Miloš Kössler

Über die α-Stellen von beschränkten Potenzreihen

Věstník Král. čes. spol. nauk 1930, No. 11, 12 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501247

XI.

Über die α-Stellen von beschränkten Potenzreihen.

Von **M. KÖSSLER** in Prag.

(Vorgelegt am 10. Dezember 1930.)

Die Funktion $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ regulär im $|x| < 1$ und daselbst $|f(x)| \leqq 1$ besitzt die Eigenschaft, daß die absolut kleinste Nullstelle $|x_0| \geqq |c_0|$ ist. Das ist die Jensensche Ungleichung.

In der vorliegenden Arbeit wird die Abhängigkeit der Nullstellen und allgemeiner der α-Stellen von den n ersten Koeffizienten der Reihe untersucht. Das Problem ist in dem Sinne vollständig gelöst, daß man die scharfe untere Grenze $\varrho_n(c_0, c_1, \ldots c_{n-1})$ für $|x_0|$ angeben kann. Die Funktion ϱ_n ist, wie man erwarten konnte, eine algebraische n-ten Grades. Dies ist aber nur eine Spezialisierung. Das Hauptergebnis der vorliegenden Untersuchung ist in dem Hauptsatze (zweites Kapitel) formuliert. Es werden Bereiche $K_1, K_2, \ldots K_n$ konstruiert, welche im Inneren des Einheitskreises liegen und wurzelfrei sind. Dabei hängt K_ν nur von den ν ersten Koeffizienten ab und seine Grenze wird durch eine algebraische Kurve definiert.

Ich gehe von den grundlegenden Arbeiten von Herrn I. Schur[1]) aus. Um dem Leser das Nachsuchen zu ersparen, habe ich im ersten Kapitel alle zum Verständnis notwendigen Resultate dieser Arbeit zusammengestellt.

---

[1]) Über Potenzreihen, die im Inneren des Einheitskreises beschränkt sind. Journ. für die reine und ang. Mathematik, 1917, B. 147, S. 205—232, 1918, B. 148, S. 122—145.

Erstes Kapitel.

Hilfssätze von Hrn. I. Schur und A. Hurwitz.

Es sei

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots\dots \tag{1}$$

für $|x| < 1$ regulär und daselbst $|f(x)| \leqq 1$. Dann ist wie bekannt $|c_0| \leqq 1$, wo die Gleichheit nur für $f(x) = e^{i\varphi}$ eintreten kann. Nach dem Schwarz-schen Lemma hat die Funktion

$$f_1(x) = \frac{1}{x} \, \frac{f(x) - f(o)}{1 - \overline{f(o)} f(x)}, \text{ wenn } |f(o)| < 1,$$

dieselben Eigenschaften, wie $f(x)$. Setzt man nun dieses Verfahren fort, so erhält man eine endliche oder unendliche Folge von Funktionen

$$f_0 = f(x),\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ \dots\dots \tag{2}$$

zwischen denen die Gleichungen

$$f_{n+1} = \frac{1}{x} \, \frac{f_n - \gamma_n}{1 - \overline{\gamma_n} f_n}, \quad f_n = \frac{\gamma_n + x f_{n+1}}{1 + \overline{\gamma_n} x f_{n+1}}, \quad \gamma_n = f_n(o) \tag{3}$$

bestehen. Diese Funktionen gehören sämtlich zu der Funktionenklasse $|f_n(x)| \leqq 1$ und werden nach Hrn. Schur die zu $f(x)$ adjungierten Funktionen und die Konstanten γ_n die zu $f(x)$ gehörenden Parameter gennant. Hierbei wird offenbar γ_ν eine wohlbestimmte rationale Funktion von

$$c_0,\ \overline{c_0},\ c_1,\ \overline{c_1},\ \dots\dots,\ c_\nu,\ \overline{c_\nu}.$$

Insbesondere setzen wir

$$\gamma_\nu = \Phi\,(c_0,\ c_1,\ \dots\dots\ c_\nu) = \Phi_\nu$$

Speziell ist

$$\gamma_0 = c_0, \quad \gamma_1 = \frac{c_1}{1 - c_0 \overline{c_0}}, \quad \gamma_2 = \frac{c_2(1 - c_0\overline{c_0}) + \overline{c_0} c_1^2}{(1 - c_0\overline{c_0})^2 - c_1 \overline{c_1}}.$$

Für numerisch gegebene Koeffizienten c_ν ist, wie man leicht erkennt, der Nenner von Φ_ν von Null verschieden, wenn keine der Zahlen $|\gamma_0|, |\gamma_1|, \dots\dots |\gamma_{\nu-1}|$ gleich 1 ist.

