně $A \not\equiv A'$, $B \not\equiv B'$. Potom (1) buď body A, B, A', B' leží všechny v jedné přímce nebo (2) určují rovnoběžník $ABB'A'$. Budiž o_1 osa úsečky AA', t. j. $o_1 \perp AA'$, $o_1 \perp BB'$. V souměrnosti o ose o_1 buďtež $A^* \equiv A'$, B^* obrazy bodů A, B. V případě (1) je $B^* \not\equiv B'$; osa o_2 úsečky B^*B' je hledaná druhá osa naší shodnosti (o_1, o_2), při čemž je $o_2 \parallel o_1$, neboť je $o_2 \perp BB'$. V případě (2) je buďto $B^* \equiv B'$, pak je $o_2 \equiv A'B' \equiv A^*B^*$ nebo je $B^* \not\equiv B'$, potom osa základny $\triangle A^*B^*B'$ (kde je $\overline{A^*B^*} = \overline{A^*B'}$) je hledaná osa o_2. b) (1) Jestliže body A, B, A', B' leží v jedné přímce, při vhodném označení je $A \not\equiv A'$. Osa o_1 úsečky AA' budiž osou souměrnosti, v níž bodu A odpovídá obraz $A^* \equiv A'$ a bodu B obraz $B^* \equiv B'$; $o_2 \equiv AB \perp o_1$ (středová souměrnost). (2) Jestliže $AB \parallel B'A'$ jsou dvě různé přímky, je $ABA'B'$ rovnoběžník o středu S. Budiž o_1 osa úsečky AA'; v souměrnosti o ose o_1 je $A^* \equiv A'$ obraz bodu A a B^* obraz bodu B. Buďto je $B^* \equiv B$ (t. j. B leží na o_1 a AA', BB' jsou úhlopříčky kosočtverce $ABA'B'$), pak $o_2 \equiv AA' \perp BB'$ je druhá hledaná osa souměrnosti; nebo je $B^* \not\equiv B$, potom je o_1 střední příčkou v $\triangle BB'B^*$ (půlí úsečky BB', BB^*, t. j. $o_1 \parallel B'B^*$). Proto osa $o_2 \equiv AA'$ úsečky $B'B^*$ stojí kolmo na o_1 a v souměrnosti o ose o_2 je B' obrazem bodu B^* (v obou případech tedy opět jde o středovou souměrnost). (3) Buďtež AB, $A'B'$ dvě různoběžky; při vhodném označení je $A \not\equiv A'$: — Buďtež AA', BB' různé rovnoběžky nebo budiž $B \equiv B'$ a o_1 osa úsečky AA', pak v souměrnosti o ose o_1 je $A' \equiv A^*$ obrazem bodu A a $B' \equiv B^*$ obrazem bodu B. Osa $o_2 \equiv A'B'$ (průsečík přímek AB,

$A'B'$ je střed rotace a jeden z úhlů obou přímek je úhel otáčení). — Jestliže AA', BB' jsou různoběžky a o_1 osa úsečky AA', body $A^* \equiv A'$, B^* obrazy bodů A, B v souměrnosti o ose o_1, potom BB^*, B^*B' jsou různoběžky (jinak by byly AA', BB' rovnoběžky, neboť BB^*, AA' jsou rovnoběžky); proto jsou o_1, o_2 (kde o_2 je osa úsečky B^*B') rovněž různoběžky a jejich průsečík střed S rotace. Jsou-li s, s' rovnoběžky vedené bodem S s přímkami AB, $A'B'$, s^* obraz přímky s v souměrnosti o ose o_1, je s' obraz přímky s^* v souměrnosti o ose o_2. Ale obrazy dvou rovnoběžek v osové souměrnosti jsou opět rovnoběžky a v naší rotaci je s' obrazem přímky s; proto udává jeden z úhlů přímek s, s', t. j. jeden z úhlů přímek AB, $A'B'$, úhel otáčení. — **114.** Označme c', c'' přímky, které vzniknou otočením přímky c kolem bodu A o úhel α v obou smyslech. Pokud je $\alpha \neq R$: jsou přímky c', c'' navzájem různoběžné; pro $\alpha = R$ jsou spolu rovnoběžné. a) Jsou-li c', b; c'', b dvojice různoběžek, má úloha dvě řešení. b) Jsou-li c', b dvě různé rovnoběžky, jsou c'', b: (1) pro $\alpha \neq R$ dvě různoběžky a je jedno řešení; (2) pro $\alpha = R$ dvě rovnoběžky a úloha nemá řešení. c) Jsou-li c', b dvě splývající přímky, má úloha nesčíslné množství řešení. Potom (1) pro $\alpha \neq R$ jsou c'', b dvě různoběžky, což je další řešení; (2) pro $\alpha = R$, jsou c'', b dvě různé rovnoběžky. — Případ a) nastane, je-li každý úhel přímek b, c jiný než α. Případ (3) nastane, je-li jeden úhel přímek b, c roven α, vzdálenosti bodu A od přímek b, c sobě rovny a leží-li A v tom úhlu přímek b, c, který není roven α. Jinak nastává případ b).

