Eduard Čech

Geometrie pro III. třídu středních škol

Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1946, 63 s.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501347

EDUARD ČECH

GEOMETRIE

PRO III. TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

153

CENA Kčs 13,—

Jč
m+f

JEDNOTA ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE

UČEBNICE A POMOCNÉ KNIHY VYDÁVANÉ JEDNOTOU
ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
153

GEOMETRIE

PRO III. TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

Napsal

EDUARD ČECH

S 91 obrazci

Schváleno výnosem ministerstva školství a osvěty ze dne 16. května 1946, čís. A-119 609/46-III/2 pro školy střední a výnosem ze dne 16. června 1946, čís. A-117 716/46-II/1 pro školy měšťanské jako dotisk prvního vydání pro školní rok 1946/47

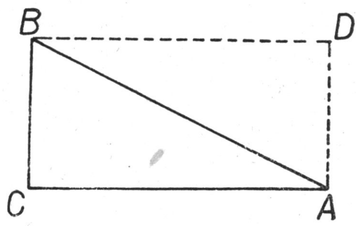
CENA Kčs 13,—

PRAHA 1946
NÁKLADEM JEDNOTY ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
TISKEM KNIHTISKÁRNY „PROMETHEUS“, PRAHA VIII - 94

§ 1. Obsah mnohoúhelníka. Povrch a objem kolmého hranolu.

Víte, že obsah obdélníka dostaneme, znásobíme-li oba rozměry. Při tom si musíme zvoliti určitou jednotku délky a vyjádřiti oba rozměry v téže jednotce; obsah pak vyjde v plošné jednotce příslušné zvolené jednotce délky. Toto důležité upozornění platí také pro výpočet obsahů jiných rovinných obrazců a je nutno míti je stále na paměti, ač nebude v dalším už výslovně uváděno.

Začněme pravoúhlým trojúhelníkem. V obr. 1 máme pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Zvolíme si určitou jednotku délky a označíme si a, b délky odvěsen BC, AC, vyjádřené v této jednotce. Vedeme-li bodem B rovnoběžku s přímkou AC a bodem A rovnoběžku s přímkou BC, protnou se tyto rovnoběžky v bodě D a vznikne nám obdélník $ACBD$. Trojúhelníky ABC, ABD jsou shodné (proč?). Tedy mají stejný obsah. Z toho plyne, že obsah trojúhelníka ABC je polovina obsahu obdélníka $ACBD$, jehož rozměry jsou a, b. Tedy obsah pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami a, b je



Obr. 1.

$$\frac{1}{2}ab \quad \text{neboli} \quad \frac{a}{2}b \quad \text{neboli} \quad a\frac{b}{2}.$$

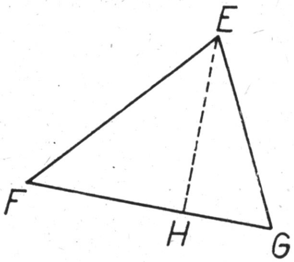
V obr. 2a, 2b máme obecný trojúhelník EFG. V obou obrazcích je vyznačena výška EH trojúhelníka EFG příslušná straně FG.

Slovem **výška** (příslušná straně FG) budeme však nyní rozuměti také délku $\overline{EH}$ úsečky EH. Trojúhelník EFG v obr. 2a je výškou EH rozdělen na dva pravoúhlé trojúhelníky a obsah trojúhelníka EFG dostaneme, sečteme-li obsahy obou pravoúhlých trojúhelníků. Položme

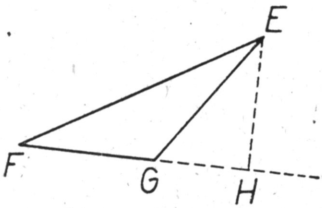
$$\overline{FG} = s, \quad \overline{EH} = v;$$

dále budiž

$$\overline{FH} = s_1, \quad \overline{GH} = s_2, \quad \text{tedy} \quad s_1 + s_2 = s.$$



Obr. 2a.



Obr. 2b.

Pravoúhlý trojúhelník EFH má obsah $s_1 \cdot \dfrac{v}{2}$; pravoúhlý trojúhelník EGH má obsah $s_2 \dfrac{v}{2}$; tedy obsah trojúhelníka EFG je

$$s_1 \frac{v}{2} + s_2 \frac{v}{2} = (s_1 + s_2) \frac{v}{2} = s \frac{v}{2}.$$

K témuž výsledku dospějeme u trojúhelníka EFG z obr. 2b, jehož obsah je patrně rovný rozdílu obsahů pravoúhlých trojúhelníků EFH, EGH. Zase položme

$$\overline{FG} = s, \quad \overline{EH} = v;$$

dále budiž

$$\overline{FH} = s_1, \quad \overline{GH} = s_2, \quad \text{tedy} \quad s_1 - s_2 = s.$$

Obsah trojúhelníka EFG je

$$s_1 \frac{v}{2} - s_2 \frac{v}{2} = (s_1 - s_2) \frac{v}{2} = s \frac{v}{2}.$$

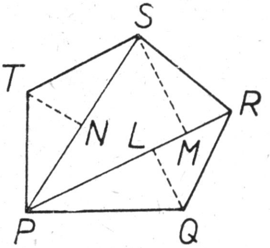
Výsledek: Je-li s délka jedné strany trojúhelníka a je-li v

příslušná výška, obsah trojúhelníka je

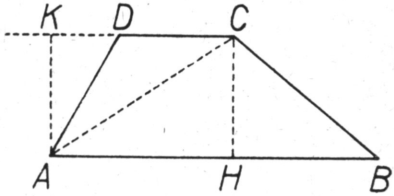
$$\frac{1}{2}sv \quad \text{neboli} \quad \frac{s}{2}v \quad \text{neboli} \quad s\frac{v}{2}.$$

Slovy: obsah trojúhelníka je poloviční součin strany s příslušnou výškou, neboli součin poloviny strany s příslušnou výškou, neboli součin strany s polovinou příslušné výšky.

Jakmile umíme vypočísti obsah trojúhelníka, můžeme také vypočísti obsah libovolného mnohoúhelníka, neboť každý mnohoúhelník



Obr. 3.



Obr. 4.

dá se rozdělit na trojúhelníky. Na př. pětiúhelník $PQRST$ v obr. 3 je rozložen na tři trojúhelníky a obsah každého z nich se dá určit, změříme-li jednu stranu, jakož i příslušnou výšku. Obsah pětiúhelníka $PQRST$ je polovina výrazu

$$\overline{PR}\,.\,\overline{QL} + \overline{PR}\,.\,\overline{SM} + \overline{PS}\,.\,\overline{TN}.$$

Obsah každého čtyrúhelníka se dá určiti tím, že si jej některou úhlopříčkou rozdělíme na dva trojúhelníky. U lichoběžníka vede tento postup k výsledku, který si zapamatujte. V obr. 4 máme lichoběžník $ABCD$. Položme

$$\overline{AB} = s_1, \quad \overline{CD} = s_2$$

a označme si v vzdálenost obou rovnoběžek AB, CD, takže v obr. 4 je

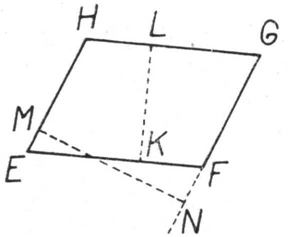
$$\overline{CH} = v, \quad \overline{AK} = v.$$

V trojúhelníku ABC je CH výškou příslušnou straně AB a proto jeho obsah je $\frac{s_1}{2}v$; v trojúhelníku ACD je AK výškou příslušnou straně

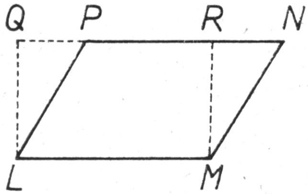
CD a proto jeho obsah je $\frac{s_2}{2} v$. Tedy obsah našeho lichoběžníka je

$$\frac{s_1}{2} v + \frac{s_2}{2} v = \frac{s_1 + s_2}{2} v.$$

Obě rovnoběžné strany lichoběžníka se obyčejně nazývají jeho základnami a vzdálenost obou rovnoběžek se obyčejně nazývá výškou lichoběžníka. Proto můžeme takto vysloviti výsledek, ke kterému jsme dospěli: Obsah lichoběžníka je součin polovičního součtu obou základen s výškou.



Obr. 5.



Obr. 6.

Při odvození vzorce pro obsah lichoběžníka $ABCD$ jsme užili té okolnosti, že strany AB, CD jsou mezi sebou rovnoběžné, ale neužili jsme té okolnosti, že strany AC, BD nejsou mezi sebou rovnoběžné. Proto výsledek, ke kterému jsme dospěli, platí nejen pro lichoběžník, nýbrž také pro rovnoběžník. Dokonce ho můžeme užíti na rovnoběžník dvojím způsobem. Obsah rovnoběžníka $EFGH$ z obr. 5 můžeme určiti tak, že za základny považujeme strany EF, GH; příslušná výška je v obr. 5 označena $\overline{KL}$. Je-li $\overline{EF} = a$, je také $\overline{GH} = a$, takže poloviční součet obou základen je zase a. Tedy obsah rovnoběžníka $EFGH$ v obr. 5 je součin $\overline{EF} \,.\, \overline{KL}$. Druhým způsobem najdeme týž obsah, považujeme-li strany EH, FG za základny; obsah vyjde ve tvaru součinu $\overline{EH} \,.\, \overline{MN}$. U rovnoběžníka máme dvě výšky; jednou výškou je vzdálenost jednoho páru rovnoběžných stran (měřená na kterékoli společné kolmici), druhou výškou je vzdálenost druhého páru rovnoběžných stran (zase měřená na kterékoli společné kolmici); výška příslušná určité straně je vzdálenost této strany od strany protější. Výsledek, ke kterému jsme dospěli, dá se tedy vysloviti takto: Obsah rovnoběžníka je součin kterékoli strany s příslušnou výškou.

Právě vyslovený výsledek dá se odvoditi také jinak (viz obr. 6). Je-li dán rovnoběžník $LMNP$, spusťme s bodů L, M kolmice na přímku NP a označme Q, R jejich paty. Vznikne nám obdélník $LMRQ$. Tento obdélník dostaneme z rovnoběžníka $LMNP$, když napřed připojíme trojúhelník LPQ a potom ubereme trojúhelník MNR. Avšak $LPQ \cong MNR$ (proč?). Tedy obsah rovnoběžníka $LMNP$ je roven obsahu obdélníka $LMRQ$ neboli je roven součinu $\overline{LM} \,.\, \overline{LQ}$ a to jsme chtěli odvoditi.

Budiž dán jakýkoli kvádr. Zvolme si určitou jednotku délky a označme a délku, b šířku a c výšku našeho kvádru, vyjádřené ve zvolené jednotce. Víme, že objem kvádru, vyjádřený v objemové jednotce příslušné zvolené jednotce délky, rovná se součinu abc. Tento součin můžeme počítati tak, že napřed znásobíme mezi sebou čísla a, b a co vyjde, znásobíme číslem c. Avšak ab je obsah podstavy (horní nebo dolní, neboť obě podstavy jsou shodné) vyjádřený v plošné jednotce příslušné zvolené jednotce délky. Tedy objem kvádru dostaneme, znásobíme-li obsah podstavy výškou.

Výsledek, k němuž jsme dospěli, je správný nejen pro kvádr, nýbrž pro libovolný kolmý hranol. Tedy: **objem kolmého hranolu dostaneme, násobíme-li obsah podstavy výškou hranolu.** Slovem podstava zase můžeme rozuměti buďto podstavu dolní nebo také horní, neboť obě podstavy jsou shodné. Také o volbě jednotek délky, obsahu a objemu platí stále totéž, co jsme si právě řekli u kvádru.

Důkaz vzorce pro objem kolmého hranolu provedeme napřed pro případ, že podstava je pravoúhlý trojúhelník. Mysleme si, že pravoúhlý trojúhelník ABC v obr. 1 je dolní podstavou kolmého hranolu, jehož výška je v. Je-li pravoúhlý trojúhelník ABD v obr. 1 dolní podstavou kolmého hranolu se stejnou výškou, tvoří oba ty trojboké hranoly dohromady kvádr, jehož dolní podstavou je obdélník $ACBD$. Je-li P obsah tohoto obdélníka, víme, že objem kvádru je Pv. Avšak oba naše trojboké hranoly jsou shodné, takže objem každého z nich je polovinou objemu kvádru. Tedy objem hranolu s podstavou ABC je součin $\frac{1}{2}P \,.\, v$, a to souhlasí s výše vysloveným obecným vzorcem, neboť $\frac{1}{2}P$ je obsah trojúhelníka ABC.

Dále si mysleme, že trojúhelník EFG v obr. 2a nebo v obr. 2b je dolní podstavou kolmého hranolu s výškou v. Budiž P obsah trojúhelníka EFG; P_1 budiž obsah trojúhelníka EFH, P_2 budiž obsah trojúhelníka EGH. V případě obr. 2a se náš hranol skládá z hranolu s dolní podstavou EFH a s hranolu s dolní podstavou EGH, při čemž výška obou hranolů je v. Protože trojúhelníky EFH, EGH jsou pravoúhlé, víme, že objemy hranolů nad nimi postavených jsou P_1v, P_2v. Tedy objem hranolu postaveného nad trojúhelníkem EFG je

$$P_1v + P_2v = (P_1 + P_2)\, v = Pv$$

v souhlase s výše vysloveným vzorcem. K témuž výsledku dojdeme podobnou úvahou také v případě obr. 2b, kdy objem hranolu postaveného nad trojúhelníkem EFG vyjde ve tvaru

$$P_1v - P_2v = (P_1 - P_2)\, v = Pv.$$

Nyní si snadno rozšíříme náš výsledek také na kolmý hranol, jehož podstavou je libovolný mnohoúhelník. Budiž na př. pětiúhelník $PQRST$ v obr. 3 dolní podstavou kolmého hranolu s výškou v. Je-li P obsah pětiúhelníka a jsou-li P_1, P_2, P_3 obsahy trojúhelníků PQR, PRS, PST, je objem našeho hranolu roven

$$P_1v + P_2v + P_3v = (P_1 + P_2 + P_3)\, v = Pv.$$

Povrch kolmého hranolu je zřejmě dán vzorcem

$$2P + Q,$$

kde P znamená obsah podstavy a Q znamená plášť, t. j. součet obsahů všech pobočných stěn. **Plášť kolmého hranolu je součin obvodu podstavy s výškou.** Odvoďme si to třeba pro hranol s výškou v postavený nad pětiúhelníkem $PQRST$ v obr. 3. Každá pobočná stěna je obdélník, jehož obsah je součin základny s výškou. Proto je

$$Q = \overline{PQ} \,.\, v + \overline{QR} \,.\, v + \overline{RS} \,.\, v + \overline{ST} \,.\, v + \overline{TP} \,.\, v =$$
$$= (\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RS} + \overline{ST} + \overline{TP})\, v = ov,$$

kde o znamená obvod podstavy.

Cvičení k § 1.

I. Obsah mnohoúhelníka.

1. Sestrojte si trojúhelník ABC tak, aby bylo $\overline{AB} = 85$ mm, $\overline{BC} = 72$ mm, $\overline{AC} = 9$ cm. Změřte pečlivě všecky tři výšky a určete trojím způsobem obsah trojúhelníka. Souhlasí navzájem všecky tři výsledky?

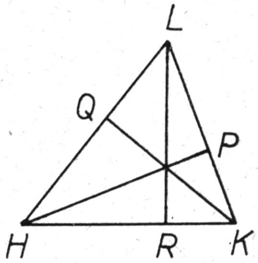
2. Sestrojte si rovnoběžník $DEFG$ tak, aby bylo $\overline{DE} = 63$ mm, $\overline{EF} = 8$ cm, $\sphericalangle DEF = 75°$. Změřte pečlivě obě výšky a určete dvojím způsobem obsah rovnoběžníka.

3. (Viz obr. 7, který vysvětluje označení; HP, KQ, LR jsou výšky trojúhelníka HKL.)

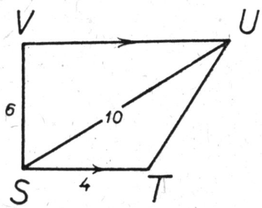
a) Je-li $\overline{HK} = 12$ cm, $\overline{LR} = 18$ cm, čemu se rovná obsah trojúhelníka HKL?

b) Má-li HKL obsah 112 cm² a je-li $\overline{KL} = 14$ cm, čemu se rovná $\overline{HP}$?

c) Je-li $\overline{HP} = 5$ cm, $\overline{HL} = 6$ cm, $\overline{KQ} = 4$ cm, čemu se rovná $\overline{KL}$?



Obr. 7.



Obr. 8.

4. Narýsujte si podle obr. 8 vlastní obrazec, ve kterém je jednotka 1 cm. Vypočtěte, jaký je ve vašem obrazci obsah trojúhelníka STU. Potom vypočtěte, jaká má býti ve vašem obrazci vzdálenost bodu T od přímky SU a přeměřte tuto vzdálenost. (V obrazci je $SV \perp VU$.)

5. a) Narýsujte si kosočtverec $ABCD$ tak, aby bylo $\overline{AC} = 8$ cm, $\overline{BD} = 6$ cm a určete jeho obsah.

b) Dokažte, že obsah kosočtverce je polovina součinu obou úhlopříček.

c) Kosočtverec má obsah 196 cm²; jedna úhlopříčka je polovinou druhé. Určete délky obou úhlopříček.

6. Délky základen lichoběžníka jsou 34,8 cm; 25,6 cm. Výška lichoběžníka je 18,4 cm. Určete obsah lichoběžníka.

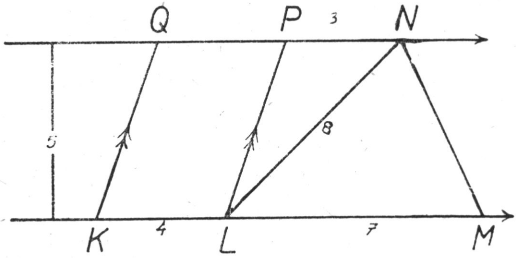
7. Délky základen lichoběžníka $EFGH$ jsou $\overline{EF} = 14$ cm, $\overline{GH} = 6$ cm; obsah lichoběžníka je 72 cm². Určete obsah trojúhelníka FGH.

8. Narýsujte si podle obr. 9 vlastní obrazec, ve kterém je jednotka 1 cm. Vypočtěte obsah lichoběžníka $KMNQ$. Dále vypočtěte obsah rovnoběžníka $KLPQ$ a trojúhelníků LMN, LPN. Určete, jaká má býti vzdálenost bodu L od přímky KQ, dále vzdálenost bodů M a P od přímky LN a přeměřte všecky tři vzdálenosti.

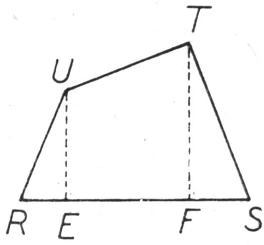
9. Rovnoběžník $ABCD$ má obsah 23,52 dm²; jest $\overline{AB} = 49$ cm, $\overline{AD} = 56$ cm. Vypočtěte obě výšky rovnoběžníka.

10. (Viz obr. 10, který jen vysvětluje označení.) Je-li $\overline{EU} = 238$ m, $\overline{FT} = 316$ m, $\overline{RE} = 95$ m, $\overline{EF} = 174$ m, $\overline{FS} = 82$ m, určete obsah čtyrúhelníka $RSTU$. (V obrazci je $EU \perp RS$, $TF \perp RS$.)

11. Narýsujte si libovolný pětiúhelník (dosti veliký) a určete aspoň dvojím způsobem jeho obsah.



Obr. 9.



Obr. 10.

II. Kolmé hranoly. (Viz též cvič. k § **2**, **53** až **56**.)

12. Podstava kolmého hranolu je lichoběžník $ABCD$ znázorněný v obr. 4; výška hranolu je 8 dm. Je-li $\overline{AB} = 7$ dm, $\overline{CD} = 4$ dm, $\overline{AD} = 35$ cm, $\overline{BC} = 45$ cm, $\overline{CH} = 3$ dm, určete povrch a objem hranolu.