Umgekehrt ist

$$c_\nu = \psi(\gamma_0,\ \gamma_1,\ \dots\dots\ \gamma_\nu) = \psi_\nu$$

eine wohlbestimmte ganze rationale Funktion von

$$\gamma_0,\ \bar{\gamma}_0,\ \gamma_1,\ \bar{\gamma}_1,\ \ldots\ \gamma_{\nu-1},\ \bar{\gamma}_{\nu-1},\ \gamma_\nu.$$

Insbesondere wird

$$c_0 = \gamma_0,\ c_1 = \gamma_1(1-\gamma_0\bar{\gamma}_0),\ c_2 = \gamma_2(1-\gamma_0\bar{\gamma}_0)(1-\gamma_1\bar{\gamma}_1) - \gamma_0\bar{\gamma}_1^2(1-\gamma_0\bar{\gamma}_0).$$

Es gilt nun folgender Satz von Hrn. Schur:

Die Potenzreihe (1) ist dann und nur dann für $|x|<1$ konvergent und von dem absoluten Betrage nach höchstens gleich 1, wenn die zugehörigen Ausdrücke

$$\gamma_\nu = \Phi(c_0,\ c_1,\ \ldots\ c_\nu)$$

entweder sämtlich absolut kleiner als 1 sind, oder wenn eine Zahl n existiert, für die

$$|\gamma_0|<1,\ |\gamma_1|<1,\ \ldots,\ |\gamma_{n-1}|<1,\ |\gamma_n|=1$$

wird und die n-te zu $f(x)$ adjungierte Funktion

$$f_n(x) = c_{no} + c_{n1}x + c_{n2}x^2 + \ldots$$

sich auf das konstante Glied $c_{no} = \gamma_n$ reduziert. Im ersten Fall wird

$$f(x) = [x,\ \gamma_0,\ \gamma_1,\ \ldots] = \sum_{x=0}^{\infty} \psi(\gamma_0,\ \gamma_1,\ \ldots\ \gamma_\nu)x^\nu.$$

Der zweite Fall tritt dann und nur dann ein, wenn $f(x)$ eine rationale Funktion von der Form

$$f(x) = \varepsilon \prod_{\nu=1}^{n} \frac{x+w_\nu}{1+\bar{w}_\nu x},\qquad o \leqq |w_\nu| < 1,\ |\varepsilon| = 1$$

ist, und es wird $f(x) = [x;\ \gamma_0,\ \gamma_1,\ \ldots\ \gamma_n]$.

Im folgenden unterscheiden wir diese beiden Fälle voneinander, indem wir $f(x)$ als eine Funktion von unendlichem Range, bezw. vom endlichen Range n bezeichnen. Eine Funktion vom endlichen Range wird auch als eine Schrankenfunktion bezeichnet.

Mit Hilfe der Formeln (3) läßt sich $f(x)$ als der Quotient

$$f(x) = \frac{C_{n-1} + xD_{n-1}f_n(x)}{A_{n-1} + xB_{n-1}f_n(x)} \tag{4}$$

ausdrücken, wobei A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1}, D_{n-1} Polynome sind, die durch die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} A_n &= A_{n-1} + \gamma_n x B_{n-1}, \quad B_n = \bar{\gamma}_n A_{n-1} + x B_{n-1}, \\ C_n &= C_{n-1} + \gamma_n x D_{n-1}, \quad D_n = \bar{\gamma}_n C_{n-1} + x D_{n-1} \end{aligned} \tag{5}$$