IV. Podobnost.

115. 2 : 5. — **116.** a) 2,7; $\frac{9}{4}$; 3,6; 4,05; $b_5 = \frac{12{,}8}{3}$; $b_6 = 3{,}2$ b) $b_5 = 9{,}6$; $b_6 = 7{,}2$. — **117.** a) Určete střední příčky HL, LK v $\triangle ABC$, $\triangle ACD$. b) Je $\overline{HL} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, $\overline{HJ} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AD}$, při čemž (obr. 57) je $\overline{BC} > \overline{AD}$; tedy $\overline{JL} = \frac{1}{2}(\overline{BC} - \overline{AD})$ a pořádek bodů je $HJLK$; $BC \parallel JL$ a $JBCL$ je lichoběžník, bod U je průsečík jeho ramen BJ, CL. Dále užijte pomocné poučky: Je-li v lichoběžníku $ABCD$ (obr. 57) $AD < BC$, potom se přímky BA, CD protnou v polorovině opačné k polorovině ADB. Náčrt důkazu: Budiž $ABA'D$ rovnoběžník (cvič. 99a), pak bod A' odděluje body B, C a platí $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC > > \sphericalangle BAD + \sphericalangle ADA' = 2R$. Různoběžky AB, DC se neprotnou v polorovině ADB (viz cvič. 100c). — **119.** Narýsujte dvě různoběžky P_1Q_1, H_1K_1, kde $P_1 \equiv H_1 \equiv L_1 \equiv A_1$; na první určete body Q_1, M_1 tak, aby $\overline{P_1Q_1} = \overline{PQ}$, $\overline{L_1M_1} = \overline{LM}$, na druhé bod K_1 tak, aby $\overline{H_1K_1} = \overline{HK}$. Veďte $M_1B_1 \parallel Q_1K_1$, kde B_1 leží na přímce H_1K_1 — **120.** $\overline{FE} = 4$; $\overline{EC} = 6\frac{2}{3}$.

122. Dvě z rovnic (2) nebo dvě z rovnic (3) nebo po jedné rovnici z každé skupiny (2) a (3). — **123.** Podobné jsou trojúhelníky z (2), (3), (4). $\triangle FPO \sim \triangle A_1B_1C_1 \sim \sim \triangle EDT$. — **124.** a), b) ano. — **125.** a), b) podle I na str. 169. — **126.** a) Obdélníky $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ jsou podobné, je-li: (1) $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_2C_2}}$ (podle III); (2) $\sphericalangle A_1S_1B_1 = = \sphericalangle A_2S_2B_2$ (viz cvič. 125a). b) Viz cvič. 125a. c) Buď shodný (obvod 36) nebo neshodný (obvod druhého 180). — **127.** Sestrojte pomocný $\triangle AB_0C_0 \sim \triangle ABC$, kde

B_0 leží na polopřímce AB, C_0 na polopřímce AC tak, že $\overline{AB_0} = \overline{A'B'}$ (je $B_0C_0 \parallel BC$). **128.** a) Označte A_1, B_1, C_1 paty kolmic spuštěných s bodů A, B, C na protější strany $\triangle ABC$. Je $\triangle ABB_1 \sim \triangle ACC_1$ (podle I, neboť $\sphericalangle A$ je společný, $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle C_1 = R$) a tedy $\dfrac{v_3}{v_2} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{1}{c} : \dfrac{1}{b}$, t. j. $v_3 = k \cdot \dfrac{1}{c}$, $v_2 = k \cdot \dfrac{1}{b}$ (kde $k > 0$) atd. — **130.** a) Podle poučky o střední příčce je koeficient podobnosti $k = \frac{1}{2}$ (t. j. $a_1 = k \cdot a$ atd.); poučka III. b) Je $\sphericalangle TA_1B_1 = \sphericalangle TAB$ (ramena nesouhlasně rovnoběžná), $\sphericalangle A_1TB_1 = \sphericalangle ATB$ (vrcholové); tedy $\triangle TA_1B_1 \sim \triangle TAB$ (podle I), při čemž $k = \frac{1}{2}$, neboť je $\overline{AB} = 2 . \overline{A_1B_1}$ (střední příčka). Těžnice AA_1, BB_1 se protínají v bodě T, při čemž je zřejmě $(A_1AT) = -\frac{1}{2}$; těžnice AA_1, CC_1 se protínají v bodě T' a zase platí $(AAT') = -\frac{1}{2}$, t. j. $T' \equiv T$.

131. a) Obsah čtverce na výšce pravoúhlého trojúhelníka je roven obsahu obdélníka sestrojeného z obou úseků přepony; atd. e) Užijte Pythagorovy věty. — **132.** a) $1 : 1 : \sqrt{2}$. — **133.** $\sqrt{3} : 2$. — **134.** a), c), d) Je; b) není. — **135.** a) Pomocí obrácené věty Pythagorovy. b) $a^2 = (\frac{1}{2}e)^2 + (\frac{1}{2}f)^2$. — **136.** Z $\triangle ABD$ (kde $\sphericalangle D = R$) plyne: $\overline{AD} = 12$; podle (6) ze str. 173 je $\overline{AD} \cdot \overline{AE} = \overline{AB}^2$, t. j. $\overline{AE} = \frac{169}{12}$ a $r = \frac{169}{24}$. — **137.** $\overline{AE} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2} > \overline{AB}$ a bod E leží na prodloužení úsečky AB za bod B, takže $\sphericalangle AED < \sphericalangle ABD = 45°$; proto je $\sphericalangle BAP > 45°$ (viz $\triangle AEP$) a bod P leží uvnitř poloroviny ACP. Z $\triangle DEA$ plyne: $\overline{DE}^2 = a^2 + 2a^2$; $\overline{DE} = a\sqrt{3}$; podle (6) ze str. 173 je $\overline{EP} = \overline{AE}^2 : \overline{DE} = 2a^2 : a\sqrt{3} = \frac{2}{3} . a\sqrt{3}$. — **138.** V $\triangle ABC$ (obr. 60) střed S kružnice trojúhelníku opsané půlí přeponu, P je pata výšky $CP \perp AB$. (1) Je-li $P \equiv S$, je $\triangle ABC$ rovnoramenný a $c_1 + c_2 = 2v$, t. j. $c_1 + \dfrac{v^2}{c_1} = 2v$ a pro $v = 1$ je $c_1 + \dfrac{1}{c_1} = 2$. (2) Je-li $P \not\equiv S$, je $\overline{SC} > \overline{CP}$, t. j. $2 \cdot \overline{SC} > 2v$ neboli $c_1 + \dfrac{v^2}{c_1} > 2v$ atd. — **139.** Je $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$; a) $c = \dfrac{5}{6}c_1$ atd., b) $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{5}{6}a_1 : \dfrac{5}{6}c_1 = \dfrac{a_1}{c_1} = \sin\alpha_1$ atd. — **140.** b) $\sin\alpha = \cos\beta$; $\cos\alpha = \sin\beta$; $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{cotg}\,\beta$; $\mathrm{cotg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\beta$.