13. Nádoba má tvar kolmého hranolu, jehož podstava má obsah 8,4 dm^2. V nádobě je 5,46 l vody. Do jaké výše sahá voda v nádobě?

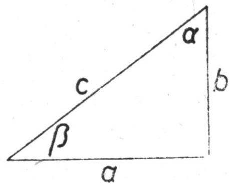
14. Roura má tvar kolmého hranolu s obsahem podstavy 42 cm^2. Rourou protéká voda rychlostí 1,25 m za vteřinu. Kolik vody vyteče za minutu?

15. Kolmý hranol má povrch 13,25 m^2 a objem 5,625 m^3; výška hranolu je 2,5 m. Určete obvod a obsah podstavy.

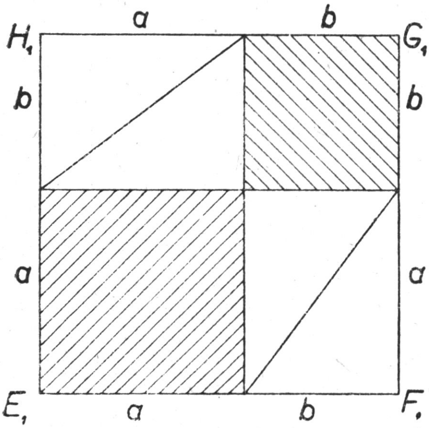
§ 2. Pythagorova věta.

V tomto paragrafu si odvodíme vztah mezi délkami všech tří stran pravoúhlého trojúhelníka, který je jedním z nejdůležitějších vztahů celé geometrie. Říká se mu **Pythagorova věta,** protože prý ji objevil Pythagoras, matematik a filosof z řeckého ostrova Samu, který žil v 6. století př. Kr. Kolem r. 540 př. Kr. se usadil Pythagoras v jižní Italii a založil proslulou školu, která dala Řekům mnoho objevů geometrických a jiných. Žáci Pythagorovi se rozptýlili po smrti svého slavného učitele a roznesli tak známost jeho jména po celém tehdy známém světě.

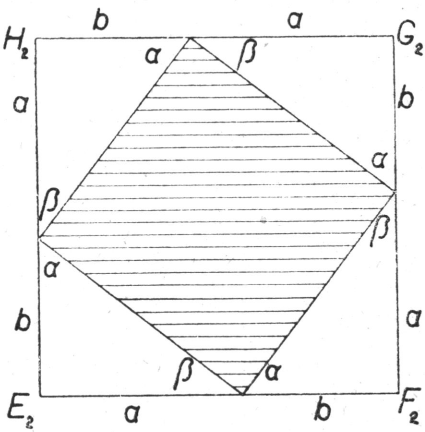
Abychom došli k Pythagorově větě, označme si (viz obr. 11) jako obvykle a, b délky obou odvěsen, c délku přepony, α, β velikosti obou ostrých úhlů. Dále si narýsujme dva shodné čtverce $E_1F_1G_1H_1$ (viz obr. 12) a $E_2F_2G_2H_2$ (viz obr. 13) s délkou strany $a + b$. Čtverec $E_1F_1G_1H_1$ je v obr. 12 rozdělen na čtyři trojúhelníky shodné s trojúhelníkem z obr. 11 a na dva vyčárkované čtverce, jejichž strany mají délky a, b. Čtverec $E_2F_2G_2H_2$ je v obr. 13 rozdělen zase na čtyři trojúhelníky shodné s trojúhelníkem z obr. 11 a na vyčárkovaný čtyrúhelník, jehož strany mají délku c; ježto $\alpha + \beta = 90°$, jsou všecky úhly našeho čtyrúhelníka pravé, takže je to čtverec.



Obr. 11.



Obr. 12.



Obr. 13.

Tím jsme dokázali větu: **Čtverec nad přeponou pravoúhlého trojúhelníka se rovná součtu čtverců nad oběma odvěsnami.** To je právě Pythagorova věta, která se dá vyjádřiti vzorcem

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Podle Pythagorovy věty můžeme vypočísti délku třetí strany pravoúhlého trojúhelníka, známe-li délky ostatních dvou stran. Obecně je

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}, \qquad (*)$$

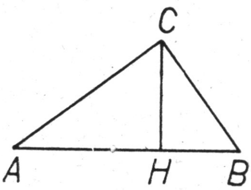
ale je zbytečné učiti se zpaměti těmto třem vzorcům. Stačí si dobře zapamatovati základní tvar věty $a^2 + b^2 = c^2$, ze kterého tvary (*) snadno plynou. Protože délky stran pravoúhlého trojúhelníka je často vhodné označiti jinými písmeny než právě a, b, c, je nutné pamatovati si také slovní znění Pythagorovy věty.

Víme, že u pravoúhlého trojúhelníka můžeme, známe-li dvě ze tří stran a, b, c, počítati třetí podle Pythagorovy věty. Ve spojení s jinými poučkami můžeme Pythagorovy věty užíti i k jiným výpočtům. Všimneme si na př. výpočtu výšky. V ý š k o u p r a v o ú h l é h o t r o j ú h e l n í k a rozumíme obyčejně výšku příslušnou přeponě (na př. délku $\overline{CH}$ v obr. 14), protože výška příslušná odvěsně splyne s druhou odvěsnou. Označíme-li výšku písmenem v, je obsah trojúhelníka ABC v obr. 14

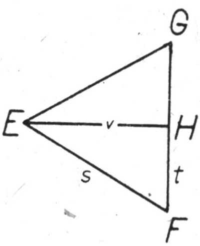
$$\text{jednak } \tfrac{1}{2}cv, \quad \text{jednak } \tfrac{1}{2}ab.$$

Proto platí u pravoúhlého trojúhelníka vzorec

$$cv = ab.$$



Obr. 14.



Obr. 15.

Známe-li dvě strany pravoúhlého trojúhelníka, vypočteme si třetí podle Pythagorovy věty, načež můžeme vypočísti výšku v takto:

$$v = \frac{ab}{c}.$$

Pythagorovy věty můžeme užíti také na př. u obdélníka, neboť úhlopříčka rozdělí obdélník na dva pravoúhlé trojúhelníky. Jsou-li rozměry obdélníka a, b a je-li u délka úhlopříčky, je patrně

$$u = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Pythagorovy věty můžeme užíti také na rovnoramenný trojúhelník, neboť výška příslušná základně rozdělí rovnoramenný trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky, z nichž každý má za přeponu rameno daného trojúhelníka a za odvěsny polovinu základny a výšku příslušnou základně.

Co jsme si řekli o rovnoramenném trojúhelníku, platí také pro trojúhelník rovnostranný. V obr. 15 máme rovnostranný trojúhelník EFG rozdělený výškou na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky EFH, EGH. Položme

$$\overline{EF} = s, \quad \overline{EH} = v, \quad \overline{FH} = t.$$

Víme, že $s = 2t$. Podle Pythagorovy věty je však $t^2 + v^2 = s^2$. Ale $s^2 = (2t)^2 = 4t^2$, tedy $t^2 + v^2 = 4t^2$, z čehož $v^2 = 3t^2$, tedy $v = \sqrt{3} \,.\, t$ neboli

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} s,$$

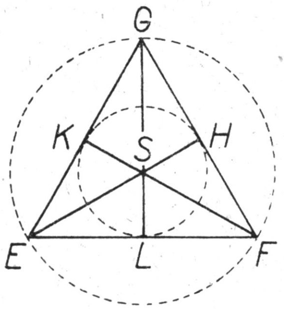
což je vzorec, podle kterého můžeme počítati výšku v rovnostranného trojúhelníka, známe-li délku strany s. (Délky všech tří výšek rovnostranného trojúhelníka jsou si ovšem rovny.)

Úhly trojúhelníka EFH jsou 30°, 60°, 90°; proti nim leží strany, jejichž délky jsme označili t, v, s. Právě jsme odvodili důležitý vztah

$$t : v : s = 1 : \sqrt{3} : 2;$$

tento vztah platí pro strany každého trojúhelníka s úhly 30°, 60°, 90°. Neboť je-li dán takový trojúhelník EFH (viz obr. 15) a připojíme-li k němu trojúhelník souměrně sdružený podle osy EH, dostaneme rovnostranný trojúhelník, ve kterém je EH výškou.

V obr. 16 máme znovu rovnostranný trojúhelník EFG, ve kterém jsou tentokrát vyznačeny všecky tři výšky EH, FK, GL. Víte, že tyto tři výšky se protínají v jednom bodě, který je v obr. 16 označen S. Výšky rozdělí trojúhelník EFG na šest shodných trojúhelníků s úhly 30°, 60°, 90°. Z toho plyne, že



Obr. 16.

$$\overline{SE} = \overline{SF} = \overline{SG} = \tfrac{2}{3}v,$$
$$\overline{SH} = \overline{SK} = \overline{SL} = \tfrac{1}{3}v,$$

kde v znamená společnou délku všech tří výšek. Proto je bod S středem kružnice opsané i středem kružnice vepsané, poloměr opsané kružnice je

$$\tfrac{2}{3}v = \frac{\sqrt{3}}{3} s$$

a poloměr vepsané kružnice je

$$\tfrac{1}{3}v = \frac{\sqrt{3}}{6} s.$$

kde s znamená délku strany.

V předcházejícím se nám několikrát vyskytlo číslo $\sqrt{3}$. Pamatujte si, že zaokrouhleno na čtyři platné cifry je

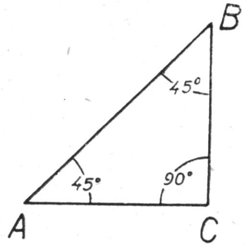
$$\sqrt{3} \doteq 1{,}732.$$

V obr. 17 je trojúhelník ABC s úhly 45°, 45°, 90°, tedy pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník. Z Pythagorovy věty sami snadno odvodíte, že strany našeho trojúhelníka jsou v poměru

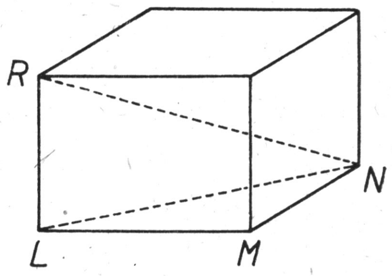
$$1 : 1 : \sqrt{2}.$$

Pamatujte si také tento výsledek a rovněž si pamatujte, že zaokrouhleno na čtyři platné cifry je číslo

$$\sqrt{2} \doteq 1{,}414.$$

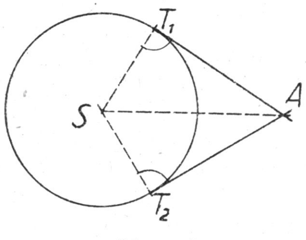


Obr. 17.



Obr. 18.

Pythagorovy věty můžeme užíti u rozmanitých úloh o kružnicích. Budiž na př. dán vně kružnice k (střed S, poloměr r) bod A ve vzdálenosti d od středu (viz obr. 19). Z bodu A lze ke kružnici k vésti dvě tečny; jsou-li T_1, T_2 jejich body dotyku, víme, že obě úsečky AT_1, AT_2 jsou stejně dlouhé. Délku t kterékoli z těchto dvou úseček nazýváme krátce délkou tečny z bodu A ke kružnici k. V obr. 19 je AST_1 pravoúhlý trojúhelník, takže podle Pythagorovy věty je $t^2 + r^2 = d^2$, tedy $t = \sqrt{d^2 - r^2}$.



Obr. 19.

Pythagorovy věty lze užíti také při četných úlohách o tělesech. Všimněme si na př. kvádru znázorněného v obr. 18. Dejme tomu, že rozměry kvádru jsou

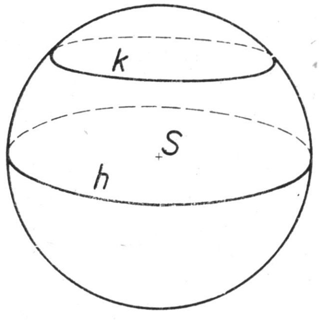
$$\overline{LM} = 6 \text{ cm}, \quad \overline{MN} = 3 \text{ cm}, \quad \overline{LR} = 5 \text{ cm}$$

a že chceme vypočísti délku úhlopříčky NR. Zvolme 1 cm za jednotku délky. Svislá přímka LR a vodorovná přímka LN stojí na sobě kolmo, takže trojúhelník LNR je pravoúhlý; podle Pythagorovy věty je

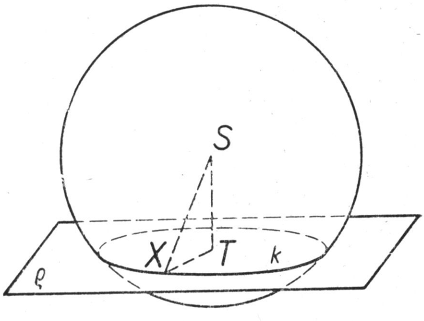
$$\overline{NR}^2 = \overline{LN}^2 + \overline{LR}^2 = \overline{LN}^2 + 25.$$

Dále soudíme podle Pythagorovy věty z pravoúhlého trojúhelníka LMN, že

$$\overline{LN}^2 = \overline{LM}^2 + \overline{MN}^2 = 6^2 + 3^2 = 45.$$



Obr. 20.



Obr. 21.

(Tedy $\overline{LN} = \sqrt{45}$, ale výpočet této odmocniny je pro náš účel zbytečný.) Dosadíme-li za $\overline{LN}^2$ do hořejšího výrazu pro $\overline{NR}^2$, dostaneme

$$\overline{NR}^2 = 45 + 25 = 70; \quad \overline{NR} = \sqrt{70} \doteq 8{,}36.$$

Tedy délka úhlopříčky NR je 8,4 cm s chybou menší než 1 mm.

Je zřejmé, že rovina vedená středem S kulové plochy protne tuto plochu v kružnici, jejíž střed je S a jejíž poloměr se rovná poloměru kulové plochy. Takové kružnice na kulové ploše se jmenují hlavní kružnice kulové plochy (viz kružnici h v obr. 20). Vedle hlavních kružnic jsou na kulové ploše ještě vedlejší kružnice, které mají střed různý od středu kulové plochy a poloměr menší než je poloměr kulové plochy.

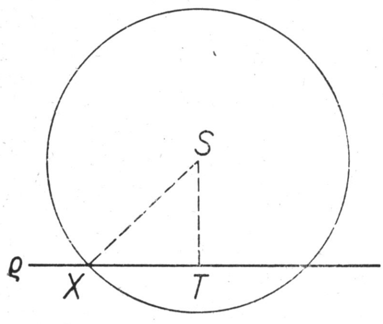
V obr. 21 je znázorněna kulová plocha se středem S a poloměrem r, dále rovina ϱ, která neprochází středem S, ale jejíž vzdálenost d od bodu S je menší než r. Spusťme s bodu S kolmici na rovinu ϱ a označme T její patu, takže $\overline{ST} = d$. Leží-li bod X i v rovině ϱ i na kulové ploše, vznikne nám pravoúhlý trojúhelník STX, jehož přepona SX má délku r, kdežto jedna odvěsna ST má délku d. Podle Pythagorovy věty má druhá odvěsna délku

$$\overline{TX} = \sqrt{r^2 - d^2}. \qquad (*)$$

Obráceně budiž X takový bod v rovině ϱ, že platí (*). Podle Pythagorovy věty je

$$\overline{SX}^2 = \overline{ST}^2 + \overline{TX}^2 = d^2 + (\sqrt{r^2 - d^2})^2 = d^2 + (r^2 - d^2) = r^2,$$

tedy $\overline{SX} = r$, takže bod X leží na kulové ploše. Tedy rovina ϱ protne kulovou plochu v kružnici, jejíž střed je T a jejíž poloměr je $\sqrt{r^2 - d^2}$.



Obr. 22.

Místo obr. 21 jsme mohli užíti jednoduššího obr. 22, ve kterém kulová plocha a rovina ϱ jsou zastoupeny svými průseky s rovinou kolmou na rovinu ϱ a procházející středem S.

V závěru tohoto paragrafu si ještě dokážeme, že Pythagorova věta platí *pouze* pro pravoúhlý trojúhelník. Budiž dán trojúhelník ABC s obvyklým označením a, b, c pro strany, α, β, γ pro úhly. Je-li $\gamma = 90°$, je $c^2 = a^2 + b^2$ podle Pythagorovy věty. Dokážeme, že je

$$c^2 < a^2 + b^2, \text{ je-li } \gamma < 90°,$$
$$c^2 > a^2 + b^2, \text{ je-li } \gamma > 90°.$$

Budiž nejprve $\gamma < 90°$. Není-li c nejdelší strana trojúhelníka, je zřejmě $c^2 < a^2 + b^2$. Je-li však c nejdelší strana, leží proti ní také největší úhel γ. Protože $\gamma < 90°$, je tím spíše $\alpha < 90°$. Proto pata D výšky BD padne dovnitř úsečky AC (viz obr. 23). Položíme-li

$$\overline{BD} = x, \quad \overline{AD} = y,$$

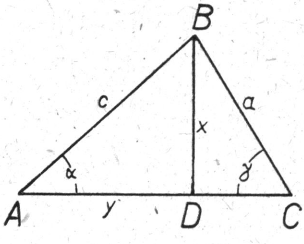
plyne z pravoúhlého trojúhelníka ABD, že

$$c^2 = x^2 + y^2.$$

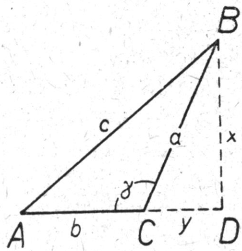
Avšak $\quad x < a, \quad y < b, \quad$ tedy $\quad x^2 + y^2 < a^2 + b^2,$

takže $c^2 < a^2 + b^2$.

Budiž nyní $\gamma > 90°$. Pata D výšky BD padne nyní na prodloužení úsečky AC za bod C (viz obr. 24). Položíme-li



Obr. 23.



Obr. 24.

$$\overline{BD} = x, \quad \overline{CD} = y,$$

jest $\overline{AD} = y + b$. Z pravoúhlého trojúhelníka ABD plyne podle Pythagorovy věty

$$c^2 = x^2 + (y + b)^2$$

neboli

$$c^2 = x^2 + y^2 + 2by + b^2,$$

takže

$$c^2 > x^2 + y^2 + b^2.$$

Avšak z pravoúhlého trojúhelníka BCD plyne podle Pythagorovy věty

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \text{tedy} \quad x^2 + y^2 + b^2 = a^2 + b^2,$$

takže $c^2 > a^2 + b^2$.

Chceme-li rozhodnouti, zda trojúhelník, jehož strany známe, je ostroúhlý, pravoúhlý či tupoúhlý, označíme si strany písmeny a, b, c tak, aby c byla nejdelší strana. Protože proti nejdelší straně leží největší úhel, je náš trojúhelník

ostroúhlý, je-li $c^2 < a^2 + b^2$,
pravoúhlý, je-li $c^2 = a^2 + b^2$,
tupoúhlý, je-li $c^2 > a^2 + b^2$.

Na př.: Poněvadž $3^2 + 4^2 = 5^2$, soudíme, že trojúhelník, jehož strany jsou v poměru $3 : 4 : 5$, je pravoúhlý. To bylo známo v Číně již kolem r. 1100 př. Kr.

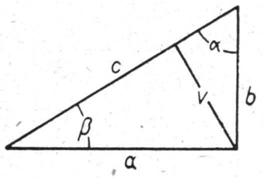
Cvičení k § 2.

Nelze-li výsledek některého cvičení vyjádřiti přesně, zaokrouhlete jej na 2 platné cifry.

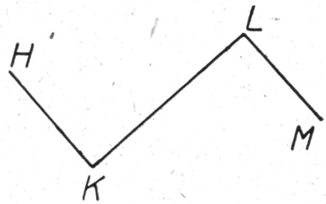
I. Trojúhelníky a čtyřúhelníky.