zu berechnen sind. Es kommt noch hinzu, daß

$$A_0 = 1, \; B_0 = \bar{\gamma}_0, \; C_0 = \gamma_0, \; D_0 = 1$$

zu setzen ist. Speziell wird

$$A_1 = 1 + \bar{\gamma}_0 \gamma_1 x, \; B_1 = \bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_0 x, \; C_1 = \gamma_0 + \gamma_1 x, \; D_1 = \gamma_0 \bar{\gamma}_1 + x$$

$$A_2 = 1 + (\bar{\gamma}_0 \gamma_1 + \bar{\gamma}_1 \gamma_2) x + \bar{\gamma}_0 \gamma_2 x^2, \; B_2 = \bar{\gamma}_2 + (\bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_0 \gamma_1 \bar{\gamma}_2) x + \bar{\gamma}_0 x^2$$

$$C_2 = \gamma_0 + (\gamma_1 + \gamma_0 \bar{\gamma}_1 \gamma_2) x + \gamma_2 x^2, \; D_2 = \gamma_0 \bar{\gamma}_2 + (\gamma_0 \bar{\gamma}_1 + \gamma_1 \bar{\gamma}_2) x + x^2.$$

Die betrachteten Polynome sind nicht voneinander unabhängig, denn schreibt man noch deutlicher

$$A_n = A(x;\; \gamma_0, \gamma_1, \cdots \gamma_n) \text{ usw.}$$

so ergibt sich mit Hilfe der Formeln (5)

$$\left.\begin{aligned} A(x;\; \gamma_0, \cdots \gamma_n) &= A(x;\; \bar{\gamma}_n, \bar{\gamma}_{n-1}, \cdots \bar{\gamma}_0) \\ B(x;\; \gamma_0, \cdots \gamma_n) &= C(x;\; \bar{\gamma}_n, \cdots\cdots\cdots \bar{\gamma}_0) \\ C(x;\; \gamma_0, \cdots \gamma_n) &= D(x;\; \bar{\gamma}_n, \cdots\cdots\cdots \bar{\gamma}_0) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Ferner ist

$$D(x;\; \gamma_0, \cdots \gamma_n) = x^n A(x^{-1};\; \bar{\gamma}_0, \bar{\gamma}_1, \cdots \bar{\gamma}_n)$$
$$B(x;\; \gamma_0, \cdots \gamma_n) = x^n C(x^{-1};\; \bar{\gamma}_0, \bar{\gamma}_1, \cdots \bar{\gamma}_n)$$

wofür wir einfacher

$$D_n(x) = x^n \bar{A}_n(x^{-1}), \; B_n(x) = x^n \bar{C}_n(x^{-1}) \tag{7}$$

schreiben können. Ist γ_n von Null verschieden, so kommt noch hinzu

$$C(x;\; \gamma_0, \cdots \gamma_n) = \gamma_n x^n A(x^{-1};\; \bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_1, \cdots \bar{\gamma}_{n-1}, \gamma_n^{-1}) \tag{8}$$

Man rechnet auch folgende Relationen

$$A_n D_n - B_n C_n = p_n x^n, \tag{9}$$

$$A_{n+1} C_n - A_n C_{n+1} = -\gamma_{n+1} p_n x^{n-1} \tag{10}$$

leicht nach, wobei

$$p_n = \prod_{\nu=0}^{n} (1 - \gamma_\nu \bar{\gamma}_\nu)$$

zu setzen ist. Wegen (7) läßt sich die Gleichung (9) auch in der Form

$$A_n(x)\overline{A}_n(x^{-1}) - C_n(x)\overline{C}_n(x^{-1}) = p_n \tag{11}$$

schreiben.

Die Ausdrücke A_n und C_n haben insbesondere die Form

$$A_n = 1 + \ldots + \overline{\gamma}_0\gamma_n x^n, \quad C_n = \gamma_0 + \ldots + \gamma_n x^n.$$

Aus (10) und (11) folgt noch, daß, wenn keine der Zahlen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_{n-1}$ von absolutem Betrage 1 ist, A_n und C_n teilerfremde Polynome sind.