143. a) $\omega \doteq 48\frac{1}{2}°$; $27\frac{1}{2}°$; b) $\omega \doteq 68\frac{1}{4}°$; $27\frac{1}{2}°$; c) $\omega \doteq 45\frac{1}{2}°$; $54\frac{3}{4}°$; $\omega \doteq 19\frac{1}{2}°$; $73\frac{3}{4}°$. — **144.** a), b) $\varphi < \varepsilon < \psi$; c) $\varepsilon < \varphi < \psi$. — **145.** V obr. 64a je $\overline{AC} = 1$; roste-li $\overline{BC} = \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{cotg}\,\beta$, roste též α, ale β ubývá. V obr. 64b je: $1 = \overline{AB} > \overline{AC} = \cos\alpha > 0$; $1 = \overline{AB} > \overline{BC} = \sin\alpha > 0$ (AB je přepona $\triangle ABC$). — **146.** a) $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$; $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2} \doteq 0{,}707$; $\sin 60° = \cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3} \doteq 0{,}866$; $\mathrm{tg}\,30° = \mathrm{cotg}\,60° = \frac{1}{3}\sqrt{3} \doteq 0{,}577$; $\mathrm{tg}\,45° = \mathrm{cotg}\,45° = 1$; $\mathrm{tg}\,60° = \mathrm{cotg}\,30° = \sqrt{3} \doteq 1{,}732$. — **149.** a), b) V $\triangle ABC$ (obr. 64b) je $\overline{BC} + \overline{CA} > \overline{AB}$; dále je $|\overline{BC} - \overline{AC}| < \overline{AB} = 1$ a tedy vždy $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 < 1$. c) Pro $\alpha = 45°$ je $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{cotg}\,\alpha = 1$ a $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\alpha = 2$; pro $\alpha \neq 45°$ je $c_1 = \mathrm{tg}\,\alpha \neq 1$, $c_2 = \dfrac{1}{c_1} = \mathrm{cotg}\,\alpha \neq 1$ a podle cvič. 138 je $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\alpha = c_1 + \dfrac{1}{c_1} > 2$. — **150.** a) $\omega = 90° - \varphi$; b) $\omega = \varphi$; c) $\omega = \varphi < 45°$; d), e), f) $\omega < \varphi$; g) $\varphi < \omega$.

151. a) 0; b) 1; c) 1; d) 1 (pro $\alpha < 30°$). — **152.** *a*) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; $\frac{\sqrt{7}}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$; $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{7}{2}}$; c) $\sin\alpha = \frac{24}{25}$; $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\cos\alpha = \frac{7}{25}$; $\frac{1}{2}$; d) $\sin\alpha = \frac{2}{13}$; $\frac{2}{\sqrt{31}}$; $\cos\alpha = \frac{5}{13}$; $3\sqrt{\frac{3}{31}}$. — **153.** a) 0,3184; 0,9478; 0,3365; 2,9715; b) 0,9603; 0,2790; 3,4421; 0,2905; c) 0,8545; 0,5197; 1,6448; 0,6080. — **154.** a) 30°58′; 59°32′; b) 18°40′; 53°8′; c) 30°58′; 54°28′; *a*) 35°54′; 71°27′. — **155.** a) 27°36′; b) 29°42′; c) 16°2′; d) 10°49′. — **156.** a) $\alpha \doteq 53°8'$; b) $\alpha = 36°52'$; c) $a \doteq 2{,}16$; $b \doteq 5{,}07$; d) $a \doteq 2{,}26$. — **157.** a) $u_1 \doteq 13{,}1$; $u_2 \doteq 14{,}2$; $u_3 \doteq 7{,}5$; $e \doteq 14{,}7$; b) 26°52′; 15°52′; 59°19′; c) 61°4′; 52°46′; d) 23,7. — **158.** a) Horní meze: 3,465; 3,216; 3,160; 3,147; b) dolní meze: 3; 3,105; 3,132; 3,139. — **159.** 3,8 km; 5,1 km. — **160.** 32°.

161. 31 m. — **162.** 96,2 m za vt. — **163.** Asi 480 m. — **164.** $\frac{10^3 v}{t} = 10^3 . \sin\alpha$ (‰). — **165.** Spád je tangens úhlu $\sphericalangle BAB'$; $\alpha_3 < \alpha_1 < \alpha_2$. — **169.** Jsou souměrné podle bodu S. — **170.** (1) Je $AB \parallel A'B'$: Na přímce AA' určíme bod S tak, aby dělicí poměr $(A'AS) = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{5}{6}$. Stejnolehlost $\left(S, \frac{5}{6}\right)$ převede bod A v A', přímku $ABCDE$ v přímku $A'B'C'D'E'$ (souhlasně rovnoběžnou), bod B v B', neboť $\overline{A'B'} = \frac{5}{6} \cdot \overline{AB}$ atd. (2) Je $AB \parallel B'A'$: Pro S platí $(A'AS) = -\frac{5}{6}$. — Jsou-li v, v' vzdálenosti bodu S od přímek AB, $A'B'$, je $\frac{v'}{v} = \frac{5}{6}$. V případě (1) je $v - v' = 5{,}5$; $v' = 27{,}5$; $v = 33$. V případě (2) je $v + v' = 5{,}5$; $v' = 2{,}5$; $v = 3$.