16. (Viz obr. 25, kde trojúhelník je pravoúhlý.) Jednotka 1 cm.

a) $a = 8$; $b = 15$; určete c.
b) $a = 5$; $b = 12$; určete c.
c) $a = 2{,}4$; $b = 3{,}2$; určete c.
d) $c = 18$; $a = 15$; určete b.
e) $c = 75$; $b = 45$; určete a.



Obr. 25.



Obr. 26.

17. Žebřík dlouhý 10 m je opřen o svislou zeď tak, že jeho spodní konec je vzdálen 6 m ode zdi. Jak vysoko sahá žebřík?

18. Žebřík právě dosáhne vrcholu svislé zdi vysoké 9 m, je-li jeho spodní konec vzdálen 4 m ode zdi. Jak dlouhý je žebřík?

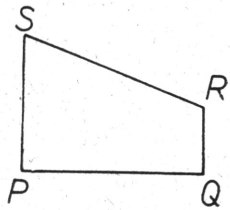
19. Cyklista jel 15 km k severu a potom 5 km k západu. Jak je potom vzdálen od místa, z něhož vyjel?

20. (Viz obr. 26.) Je-li $\overline{HK} = 4$ cm, $\overline{KL} = 8$ cm, $\overline{LM} = 2$ cm, $HK \perp KL$, $KL \perp LM$, určete $\overline{HM}$.

21. Určete délku úhlopříčky obdélníka s rozměry 5,2 dm; 6,8 dm.

22. Úhlopříčky kosočtverce mají délky 6 cm, 10 cm. Určete délku strany.

23. Strana kosočtverce má délku 3,2 cm; jedna úhlopříčka má délku 4,4 cm. Určete délku druhé úhlopříčky.



Obr. 27.

24. (Viz obr. 27, v němž $SP \perp PQ$, $RQ \perp PQ$.)

a) $\overline{PS} = 3$ dm; $\overline{PQ} = 24$ cm; $\overline{QR} = 12$ cm. Určete $\overline{RS}$.

b) $\overline{PS} = 8{,}4$ m; $\overline{QR} = 3{,}6$ m; $\overline{RS} = 7{,}2$ m. Určete $\overline{PQ}$.

25. Ve čtyrúhelníku $EFGH$ je $\sphericalangle EFG = 90°$; $\sphericalangle EGH = 90°$; $\overline{EF} = 12$ cm; $\overline{FG} = 9$ cm; $\overline{GH} = 8$ cm. Určete délku strany $\overline{EH}$ a obsah čtyrúhelníka.

26. AD je výška ostroúhlého trojúhelníka ABC. Je-li $\overline{AB} = 2$ m, $\overline{BC} = 16$ dm, $\overline{CD} = 5$ dm, vypočtěte $\overline{AC}$.

27. V trojúhelníku PQR je $\overline{PQ} = \overline{PR} = 26$ cm, $\overline{QR} = 2$ dm. Určete obsah trojúhelníka.

28. Opakujte úlohu 26 s tím rozdílem, že $\overline{PQ} = \overline{PR} = 3$ dm, $\overline{QR} = 36$ cm.

29. (Viz obr. 25, kde v je výška pravoúhlého trojúhelníka.)

a) Je-li $a = 8$ cm, $b = 6$ cm, určete v.
b) Je-li $a = 2{,}3$ m; $c = 5{,}2$ m, určete v.
c) Je-li $\alpha = 45°$, $a = 36$ cm, určete c, v.
d) Je-li $\alpha = 45°$, $c = 5{,}8$ m, určete a, v.
e) Je-li $\alpha = 60°$, $a = 4$ m, určete b, c.
f) Je-li $\alpha = 30°$, $a = 6$ m, určete b, c.
g) Je-li $\alpha = 60°$, $c = 1$ m, určete a, b.

30. Do kružnice s poloměrem 17 cm je vepsán

a) čtverec; b) rovnostranný trojúhelník.

Určete délku strany.

31. Kružnici s poloměrem 13 cm je opsán rovnostranný trojúhelník. Určete jeho obsah.

32. Délka strany pravidelného šestiúhelníka je 23 cm. Určete poloměr vepsané kružnice.

33. $ABCDEF$ je pravidelný šestiúhelník; $\overline{AB} = 13$ mm.

a) Určete obsah šestiúhelníka.
b) Dokažte, že trojúhelník ACE je rovnostranný; určete délku jeho strany a obsah.

II. Kružnice.

34. Na kružnici s poloměrem 6 cm leží body K, L ve vzdálenosti 8 cm od sebe. Jak daleko je přímka KL od středu kružnice?

35. Ve vzdálenosti 16 km od přímé trati je dělo, kterým lze stříleti do vzdálenosti 30 km. Jak dlouhý kus trati je v dostřelu?

36. Dvě rovnoběžné tětivy kružnice s poloměrem 6 cm mají délky 6 cm a 10 cm. Jaká je vzájemná vzdálenost obou tětiv? [Jsou dva možné případy.]

37. Tětiva kružnice k má délku 12 cm a je vzdálena 25 mm od středu S kružnice k.

a) Jak dlouhá je tětiva kružnice k, která je vzdálena 5 cm od středu S?
b) Jak daleko od středu S je tětiva kružnice k dlouhá 6 cm?

38. Kružnice k má střed S a poloměr 6 cm. Je-li $\overline{AS} = 1$ dm, určete délku tečny vedené z bodu A ke kružnici k.

39. Délka tečny z bodu A ke kružnici k je 6 cm; poloměr kružnice k je 45 mm. Určete vzdálenost bodu A od nejbližšího bodu kružnice k.

III. Tělesa.

40. Místnost je dlouhá 6 m, široká $4\frac{1}{2}$ m, vysoká $3\frac{1}{2}$ m.

a) Určete vzdálenost rohu podlahy od protějšího rohu stropu.
b) Určete vzdálenost rohu podlahy od středu stropu.
c) Určete vzdálenost rohu podlahy od středu místnosti.

41. Hrana krychle měří 8 cm. Určete

a) délku úhlopříčky,
b) vzdálenost středů dvou sousedních stěn.

42. Průměr podstavy rotačního kužele je 14 cm, výška je 12 cm. Určete délku strany.

43. Výška rotačního kužele je 1 dm, délka strany je 16 cm. Určete průměr podstavy.

44. Průměr podstavy rotačního kužele je 8 cm, délka strany je 12 cm. Určete výšku.

45. Délka podstavné hrany pravidelného

a) čtyrbokého, b) trojbokého

jehlanu je 4 cm, výška je 5 cm. Určete délku pobočné hrany.

46. Podstava jehlanu je čtverec $ABCD$ s délkou strany 5 cm; V je vrchol jehlanu. Přímka AV je kolmá na rovinu podstavy; jest $\overline{AV} = 4$ cm. Určete délky hran BV, CV, DV.

47. Čtverec $EFGH$ s délkou strany 2 cm byl přehnut podél úhlopříčky EG tak, že roviny trojúhelníků EFG, EHG stojí na sobě kolmo. Jaká je v přehnuté poloze vzdálenost $\overline{FH}$?

48. Sestavte vzorec pro výšku pravidelného čtyrstěnu s délkou hrany a.

49. Z dřevěné koule poloměru 4 cm byla odříznuta část omezená kruhem o poloměru 2 cm. Zbytek koule je postaven na vodorovnou podložku rovnou kruhovou stěnou. Jak vysoko nad podložkou je nejvyšší bod tělesa?

50. Míč s poloměrem 12 cm pluje na vodě ponořen do hloubky tří čtvrtin průměru. Určete poloměr kružnice, podél níž dosahuje hladina vodní k povrchu míče.

51. Na dutém válci s vnitřním poloměrem 1 dm je postavena koule. Nejvyšší bod koule je 15 cm nad válcem. Určete poloměr koule.

52. Do polokulovité vázy s vnitřním průměrem 6 dm je nalito tolik vody, že největší hloubka vody je 12 cm. Určete poloměr kruhu utvořeného hladinou vody.

53. Podstava kolmého hranolu je rovnoběžník $ABCD$; $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{AD} = 5$ cm, $\sphericalangle BAD = 60°$; výška hranolu je 4 cm. Určete povrch a objem hranolu.

54. Pravidelný trojboký hranol má podstavnou hranu 5 cm, pobočnou hranu 4 cm. Určete povrch a objem hranolu.

55. Pravidelný šestiboký hranol má výšku 5 cm a objem 100 cm^3. Určete povrch hranolu.

56. Podstava kolmého hranolu je rovnoramenný trojúhelník s délkou základny 5 cm. Výška hranolu je 3 cm a objem hranolu je 40 cm³. Určete povrch hranolu.

IV. Obrácení Pythagorovy věty.

57. Rozhodněte, zdali trojúhelník je ostroúhlý, pravoúhlý či tupoúhlý jsou-li při určité volbě délkové jednotky délky stran dány čísly:

a) 4; 5; 6; b) 3; 5; 6; c) 5; 12; 13;
d) 8; 9; 12; e) 12; 36; 34; f) 8; 7; 11;
g) 15; 16; 22; h) 12; 37; 35; i) 25,5; 25,7; 3,2;
j) $4n$; $4n^2 - 1$; $4n^2 + 1$; k) $m^2 + n^2$; $m^2 - n^2$; $2mn$.

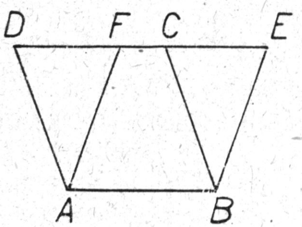
58. Délky úhlopříček rovnoběžníka jsou 5 cm a 12 cm, délka jedné strany je 65 mm. Dokažte, že je to kosočtverec.

59. D je pata výšky AD trojúhelníka ABC; bod D leží uvnitř úsečky BC. Je-li $\overline{AB} = 1$ dm, $\overline{AC} = 75$ mm, $\overline{AD} = 6$ cm, určete $\overline{BC}$ a dokažte, že $\sphericalangle BAC = 90°$.

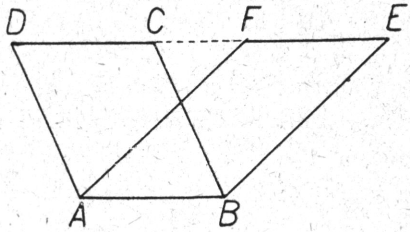
60. Podstava pravidelného čtyrbokého jehlanu s vrcholem V je čtverec $EFGH$ se stranou 4 cm. Pobočné stěny jsou rovnostranné trojúhelníky. Dokažte, že $\sphericalangle EVG = 90°$ a určete výšku jehlanu.

§ 3. Proměna obrazců. Euklidovy věty.

V § 1 jsme poznali, jak se dá počítati obsah jednoduchých rovinných obrazců. Tyto poznatky si nyní doplníme studiem obrazců, které mají různý tvar, ale týž obsah. Budeme krátce říkati, že dva obrazce



Obr. 28a.



Obr. 28b.

jsou si rovny, mají-li týž obsah. Jsou-li dva obrazce shodné, jsou si rovny; ale dva obrazce, které jsou si rovny, nemusí býti shodné.

Počněme studiem rovnoběžníků! Mají-li dva rovnoběžníky $ABCD$, $ABEF$ společnou stranu a leží-li protější strany CD, EF v téže přímce, jsou si ty dva rovnoběžníky rovny (viz obr. 28a, b). Poučku právě vyslovenou můžeme si odvoditi ze známého vzorce pro obsah rovnoběžníka. Neboť tento obsah je $\overline{AB} \,.\, v$, kde v znamená výšku příslušnou straně AB, která je stejná u obou rovnoběžníků $ABCD$, $ABEF$. Ale můžeme si dokázati naši poučku také jinak. Za tím účelem si všimněme trojúhelníků ADF, BCE. Jest $\sphericalangle ADF = \sphericalangle BCE$ (souhlasné úhly mezi rovnoběžkami) a z téhož důvodu je $\sphericalangle AFD = \sphericalangle BEC$; mimoto je $\overline{AD} = \overline{BC}$ (protější strany rovnoběžníka). Tedy

$$ADF \cong BCE \quad (suu)$$

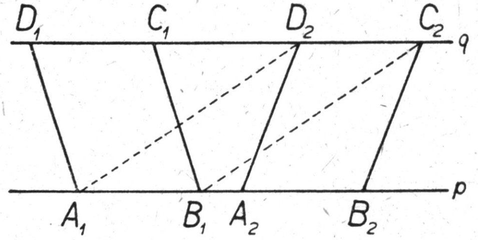
a proto trojúhelníky ADF, BCE jsou si rovny. Nyní si všimněme lichoběžníka $ABED$. Ubereme-li od tohoto lichoběžníka trojúhelník BCE, vznikne rovnoběžník $ABCD$; ubereme-li však od téhož lichoběžníka trojúhelník ADF, vznikne rovnoběžník $ABEF$. Protože oba trojúhelníky jsou si rovny a každý z nich byl ubrán od téhož lichoběžníka, jsou si rovnoběžníky $ABCD$, $ABEF$ rovny, což jsme měli dokázati.

Poznámka. V případě obr. 28a jsme místo lichoběžníka $ABED$ mohli také užíti lichoběžníka $ABCF$. Připojíme-li k lichoběžníku $ABCF$ nejprve trojúhelník ADF, vznikne rovnoběžník $ABCD$; připojíme-li však k témuž lichoběžníku trojúhelník BCE rovný trojúhelníku ADF, vznikne rovnoběžník $ABEF$. Proto jsou si rovny oba rovnoběžníky v obr. 28a; ale tento postup selže u obr. 28b.

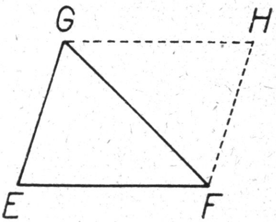
Je-li u rovnoběžníků $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ strana A_1B_1 stejně dlouhá jako strana A_2B_2, leží-li ty dvě strany v téže přímce p, a leží-li také obě protější strany v téže přímce q, jsou si oba rovnoběžníky rovny. Také tato poučka plyne ihned ze vzorce pro obsah rovnoběžníka, neboť obsahy našich rovnoběžníků jsou

$$\overline{A_1B_1} \,.\, v = \overline{A_2B_2} \,.\, v,$$

kde táž délka v znamená i výšku rovnoběžníka $A_1B_1C_1D_1$ příslušnou straně A_1B_1 i výšku rovnoběžníka $A_2B_2C_2D_2$ příslušnou straně A_2B_2. Bez užití vzorce pro obsah můžeme dokázati naši poučku takto (viz obr. 29). Všimneme si čtyrúhelníka $A_1B_1C_2D_2$. Jest $A_1B_1 \parallel D_2C_2$; mimoto je však $\overline{A_1B_1} = \overline{D_2C_2}$, neboť obě ty délky jsou rovny téže délce $\overline{A_2B_2}$. Tedy $A_1B_1C_2D_2$ je rovnoběžník. Tomuto rovnoběžníku je podle předešlé poučky roven jednak rovnoběžník $A_1B_1C_1D_1$, neboť oba rovnoběžníky $A_1B_1C_1D_1$, $A_1B_1C_2D_2$ mají společnou stranu A_1B_1 a protější strany leží v téže přímce q; témuž rovnoběžníku $A_1B_1C_2D_2$ je však také roven rovnoběžník $A_2B_2C_2D_2$, neboť oba rovnoběžníky mají společnou stranu C_2D_2 a protější strany leží v téže přímce p. Tedy jsou si rovny rovnoběžníky $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, jak jsme chtěli dokázati.



Obr. 29.



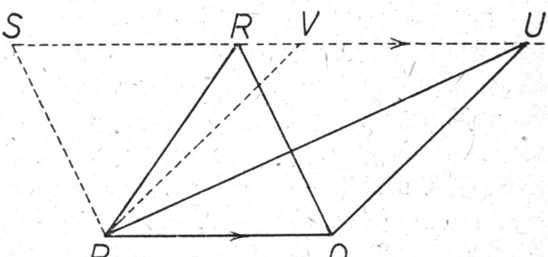
Obr. 30.

Od rovnoběžníků přejdeme snadno ke trojúhelníkům, neboť každý trojúhelník je polovina rovnoběžníka. Je-li dán libovolný trojúhelník EFG (viz obr. 30), vedeme si vrcholem F rovnoběžku se stranou EG a vrcholem G rovnoběžku se stranou EF. Vznikne nám rovnoběžník $EFHG$. Protože protější strany rovnoběžníka jsou si rovny, jest

$$EFG \cong HGF \quad (sss).$$

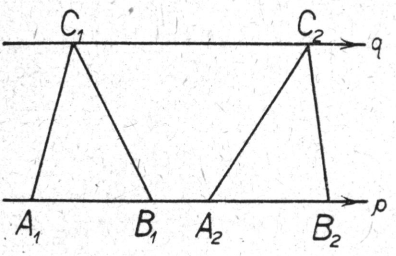
Proto oba trojúhelníky EFG, HGF jsou si rovny, takže každý z nich je polovinou rovnoběžníka $EFHG$ (t. j. obsah trojúhelníka je polovina obsahu rovnoběžníka).

Mají-li dva trojúhelníky PQR, PQU společnou stranu PQ a je-li spojnice RU protějších vrcholů rovnoběžná s přímkou PQ, jsou si oba trojúhelníky rovny. Vyložte sami, jak lze tuto poučku odůvodnit ze vzorce pro obsah trojúhelníka! Bez užití vzorce ji dokážeme takto (viz obr. 31). Sestrojíme si rovnoběžníky $PQRS$, $PQUV$, které mají společnou stranu PQ; protože protější strany

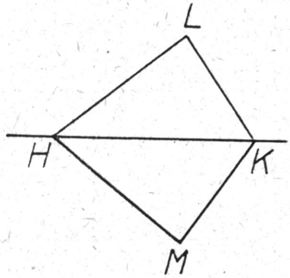


Obr. 31.

RS, UV leží v téže přímce, jsou si oba rovnoběžníky $PQRS$, $PQUV$ rovny. Ale trojúhelník PQR je polovina rovnoběžníka $PQRS$ a trojúhelník PQU je polovina rovnoběžníka $PQUV$, takže oba trojúhelníky jsou si rovny.



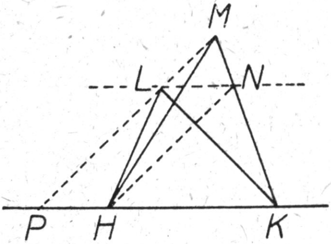
Obr. 32.



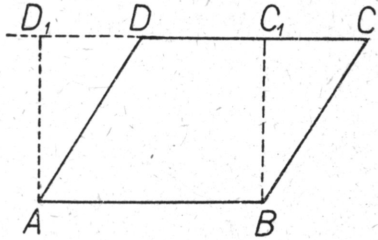
Obr. 33.

Je-li u trojúhelníků $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ strana A_1B_1 stejně dlouhá jako strana A_2B_2, leží-li ty dvě strany v téže přímce p, a když protější vrcholy C_1, C_2 buďto splynou nebo leží na rovnoběžce q s přímkou p, jsou si oba trojúhelníky rovny (viz obr. 32). Odůvodněte sami tuto poučku napřed pomocí vzorce pro obsah trojúhelníka, potom bez užití tohoto vzorce. Proveďte důkaz také pro případ, že body C_1, C_2 splynou!