Statt der Gleichung (4) können wir also nach (7)

$$f(x) = \frac{C_{n-1}(x) + x^n\overline{A}_{n-1}(x^{-1})f_n(x)}{A_{n-1}(x) + x^n\overline{C}_{n-1}(x^{-1})f_n(x)} = \frac{Z(x)}{N(x)} \tag{12}$$

schreiben.

Ist $f_n(x) = \gamma_n$ konstant und $|\gamma_n| = 1$, so hat diese Schrankenfunktion $f(x) = S_n(x)$ n Nullstellen, die sämtlich absolut kleiner als Eins sind.

Wir benützen noch folgenden bekannten Satz von A. Hurwitz („Über die Nullstellen der Bessel-schen Function." M. A. XXXIII. S. 249.):

Es sei in einem endlichen Gebiete G die Funktion $f(x)$ die gleichmäßige Grenze der Reihe von Funktionen $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... $g_\nu(x)$, ... also $\lim g_\nu(x) = f(x)$. Innerhalb G möge ferner jede einzelne der genannten Funktionen den Charakter einer rationalen Funktion besitzen.

Dann sind im Inneren von G die Nullstellen der Funktion $f(x)$ identisch mit denjenigen Stellen, an welchen sich die Wurzeln der Gleichungen

$$g_1(x) = 0, \; g_2(x) = 0, \; \ldots, \; g_\nu(x) = 0, \; \ldots$$

verdichten. Und zwar liegen in einer beliebig kleiner Umgebung der Stelle α, welche eine r-fache Nullstelle von $f(x)$ ist, genau r Wurzeln der Gleichung $g_\nu(x) = 0$, sobald ν eine bestimmte von der Größe jener Umgebung abhängende Zahl überschreitet.

Zweites Kapitel.

Über die Lage der Nullstellen von $f(x)$.

Wie bei der Formel (11) gesagt wurde, sind, wenn keine der Zahlen $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ von absolutem Betrage 1 ist, $A_n(x)$

und $C_n(x)$ teilerfremde Polynome. Es kann nun leicht bewiesen werden, daß $A_n(x)$ im Kreis $|x| \leqq 1$ von Null verschieden ist. Für $x = e^{i\varphi}$, $|\gamma_n| < 1$ folgt aus (11)

$$|A_n(e^{i\varphi})|^2 - |C_n(e^{i\varphi})|^2 = p_n > 0$$

Es ist also $A_n(x)$ auf dem Einheitskreise von Null verschieden und da die Funktion

$$\varphi_n(x) = \frac{C_n(x)}{A_n(x)}, \quad |x| < 1$$

zu der Klasse $|\varphi_n(x)| \leqq 1$ gehört $(\gamma_{n+1} = \gamma_{n+2} = \ldots\ldots = 0)$, so kann sich $A_n(x)$ auch im Innneren des Einheitskreises nicht anullieren. Ist $|\gamma_n| = 1$, so wird aus $A_n(x)$ der Nenner einer Schrankenfunktion, welcher im $|x| \leqq 1$ wurzelfrei ist.

Daraus entfließt, daß auch der Nenner von (12) für $|x| < 1$ nicht Null werden kann. Denn wäre $N(\xi) = 0$, so wäre auch in demselben Punkte ξ

$$A_n(\xi) = A_{n-1}(\xi) + \gamma_n \xi^n \overline{C}_{n-1}(\xi^{-1}) = 0,$$

wo $|\gamma_n| = |f_n(\xi)| \leqq 1$ ist, was dem eben Bewiesenen widerspricht.

Die Nullstellen der Funktion $f(x)$ im Kreis $|x| < 1$ sind also mit den Nullstellen von $Z(x)$ in (12) identisch.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $|c_0| = |\gamma_0| > 0$ annehmen. Wenn nämlich

$$f(x) = x^k(c_k + c_{k+1}x + \ldots\ldots), \quad |c_k| > 0,$$

so ist nach dem Schwarz-schen Lemma $|f(x) : x^k| \leqq 1$ im $|x| < 1$, und die von Null verschiedenen Nullstellen von $f(x)$ sind mit den Nullstellen von $f(x) : x^k$ identisch.