171. a) Z podobnosti $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ plyne $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Užitím pouček o úhlech s rovnoběžnými rameny dostaneme, že $CA \parallel C'A'$. (1) Je-li $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, jde o přímou shodnost. Předpokládejme, že oba trojúhelníky nesplývají, pak platí současně $A \not\equiv A'$, $B \not\equiv B'$, $C \not\equiv C'$ (je-li $A \equiv A'$, je i $B \equiv B'$, $C \equiv C'$). Při tom jen dvě z těchto dvojic bodů mohou ležet v jedné přímce; zvolíme-li vhodně označení, budou AA', BB' dvě různé přímky a $AA'B'B$ je pak rovnoběžník (je $AB \parallel A'B'$ $\overline{AB} = \overline{A'B'}$), takže $\overline{AA'} = \overline{BB'}$, $AA' \parallel BB'$. Podobně platí $\overline{BB'} = \overline{CC'}$, $BB' \parallel CC'$, jestliže jsou i BB', CC' jsou dvě různé přímky. To však platí i když přímky BB', CC' splývají: Uvažujme posunutí: (v přímce BC) určené vzorem B a obrazem B' a budiž C^* obraz bodu C v tomto posunutí. Smysly úseček $B'C^*$, BC (posunutí) i úseček $B'C'$, BC (daný předpoklad) jsou souhlasné, tím i smysly úseček $B'C^*$, $B'C'$. Dále je $\overline{B'C'} = \overline{BC}$ (daný předpoklad), $\overline{BC} = \overline{B'C^*}$ (posunutí) a tedy $\overline{B'C'} = \overline{B'C^*}$, t. j. $C^* \equiv C'$ a velikost posunutí $\overline{BB'} = \overline{CC^*} = \overline{CC'}$. Trojúhelníky lze ztotožnit posunutím. (2) Je-li $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$, můžeme jako v případě (1) předpokládat, že AA', BB' jsou dvě různé přímky. Potom $AA'B'B$ je lichoběžník ($AB \parallel A'B'$; $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$) a budiž S průsečík ramen AA', BB'. Ve stejnolehlosti o středu S, budiž A' obrazem bodu A; potom ze známých vlastností stejnolehlých úseček a úhlů snadno dokážete, že B', C' jsou obrazy bodu B, C v této stejnolehlosti. b) Jako ve cvič. 171a dokážete, že $CA \parallel A'C'$; stejně lze předpokládat, že AA', BB' jsou různé přímky a protože $AB \parallel B'A'$, je $ABA'B'$ lichoběžník a jeho úhlopříčky mají společný bod S. Stejnolehlost o středu S, v níž A' je obrazem bodu A, přiřazuje zřejmě bodům B, C body B', C'. — **172.** Je na příklad $\overline{SA_2} = k \cdot \overline{SA_1}$; $\overline{SA_3} = k' \cdot \overline{SA_1}$ a tedy $\overline{SA_3} = \frac{k'}{k} \cdot \overline{SA_2}$ (neboť $k' \neq 0$, $k \neq 0$), což je stejnolehlost $\left(S, \frac{k'}{k}\right)$. — **173.** Trojúhelníky $\triangle A_2B_2C_2$, $\triangle A_3B_3C_3$ mají příslušné strany buď souhlasně nebo nesouhlasně rovnoběžné a jsou podobné; podle cvič. 171 lze jeden v druhý převést (1) posunutím nebo (2) stejnolehlostí. Nechť A_1 je ten vrchol $\triangle A_1B_1C_1$, který neleží na přímce $S_{12}S_{13}$. Případ (1) nastane pro $k = k'$; je $\triangle A_1S_{12}S_{13} \sim \sim \triangle A_1A_2A_3$, při čemž při $k > 1$ je $A_2A_3 \parallel S_{13}S_{12}$, při $0 \neq k < 1$ je $A_2A_3 \parallel S_{12}S_{13}$, ale vždy je $\overline{A_2A_3} = |k - 1| . \overline{S_{12}S_{13}}$ (tedy velikost posunutí). Případ (2) nastane pro $k \neq k'$; pak se různoběžné přímky $S_{12}S_{13}$, A_2A_3 jistě protnou v bodě S_{23} jiném než S_{12} nebo S_{13}. Protože bodu $X_1 \equiv X_2 \equiv S_{12}$ ve stejnolehlosti (S_{13}, k') odpovídá obraz X_3, který leží na přímce $S_{12}S_{13}$, je S_{23} průsečíkem přímek A_2A_3, X_2X_3 a tedy hledaným středem S_{23} stejnolehlosti $\left(S_{23}, k_0 = \frac{k'}{k}\right)$. — **174.** Sestrojte $\triangle A_0B_0C_0$ stejnolehlý s $\triangle A'B'C'$ tak, aby $\overline{A_0B_0} = \overline{AB}$; za střed S zvolte bod $C' \equiv C_0$. Pak je $\triangle A_0B_0C_0 \sim \sim \triangle ABC$ (přímo). $\triangle ABC$ lze převést v $\triangle A_0B_0C_0$ buď posunutím (je-li $AB \parallel A'B'$) nebo otočením (střed otáčení je průsečík os úseček AA_0, BB_0, CC_0). Viz cvič. 113. — **175.** a), b) Viz cvič. 130. c) Bodu $S' \equiv V$ ve stejnolehlosti $(T, -\frac{1}{2})$ odpovídá bod S, který je středem kružnice opsané $\triangle ABC$, při čemž je $\overline{TS} = |-\frac{1}{2}| \cdot \overline{TS'}$. d) Víte, že bod V leží (1) uvnitř, (2) ve vrcholu C pravého úhlu $\sphericalangle C$, (3) vně trojúhelníka ABC podle toho, je-li $\triangle ABC$: (1) ostroúhlý, (2) pravoúhlý, (3) tupoúhlý. Ale $\triangle ABC$ leží (až na A, B, C) uvnitř $\triangle A'B'C'$ a proto v případě (1) leží bod V uvnitř $\triangle A'B'C'$, v případě (2) leží V' uvnitř strany $A'B'$ (tu je $\sphericalangle C' = R$). V případě (3) budiž $\sphericalangle ACB > R$ a buďtež $BP_2 \perp AC$, $P'_3CP_3 \perp AB$, kde P_2, P_3 jsou příslušné paty. Tu $\sphericalangle ABP_2$ je ostrý (doplňkový k úhlu α), $\sphericalangle BP_3C = R$, takže jejich součet je menší než $2R$; proto polopřímky BP_2, P_3C se protnou v polorovině ABC (táž jako ABP_2) v bodě V. Označme CP'_3 polopřímku opačnou k polopřímce CP_3, takže polopřímka CP'_3 leží v polorovině opačné k polorovině $A'B'C'$ (tedy vně $\triangle A'B'C'$). Polopřímky BP_2, CP_3 se neprotnou (první leží až na bod B vně, kdežto druhá až na bod C leží uvnitř $\sphericalangle ACB$), proto pro hledaný bod V zbývá z polopřímky P_3C její část, polopřímka CP_3', takže V leží vně $\triangle A'B'C'$. — **176.** Sestrojte pomocný $\triangle SM_0N_0$, kde $\overline{SM_0} = 2j$, $\overline{SN_0} = 3j$ (tu j značí jednotkovou úsečku) a veďte bodem A přímku UV rovnoběžnou s M_0N_0. Není-li poměr vzdáleností bodu A od přímek MSM', NSN' roven $\frac{2}{3}$, jsou řešení dvě (k narýsovanému bodu M_0 příslušejí dva body ${}^1N_0$, ${}^2N_0$ na opačných polopřímkách SN, SN'); jinak je řešení jediné. Jde o stejnolehlost se středem S obou trojúhelníků SM_0N_0, SUV (bod A může ležet až na prodloužení strany UV). — **177.** (Body A, B, H nesmí ležet v jedné přímce.) Bodem A' veďte $A'B' \parallel AB$, $A'H' \parallel AH$, kde B' leží na b. Dále bodem B' veďte $B'H' \parallel \parallel BH$ a označte H' průsečík přímek $A'H'$, $B'H'$. Hledaná přímka je HH'. — **178.** Sestrojte přímky $a_1 \parallel a \parallel a_2$ ve vzdálenosti m jednotek od a a přímky $b_1 \parallel b \parallel b_2$