Poučky, které jsme dosud poznali v tomto paragrafu, dají se v jistém smyslu obrátit. Spokojíme se s jedním příkladem. Mějme dva trojúhelníky HKL, HKM, se společnou stranou HK, které jsou si rovny. Můžeme tvrdit, že přímka LM je rovnoběžná s přímkou HK? Obr. 33 ukazuje, že nikoli, neboť je $HKL \cong HKM$, ale přes to není $LM \parallel HK$. Platí však tato poučka. Jsou-li si rovny trojúhelníky HKL, HKM se společnou stranou HK a leží-li oba body L, M na téže straně od přímky HK, jest $LM \parallel HK$. Abychom si to dokázali, předpokládejme, že přímka LM je různoběžná s přímkou HK, takže přímky HK, LM mají společný bod P; máme dokázati, že oba trojúhelníky HKL, HKM nemohou si býti rovny. Protože body L, M leží oba po téže straně od přímky HK, musí ležeti bod P na prodloužení úsečky LM buďto za bod L nebo za bod M. Pro určitost nechť leží P třeba na prodloužení úsečky LM za bod L (viz obr. 34). Bod L leží uvnitř strany MP trojúhelníka PKM. Rovnoběžka vedená bodem L s protější stranou PK tohoto trojúhelníka protne třetí stranu KM v bodě N. Trojúhelník HKM je pak zřejmě větší než trojúhelník HKN. Avšak trojúhelník HKN se rovná trojúhelníku HKL, neboť oba trojúhelníky mají společnou stranu HK a mimoto je $LN \parallel HK$. Tedy trojúhelník HKL je menší než trojúhelník HKM.



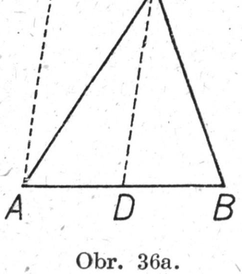
Obr. 34.



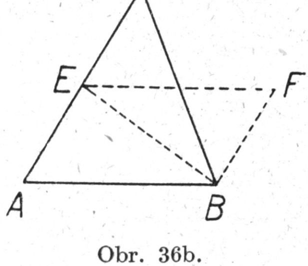
Obr. 35.

Nyní si promluvíme o t. zv. proměně obrazců. To znamená, že se budeme učit, jak se sestrojí obrazec, který se rovná danému obrazci a jehož tvar vyhovuje předepsaným podmínkám.

V obr. 35 je naznačeno, jak lze rovnoběžník $ABCD$ proměniti v obdélník ABC_1D_1. Popište sami konstrukci obdélníka! Obdélník je roven rovnoběžníku, protože mají společnou stranu AB a protější strany CD, C_1D_1 leží obě v téže přímce.



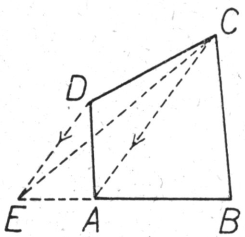
Obr. 36a.



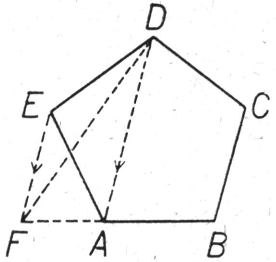
Obr. 36b.

V obr. 36a a 36b jsou naznačeny dva způsoby proměny trojúhelníka ABC na rovnoběžník. V obr. 36a je D střed úsečky AB. Trojúhelník ADC je polovinou rovnoběžníka $ADCE$; avšak trojúhelníky ADC, DBC jsou si rovny (proč?), takže trojúhelník ADC je také polovinou trojúhelníka ABC, takže tento trojúhelník se rovná rovnoběžníku $ADCE$. V obr. 36b je E střed úsečky AC; trojúhelník ABE je jednak polovinou rovnoběžníka $ABFE$, jednak polovinou trojúhelníka ABC (proč?). Proto trojúhelník ABC se rovná rovnoběžníku $ABFE$.

V obr. 37a je naznačeno, jak lze čtyrúhelník $ABCD$ proměniti na trojúhelník EBC. Bod E je průsečík přímky AB s rovnoběžkou vedenou bodem D k přímce AC. Trojúhelníky ACD, ACE mají společnou



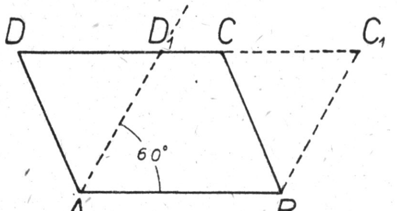
Obr. 37a.



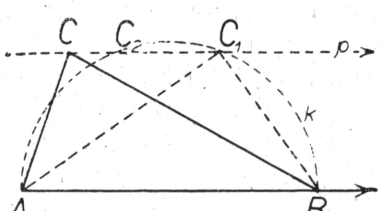
Obr. 37b.

stranu AC a protější vrcholy D, E leží na rovnoběžce s přímkou AC; proto trojúhelníky ACD, ACE jsou si rovny. Připojíme-li trojúhelník ABC ke trojúhelníku ACD, vznikne čtyrúhelník $ABCD$; připojíme-li však týž trojúhelník ABC k trojúhelníku ACE, vznikne trojúhelník BEC. Proto je čtyrúhelník $ABCD$ roven trojúhelníku EBC.

V obr. 37b je naznačeno, jak lze pětiúhelník $ABCDE$ proměniti na čtyrúhelník $FBCD$. Popište sami konstrukci a odůvodněte ji! Podobným způsobem lze každý mnohoúhelník proměniti v jiný, jehož



Obr. 38.

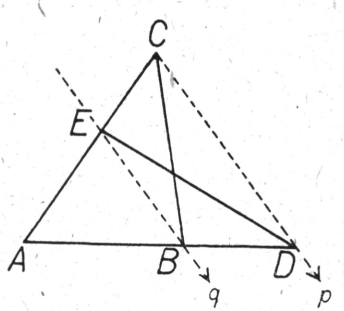


Obr. 39.

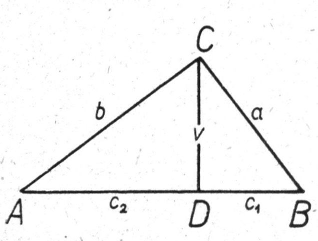
počet stran je o jednu menší. Proto můžeme každý mnohoúhelník postupně proměniti v trojúhelník; protože trojúhelník dovedeme proměniti v rovnoběžník a tento v obdélník, můžeme každý mnohoúhelník proměniti v obdélník.

V obr. 38 je naznačeno, jak lze rovnoběžník $ABCD$ proměniti v rovnoběžník ABC_1D_1, u kterého $\sphericalangle BAD_1 = 60°$. V obr. 39 je naznačeno, jak lze trojúhelník ABC proměniti v trojúhelník ABC_1, u kterého $\sphericalangle AC_1B = 90°$. Popište sami tyto konstrukce a odůvodněte je! (V obr. 39 je $p \parallel AB$ a k je polokružnice nad průměrem AB.)

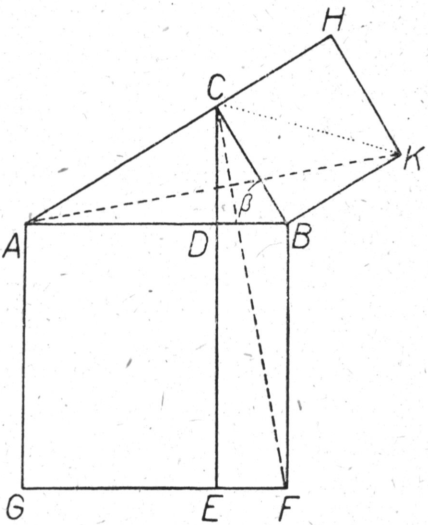
V obr. 40 je naznačeno, jak lze trojúhelník ABC proměniti v trojúhelník ADE, u kterého $\overline{AD}$ je daná délka větší než $\overline{AB}$. Vedeme napřed spojnici p bodů C, D a potom bodem B rovnoběžku q s přímkou p, která protne přímku AC v hledaném bodě E. Odůvodnění: Trojúhelníky BEC, BED mají společnou stranu BE a protější vrcholy C, D leží na rovnoběžce s přímkou BE; proto jsou si trojúhelníky rovny. Připojíme-li však trojúhelník BEC ke trojúhelníku ABE, vznikne trojúhelník ABC; připojíme-li trojúhelník BED k témuž trojúhelníku ABE, vznikne trojúhelník ADE. Proto jsou si trojúhelníky ABC, ADE rovny, jak jsme chtěli dokázati. Týž obr. 40 také vysvětluje, jak lze obráceně trojúhelník ADE proměniti v trojúhelník ABC, ve kterém $\overline{AB}$ je daná délka menší než $\overline{AD}$. Popište sami konstrukci!



Obr. 40.



Obr. 41.



Obr. 42.

Nyní se ještě naučíme, jak lze proměnit obdélník na čtverec. Protože umíme libovolný mnohoúhelník proměnit na obdélník, budeme potom umět proměnu každého mnohoúhelníka na čtverec. Proměna obdélníka na čtverec se dá provésti podle kterékoli ze dvou pouček o pravoúhlém trojúhelníku, kterým se říká **věty Euklidovy**, a to Euklidova věta o výšce a Euklidova věta o odvěsně. V obr. 41 máme pravoúhlý trojúhelník ABC rozdělený výškou CD na dva pravoúhlé trojúhelníky. Pata výšky D rozdělí přeponu AB na dvě úsečky AD, BD, kterým říkáme krátce **úseky na přeponě;** BD je úsek přilehlý odvěsně a a jeho délku značíme c_1; AD je úsek přilehlý odvěsně b a jeho délku značíme c_2.

Euklidova věta o výšce zní: Čtverec nad výškou pravoúhlého trojúhelníka rovná se obdélníku, jehož rozměry jsou oba úseky přepony. Krátce je vyjádřena vzorcem

$$v^2 = c_1 c_2.$$

Euklidova věta o odvěsně zní: Čtverec nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka rovná se obdélníku, jehož rozměry jsou přepona a přilehlý úsek. Pro odvěsnu a je vyjádřena vzorcem

$$a^2 = c_1 c,$$

pro odvěsnu b vzorcem

$$b^2 = c_2 c.$$

Dokážeme si napřed Euklidovu větu o odvěsně. Stačí ovšem provésti důkaz pro odvěsnu a. V obr. 42 máme opět pravoúhlý trojúhelník ABC a jeho výšku CD. Dále je v obrazci sestrojen čtverec $ABFG$ nad přeponou a čtverec $BCHK$ nad odvěsnou a. Přímka CD rozdělí čtverec $ABFG$ na dva obdélníky $ADEG$, $BDEF$. Máme dokázati, že obdélník $BDEF$ se rovná čtverci $BCHK$. Polovina obdélníka $BDEF$ je trojúhelník BDF; polovina čtverce $BCHK$ je trojúhelník BCK. Proto stačí dokázati, že trojúhelník BDF se rovná trojúhelníku BCK. Avšak trojúhelník BDF se rovná trojúhelníku BCF, neboť mají společnou stranu BF a spojnice CD protějších vrcholů je rovnoběžná s přímkou BF; podobně trojúhelník BCK se rovná trojúhelníku BAK, neboť mají společnou stranu BK a spojnice AC protějších vrcholů je rovnoběžná s přímkou BK. Proto stačí dokázati, že trojúhelník BCF se rovná trojúhelníku BAK a důkaz bude hotov, odůvodníme-li, že je dokonce

$$BCF \cong BKA \quad (sus).$$

To je však snadné, neboť

$$\overline{BC} = \overline{BK} \text{ (strany čtverce } BCHK\text{)},$$
$$\overline{BF} = \overline{BA} \text{ (strany čtverce } ABFG\text{)}$$

a z obr. 99 je patrné, že

$$\sphericalangle CBF = \beta + 90°, \quad \sphericalangle KBA = \beta + 90°, \text{ tedy } \sphericalangle CBF = \sphericalangle KBA.$$

Proveďte sami znovu týž důkaz, tentokrát pro odvěsnu b!

Při důkaze Euklidovy věty o odvěsně jsme se obešli bez znalosti Pythagorovy věty. Proto si můžeme znovu odvodit Pythagorovu větu na základě věty právě dokázané. Je to velmi snadné, neboť ze vzorců

$$a^2 = c_1 c, \quad b^2 = c_2 c$$

plyne

$$a^2 + b^2 = (c_1 + c_2)\, c,$$

což už je Pythagorova věta, neboť zřejmě $c_1 + c_2 = c$. Tímto způsobem postupuje Euklid ve svých proslulých Základech.

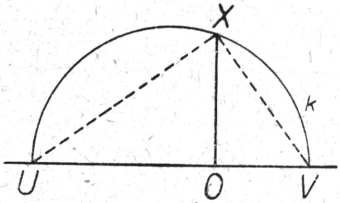
Euklidovu větu o výšce odvodíme snadno z Euklidovy věty o odvěsně, užijeme-li Pythagorovy věty na pravoúhlý trojúhelník BDC (viz obr. 41). Tím dostaneme

$$v^2 = a^2 - c_1^2;$$

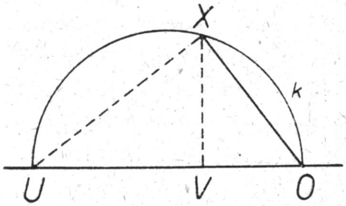
za a^2 dosadíme podle Euklidovy věty o odvěsně hodnotu $c_1 c$ a dostaneme

$$v^2 = c_1 c - c_1^2 = c_1 (c - c_1) = c_1 c_2,$$

neboť $c - c_1 = c_2$.



Obr. 43.



Obr. 44.

Máme-li obdélník, jehož rozměry jsou u, v, proměniti na čtverec, můžeme postupovati dvojím způsobem (viz obr. 43 a 44). V obou obrazcích je $\overline{OU} = u$, $\overline{OV} = v$ a strana hledaného čtverce je $x = \overline{OX}$. V obr. 43 je sestrojena polokružnice k nad průměrem UV; kolmice vztyčená v bodě O k přímce UV protne k v hledaném bodě X. Odůvodnění: Podle Thaletovy věty trojúhelník UVX má pravý úhel při vrcholu X, takže podle Euklidovy věty o výšce je $\overline{OX}^2 = \overline{OU} \,.\, \overline{OV}$ neboli $x^2 = uv$. V obr. 44 předpokládáme, že $u > v$; v obrazci je sestrojena polokružnice k nad průměrem OU; kolmice vztyčená v bodě V k přímce UV protne k v hledaném bodě X. Odůvodnění: Podle Thaletovy věty má trojúhelník OUX pravý úhel při vrcholu X, takže podle Euklidovy věty o odvěsně je $\overline{OX}^2 = \overline{OU} \,.\, \overline{OV}$ neboli $x^2 = uv$.

Týž význam jako rovnice

$$x^2 = uv$$

má úměra

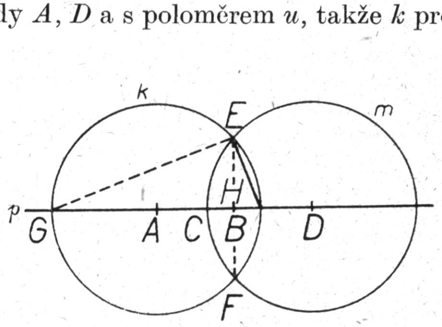
$$u : x = x : v;$$

proto říkáme, že délka x je **střední geometrická úměrná** délek u, v.

Naučili jsme se dvěma konstrukcím střední geometrické úměrné x dvou délek u, v, znázorněným v obr. 43 a 44. Při obou je třeba rozpůliti úsečku, abychom mohli sestrojiti polokružnici k. V obr. 45 je znázorněna jednodušší konstrukce, při které půlení odpadne; opět předpokládáme, že je $u > v$. Na přímku p naneseme postupně délky

$$\overline{AB} = u, \quad \overline{BC} = v, \quad \overline{CD} = u$$

tak, aby bod C byl mezi body A, B a bod B mezi body C, D. Potom sestrojíme kružnice k, m se středy A, D a s poloměrem u, takže k prochází bodem B, m bodem C. Je-li E jeden průsečík obou kružnic, je $\overline{BE} = x$. Odůvodnění: Budiž F druhý průsečík kružnic k, m, G druhý průsečík kružnice k s přímkou p a H průsečík přímky EF s přímkou p. Podle konstrukce je EF osa úsečky AD, takže je $EH \perp p$ a mimoto je $\overline{AH} = \overline{HD}$. Protože je také $\overline{AB} = \overline{CD}$, je



Obr. 102.

$$\overline{AB} - \overline{AH} = \overline{CD} - \overline{HD}$$

neboli $\overline{BH} = \overline{CH}$, takže $\overline{BH} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ neboli $\overline{BH} = \frac{1}{2}v$. Trojúhelník BEG má podle Thaletovy věty pravý úhel při vrcholu E a EH je výška tohoto trojúhelníka, takže podle Euklidovy věty o odvěsně je

$$\overline{BE}^2 = \overline{BG} \,.\, \overline{BH}.$$

Avšak $\overline{BG} = 2u$, $\overline{BH} = \frac{1}{2}v$, $2u \,.\, \frac{1}{2}v = uv$, takže $\overline{BE}^2 = uv$, tedy $\overline{BE} = x$, jak jsme chtěli dokázati.

Známe-li u pravoúhlého trojúhelníka ABC dvě ze šesti hodnot a, b, c, v, c_1, c_2 (viz obr. 41), můžeme vypočísti ostatní čtyři hodnoty podle vzorců, které nám jsou známy. Je to především zřejmý vzorec

$$c_1 + c_2 = c, \quad \text{dále vzorec} \quad ab = cv,$$

který známe z § 2 (str. 12), potom Euklidovy věty

$$v^2 = c_1c_2, \quad a^2 = c_1c, \quad b^2 = c_2c,$$

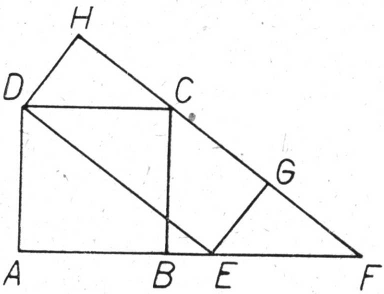
konečně je to Pythagorova věta, které můžeme užíti nejen na trojúhelník ABC, nýbrž i na trojúhelníky ACD, BCD, což dává vzorce

$$c^2 = a^2 + b^2; \quad a^2 = c_1{}^2 + v^2, \quad b^2 = c_2{}^2 + v^2.$$

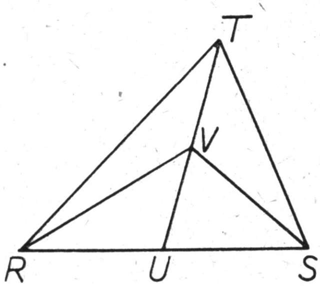
Cvičení k § 3.

I. Rovné rovnoběžníky a trojúhelníky.

61. V obr. 46 $ABCD$ je čtverec, $DEGH$ je obdélník; dokažte, že se oba sobě rovnají. [Porovnejte je s rovnoběžníkem $CDEF$.]



Obr. 46.



Obr. 47.

62. $KLMN$ je rovnoběžník; P je střed strany KN; bod Q leží na prodloužení úsečky KL a jest $\overline{KL} = \overline{LQ}$. Dokažte, že trojúhelník PQN se rovná polovině rovnoběžníka $KLMN$.

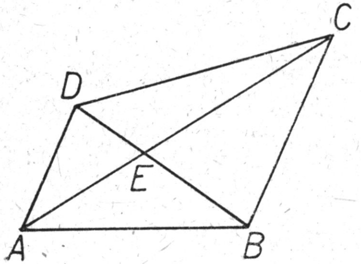
63. V obr. 47 U je střed úsečky RS a V je střed úsečky TU. Dokažte, že trojúhelníky RTV, STV jsou si rovny.

64. (Viz obr. 48.)

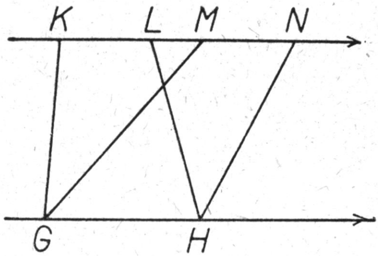
a) Je-li $AD \parallel BC$, který trojúhelník v obrazci je rovný trojúhelníku ABC?

b) Je-li $AD \parallel BC$, dokažte, že trojúhelníky ABE, CDE jsou si rovny.

c) Je-li E střed úsečky BD, dokažte, že trojúhelníky ABC, ACD jsou si rovny.



Obr. 48.



Obr. 49.