Die Polynome $C_{n-1}(x)$, $x^{n-1}\overline{A}_{n-1}(x^{-1})$ sind teilerfremd. Denn erstens ist $C_{n-1}(o) = \gamma_0 \neq 0$. Zweitens können nach (10) und (11) die betrachteten Polynome keinen von x verschiedenen gemeinsamen Teiler besitzen.

Betrachten wir jetzt den Quotienten

$$q_n(x) = \frac{x^n \overline{A}_{n-1}(x^{-1})}{C_{n-1}(x)} \tag{13}$$

und denjenigen Bereich K_n der x-Ebene, in welchem

$$|q_n(x)| < 1, \tag{14}$$

so können wir leicht beweisen, daß in dem Durchschnitte von K_n mit $|x| < 1$ keine Nullstelle von $f(x)$ liegen kann.

Nach (14) ist im K_n $C_{n-1}(x)$ von Null verschieden. Z (x) könnte also im K_n nur dann verschwinden, wenn ebenda

$$1 + f_n(x)\, x^n \, \frac{\overline{A}_{n-1}(x^{-1})}{C_{n-1}(x)} = 1 + f_n(x)\, q_n(x) = 0$$

wäre, was wegen $|f_n(x)| \leqq 1$, $|q_n(x)| < 1$ unmöglich ist. Der wurzelfreie Bereich K_n hat nun folgende Eigenschaften. K_n liegt samt seiner Grenze im Inneren des Einheitskreises. Jeder Punkt der Grenze ist eine Nullstelle einer gewissen Schrankenfunktion[2])

$$S_n(x) = \frac{C_{n-1}(x) + e^{-i\varphi} x^n \overline{A}_{n-1}(x^{-1})}{A_{n-1}(x) + e^{-i\varphi} x^n \overline{C}_{n-1}(x^{-1})}$$

und auch umgekehrt jede Nullstelle einer jeden solchen $S_n(x)$ liegt auf der Grenze von K_n.

Der Beweis dieser Behauptungen beruht auf der Tatsache, daß die Grenzpunkte von K_n durch die Gleichungen

$$q_n(x) + e^{i\varphi} = e^{i\varphi} \, \frac{C_{n-1}(x) + e^{-i\varphi} x^n \overline{A}_{n-1}(x^{-1})}{C_{n-1}(x)} = 0, \quad 0 \leqq \varphi < 2\pi$$

definiert sind. Da nun alle Nullstellen von jeder $S_n(x)$ im Kreis $|x| < 1$ liegen, so ist auch K_n samt Grenze im $|x| < 1$ eingebetet.

Was nun die gegenseitige Lage der Bereiche $K_1, K_2 \ldots\ldots K_n \ldots\ldots$ betrifft, so liegt der Bereich K_ν samt seiner Grenze im $K_{\nu+1}$. Es ist nämlich

$$q_{\nu+1}(x) = x \, \frac{x^\nu \overline{A}_{\nu-1}(x^{-1}) + \overline{\gamma}_\nu C_{\nu-1}(x)}{C_{\nu-1}(x) + \gamma_\nu x^\nu \overline{A}_{\nu-1}(x^{-1})} = x \, \frac{q_\nu(x) + \overline{\gamma}_\nu}{1 + \gamma_\nu q_\nu(x)} \tag{15}$$

Wenn nun $|q_\nu(x)| \leqq 1$ ist, so ist auch $|q_{\nu+1}(x)| \leqq |x| < 1$. *So sind wir zu dem Hauptsatze I. angelangt:*

Es sei $|f(x)| \leqq 1$ für $|x| < 1$ und daselbst regulär. Die n Schurschen Parameter $\gamma_0, \gamma_1, \ldots\ldots \gamma_{n-1}$ der Funktion $f(x)$ seien absolut kleiner als 1 und $\gamma_0 \neq 0$. Im Bereich K_n, welcher durch

---

[2]) Wir betrachten dabei selbstverständlich nur diejenigen $S_n(x)$, welche in den n ersten Schurschen Parameter mit $f(x)$ übereinstimmen.

diese n Parameter eindeutig bestimmt und von den folgenden Parametern unabhängig ist, liegt keine Nullstelle der Funktion $f(x)$. Auf der Grenze von K_n liegen Nullstellen und zwar sämtliche Nullstellen von $f(x)$ nur in dem Falle, daß $f_n(x) = = \gamma_n = e^{i\varphi}$ ist.