ve vzdálenosti n jednotek od b. Úhlopříčky rovnoběžníka určeného přímkami a_1, b_1, a_2, b_2 jsou hledané přímky. — **179.** a) Sestrojte pomocný $\triangle A'B'C'$ ($a' = 4$; $b' = 5$; $c' = 7$), v něm výšku v'_3 s bodu C' a ve stejnolehlosti o středu $S \equiv C'$ sestrojte k úsečce v'_3 stejnolehlou úsečku dané velikosti v_3. b) Sestrojte pomocný $\triangle A'B'C'$ tak, aby $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ a vyšetřte střed S jemu vepsané kružnice. Sestrojte kružnici $(S; \varrho)$ a opište jí $\triangle ABC$ stejnolehlý s $\triangle A'B'C'$ vzhledem ke středu stejnolehlosti S.

181. a), b) Oba n-úhelníky $A_1A_2 \ldots A_n$, $B_1B_2 \ldots B_n$ přemístíme tak, že v nové poloze splynou jejich středy v bodě S a zároveň jejich středové úhly (to je možné). Vznikají dvojice stejnolehlých rovnoramenných, na př. SA_1A_2, SB_1B_2. c) Přemístěme oba kosočtverce do poloh $ABCD$, $AB'C'D'$ tak, že oba rovné úhly $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle B'AD'$ splývají. Ve stejnolehlosti o středu A nechť je S' střed druhého kosočtverce obrazem středu S prvého; v důsledku toho je C' obrazem bodu C atd. d) Rovnoběžníky přemístěte tak, aby: v případě (1) splynuly jejich středy v bodě S a aby se pokryly úhlopříčky v tom pořadí, ve kterém jsou úměrné; bod S je střed stejnolehlosti; v případě (2) oba stejné úhly splynuly a aby se pokryla ta jejich ramena, v nichž leží úměrné strany; společný vrchol obou splývajících úhlů je středem stejnolehlosti.