65. V obr. 49 je $\overline{KL} = \overline{MN}$; dokažte, že lichoběžníky $GHLK$, $GHNM$ jsou si rovny. (Neužívejte vzorce pro obsah lichoběžníka.)

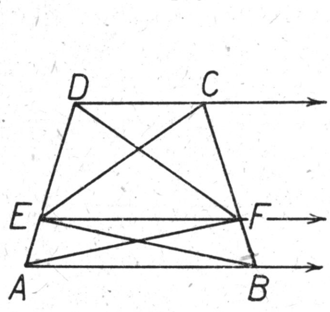
66. (Viz obr. 50.)

a) Dokažte, že trojúhelníky BCE, ADF jsou si rovny.

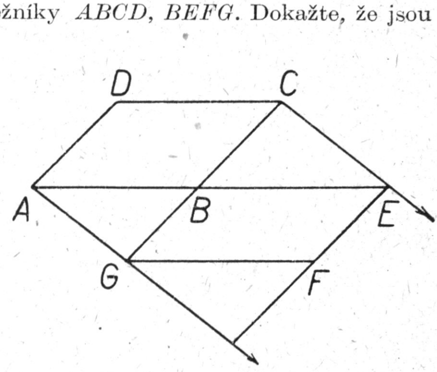
b) Zvolte si bod G na úsečce AB a bod H na úsečce CD. Dokažte, že čtyrúhelník $EGFH$ se rovná trojúhelníku ADF.

67. Narýsujte si rovnoběžník $PQRS$; zvolte si bod X na straně PS a bod Y na prodloužení strany PQ za bod Q. Dokažte, že trojúhelníky QRX, RSY jsou si rovny.

68. V obr. 51 jsou dva rovnoběžníky $ABCD$, $BEFG$. Dokažte, že jsou si rovny. [Veďte spojnice AC, EG.]



Obr. 50.



Obr. 51.

69. Narýsujte si libovolný čtyrúhelník $KLMN$. Sestrojte bod H tak, aby bylo $KH \parallel MN$, $LH \parallel MK$. Dokažte, že lichoběžník $HKMN$ se rovná čtyrúhelníku $KLMN$.

70. Sestrojte si čtyrúhelník $TYXZ$ tak, aby úhlopříčka TX půlila úhlopříčku YZ. Dokažte, že čtyrúhelník $TYXZ$ je rozpůlen úhlopříčkou TX.

II. Proměna obrazců.

71. Narýsujte si pravidelný šestiúhelník s délkou strany 4 cm a vypočtěte jeho obsah na dvě platné cifry. Potom proměňte šestiúhelník na obdélník, změřte jeho rozměry, z nich vypočtěte obsah obdélníka a porovnejte s obsahem šestiúhelníka.

72. Narýsujte si libovolný pětiúhelník. Proměňte jej dvojím způsobem na trojúhelník. U každého z obou trojúhelníků změřte jednu stranu a příslušnou výšku. Podle provedených měření vypočtěte obsahy obou trojúhelníků a porovnejte oba výsledky.

73. Narýsujte si libovolný čtyrúhelník. Proměňte jej dvojím způsobem na obdélník. Vypočtěte a porovnejte obsahy obou obdélníků.

74. Narýsujte si trojúhelník ABC tak, aby bylo $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{AC} = 5$ cm, $\overline{BC} = 7$ cm.

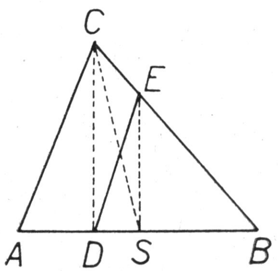
a) Na polopřímce AB určete body D, E tak, že $\overline{AD} = 5$ cm, $\overline{AE} = 7$ cm. Sestrojte trojúhelníky ADF, AEG rovné trojúhelníku ABC.

b) Sestrojte trojúhelníky ABH, ABK rovné trojúhelníku ABC tak, aby bylo $\sphericalangle BAH = 75°$, $\sphericalangle AKB = 45°$.

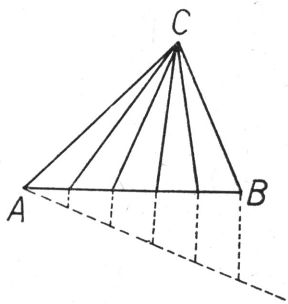
c) Sestrojte trojúhelník ALM rovný trojúhelníku ABC tak, aby bylo $\overline{AL} = 8$ cm, $\overline{AM} = 4$ cm. [Nejprve proměňte ABC na ALP, kde L leží na AB, $\overline{AL} = 8$ cm; potom proměňte ALP na ALM, kde M leží na AP, $\overline{AM} = 4$ cm.]

75. Rovnostranný trojúhelník s délkou strany 6 cm proměňte na kosočtverec s délkou strany 5 cm.

76. V obr. 52 je znázorněno, jak se dá libovolný trojúhelník ABC rozděliti na dva stejné díly úsečkou DE, jejíž jeden krajní bod D je dán na straně AB a jejíž druhý krajní bod E se má určit na straně BC. Popište a odůvodněte konstrukci. [Jest $\overline{AS} = \overline{SB}$, $CD \parallel ES$.]



Obr. 52.



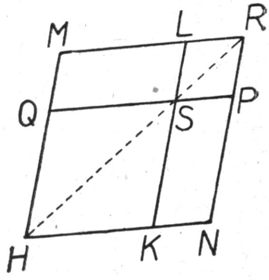
Obr. 53.

77. V obr. 53 je znázorněno, jak lze rozděliti trojúhelník ABC na pět stejných dílů. Popište a odůvodněte konstrukci.

78. Rozdělte trojúhelník ABC na dva díly tak, aby jeden byl o polovinu větší než druhý.

79. a) Dokažte, že v obr. 54 oba rovnoběžníky $HKLM$, $HNPQ$ jsou si rovny. [Užijte toho, že každý rovnoběžník je rozpůlen úhlopříčkou; napřed porovnejte rovnoběžníky $LMQS$, $KNPS$.]

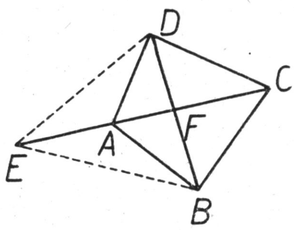
b) Narýsujte si rovnoběžník $ABCD$. Zvolte bod E uvnitř strany AB a bod F na prodloužení strany AB za bod B. Sestrojte rovnoběžníky $AEUV$, $AFXY$ rovné rovnoběžníku $ABCD$.



Obr. 54.

80. Čtverec s délkou strany 4 cm proměňte na obdélník, jehož jeden rozměr je 7 cm, užívajíce výsledku cvič. **61.**

81. Narýsujte si libovolný čtyrúhelník $ABCD$. Vrcholem A veďte přímku tak, aby rozpůlila daný čtyrúhelník. [Proměňte čtyrúhelník na trojúhelník.]



Obr. 55.

82. Obr. 55 znázorňuje, jak lze čtyrúhelník $ABCD$ proměnit na trojúhelník BDE. Popište a odůvodněte konstrukci. [Jest $\overline{AE} = \overline{CF}$.]

83. Dokažte, že každý čtyrúhelník se rovná trojúhelníku, jehož dvě strany se rovnají úhlopříčkám čtyrúhelníka, při čemž úhel těmi stranami sevřený je roven úhlu úhlopříček.

III. Euklidovy věty.

84. Jsou-li u pravoúhlého trojúhelníka ABC dány dvě ze šesti délek a, b, c, v, c_1, c_2, určete ostatní čtyři:

a) $a = 65$ cm; $b = 156$ cm;
b) $a = 175$ mm; $c = 625$ mm;
c) $a = 3{,}69$ m; $v = 3{,}6$ m;
d) $c_1 = 1{,}21$ cm; $c_2 = 36$ cm;
e) $a = 51$ m; $c_1 = 45$ m;
f) $c = 8{,}41$ m; $c_1 = 4{,}41$ m;
g) $v = 18{,}48$ cm; $c_1 = 10{,}89$ cm.

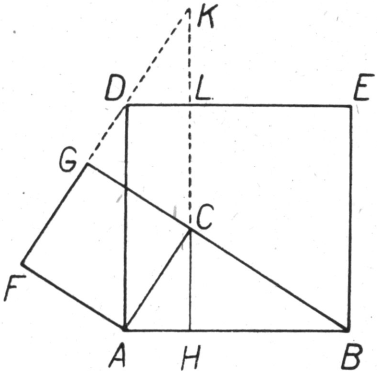
85. PQ je průměr kružnice k; RS je tětiva kružnice k; jest $PQ \perp RS$. Je-li $\overline{PR} = 18{,}2$ cm; $\overline{RS} = 18{,}48$ cm, určete délky obou úseček, na které tětiva RS rozdělí průměr PQ.

86. Ke kružnici k s poloměrem 65 mm jsou vedeny tečny z bodu P. Spojnice bodů dotyku je vzdálena 16 mm od středu S kružnice k. Vypočtěte vzdálenost $\overline{PS}$.

87. Tečny vedené z bodu A ke kružnici k o středu S mají body dotyku T_1, T_2. Je-li $\overline{AS} = 6{,}76$ m a je-li 1 m vzdálenost bodu S od přímky T_1T_2, vypočtěte poloměr kružnice k a délku tětivy T_1T_2.

88. Rovnostranný trojúhelník s délkou strany 53 mm proměňte na čtverec. Potom vypočtěte na dvě platné cifry stranu čtverce a přesvědčte se, jak přesně jste rýsovali.

89. a) Sestrojte úsečku délky $\sqrt{38}$ cm. [Zvolte si dvě čísla a, b tak, aby se nelišila příliš od sebe a aby bylo $a \,.\, b = 38$, na př. $a = 5$, $b = \frac{38}{5}$; potom sestrojte střední geometrickou úměrnou dvou úseček, jejich délky jsou a cm, b cm. Není výhodné voliti na př. $a = 2$, $b = 19$ nebo $a = 1$, $b = 38$.]

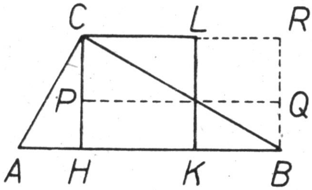


Obr. 56.

b) Sestrojte délku $\sqrt{31}$ cm.

c) Sestrojte délku $\sqrt{9{,}6}$ dm.

90. Proveďte důkaz Euklidovy věty o odvěsně na základě obr. 56. [$ABED$, $ACGF$ jsou čtverce; máte dokázati, že čtverec $ACGF$ se rovná obdélníku $ADLH$.]

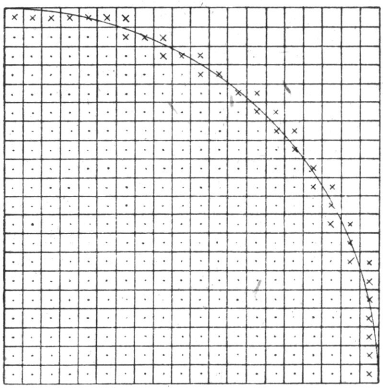


Obr. 57.

91. Proveďte důkaz Euklidovy věty o výšce na základě obr. 57. [Čtverec $HKLC$ se rovná obdélníku $CPQR$ podle výsledku cvič. **79** a).]

§ 4. Obvod a obsah kruhu.

Na čtverečkovaný papír si narýsujme (viz obr. 58) čtvrtkruh P, jehož poloměr se rovná třeba dvaceti stranám čtvercové sítě. Všimněme si těch čtverců sítě, které jsou celé obsaženy ve čtvrtkruhu P. Napočteme jich 294; v obr. 58 jsou vyznačeny tečkami; dohromady tvoří jakousi plochu A, která je částí čtvrtkruhu P. Dále si všimněme těch čtverců sítě, které jen z části zasahují do čtvrtkruhu P; je jich 37 a v obr. 58 jsou vyznačeny křížkem. Přidáme-li tyto čtverce ku ploše A, dostaneme plochu B, jejíž částí je čtvrtkruh P. Proto obsah čtvrtkruhu P je větší než obsah plochy A a je menší než obsah plochy B.



Obr. 58.

Je-li r poloměr kruhu, je strana čtvercové sítě $\frac{1}{20}r$, takže obsah každého čtverce sítě je

$$\frac{r}{20} \cdot \frac{r}{20} = \frac{r^2}{400}.$$

Protože plocha A obsahuje 294 a plocha B $294 + 37 = 331$ čtverců sítě, je obsah plochy A

$$\frac{294}{400} r^2$$

a obsah plochy B je roven

$$\frac{331}{400} r^2.$$

Obsah čtvrtkruhu P je větší než obsah plochy A a menší než obsah plochy B; obsah celého kruhu je čtyrnásobek obsahu čtvrtkruhu. Proto obsah kruhu s poloměrem r je větší než $2{,}94 \,.\, r^2$ a menší než $3{,}31 \,.\, r^2$.

Kdybychom vyšli od čtvrtkruhu, jehož poloměr se rovná stu stran sítě, skládala by se plocha A ze 7753 čtverců a plocha B ještě z dalších 196, tedy celkem ze 7949 čtverců. Obsah jednoho čtverce by byl

$$\frac{r}{100} \cdot \frac{r}{100} = \frac{r^2}{10000},$$

takže obsah plochy A by byl $0{,}7753r^2$ a obsah plochy B by byl $0{,}7949r^2$.

Z toho plyne, že obsah kruhu s poloměrem r je větší než $3{,}1012\, r^2$ a menší než $3{,}1796\, r^2$.

Obsah kruhu s poloměrem r je roven πr^2. Řecké písmeno π (čteme pí) znamená číslo, o kterém už víme, že je větší než 3,1012 a menší než 3,1796, což je ovšem jen velmi hrubý odhad pro číslo π.

K lepšímu odhadu dospějeme, zavedeme-li tu plochu C, která vznikne z plochy A, přidáme-li jen polovinu každého takového čtverce sítě, který jen částečně zasahuje do čtvrtkruhu P. Dá se dokázati, že obsah plochy C je mnohem bližší obsahu čtvrtkruhu P než jsou obsahy ploch A, B. Je-li poloměr dvacetinásobek strany čtvercové sítě, skládá se plocha C ze

$$294 + \tfrac{1}{2} \,.\, 37 = 312\tfrac{1}{2}$$

čtverců sítě, což dá pro číslo π přibližnou hodnotu 3,125, která je jen o méně než 0,02 menší než přesná hodnota čísla π. Je-li poloměr stonásobek strany čtvercové sítě, skládá se plocha C ze

$$7753 + \tfrac{1}{2} \,.\, 196 = 7851$$

čtverců sítě, což dá pro číslo π přibližnou hodnotu $4 \,.\, 0{,}7851 = 3{,}1404$, ve které první dvě desetinná místa jsou už správná.

Pohodlněji a přesněji můžeme číslo π odhadnouti pomocí pravidelných mnohoúhelníků vepsaných do kružnice nebo jí opsaných. Při velkém počtu stran se totiž takový mnohoúhelník liší jen nepatrně od kruhu, takže obsah kruhu je přibližně roven obsahu mnohoúhelníka. Pomocí takových mnohoúhelníků počítal číslo π již Archimedes ze Syrakus, nejslavnější starověký matematik (žil ve třetím století př. Kr.). Archimedes dokázal, že číslo π je menší než $3\frac{1}{7}$ a větší než $3\frac{10}{71}$. Holanďan Ludolf van Ceulen (čti fan Kajlen, 1540—1610) vypočetl Archimedovou metodou číslo π na 35 desetinných míst. Podle něho se číslo π často nazývá Ludolfovým číslem. Metodami vyšší matematiky lze číslo π vypočísti na mnohem větší počet desetinných míst; skutečně bylo vypočteno 707 míst, což ovšem nemá praktického významu. Na třicet desetinných míst je

$$\pi \doteq 3{,}14159\;26535\;89793\;23846\;26433\;83279.^{*)}$$

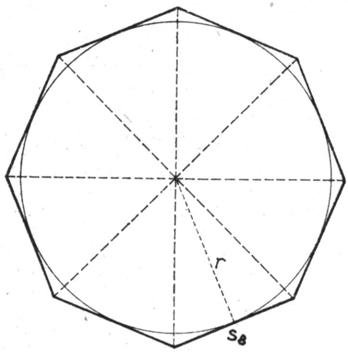
Pro praxi více než dobrá je přibližná hodnota $\pi \doteq 3{,}14159$; zpravidla vystačíme dokonce s hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$; často se také užívá přibližné hodnoty $\pi \doteq 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$, která je přesnější než 3,14.

Číslo π slouží nejen k výpočtu obsahu kruhu, nýbrž také k výpočtu obvodu. Kružnici s poloměrem r opišme pravidelný mnoho-

---

*) Kdo by si chtěl zapamatovati tuto přibližnou hodnotu, může se naučiti zpaměti: „Mám, ó bože ó dobrý, pamatovat si takový cifer řad! Velký slovutný Archimedes pomáhej trápenému; dej mu moc, nazpamět nechť odříká ty slavné sice, ale tak protivné nám ach číslice Ludolfovy“. Počet písmen jednotlivých slov udává postupné cifry čísla π.

úhelník M_n s délkou strany s_n (viz obr. 59, ve kterém $n = 8$). M_n se skládá z n rovnoramenných trojúhelníků, z nichž každý má obsah $\frac{1}{2}s_n r$; obvod mnohoúhelníka M_n se rovná $o_n = ns_n$, pročež obsah P_n mnohoúhelníka M_n je roven $\frac{1}{2}o_n r$. Je-li však číslo n velmi veliké, je obsah P_n velmi přibližně roven obsahu kruhu πr^2 a obvod o_n je velmi přibližně roven obvodu kruhu o. Proto musí býti



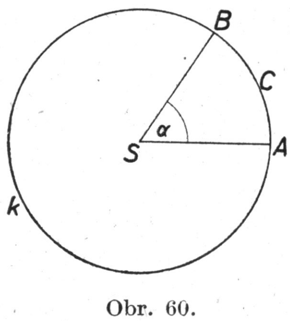
Obr. 59.

$$\pi r^2 = \tfrac{1}{2}or, \qquad \text{tedy } o = 2\pi r.$$

Obvod kruhu s poloměrem r je roven $2\pi r$. Také můžeme ovšem říci, že obvod kruhu je πd, kde d znamená průměr; obsah kruhu je ovšem $\frac{1}{4}\pi d^2$.

V obr. 60 vidíme oblouk ACB kružnice k příslušný středovému úhlu α. Je zřejmé, že když se úhel α zdvojnásobí, ztrojnásobí atd., stane se táž změna s délkou oblouku ACB, t. j. délka oblouku kružnice je přímo úměrná velikosti středového úhlu. Je-li $\alpha = 360°$, přejde oblouk v celou kružnici, jejíž délka je $2\pi r$. Jestliže α měří n stupňů, pak poměr úhlu α k plnému úhlu je $n : 360$, takže délku oblouku dostaneme, zmenšíme-li délku $2\pi r$ celé kružnice v poměru $n : 360$. Tedy délka s kruhového oblouku je

$$s = \frac{n\pi}{180} \cdot r, \tag{1}$$



Obr. 60.

jestliže n znamená počet stupňů středového úhlu α. Je tedy

$$s = \operatorname{arc} \alpha \cdot r, \tag{2}$$

kde arc α, což čteme arkus úhlu α, je délka oblouku kružnice s poloměrem 1 a středovým úhlem α, neboli

$$\operatorname{arc} \alpha = \frac{n\pi}{180}, \tag{3}$$

jestliže α měří n stupňů.