Wir wollen noch die scharfe untere Grenze für die absolut kleinste Wurzel x_1 der Gleichung $f(x) = 0$ angeben. Der größte in den Bereich K_n eingeschriebene Kreis mit dem Mittelpunkte in $x = 0$ habe den Halbmesser ϱ_n. Es ist nach dem Hauptsatze $\varrho_1 < \varrho_2 < \dots < \varrho_n$ und $|x_1| > \varrho_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots n-1$, $|x_1| \geqq \varrho_n$, wo die Gleichheit nur in dem Falle eintritt, wenn $f(x)$ mit einer gewissen Schrankenfunktion $S_n(x)$ identisch ist.

Mit den Hilfsmitteln, die uns jetzt zur Verfügung stehen, sind wir im Stande den absoluten Betrag der kleinsten Nullstelle von $f(x)$ zu berechnen. Wenn die Funktion $f(x)$ vom endlichen Range n ist, so ist das Problem ein algebraisches und wir wollen es als erledigt betrachten. Es sei nun $f(x)$ von unendlichem Range. Dann gilt folgender Satz II.:

Es ist $\lim \varrho_n = \varrho \leqq 1$. Ist $\varrho < 1$, so ist $|x_1| = \varrho$. Ist $\varrho = 1$ so besitzt die Gleichung $f(x) = 0$ gar keine Wurzel im Kreis $|x| < 1$.

Der Beweis stützt sich auf die Tatsache, daß die zu ϱ_n gehörenden Schrankenfunktionen $S_n(x)$ die Funktion $f(x)$ gleichmäßig approximieren. Es ist im $|x| < 1$ $|f(x)| \leqq 1$, $|S_n(x)| < 1$ und die Reihen beider dieser Funktionen beginnen mit demselben Abschnitte $c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$. Es ist also

$$\left|\frac{f(x) - S_n(x)}{2}\right| \leqq 1, \text{ also auch } \left|\frac{f(x) - S_n(x)}{2x^n}\right| \leqq 1.$$

Es sei nun $\varrho < 1$, $\varrho < r < 1$. Dann ist

$$|f(x) - S_n(x)| \leqq 2r^n, \quad |x| \leqq r.$$

Der gleichmäßige Grenzwert $\lim S_n(x) = f(x)$ existiert also im $x \leqq r$. Da nun im Kreis $|x| \leqq \varrho_\nu$ nach dem Satze II keine Wurzel der Gleichungen $S_n(x) = 0$ für $n > \nu$ liegen kann, und im Kreis $|x| \leqq \varrho$ unendlich viele Nullstellen der Schrankenfunktionen liegen müssen, so leuchtet ein, daß auf dem Kreis $|x| = \varrho$ der absolut kleinste Häufungspunkt der betrachteten Nullstellen zu finden ist. Nach dem Hilfsatze von Hurwitz liegt also, falls $\varrho < 1$ ist, auf diesem Kreise die absolut kleinste Wurzel von $f(x) = 0$, und fällt mit dem betrachteten Häufungspunkte zusammen.

Drittes Kapitel.

Einige Anwendungen.

Die Berechnung des Parameters $\varrho_n < 1$ führt zu einer algebraischen Gleichung n-ten Grades. Für $n = 1, 2$ bekommen wir speziell

$$q_1(x) = \frac{x}{\gamma_0}, \quad q_2(x) = \frac{x^2 + x\gamma_0\overline{\gamma_1}}{\gamma_0 + \gamma_1 x}$$

also

$$\varrho_1 = |\gamma_0|, \quad \varrho_2 = \frac{2|\gamma_0|}{|\gamma_1|(1-|\gamma_0|) + \sqrt{|\gamma_1|^2(1-|\gamma_0|^2) + 4|\gamma_0|}} \tag{16}$$