V. Kružnice.

184. Prochází středem kružnice; obráceně kolmice vedená středem S k tětivě kružnice je osou tětivy. — **185.** V obr. 72 je $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{PB}$, $\overline{SB} = r$; $\triangle SBP$ má $\sphericalangle P = R$ a tedy $\overline{SB} > \overline{PB}$ neboli $2 . \overline{SB} > 2 . \overline{PB}$, t. j. $2r > \overline{AB}$. — **186.** a) Jsou-li AB, CD (srovnej obr. 72) dvě sobě rovné tětivy kružnice $(S; r)$ a P, Q paty kolmic spuštěných s bodu S na přímky AB, CD, pak platí: $\overline{PB} = \overline{QD}$, $\overline{SB} = \overline{SD} = r$. Z pravoúhlých $\triangle SBP$, $\triangle SDQ$ plyne $\overline{SP} = \sqrt{\overline{SB}^2 - \overline{PB}^2} = \sqrt{\overline{SD}^2 - \overline{QD}^2} = \overline{SQ}$. Je tedy $\triangle SBP \cong \triangle SDQ$ (sss) a tím $\sphericalangle BSP = \sphericalangle DSQ$ a tedy i jejich dvojnásobky, totiž $\sphericalangle BSA$, $\sphericalangle DSC$. b) Buďtež $\overline{A_1B_1} < \overline{A_2B_2}$ dvě tětivy kružnice (S, r) a P_1, P_2 jejich středy. Pak v $\triangle SP_1A_1$, $\triangle SP_2A_2$ je $\sphericalangle P_1 = \sphericalangle P_2 = R$ a podle Pythagorovy věty platí: $\overline{SP}_1^2 = \overline{SA}_1^2 - \overline{A_1P}_1^2 > \overline{SA}_2^2 - \overline{A_2P}_2^2$, neboť $\overline{SA}_1 = \overline{SA}_2 = r$ a dále je $\overline{AP}_1 = \frac{1}{2} \cdot \overline{A_1B_1} < \frac{1}{2} \cdot \overline{A_2B_2} = \overline{A_2P_2}$ a tím i $\overline{AP}_1^2 < \overline{AP}_2^2$. Tedy $\overline{SP}_1 > \overline{SP}_2$. Označíme-li $\sphericalangle A_1SB_1 = 2\alpha_1$, $\sphericalangle A_2SB_2 = 2\alpha_2$, pak α_1, α_2 jsou ostré úhly a platí: $\sin\alpha_1 = \frac{\overline{A_1P_1}}{r} < \frac{\overline{A_2P_2}}{r} = \sin\alpha_2$ a tedy $\alpha_1 < \alpha_2$. — **187.** Podle označení cvič. 186a je $\overline{SP} = \overline{SQ} = \varrho$ a středy P, Q rovných tětiv AB, CD leží na kružnici (S, ϱ). — **188.** Označme B průsečík kružnice s polopřímkou opačnou k polopřímce ST. Pak platí: $\sphericalangle SBX = \sphericalangle SXB$ ($\triangle SBX$ je rovnoramenný). Proto $\sphericalangle TBX > \sphericalangle TXB$ a v $\triangle TBX$ je tedy $\overline{TX} < \overline{TB}$. Ježto je zřejmě $\overline{TA} < \overline{TB}$, je B nejvzdálenější bod. — **189.** Tu úsečka AB není průměr kružnice $(S; r)$; menší oblouk leží v $\sphericalangle ASB$, větší ve zbývajícím úhlu vypuklém. — **190.** (Viz obr. 74.) (1) Na polopřímce SY, kde $\overline{SY} > r$, určíme bod X tak, aby $\overline{SX} = r$ a dále pokračujeme jako v textu (od věty „Obráceně . . .“ v polovině str. 196). (2) Je-li Y v $\sphericalangle ASB$ a uvnitř kružnice, jsou dvě možnosti (nehledíme-li k případu, že by bod Y ležel uvnitř úsečky AB), bod Y leží buď v polorovině ABS nebo v polorovině k ní opačné. Tomu odpovídá buď pořádek $SYTX$ nebo pořádek $STYX$ [důkaz jako v případě (1)].