V obr. 60 vidíme dále kruhovou výseč příslušnou středovému úhlu α. Také plošný obsah kruhové výseče je přímo úměrný velikosti středového úhlu. Je-li $\alpha = 360^\circ$, přejde výseč v celý kruh, jehož obsah je πr^2. Jestliže α měří zase n stupňů, pak obsah výseče dostaneme, jestliže obsah kruhu πr^2 zmenšíme v poměru $n : 360$. Je tedy

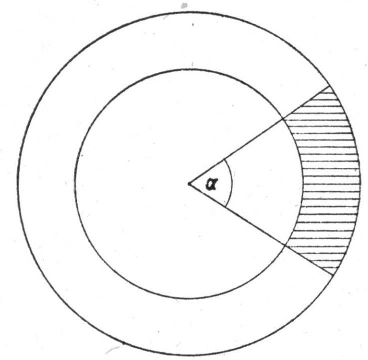
$$V = \frac{n\pi}{360} \cdot r^2, \qquad (4)$$

což lze psáti

$$V = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{n\pi}{180} r \cdot r,$$

neboli podle (1)

$$V = \tfrac{1}{2} sr. \qquad (5)$$



Obr. 61.

Tedy obsah výseče lze počítati jako obsah trojúhelníka, jehož (křivou) stranou je oblouk a příslušnou výškou poloměr. Podle (2) a (5) je

$$V = \tfrac{1}{2} \operatorname{arc} \alpha \cdot r^2. \qquad (6)$$

V obr. 61 vidíme mezikruží; jeho obsah dostaneme, jestliže od obsahu většího kruhu odečteme obsah menšího. Je-li r_1 poloměr menšího kruhu, r_2 poloměr většího, jsou jejich obsahy πr_1^2, πr_2^2, takže obsah mezikruží M je dán vzorcem

$$M = \pi(r_2^2 - r_1^2), \qquad (7)$$

který můžeme psáti také ve tvaru

$$M = \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1). \qquad (8)$$

V obr. 61 vidíme dále výseč mezikruží. Její obsah W je patrně

$$W = V_2 - V_1,$$

kde V_1, V_2 jsou obsahy kruhových výsečí. Podle (6) je

$$V_1 = \tfrac{1}{2} \operatorname{arc} \alpha \cdot r_1^2, \qquad V_2 = \tfrac{1}{2} \operatorname{arc} \alpha \cdot r_2^2,$$

takže

$$W = \tfrac{1}{2} \operatorname{arc} \alpha \cdot (r_2^2 - r_1^2)$$

neboli

$$W = \tfrac{1}{2} \operatorname{arc} \alpha \cdot (r_2 + r_1)(r_2 - r_1).$$

Je tedy

$$W = (\tfrac{1}{2} \operatorname{arc} \alpha \cdot r_2 + \tfrac{1}{2} \operatorname{arc} \alpha \cdot r_1)(r_2 - r_1),$$

takže podle (2) je

$$W = \tfrac{1}{2}(s_2 + s_1)(r_2 - r_1), \tag{9}$$

kde s_1, s_2 jsou délky kruhových oblouků, které tvoří křivou část obvodu výseče mezikruží. Tedy obsah mezikruží lze počítati jako obsah lichoběžníka, jehož (křivými) základnami jsou oblouky obou kružnic a výškou je rozdíl poloměrů.

Cvičení k § 4.

Ve cvič. **92** a **93** volte $\pi \doteq 3\frac{1}{7}$!

92. Vypočtěte obvod kruhu, je-li
a) poloměr 6,3 cm; b) průměr 5,6 dm; c) průměr 9,1 m.

93. Vypočtěte obsah kruhu, je-li
a) poloměr 8,4 cm; b) průměr 7 m; c) průměr 11,2 mm.

Ve cvič. **94** a **95** volte $\pi \doteq 3{,}14$ a výsledky zaokrouhlete na dvě platné cifry!

94. Vypočtěte obvod kruhu, je-li
a) poloměr 15 cm; b) průměr 2,5 dm; c) průměr 37 m.

95. Vypočtěte obsah kruhu, je-li
a) poloměr 23 cm; b) průměr 3,2 dm; c) průměr 0,47 m.

Ve cvič. **96** až **114** volte $\pi \doteq 3{,}14$ nebo, kde je to početně výhodnější, $\pi \doteq 3\frac{1}{7}$. Odpovědi neudávejte na více než tři platné cifry!

96. Určete poloměr kruhu, je-li obvod roven
a) 11 cm; b) 6,4 m; c) 8,8 m; d) 1 km.

97. Obvod polokruhu je 3,5 dm; určete poloměr.

98. Obsah kruhu je 385 m^2; určete poloměr.

99. Plot kolem pozemku má délku 4400 m. Jaký je obsah pozemku, má-li tvar a) obdélníka, jehož rozměry jsou v poměru 2 : 9; b) obdélníka, jehož rozměry jsou v poměru 5 : 6; c) čtverce; d) kruhu?

[Dá se dokázati, že ze všech uzavřených čar dané délky omezuje kružnice největší plochu.]

100. Kus drátu dlouhý 1 m je ohnut do tvaru obvodu
a) kruhu; b) polokruhu; c) čtvrtkruhu. Určete poloměr!

101. Ze studny hluboké $16\frac{1}{2}$ m se nabere vědro vody rumpálem. Kolikrát se musí otočiti klikou, je-li průměr hřídele 2 dm? (Zanedbejte tloušťku provazu.)

102. Obvod kola u bicyklu je 7 dm.
a) Kolikrát se otočí kolo, než se ujede 1 km?
b) Otočí-li se kolo 25krát za 10 vteřin, jaká je rychlost jízdy v kilometrech za hodinu?

103. Z papírového čtverce o straně 1 dm se vystřihne co největší kruh. Jaký obsah mají odstřižky?

104. Kovová kruhová deska s průměrem 18 cm váží 6 kg. Kolik bude vážiti, budou-li v ní tři kruhové otvory s průměrem po 36 mm?

105. Pes je přivázán řetězem dlouhým 10 m ke kroužku, který lze posouvati podél vodorovné tyče dlouhé 15 m. Určete obsah plochy, po které se pes může pohybovati!

106. Jak veliký je plošný obsah rysu kružnice s poloměrem 6 cm, je-li tloušťka rysu asi 0,1 mm?

107. Určete délku oblouku kružnice s poloměrem 1 dm, je-li středový úhel 144°!

108. Oblouku kružnice patří středový úhel 108°. Je-li délka oblouku 33 mm, určete poloměr kružnice!

109. Velká ručička na hodinách je dlouhá 12 cm.

a) Jakou dráhu urazí její hrot za $\frac{3}{4}$ hodiny?

b) Jakou rychlostí se pohybuje hrot?

110. Čtyři stejné válcové plechovky s průměrem podstavy 15 cm stojí tak, že se navzájem dotýkají. Jak dlouhého provázku je třeba, chceme-li je svázat dohromady?

111. Opakujte úlohu **110** pro tři plechovky!

112. Určete obsah kruhové výseče, je-li poloměr 6 cm a středový úhel 54°!

113. Kruhová výseč má obsah 55 cm². Je-li poloměr 7 cm, určete středový úhel!

114. V jakém poměru je kruh rozdělen tětivou, která půlí poloměr, na který je kolmá?

115. (Volte $\pi \doteq 3{,}1416$.) Vypočtěte na čtyři platné cifry:

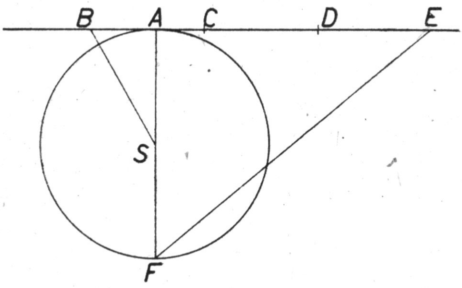
a) arc 35°; b) arc 27°32′; c) arc 2°27′!

116. (Volte $\pi \doteq 3{,}14159$.) Vypočtěte na šest platných cifer:

a) arc 7°15′36″; b) arc 19°23′42″!

117. Přesvědčte se, že je velmi přibližně

$$\pi \doteq \frac{355}{113}\,!$$

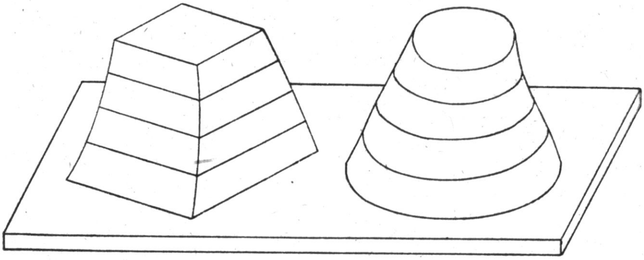


Obr. 62.

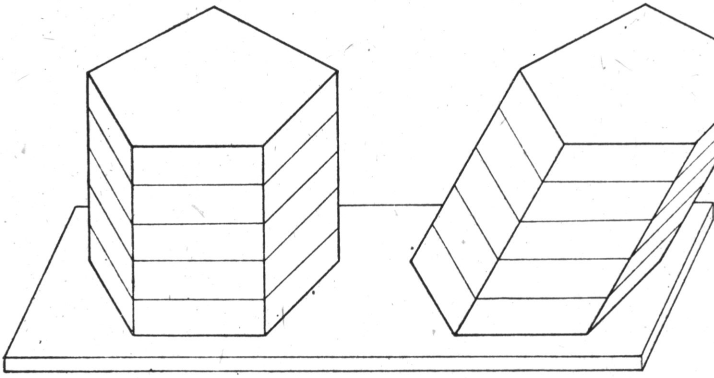
118. V obr. 62 je naznačeno, jak lze přibližně r e k t i f i k o v a t i k r u ž n i c i, t. j. sestrojiti úsečku asi tak dlouhou, jako je obvod kružnice. Jest $\sphericalangle ASB = 30°$, $\overline{AS} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$. Délka EF je velmi přibližně rovna polovině obvodu kružnice. Zvolte poloměr za jednotku, vypočtěte délku EF na 7 platných cifer a porovnejte s číslem π!

§ 5. Hranoly a jehlany.

V tomto paragrafu a v následujícím poznáme mimo jiné vzorce pro výpočet objemu nejdůležitějších těles. K těmto vzorcům dospějeme na základě t. zv. Cavalieriova principu, který zní takto: **Dvě tělesa T_1, T_2 mají týž objem, jestliže každá vodorovná rovina, která protne jedno těleso, protne také těleso druhé, a jestliže obě průsečné plochy mají vždy týž obsah.** (Italský matematik Cava-



Obr. 63.



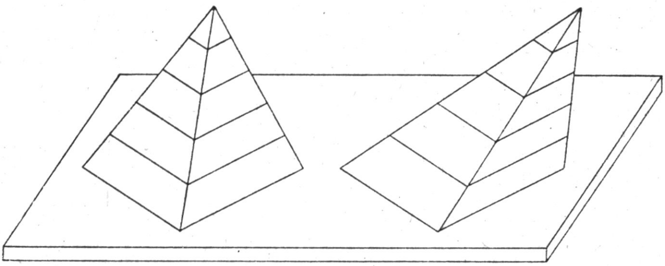
Obr. 64.

lieri žil v 1. polovině 17. století.) Přesným matematickým odůvodněním Cavalieriova principu se nebudeme zabývati a místo toho se spokojíme následující jednoduchou úvahou. Mysleme si obě tělesa složena z velkého počtu tenkých plechových lístků. Protože průsečné plochy obou těles s touž vodorovnou rovinou mají vždy týž obsah, mají v obou tělesech stejně vysoko ležící lístky oba touž váhu a proto také celková váha obou těles je stejná a ježto jsou obě tělesa z téhož materiálu, mají také obě týž objem.

Z Cavalieriova principu lze odvoditi (viz obr. 64 a 65) následující dvě důležité věty:

I. Dva hranoly mají týž objem, mají-li jejich podstavy týž obsah a mají-li oba touž výšku.

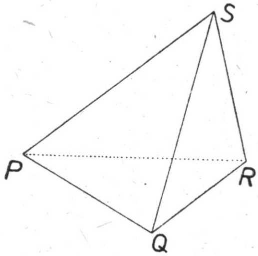
II. Dva jehlany mají týž objem, mají-li jejich podstavy týž obsah a mají-li oba touž výšku.



Obr. 65.

Z věty I následuje: **Objem hranolu se rovná součinu obsahu podstavy s výškou.** Neboť pro kolmý hranol je nám to známo z § 1 a podle I to musí zůstati správné i pro kosý hranol.

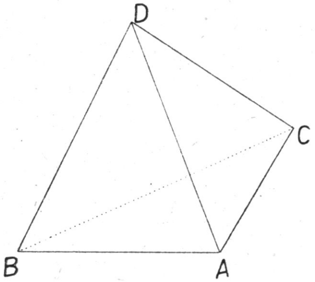
Naším dalším cílem je odvoditi větu: **Objem jehlanu se rovná třetině součinu podstavy s výškou.** To je obtížnější než v případě hranolu. Budeme se nejprve zabývati trojbokými jehlany (viz obr. 66). Všecky čtyři stěny trojbokého jehlanu jsou trojúhelníky a proto u trojbokého jehlanu lze považovati kteroukoli stěnu za stěnu podstavnou; tím se trojboké jehlany podstatně liší od vícebokých jehlanů. Trojbokému jehlanu říkáme také krátce **čtyrstěn.** Považujeme-li u trojbokého jehlanu $PQRS$ na př. PQS za stěnu podstavnou, pak příslušnou výškou rozumíme ovšem vzdálenost vrcholu R od roviny trojúhelníka PQS. Máme tedy u čtyrstěnu čtyři výšky, které jsou zpravidla mezi sebou různé, ale v některých případech jsou všecky



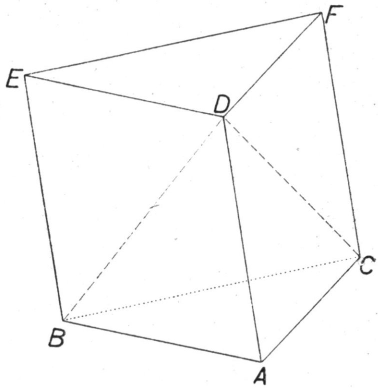
Obr. 66.

čtyři stejné. Takový případ nastane zejména u pravidelného čtyrstěnu, jehož všecky čtyři stěny jsou rovnostranné trojúhelníky.

Budiž nyní dán trojboký jehlan $ABCD$ (viz obr. 67), který nazveme krátce jehlanem J. Za podstavnou stěnu považujeme trojúhelník ABC, jehož obsah označme p. Příslušnou výškou je vzdálenost v bodu D od roviny trojúhelníka ABC. Máme dokázati, že objem jehlanu J je roven $\frac{1}{3}pv$. Jehlan J je částí hranolu H (viz obr. 68),

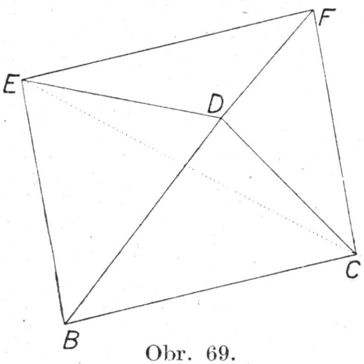


Obr. 67.

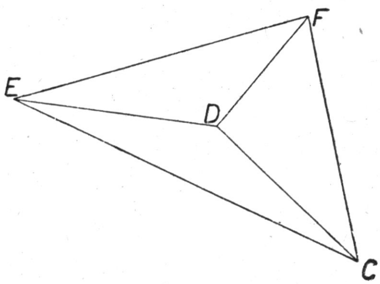


Obr. 68.

jehož podstavami jsou trojúhelníky ABC, DEF a jehož pobočné hrany jsou AD, BE, CF. Podstavy hranolu H mají obsah p a výška je zase v, takže objem hranolu H je pv. Máme tedy dokázati, že objem jehlanu J



Obr. 69.



Obr. 70.

je třetina objemu hranolu H. Ubereme-li jehlan J od hranolu H, zbude nám (viz obr. 69) čtyrboký jehlan K, jehož podstavou je rovnoběžník $BCFE$ a vrcholem bod D. Vedeme-li úhlopříčku CE rovnoběžníka $BCFE$, rozdělí se nám tento rovnoběžník na dva shodné trojúhelníky CFE, BCE a čtyrboký jehlan K se rozdělí na dva trojboké jehlany J_1, J_2 se společným vrcholem D, z nichž prvý má za podstavu trojúhelník CEF a druhý trojúhelník BCE. Tím je hranol H rozdělen na tři trojboké jehlany J, J_1, J_2. Jehlany J_1, J_2 mají shodné podstavy CEF, BCE a výškou je u obou vzdálenost vrcholu D od společné roviny obou podstav. Podle věty II má tedy jehlan J_2 týž objem jako jehlan J_1. Avšak u jehlanu J_1 (viz obr. 70) můžeme považovati za podstavnou stěnu trojúhelník DEF shodný (viz obr. 68) s trojúhelníkem ABC, který je podstavnou stěnou jehlanu J. Příslušnou výškou je v obou případech vzdálenost obou mezi sebou rovnoběžných rovin ABC, DEF. Podle věty II má tedy jehlan J týž objem jako jehlan J_1. Totéž však platilo i o jehlanu J_2, takže hranol H máme rozdělen na tři jehlany J, J_1, J_2, které mají všecky tři týž objem, pročež objem jehlanu J je třetina objemu hranolu H, což jsme měli dokázati.

Tím je pro trojboký jehlan dokázáno, že objem se rovná třetině součinu podstavy s výškou. Rozšíření tohoto výsledku na víceboký jehlan je už velmi snadné. Budiž na př. pětiúhelník $PQRST$ v obr. 3 podstavou pětibokého jehlanu s vrcholem V. Rozdělíme-li pětiúhelník $PQRST$ úhlopříčkami PR, PS na trojúhelníky PQR, PRS, PST, jejichž obsahy buďtež p_1, p_2, p_3, rozdělí se nám pětiboký jehlan na tři trojboké jehlany, jejichž podstavami jsou ty trojúhelníky a jejichž společná výška v je výškou pětibokého jehlanu. Objemy našich trojbokých hranolů jsou $\frac{1}{3}p_1v$, $\frac{1}{3}p_2v$, $\frac{1}{3}p_3v$ a objem pětibokého hranolu je

$$\tfrac{1}{3}p_1v + \tfrac{1}{3}p_2v + \tfrac{1}{3}p_3v = \tfrac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3)\,v = \tfrac{1}{3}pv,$$

kde $p = p_1 + p_2 + p_3$ je obsah pětiúhelníka $PQRST$.

Povrch kolmého hranolu jsme počítali již v § 1. Výpočtem povrchu kosého hranolu se nebudeme zabývati.

Povrch jehlanu je zřejmě dán vzorcem

$$P + Q,$$

kde P znamená obsah podstavy a Q znamená obsah pláště. Plášť jehlanu se skládá z tolika trojúhelníků, kolik stěn má podstava. Buďtež

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \text{ atd.}$$

délky podstavných hran jehlanu. Každá z těchto hran je jednou stranou jednoho z trojúhelníků, ze kterých se skládá plášť, a v tom trojúhelníku přísluší té straně určitá výška. Ty výšky (říkáme jim

stěnové výšky) buďtež

$$w_1, w_2, w_3 \text{ atd.}$$

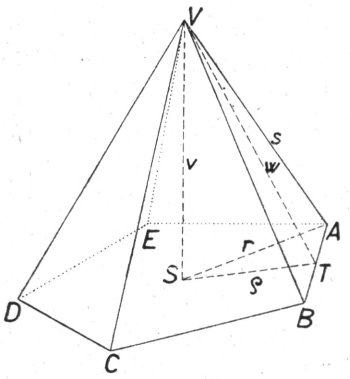
Obsahy pobočných stěn jehlanu jsou

$$\tfrac{1}{2}a_1w_1,\ \tfrac{1}{2}a_2w_2,\ \tfrac{1}{2}a_3w_3 \text{ atd.},$$

takže

$$Q = \tfrac{1}{2}(a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 + \text{atd.}).$$

U pravidelného n-bokého jehlanu mají všecky podstavné hrany touž délku a a jejich počet je n; také všecky stěnové výšky mají touž délku w. Plášť pravidelného n-bokého jehlanu je pak dán vzorcem



Obr. 71.

$$Q = \frac{n}{2}aw = \tfrac{1}{2}ow,$$

kde $o = na$ je obvod podstavy. Obyčejně však stěnová výška w není dána přímo, nýbrž se musí určit podle Pythagorovy věty. Je-li v výška jehlanu (určitěji řekneme tělesná výška na rozdíl od stěnové výšky) a je-li ϱ poloměr kružnice podstavě vepsané, plyne z trojúhelníka VST v obr. 71 podle Pythagorovy věty, že

$$w = \sqrt{v^2 + \varrho^2},$$

neboť svislá přímka VS je kolmá na vodorovnou přímku ST, takže VST je pravoúhlý trojúhelník s přeponou VT.