Die absolut kleinste Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist also größer oder gleich $|\gamma_0| = |c_0|$. Dies besagt noch nichts neues, denn die Abschätzung ist mit der bekannten Jensen'schen identisch. Die Grenze ist scharf und wird von der ersten adjungierten Schrankenfunktion

$$S_1(x) = \frac{c_0 + x}{1 + \overline{c_0} x} = c_0 + x(1 - c_0\overline{c_0}) + \ldots\ldots$$

erreicht. Dieselbe Wurzel ist absolut größer oder gleich ϱ_2. Diese Grenze ist scharf und wird von der zweiten adj. Schrankenfunktion

$$S_2(x) = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 x + e^{i\varphi}(x^2 + \overline{\gamma_1}\gamma_0 x)}{1 + \overline{\gamma_0}\gamma_1 x + e^{i\varphi}(\overline{\gamma_0} x^2 + \overline{\gamma_1} x)} = c_0 + c_1 x + \ldots\ldots$$

bei geeignet gewähltem $e^{i\varphi}$ erreicht usw. Wenn also die Funktion (1) unendlichen Ranges ist und mit dem Abschnitte $c_0 + c_1 x + \ldots\ldots + c_{n-1}x^{n-1}$ beginnt, so kann sie nur Nullstellen besitzen, die größer als $\varrho_n = \varrho_n(c_0, c_1, \ldots\ldots c_{n-1})$ sind. Diese Grenze ist scharf und wird von einer Schrankenfunktion erreicht. Diese Formel verschärft also die Ungleichung von Jensen in dem Sinne, daß die Abhängigkeit der absolut kleinsten Wurzel von den n ersten Koefffizienten der Reihe ersichtlich wird.

Eine Folgerung dieser Ergebnisse für alg. Gleichungen sei erwähnt. Hat ein Polynom n-ten Grades

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad a_0 \neq 0, \quad a_n \neq 0 \tag{17}$$

Nullstellen, die sämtlich abs. kleiner als Eins sind, so ist

$$f(x) = \frac{P(x)}{x^n \bar{P}(x^{-1})} = \frac{a_0}{\bar{a}_n} + x\left(\frac{a_1}{\bar{a}_n} - \frac{a_0 \bar{a}_{n-1}}{\bar{a}_n^{\,2}}\right) + \dots, \tag{18}$$

$$|f(x)| \leqq 1, \quad |x| \leqq 1.$$

Zwischen den zu dieser Funktion gehörenden ϱ_ν Parameter, $\nu = 1, 2, \dots n-1$, und der abs. kleinsten Nullstelle α des $P(x)$ besteht also die Relation $|\alpha| > \varrho_\nu$. Hat $P(x)$ beliebige Nullstellen, so kann man immer eine positive Zahl R so angeben, daß alle Nullstellen abs. kleiner als R sind. So ist z. B.

$$R = 1 + M : |a_n|, \quad \text{wenn} \quad M = \max_{r=0, 1, \dots n} |a_r|$$

Das Polynom $P(yR)$ hat dann die gewünschte Eigenschaft. Allgemeiner kann man statt der Kreise ϱ_ν die K_ν Bereiche betrachten. Die Wurzeln der Gleichung $P(yR) = 0$ können also nur in den Komplementen der Bereiche K_ν liegen.

Die Nullstellen der Funktion (1) sind isoliert. Dieser klassische Satz erlaubt folgende Verschärfung:

Es sei x_0 eine n-fache Nullstelle von $f(x)$, $|x_0| < 1$. Ist $\varrho_\nu(x_0)$ ein Parameter, das zu der Funktion

$$F(\xi) = \frac{1}{\xi^n} f\left(\frac{\xi + x_0}{1 + \bar{x}_0 \xi}\right)$$

gehört, so liegt im Kreise

$$\left|\frac{x - x_0}{1 - \bar{x}_0 x}\right| \leqq \varrho_\nu(x_0)$$

keine von x_0 verschiedene Nullstelle von $f(x)$.