191. Je-li $S \equiv O_1$, je i $O_2 \equiv S$ (soustředné kružnice); je-li $S \not\equiv O_1$, je i $S \not\equiv O_2 \not\equiv O_1$ (pro $k \neq 1$). Obrazem bodu A_1 kružnice l_1 je bod A_2, obrazem poloměru O_1A_1 je úsečka O_2A_2, kde $\overline{O_2A_2} = |k| \cdot \overline{O_1A_1} = |k| \cdot r_1 = r_2$ a obrazem kružnice l_1 je tedy kružnice $l_2 \equiv (O_2; r_2)$. — **192.** a) (2) Je-li $O_1 \not\equiv O_2$, zvolte na l_1 bod X_1, který neleží na přímce O_1O_2 a určete na kružnici l_2 body X_2, X'_2 tak, aby $X'_2O_2X_2 \parallel O_1X_1$. Protože $r_1 \neq r_2$, protnou přímky X_1X_2, $X_1X'_2$ přímku O_1O_2 v různých bodech S_1, S_2; průsečík na přímce X_1X_2 budiž S_1 (leží vně úsečky O_1O_2), průsečík na přímce X_1X_2' budiž S_2 (leží uvnitř úsečky O_1O_2). Ve stejnolehlosti o středu S_1 budiž X_2 obrazem bodu X_1; pak je $k = \frac{r_2}{r_1}$ a obrazem bodu O_1 je bod O_2. Ve stejnolehlosti o středu S_2 budiž X'_2 obrazem bodu X_1; pak je $k = -\frac{r_2}{r_1}$ a obrazem bodu O_1 je bod O_2. Dále viz cvič. 191. — Je-li $r_1 = r_2$, bod S_1 neexistuje, bod S_2 je střed úsečky O_1O_2; místo první stejnolehlosti máme posunutí, druhá stejnolehlost je středová souměrnost. c) Je-li: (1) $\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2$, leží body S_1, S_2 vně kružnic l_1, l_2; (2) $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$, leží S_1 vně kružnic, S_2 je dotykový bod obou kružnic (vnější dotyk); (3) $|r_2 - r_1| < \overline{O_1O_2} < r_2 + r_1$, leží S_1 vně kružnic, S_2 uvnitř obou kružnic; (4) $\overline{O_1O_2} = |r_2 - r_1|$, je S_1 dotykový bod obou kružnic (vnitřní dotyk), S_2 leží uvnitř kružnic; (5) $\overline{O_1O_2} < |r_2 - r_1|$, oba středy leží uvnitř kružnic (pro $O_1 \equiv O_2$ splývají se společným středem). V případě (1) jsou 4 společné tečny, v případě (2) jsou 3, v případě (3) jsou 2, v případě (4) jediná a v případě (5) žádná. — **194.** a) Úhlopříčky jsou si rovny a navzájem se půlí. Nebo: Budiž $\omega = \sphericalangle ASX$, $\varphi = \sphericalangle XSB$; je $\omega + \varphi = 2R$; $\sphericalangle AXB = \sphericalangle AXS + \sphericalangle SXB = \frac{1}{2}$ $[(2R - \omega) + (2R - \varphi)] = R$. b) Budiž S střed přepony AB; budiž Y obraz bodu X v souměrnosti o středu S. Pak $AXBY$ je rovnoběžník s jedním pravým úhlem a tudíž obdélník. Tomu lze opsat kružnici. — **195.** (1) 64°; 148°; 148°; (2) 232°; 64°; 64°. — **196.** a) $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD = R$ (body S_1, S_2 mohou ležet: (1) v různých polorovinách, vyťatých přímkou AB; (2) v téže polorovině vyťaté přímkou AB; (3) nebo jeden leží na přímce AB). S_1S_2 je střední příčka v $\triangle ACD$. (Protože je $CD \perp AB$, $S_1S_2 \perp AB$, je $S_1S_2 \parallel CD$; dále je $\overline{AC} = 2 . \overline{AS_1}$ a tudíž S_1S_2 je střední příčkou v $\triangle ACD$.) b) Buďtež U_1, V_1 středy tětiv UB, VB, pak je $\overline{S_1S_2} > \overline{U_1V_1}$, neboť U_1V_1 je vzdálenost rovnoběžek S_1U_1, S_2V_1. — **197.** Na př. k oběma obloukům AB příslušejí středové úhly o součtu $4R$. — **198.** Ježto je $\overline{AB} = \overline{CD}$, o obvodových úhlech platí: $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = \sphericalangle BDA = \sphericalangle BCA$, t. j. $AD \parallel BC$; $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník. — **199.** $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD = 80°$; $\sphericalangle ABC$ je roven úsekovému úhlu v bodě A nad tětivou AC, t. j. $25° + 48° = 73°$; $\sphericalangle BCD = 2R - \sphericalangle BAD = 100°$; $\sphericalangle CDA = 2R - \sphericalangle ABC = 107°$ (protější úhly ve čtyrúhelníku tětivovém). — **200.** Oba vedlejší úhly k $\sphericalangle CAD$ mají velikost α (vrcholové). Jest $\sphericalangle AEF = \alpha = \sphericalangle AFE$ (srovnejte s úsekovými úhly nad $\widehat{AD}$ nebo $\widehat{AC}$, které jsou rovny příslušným úhlům obvodovým nad týmž obloukem). V rovnoramenném $\triangle AEF$ je tedy $\overline{AF} = \overline{AE}$.

201. Užitím Thaletovy věty. — **202.** V dané kružnici narýsujte střed M jedné tětivy [illegible] má předepsanou velikost; ke kružnici (S; $r = \overline{SM}$) veďte z bodu P tečny. — **203.** a) (1) V obr. 82 je ψ vnější úhel $\triangle\ YBU$ a tedy $\psi > \varphi_1$, který není s ψ vedlejší. (2) Je $\varphi_2 = \sphericalangle\ AUC + \sphericalangle\ CUB > \sphericalangle\ AZC + \sphericalangle\ CZB = \varepsilon$ (poučka o vnějším úhlu trojúhelníka). b) Oblouky v obr. 84abc splňují podmínku, že z každého bodu U takového oblouku je úsečka AB vidět pod úhlem φ. Podle cvič. 203a z bodu Y (obr. 82), který leží uvnitř kružnice a zároveň uvnitř té poloroviny ABU, v níž oblouk leží, je vidět úsečka pod úhlem ψ, který je větší než φ; z bodu Z (obr. 83), který leží vně kružnice, ale uvnitř poloroviny ABU, v níž oblouk leží, je úsečka vidět pod úhlem ε, který je menší než úhel φ. Není tedy uvnitř uvažované polorovivy o hranici AB žádného dalšího bodu, který by splňoval naši úlohu. Body A, B samozřejmě požadavek úlohy nesplňují. — **205.** Nad úsečkou MN sestrojte oblouky, z nichž je tato úsečka vidět pod úhlem α a nad úsečkou NP oblouky, z nichž je tato úsečka vidět pod úhlem β. Určete průsečíků obojích oblouků. — **208.** U pravoúhlého trojúhelníka je bod S středem přepony (viz cvič. 194b). Úhel α trojúhelníka ABC je v opsané kružnici obvodový úhel nad úsečkou BC; když je α úhel ostrý, potom S leží v polorovině BCA a je-li α tupý, leží S v polorovině k ní opačné. Jsou-li všechny úhly trojúhelníka ABC ostré, leží S uvnitř polorovin BCA, CAB, ABC, t. j. uvnitř trojúhelníka. Je-li jeden úhel tupý, musí ležet vně, protože trojúhelník zřejmě nemá na příklad uvnitř poloroviny opačné k polorovině BCA žádného bodu. — **207.** $5^2 - r^2$. — **208.** Pro hledaný bod P platí: a) $\overline{SP}^2 = r^2 + q^2$; body P leží na kružnici (S; $\varrho = \overline{SP}$). b) Body P leží na dané kružnici. c) Body P leží na kružnici (S; $\varrho = \overline{SP'}$), kde P' se střed tětivy AB dané kružnice, při čemž $\overline{AB} = 2q$; úloha je omezena podmínkou $q \leqq r$, při čemž pro $q = r$ máme jediný bod $P \equiv S$. — **209.** $\overline{PS} = 5$. — **210.** $1 \leqq \overline{P_1P_2} \leqq$ (viz cvič. 188).