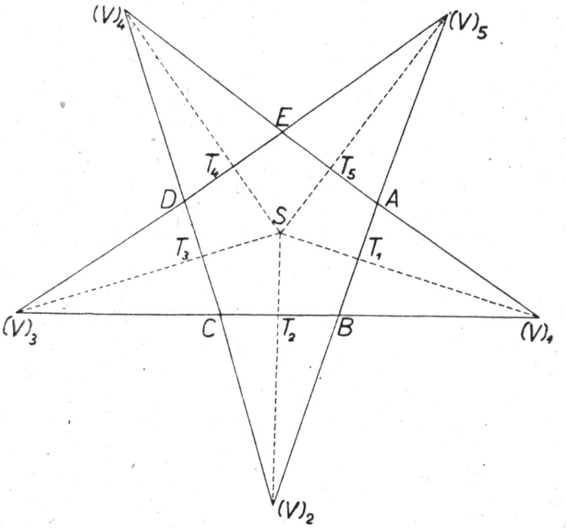
Místo tělesné výšky v bývá někdy dána délka s pobočných hran. Pro tělesnou výšku v máme potom z pravoúhlého trojúhelníka VSA, ve kterém je AV přeponou,

$$v = \sqrt{s^2 - r^2},$$

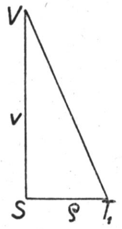
kde $r = \overline{AS}$ je poloměr kružnice podstavě opsané. Pro stěnovou výšku w máme z pravoúhlého trojúhelníka VAT, ve kterém je AV přeponou,

$$w = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Rovina trojúhelníka VST v obr. 71 je kolmá na přímku AB, pročež všecky přímky této roviny jsou kolmé na AB; zejména je $ST \perp AB$. Toho můžeme užíti ke konstrukci sítě pravidelného jehlanu, je-li dána podstava $ABCDE$ a výška v (viz obr. 72). Se středu S podstavy spustíme kolmice na všecky strany podstavy; jejich paty buďtež T_1, T_2, T_3, T_4, T_5. Všimněme si na př. pobočné stěny VAB; je to rovnoramenný trojúhelník se základnou AB a výškou VT_1. Tento trojúhelník **sklopíme** kolem přímky AB do podstavné roviny, t. j. otáčíme jej kolem přímky AB tak dlou-



Obr. 72.



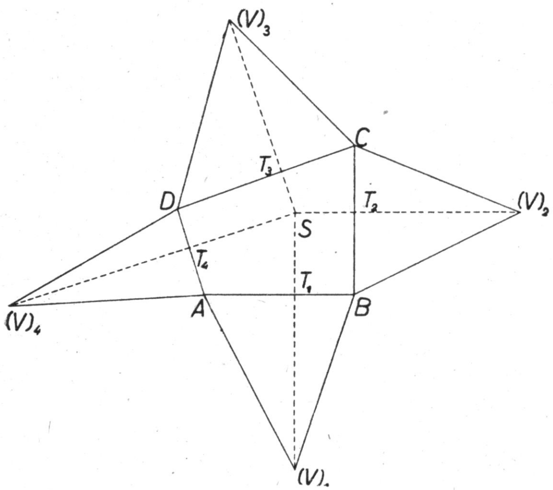
Obr. 73.

ho, až otočená poloha padne do podstavné roviny. Sklopená stěna $AB(V)_1$ je zase rovnoramenný trojúhelník se základnou AB a výškou $\overline{(V)_1T_1} = \overline{VT_1}$. Bod T_1 zůstává ovšem patou stěnové výšky i po sklopení. Sklopený vrchol $(V)_1$ leží tedy na přímce ST_1 a jeho vzdálenost od bodu T_1 je rovna délce VT_1, kterou si sestrojíme (viz obr. 73) jako přeponu pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny mají známé délky $\overline{VS} = v$, $\overline{ST_1} = \varrho$. Stejně sestrojíme i sklopené polohy ostatních pobočných stěn, které spolu s podstavou $ABCDE$ dávají síť jehlanu.

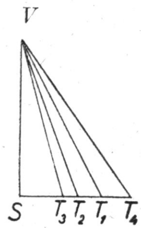
Touto metodou můžeme snadno sestrojiti i síť nepravidelného jehlanu, známe-li podstavu, patu výšky S a velikost výšky v. Budiž podstavou třeba čtyřúhelník $ABCD$ (viz obr. 74). S bodu S spustíme kolmice na strany čtyrúhelníka; jejich paty buďtež T_1, T_2, T_3, T_4.

Sklopené polohy $(V)_1$, $(V)_2$, $(V)_3$, $(V)_4$ vrcholu V leží na přímkách ST_1, ST_2, ST_3, ST_4 a vzdálenosti $T_1(V)_1$, $T_2(V)_2$, $T_3(V)_3$, $T_4(V)_4$ určíme (viz obr. 75) jako přepony pravoúhlých trojúhelníků, které mají společnou odvěsnu $\overline{VS} = v$ a jejichž druhé odvěsny ST_1, ST_2, ST_3, ST_4 přeneseme z obr. 74. Kontrolou přesnosti rýsování je to, že musí býti na př.

$$\overline{A(V)_1} = \overline{A(V)_4},$$



Obr. 74.



Obr. 75.

neboť obě ty úsečky jsou rovné pobočné hraně $\overline{AV}$. Podobně je také

$$\overline{B(V)_1} = \overline{B(V)_2}, \quad \overline{C(V)_2} = \overline{C(V)_3}, \quad \overline{D(V)_3} = \overline{D(V)_4}.$$

Jestliže délky

$$\overline{ST_1} = x_1, \quad \overline{ST_2} = x_2, \quad \overline{ST_3} = x_3, \quad \overline{ST_4} = x_4$$

známe číselně, můžeme počítati podle Pythagorovy věty

$$\overline{VT_1} = w_1 = \sqrt{v^2 + x_1^2}, \quad \overline{VT_2} = w_2 = \sqrt{v^2 + x_2^2},$$
$$\overline{VT_3} = w_3 = \sqrt{v^2 + x_3^2}, \quad \overline{VT_4} = w_4 = \sqrt{v^2 + x_4^2}.$$

Plášť jehlanu je potom

$$Q = \tfrac{1}{2}(a_1 w_1 + a_2 w_2 + a_3 w_3 + a_4 w_4),$$

kde $\quad a_1 = \overline{AB}, \quad a_2 = \overline{BC}, \quad a_3 = \overline{CD}, \quad a_4 = \overline{DA}.$

Cvičení k § 5.

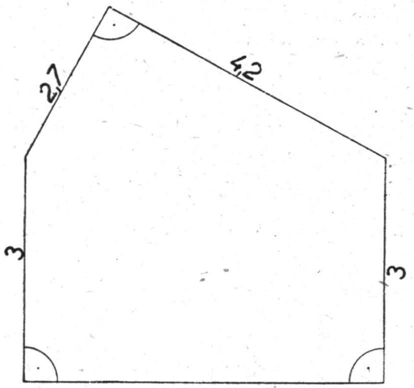
Ve cvičeních **119** až **133** počítejte na dvě nebo tři platné cifry.

119. Trojúhelníkové pravítko má tloušťku 5 mm a odvěsny měří 22,5 cm; 39 cm. Určete váhu pravítka, je-li specifická hmota dřeva 0,8 $g\,cm^{-3}$.

120. Povrch vody v basenu je obdélník dlouhý 52 m a široký 14 m; hloubka vody stoupá rovnoměrně od 1 m na jednom konci do 4 m na druhém konci. Určete objem vody v basenu!

121. Kolik vody zbude v basenu ze cvič. **120**, bylo-li vypuštěno tolik vody, že pouze polovina dna je pod vodou?

122. V obr. 76 je vyznačen příčný řez stodoly dlouhé 13,5 m. V obrazci je jednotka 1 m; vyznačené úhly jsou pravé. Určete objem stodoly!



Obr. 76.

123. Dno vodojemu je vodorovný obdélník dlouhý 100 m a široký 50 m. Kratší stěny jsou svislé; delší stěny jsou nakloněny v úhlu 45° k vodorovné poloze. Ve vodojemu je vody do výše 3 m. Kolik hl vody je ve vodojemu?

124. Stěny dvou vodojemů jsou svislé; dno měří 900 m² u většího, 700 m² u menšího. Voda se převádí z většího vodojemu do menšího tak, že za minutu se převede 15,9 hl. Oč se změní výška vody ve vodojemech za čtvrt hodiny?

125. Určete objem jehlanu:
a) výška 15 cm; podstava je čtverec o straně 9 cm;
b) výška 6 cm; podstava je obdélník s rozměry 4 cm, 5 cm;
c) výška 8 cm; podstava je trojúhelník o stranách 3 cm, 4 cm, 5 cm.

126. Objem jehlanu je 97 cm³; podstava je čtverec o straně 5,3 cm. Určete výšku!

127. Objem jehlanu je 147 cm³; výška je 14 cm. Určete obsah postavy!

128. Určete objem jehlanu:
a) všecky pobočné hrany mají délku 13 cm; podstava je obdélník s rozměry 6 cm, 8 cm;
b) všecky pobočné hrany mají délku 2 m; podstava je čtverec o straně 2 m;
c) výška 9 cm; podstava je rovnostranný trojúhelník o straně 8 cm.

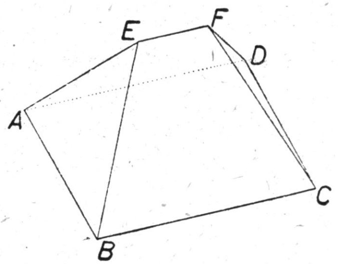
129. Podstava pravidelného jehlanu je čtverec o straně 4 dm; objem jehlanu je 32 dm³. Určete výšku a délku pobočných hran!

130. Určete povrch jehlanu, jehož vrchol je nad středem podstavy:
a) podstava je čtverec o straně 6 cm, výška 4 cm;
b) podstava je obdélník s rozměry 4 cm, 6 cm, výška 5 cm.

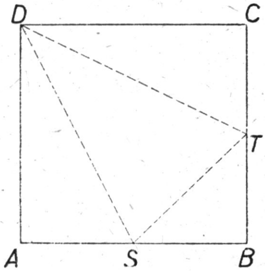
131. V krychlové nádrži s délkou hrany 1 m je kovový pravidelný čtyrboký jehlan výšky 1 m, jehož podstava je čtverec s délkou strany 75 cm. Nádrž je naplněna vodou. Oč klesne hladina, odstraní-li se jehlan?

132. Obr. 77 znázorňuje hromadu štěrku. $ABCD$ je obdélník s rozměry $\overline{AB} = 1{,}2$ m; $\overline{BC} = 3$ m. Dále je $\overline{EF} = 1{,}8$ m a přímka EF je ve výši 0,6 m. Určete objem hromady!

133. Obr. 78 znázorňuje papírový čtverec $ABCD$ s délkou strany 15 cm; S a T jsou středy stran. Přehneme-li papír podél čárkovaných úseček tak, aby splynulo AD a CD, AS a BS, BT a CT, vznikne jehlan. Určete povrch a objem jehlanu! [Pro výpočet objemu si napřed odůvodněte, že po přehnutí bude přímka DA kolmá na rovinu BST.]



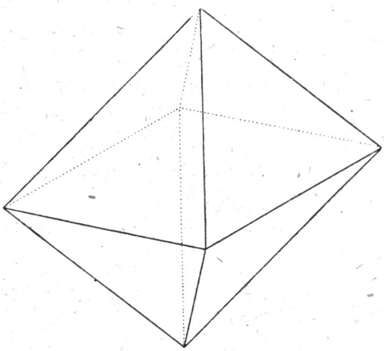
Obr. 77.



Obr. 78.

134. (Viz obr. 79.) Najděte vzorec pro povrch a objem pravidelného osmistěnu! (Všecky stěny jsou rovnostranné trojúhelníky.)

135. Najděte vzorec pro povrch a objem pravidelného čtyrstěnu!


Obr. 79.

136. Nad stěnami krychle jsou vztyčeny čtyrboké jehlany, jejichž výška je pětinou úhlopříčky krychle. Najděte vzorec pro povrch a objem celého tělesa! Narýsujte síť!

137. Určete povrch a objem tělesa, které vznikne z krychle tím, že od každého rohu odejmeme jehlan, který utíná pětinu hran krychle. Sestrojte síť tělesa!

138. Sestrojte síť pravidelného šestibokého jehlanu; délka podstavných hran 3 cm, výška 4 cm. Vypočtěte na tři platné cifry povrch a objem tělesa.

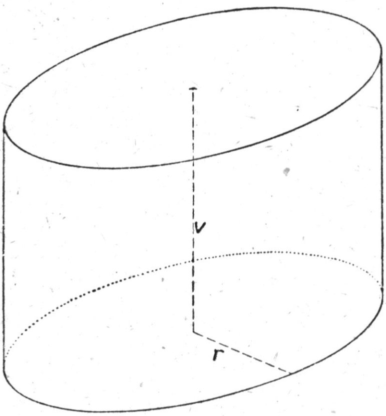
139. Pravidelný trojboký hranol s délkou podstavné hrany 4 cm a výškou 5 cm dá se rozložiti podle obr. 68 na trojboký a na čtyrboký jehlan. Sestrojte sítě a modely obou jehlanů a sestavte z modelů model hranolu!

140. Obdélník $ABCD$ má rozměry $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{BC} = 3$ cm. Uvnitř obdélníka leží bod S vzdálený 2 cm od strany AB a 1 cm od strany BC. Obdélník je podstavou jehlanu s výškou 4 cm; pata výšky padne do bodu S. Sestrojte síť jehlanu! Vypočítejte na tři platné cifry povrch jehlanu! Hodnoty stěnových výšek vypočtené podle Pythagorovy věty porovnejte s hodnotami stěnových výšek naměřenými v síti!

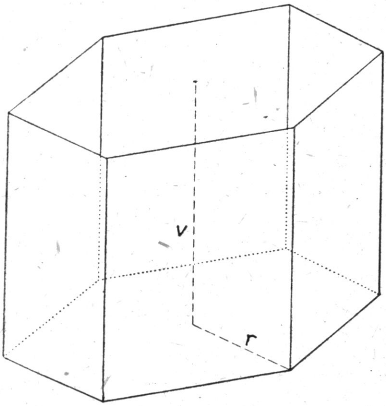
141. Opakujte úlohu 140 s tím rozdílem, že bod S leží
a) ve vrcholu A;
b) uprostřed strany AB;
c) na straně BC ve vzdálenosti 1 cm od bodu B.

§ 6. Válce, kužele a koule.

R o t a č n í v á l e c s poloměrem podstavy r a výškou v (viz obr. 80) porovnejme s pravidelným n-bokým hranolem s poloměrem kružnice podstavě opsané r a výškou v (viz obr. 81). Je-li n velmi veliké, je podstava válce velmi přibližně rovna podstavě hranolu, obvod pod-



Obr. 80.



Obr. 81.

stavy válce obvodu podstavy hranolu, plášť válce plášti hranolu, objem válce objemu hranolu. Budiž u válce P obsah podstavy, O obvod podstavy, Q plášť, V objem; buďtež P_n, O_n, Q_n, V_n obdobné veličiny u hranolu. Z § 1 víme, že je

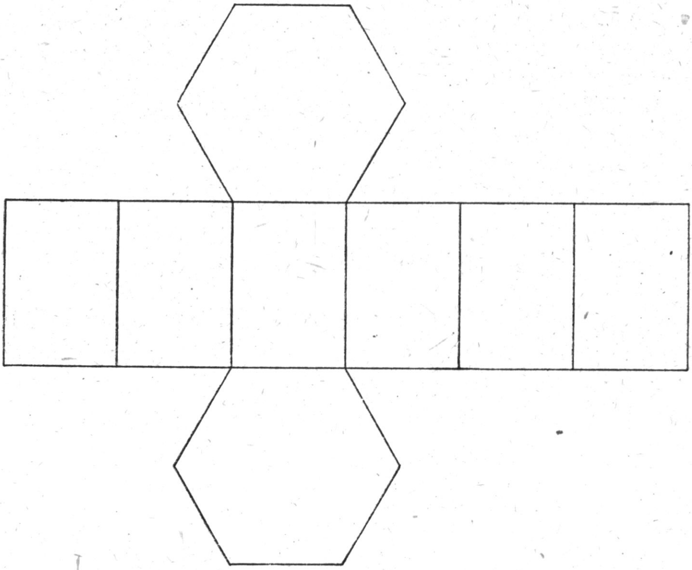
$$Q_n = O_n v, \quad V_n = P_n v$$

a proto musí býti také

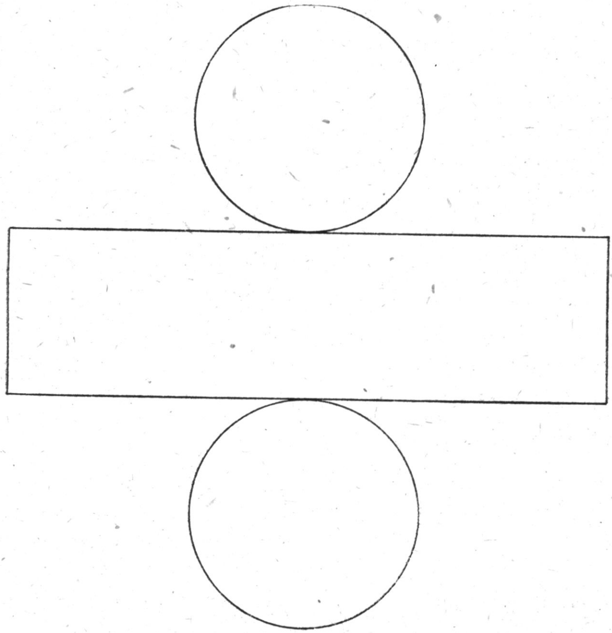
$$Q = Ov, \quad V = Pv.$$

Avšak z § 4 je nám známo, že $O = 2\pi r$, $P = \pi r^2$. Proto jest

$$Q = 2\pi rv, \; V = \pi r^2 v.$$



Obr. 82.



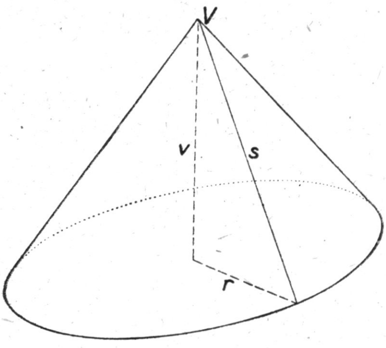
Obr. 83.

Povrch válce je

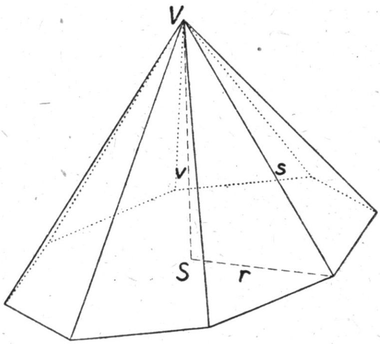
$$2P + Q = 2\pi r^2 + 2\pi rv = 2\pi r(r + v).$$

Vzorce pro plášť, povrch a objem rotačního válce si zapamatujte! Jak znějí tyto vzorce slovy?