Der Beweis ist fast selbstverständlich. Es ist

$$F(\xi) = c_0(x_0) + c_1(x_0)\xi + \dots, \quad |F(\xi)| \leqq 1, \quad |\xi| < 1, \quad c_0(x_0) \neq o.$$

Die abs. kleinste Wurzel der Gleichung $F(\xi) = 0$ ist größer als $\varrho_\nu(x_0)$. Die Substitution

$$x = \frac{\xi + x_0}{1 + \bar{x}_0 \xi}, \quad \xi = \frac{x - x_0}{1 - \bar{x}_0 x}$$

lehrt, daß im Kreis $|\xi| \leqq \varrho_\nu(x_0)$ keine Nullstelle von $F(\xi)$ also auch keine von x_0 verschiedene Nullstelle von $f(x)$ liegen kann. Speziell ist für $n=1$, $\nu=1$ der wurzelfreie Kreis

$$\left|\frac{x-x_0}{1-\bar{x}_0 x}\right| \leqq |f'(x_0)|\,(1-|x_0|^2),$$

Bezeichnet man allgemeiner mit $q_\nu(x_0, \xi)$ die zu $F(\xi)$ gehörende Funktion (13) so liegt im Bereiche

$$\left|q_\nu\left(x_0, \frac{x-x_0}{1-\bar{x}_0 x}\right)\right| < 1$$

keine von x_0 verschiedene Nullstelle von $f(x)$.

Alle Ergebnisse, welche wir für die Klasse der beschränkten Potenzreihen auseinandergesetzt haben, können leicht auf eine allgemeinere Klasse übertragen werden. Wenn $f(x)$ im $|x|<1$ nur Werte annimmt, die in einem beliebigen einfach zusammenhängenden Bereiche K liegen, und bildet $\xi = \varphi(y)$ den Bereich K in der y-Ebene auf den Kreis $|\xi|<1$ konform ab, so wird die Funktion

$$y = \varphi(f(x)) = F(x)$$

die Eigenschaft $|F(x)| \leqq 1$ im $|x|<1$ besitzen.

Liegt nun der Punkt a im K, so kann man immer die abbildende Funktion so wählen, daß $\varphi(a)=0$, wobei $\varphi(y) \neq 0$ für $y \neq a$. Die a-Stellen von $f(x)$ sind also mit den Nullstellen von $F(x)$ identisch.

Es sei z. B. $f(x)$ eine Funktion der Klasse (1) und a eine beliebige Konstante, die abs. kleiner als 1 ist. Um die a-Stellen von $f(x)$ zu untersuchen, benützen wir die abbildende Funktion

$$\xi = \frac{y-a}{y-\bar{a}y}.$$

Dann fallen die Nullstellen von

$$F(x) = \frac{f(x)-a}{1-\bar{a}f(x)}$$

mit den a-Stellen von $f(x)$ zusammen.

Résumé.

Sur les points où une série de puissances bornée prend la valeur α.

La fonction $f(x)=\sum_{0}^{\infty} c_n x^n$ soit holomorphe pour $|x|<1$ et bornée suivant la relation $|f(x)| \leqq 1$. Le zéro x_0 de cette fonction ayant la moindre valeur absolue satisfait à l'inégalité connue de Jensen $|x_0| \geqq |c_0|$. Dans le présent travail l'auteur étudie la manière dont dépend la position des zéros et, plus généralement, des points où la fonction prend la valeur α, des premiers n coefficients de la série. Le problème est résolu complètement en ce sens que la borne inférieure exacte $\varrho_n(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ pour $|x_0|$ a été déterminée. Mais ce n'est qu'un corollaire du théorème principal beaucoup plus général qui dit:

Soit $f(x)$ une fonction holomorphe et, de plus, $|f(x)| \leqq 1$ pour $|x|<1$. Les paramètres de Schur $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ soient tous, en valeur absolue, inférieurs à l'unité et soit encore $\gamma_0 \neq 0$. Alors, dans un domaine K_n, déterminée d'une manière univoque par ces paramètres et ne dépendant pas d'autres paramètres, il ne peut y avoir aucun zéro de $f(x)$. Sur la frontière de K_n se trouvent des zéros seulement si $\gamma_n = e^{i\varphi}$; en ce cas ils s'y trouvent tous.

La frontière du domaine K_n est déterminée par la courbe algébrique (14). La borne inférieure ϱ_2 pour le plus petit zéro mentionnée plus haut est calculée directement dans la formule (16) du texte.