211. Jsou-li A, B průsečíky obou kružnic, pak každý bod P přímky AB má k oběma kružnicím touž mocnost $\pm\ \overline{PA}\,.\,\overline{PB}$. — **212.** (1) Věta o odvěsně (obr. 92): Určeme mocnost bodu A ležícího vně kružnice (S; r) jednak jako $\overline{AC}^2$, kde C je dotykový bod jedné tečny bodem A ke kružnici vedené. Budiž B protější bod kružnice vzhledem k bodu C a budiž D pata kolmice $CD \perp AB$. Bod D padne dovnitř úsečky BAC (pata výšky v $\triangle\ ABC$, kde $\sphericalangle\ C = R$), při čemž pravoúhlý $\triangle\ BCD$ (kde $\sphericalangle\ D = R$) podle Thaletovy věty má bod S za střed opsané kružnice (cvič. 194b); je to naše kružnice a bod D na ní tedy leží. Pro sečnu ADB pak platí $\overline{PD} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2$. (2) Věta o výšce: Budiž A bod uvnitř kružnice (S; r) a BAD její průměr, jdoucí bodem A. Dále budiž CC' tětiva, jdoucí bodem A, při čemž $CC' \perp AB$. Potom $\triangle\ BDC$ má $\sphericalangle\ C = R$. Mocnost bodu A je $-\overline{AB} \cdot \overline{AD} = -\overline{AC} \cdot \overline{AC'}$ neboli $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AC}^2$ (kde $\overline{AC}$ je velikost výšky pravoúhlého $\triangle\ BDC$). — **213.** (1) Narýsujte přímku a na ní body P, A, B v pořádku PAB tak, aby $\overline{PA} = a$, $\overline{PB} = b$ a dále libovolnou kružnici k, která prochází body A, B (středem je libovolně zvolený bod na ose úsečky AB). Budiž T dotykový bod tečny PT této kružnice; pak je $x = \overline{PT}$. (2) Narýsujte přímku a na ní body A, P, B v pořádku APB tak, aby $\overline{PA} = a$, $\overline{PB} = b$ a dále libovolnou kružnici k o středu S, která prochází body A, B. Polovina tětivy, jdoucí bodem P a kolmé k přímce PS je x. Je-li však $a = b$, je $P \equiv S$ a $x = a$. (Viz též cvič. 131b a text na str. 174.) — **214.** a) (1) Jsou-li přímky AB, t rovnoběžné a o osa úsečky AB, je $o \perp t$ a průsečík obou přímek je dotykový bod hledané kružnice. Střed S pak je průsečíkem os stran $\triangle ABT$. (2) Jsou-li AB, t dvě různoběžky a O jejich průsečík, pak pro dotykový bod T tečny t platí $\overline{OT}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$. Úloha má dvě řešení; bod T může ležet na t na jedné z obou opačných polopřímek o počátku O. b) K bodu A sestrojíme obraz A' podle osy, určené osou úhlu MSN. Hledaná kružnice prochází pak body $A \not\equiv A'$ a dotýká se jedné z přímek MS, NS. Padne-li však A na osu $\sphericalangle MSN$, je $A \equiv A'$, potom kolmice k vztyčená v A k ose $\sphericalangle MSN$ je tečnou hledané kružnice. Přímky SM, SN, k určují rovnoramenný trojúhelník, v němž hledáme kružnici vepsanou a jednu kružnici vně vepsanou.

VII. REJSTŘÍK.

OBSAH

ARITMETIKA

GEOMETRIE

MATEMATIKA

pro I. třídu gymnasií

Zpracovali: Dr František Balada, prof. Dr Eduard Čech, Josef Holubář, Dr Karel Hruška, Dr Marta Chytilová, Dr Vanda Janová, Dr Bedřich Koenig, Dr Emil Mastný, Dr Karel Roessler, Dr Antonín Srb, Dr Josef Šimek, Antonín Tuláček, Rudolf Zelinka

Odpovědný redaktor: prof. Dr František Vyčichlo

Technický redaktor: Ing. Antonín Langer

Obálka: Marie Tůmová

Korektor: Adolf Zima

●

Plánovací skupina 301 20-521 - Schváleno výnosem ministerstva školství, věd a umění ze dne 13. července 1950, č. 61 150/50-I/1, v prvním vydání jako učebnice pro gymnasia - Povoleno MIO č. j. 43 023/51-4-III/1 ze dne 20. února 1951 - Čkm. G 355-I - Sazba: 25. I. 1951 - Tisk: 2. II. 1951 - Vydalo r. 1951 Státní nakladatelství učebnic, vydání první - Náklad 20 000 výt. (1.-20 000. výt.) - Plánovacích archů 14,50 - Autorských archů 12,33 - Vydavatelských archů 13,62 - Papír 221-10 - Formát A 5 - Písmo Plantin - Druh tisku: ofset - Všeobecná daň 1 % - Vytiskla Státní tiskárna, n. p., závod 03, Praha II

CENA SEŠ. VÝTISKU Kčs 24,–

B 75

Čkm. G 355-I

Cena Kčs 24,—

301 20-521