Síť hranolu (viz obr. 82) se skládá z obdélníka, jehož rozměry jsou O_n a v, který je rozdělen na n malých obdélníků, a ze dvou pravidelných n-úhelníků. Podobně síť rotačního válce (viz obr. 83) se skládá z obdélníka, jehož rozměry jsou $2\pi r$ a v, a ze dvou kruhů s poloměrem r, které se dotýkají stran obdélníka délky $2\pi r$. Při sestrojování sítě můžeme položiti $\pi \doteq 3\frac{1}{7}$ nebo můžeme užíti výsledku cvič. 118.



Obr. 84.



Obr. 85.

Rotační kužel s poloměrem podstavy r a výškou v (viz obr. 84) porovnejme s pravidelným n-bokým jehlanem s poloměrem kružnice podstavě opsané r a výškou v (viz obr. 85). Délka pobočných hran jehlanu budiž s. Podle Pythagorovy věty je

$$v^2 + r^2 = s^2, \quad \text{tedy} \quad s = \sqrt{v^2 + r^2}, \quad v = \sqrt{s^2 - r^2};$$

s je také délka všech úseček na povrchu kužele, které spojují vrchol V s jednotlivými body obvodu podstavy; pravíme, že s je **strana kužele**. Je-li n velmi veliké, je podstava kužele velmi přibližně rovna podstavě jehlanu, obvod podstavy kužele obvodu podstavy jehlanu, plášť kužele plášti jehlanu, objem kužele objemu jehlanu. Budiž u kužele P obsah podstavy, O obvod podstavy, Q plášť, V objem; buďtež P_n, O_n, Q_n, V_n obdobné veličiny u jehlanu. Z § 5 víme, že je $V_n = \frac{1}{3}P_n v$ a proto musí býti také $V = \frac{1}{3}Pv$. Avšak podle § 4 je

$P = \pi r^2$, tedy

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 v.$$

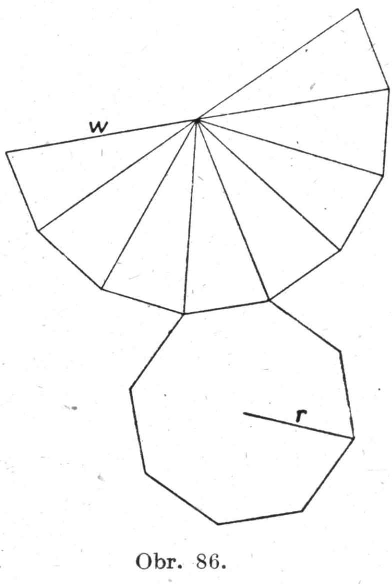
Plášť jehlanu se skládá z n rovnoramenných trojúhelníků se základnou a (to je délka podstavné hrany) a s výškou w, tedy s plošným obsahem $\frac{1}{2}aw$. Tedy $Q_n = \frac{1}{2} \,.\, naw$ neboli $Q_n = \frac{1}{2}O_n w$, neboť $O_n = na$. Je-li n velmi veliké, je w velmi přibližně rovné s a proto pro plášť kužele musí platiti $Q = \frac{1}{2}Os$ neboli

$$Q = \pi rs,$$

neboť podle § 4 je $O = 2\pi r$. Povrch kužele je

$$P + Q = \pi r^2 + \pi rs = \pi r(r + s).$$

Vzorce pro plášť, povrch a objem rotačního kužele si zapamatujte! Jak znějí tyto vzorce slovy?



Obr. 86.

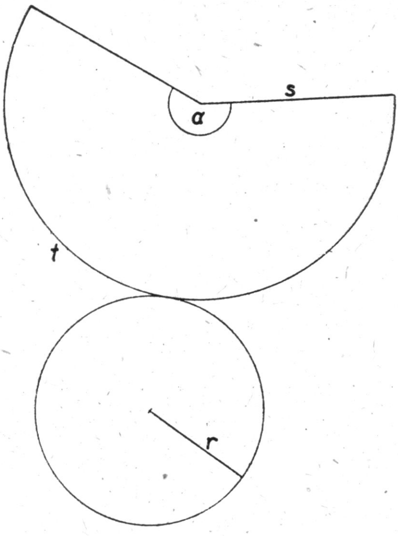
Síť jehlanu (viz obr. 86) se skládá z n za sebou jdoucích shodných rovnoramenných trojúhelníků s délkou ramene s a se součtem délek základen O_n, k nimž je připojen ještě pravidelný n-úhelník. Síť kužele (viz obr. 87) se skládá z kruhové výseče poloměru s, k níž je připojen kruh s poloměrem r, který se dotýká oblouku t, jenž tvoří křivou část obvodu výseče. Délka oblouku t je $O = 2\pi r$; délka celé kružnice, jejíž částí je t, je $2\pi s$. Je-li tedy α středový úhel oblouku t (viz obr. 87) a měří-li α n stupňů pak podle § 4 je

$$n : 360 = 2\pi r : 2\pi s = r : s$$

neboli

$$n = \frac{360r}{s}.$$

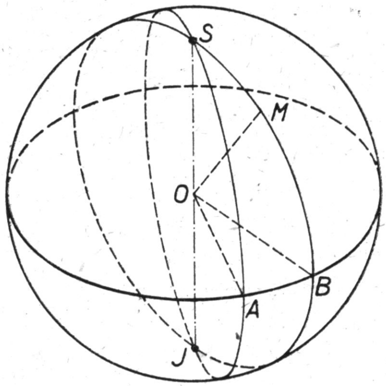
Nyní si probereme nejdůležitější věci o kouli. Ježto země má přibližně tvar koule, má geometrie čar na kulové ploše velký praktický význam, zejména pro plavbu na moři. Již v § 2 jsme mluvili (viz obr. 20) o hlavních a vedlejších kružnicích na kulové ploše. Dvěma body A, B danými na kulové ploše prochází zpravidla jediná hlavní kružnice. Výjimka nastane na př. pro severní a jižní pól na zeměkouli; obecně nastane výjimka, jestliže přímka AB prochází středem koule S. V tomto výjimečném případě prochází body A a B nekonečně mnoho hlavních kružnic; každá rovina vedená přímkou AB protne kulovou plochu v takové hlavní kružnici. Jestliže však přímka AB neprochází středem S, existuje jediná rovina ϱ, která spojuje přímku AB se středem S a průsečná čára roviny ϱ s kulovou plochou je jediná hlavní kružnice obsahující body A a B. Tyto dva body rozdělí hlavní kružnici na dva oblouky a menší z obou oblouků hlavní kružnice je nejkratší spojení bodů A a B na kulové ploše. Proto v geometrii na kulové ploše hrají hlavní kružnice stejnou úlohu jako přímky v geometrii roviny.



Obr. 87.

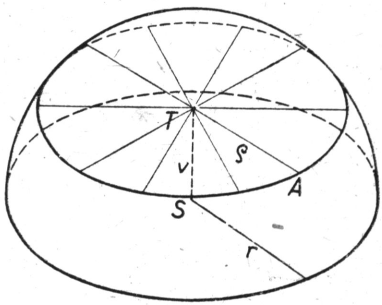
Zmíněná vlastnost hlavních kružnic má velkou praktickou důležitost. Melbourne v Australii a Kapské město v Jižní Africe mají přibližně stejnou zeměpisnou šířku. Ale cesta od Kapského města k Melbournu stále k východu, tedy po rovnoběžce, je mnohem delší než cesta po hlavní kružnici, která jde mnohem více k jihu. Ve skutečnosti ovšem nemůže loď plouti po zmíněné hlavní kružnici, protože by se dostala do jižních polárních krajin, ve kterých je plavba velmi nebezpečná.

Hlavní kružnice na zeměkouli, jejíž rovina stojí kolmo na spojnici SJ severního a jižního pólu, jmenuje se **rovník**. Každým bodem M na povrchu zeměkoule prochází zcela určitá hlavní půlkružnice spojující oba póly, které se říká **poledník**. Za základní poledník se bere **poledník Greenwichský**. V obr. 88 je znázorněn Greenwichský poledník, který protne rovník v bodě A, dále poledník procházející libovolným bodem M na povrchu zeměkoule, který protne rovník v bodě B. Je-li O střed zeměkoule, pak $\sphericalangle AOB$ se jmenuje **zeměpisná délka** bodu M; rozeznáváme západní a východní zeměpisnou délku,



Obr. 88.

které jdou od 0° (na Greenwichském poledníku) do 180° (na protějším poledníku). Úhel $\sphericalangle BOM$ se jmenuje **zeměpisná šířka** bodu M; rozeznáváme severní a jižní zeměpisnou šířku, které jdou od 0° (na



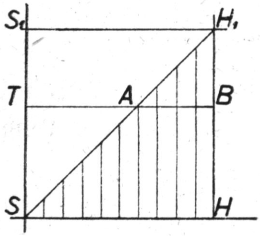
Obr. 89.

rovníku) do 90° (na pólech). Spojnice bodů stejné zeměpisné délky je poledník; spojnice bodů stejné zeměpisné šířky je vedlejší kružnice zvaná **rovnoběžka**. Všecky poledníky mají stejnou délku πr, kde r znamená poloměr zeměkoule. Naproti tomu je délka rovnoběžek nestejná; nejdelší je rovník (délka $2\pi r$); obecně délka rovnoběžky je $2\pi\varrho$, kde ϱ (poloměr rovnoběžky) je vzdálenost bodu M od přímky SJ.

Nyní si určíme objem polokoule (viz obr. 89). Polokoule poloměru r nechť spočívá rovnou částí svého povrchu na vodorovné podložce. Vodorovná rovina ve výšce v nad podložkou protne polokouli v kruhu poloměru ϱ, jehož obsah je $\pi\varrho^2$. Je-li T střed tohoto kruhu a A libovolný bod na obvodě, pak STA je pravoúhlý trojúhelník s přeponou $\overline{AS} = r$ a odvěsnami $\overline{ST} = v$, $\overline{TA} = \varrho$, pročež $v^2 + \varrho^2 = r^2$, tedy

$$\pi\varrho^2 = \pi r^2 - \pi v^2.$$

Podle Cavalieriova principu má polokoule týž objem jako kterékoli jiné těleso spočívající na téže podložce a jdoucí až do výšky r, které každá vodorovná rovina ve výšce v protne v ploše obsahu $\pi r^2 - \pi v^2$. Takové těleso si však snadno opatříme, uvědomíme-li si, že $\pi r^2 - \pi v^2$ je obsah mezikruží s poloměry r a v. Svislá úsečka SS_1 délky r budiž (viz obr. 90) stranou čtverce SS_1H_1H. Budiž T libovolný bod úsečky SS_1, $\overline{ST} = v$. Vodorovná přímka vedená bodem T protne SH_1 a HH_1 v bodech A, B a jest $\overline{TB} = r$, $\overline{TA} = v$ (neboť v pravoúhlém trojúhelníku STA je $\sphericalangle TSA = 45°$, takže $\overline{TA} = \overline{ST}$). Jestliže nyní otáčíme trojúhelník SHH_1 kolem osy SS_1, vznikne těleso L, které jde od vodorovné podložky až do výšky r a které každá vodorovná rovina ve výšce v protne v mezikruží obsahu $\pi r^2 - \pi v^2$, takže těleso L má týž objem jako naše polokoule. Avšak těleso L vznikne, když z rotačního válce s poloměrem podstavy r a výškou r vyjmeme rotační kužel s poloměrem podstavy r a výškou r. Objem válce je $\pi r^2 . r = \pi r^3$, objem kužele je $\frac{1}{3}\pi r^2 . r = \frac{1}{3}\pi r^3$, pročež objem tělesa L, tedy také objem polokoule, je



Obr. 90.

$$\pi r^3 - \tfrac{1}{3}\pi r^3 = \tfrac{2}{3}\pi r^3.$$

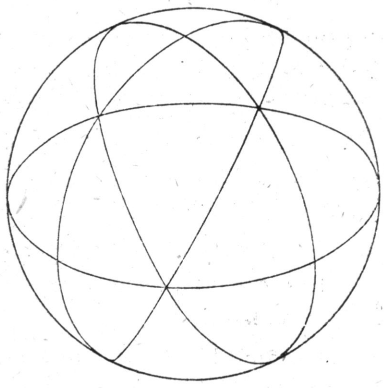
Objem koule je ovšem dvojnásobek objemu polokoule, pročež **objem koule je dán vzorcem**

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Nyní si ještě najdeme vzorec pro povrch koule. Povrch koule se dá rozložit na velký počet velmi malých křivočarých trojúhelníků, jak je naznačeno v obr. 91. Když každý z těch křivočarých trojúhelníků nahradíme přímočarým trojúhelníkem s týmiž vrcholy, přejde kulová plocha v plochu M, která se skládá z velkého počtu malých trojúhelníků a je vepsána do naší kulové plochy. Povrch kulové plochy se rovná velmi přibližně povrchu plochy M, který je roven

$$t_1 + t_2 + t_3 + \text{atd.},$$

kde t_1, t_2, t_3 atd. jsou obsahy jednotlivých trojúhelníků. Každý z těch trojúhelníků budiž podstavou trojbokého jehlanu, který má vrchol



Obr. 91.

ve středu S naší koule; výšky těch jehlanů buďtež v_1, v_2, v_3 atd. Všecky ty jehlany dohromady vyplní těleso T, jehož objem je velmi přibližně roven objemu koule. Objemy našich jehlanů jsou

$$\tfrac{1}{3}t_1v_1, \quad \tfrac{1}{3}t_2v_2, \quad \tfrac{1}{3}t_3v_3 \quad \text{atd.}$$

a objem tělesa T je

$$\tfrac{1}{3}(t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3 + \text{atd.}).$$

Avšak všecky výšky v_1, v_2, v_3 atd. jsou velmi přibližně rovny r, takže objem tělesa T je velmi přibližně roven

$$\tfrac{1}{3}r(t_1 + t_2 + t_3 + \text{atd.})$$

neboli součinu čísla $\frac{1}{3}r$ s povrchem plochy M, který je zase velmi přibližně roven povrchu P naší koule. Protože však objem tělesa T je velmi přibližně roven objemu koule, tedy číslu $\frac{4}{3}\pi r^3$, musí býti

$$\tfrac{1}{3}r \,.\, P = \tfrac{4}{3}\pi r^3.$$

Proto **povrch koule je dán vzorcem**

$$P = 4\pi r^2.$$

Výsledky tohoto paragrafu, jakož i další příbuzné výsledky, které už nebudeme uváděti, objevil slavný starověký matematik Archimedes, o kterém jsme se zmínili již v § 4.

Cvičení k § 6.

U mnoha příkladů je výhodné voliti $\pi \doteq \frac{22}{7}$. Nepočítejte nikde přesněji než na tři platné cifry.

I. Válec.

142. Určete objem, plášť a povrch rotačního válce:
a) poloměr podstavy 35 cm; výška 6 dm;
b) průměr podstavy 2,1 cm; výška 2 dm;
c) průměr podstavy 1,4 m; výška 1 cm;
d) poloměr podstavy 0,35 cm; výška $\frac{1}{2}$ m.

143. Určete výšku rotačního válce:
a) objem 66 dm^3; poloměr podstavy 2 dm;
b) objem 4 l; poloměr podstavy 5 cm;
c) objem $\frac{1}{2}$ l; plášť 2 dm^2.

144. Určete průměr podstavy rotačního válce:
a) objem 44 cm^3; výška $3\frac{1}{2}$ cm;
b) objem 385 cm^3; výška 1 dm;
c) plášť 396 cm^3; výška 9 cm.

145. Určete váhu duté kovové roury:
a) vnitřní průměr 6 cm, tloušťka 1 cm, délka 6 dm, spec. hmota 8,4 gcm^{-3};
b) vnější průměr 33 cm, tloušťka $1\frac{1}{2}$ cm, délka 9 dm, spec. hmota 7,8 gcm^{-3};
c) vnější průměr 18 cm, tloušťka $\frac{3}{4}$ cm, délka 100 m, spec. hmota 7,7 gcm^{-3}.

146. Kovový válec průměru 15 cm, vysoký 18 cm, je uložen do krabice s vnitřními rozměry 15 cm, 15 cm, 18 cm a zbylý prostor je vyplněn pilinami. Určete objem prostoru vyplněného pilinami!

147. Válcová nádrž s průměrem 1,8 m obsahuje 22 hl vody. Do jaké výše sahá voda?

148. Rourou s průměrem 7,5 cm proudí voda rychlostí 1,8 m za vteřinu. Za kolik hodin se naplní nádrž rozměrů 12 m; 9 m; 2,4 m?

149. Vnitřní řez tunelu je obdélník široký 7,2 m a polokruh nad ním; největší výška je 6 m. Je-li tunel 100 m dlouhý, určete celkový vnitřní povrch tunelu!

150. Kolik stojí nátěr plotu, který se skládá ze 105 válcových tyčí s průměrem 12 cm, vysokých 1 m, přijde-li 1 m² plochy na 75 Kčs? [Také vršky tyčí jsou natřeny.]

151. Kolika dm² plechu je třeba na zavřenou válcovou plechovku s průměrem 12 cm, vysokou 27 cm, má-li býti výška víka $1\frac{1}{2}$ cm?

II. Kužel.

152. Určete objem rotačního kužele:

a) výška 4 dm; obsah podstavy 15 dm²;
b) výška 7 cm; poloměr podstavy 3 cm;
c) výška 6 cm; strana 1 dm;
d) výška 5 cm; obvod podstavy 22 cm.

153. Určete povrch rotačního kužele:

a) strana 1 dm; poloměr podstavy 6 cm;
b) strana 13 cm; výška 12 cm;
c) výška 12 cm; průměr podstavy 18 cm.

154. Objem rotačního kužele je 462 cm³; poloměr podstavy je 7 cm. Určete výšku!

155. Povrch rotačního kužele je 29,7 dm²; průměr podstavy je 42 cm. Určete stranu!

156. Papírový polokruh průměru 18 cm se svine do pláště rotačního kužele. Určete výšku kužele a úhel osového řezu kužele!

157. Podstava kuželovitého stanu má průměr 5 m; výška stanu je 3 m. Určete objem stanu! Kolik plátna se spotřebuje na stan?

158. Sestavte vzorec pro povrch a objem rotačního kužele s poloměrem podstavy r, jehož rozvinutý plášť tvoří třetinu kruhu!

159. Do kruhu K s poloměrem r je vepsán pravidelný šestiúhelník M; K je podstava rotačního kužele, M je podstava pravidelného šestibokého jehlanu; obě tělesa mají výšku $v = r$.

a) Kolika procentům objemu kužele je roven objem jehlanu?
b) Kolika procentům pláště kužele je roven plášť jehlanu?

160. Opakujte úlohu **159** s tím rozdílem, že $v = 2r$!

III. Koule.

161. Délka zemského poledníku je 20 001 712 m. Mořská míle je vzdálenost dvou bodů na témž poledníku, jejichž zeměpisné šířky se liší o 1′. Kolik m měří mořská míle?

162. Určete povrch a objem koule:

a) poloměr 2,63 cm; b) průměr 7,28 cm.

163. Určete poloměr koule, jejíž povrch je 1 m².

164. Krychle a koule mají stejný povrch. Které těleso má větší objem?

165. Kolik dešťových kapek průměru 2 mm vyplní polokulovitou sběračku průměru 8 cm?

166. Ve válcové nádrži s průměrem 1,2 m je vody do výše 9 dm. Oč stoupne hladina vodní, ponoří-li se do nádrže kovová koule s průměrem 9 dm?

167. Z deseti olověných koulí s průměrem 1 dm se vyrobí válec s průměrem podstavy 4 dm. Určete výšku válce!

168. Vnější průměr duté kovové koule je 12 cm, tloušťka 2 cm. Jaký průměr má stejně těžký plný válec z téhož materiálu, je-li jeho výška 10,4 cm?

169. Je-li průměr zeměkoule 12 760 km, průměr slunce 1 390 000 km, průměr měsíce 3 473 km, průměr planety Marsu 6 780 km, určete jejich povrchy!

170. Povrch země měří 509 951 000 km^2. Kdyby země měla přesně tvar koule, jaký by byl její poloměr? (Volte $\pi \doteq 3{,}14159$ a počítejte přesně na kilometry!)

Obsah.