Miloš Kössler

Sur les singularités des séries entières

Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. 32 (1923), No. 5, pp. 528–531

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501235

Matematica. — *Sur les singularités des séries entières.* Nota di MILOŠ KÖSSLER, presentata dal Corrisp. GUIDO FUBINI.

Nous emploierons les notations dont nous avons fait usage dans les Notes *Sur les singularités etc.* et *Nouveaux théorèmes etc*, qui ont paru dans ces Rendiconti [1]. Dans la Note présente, nous allons généraliser et compléter les théorèmes énoncés dans les Notes précédentes; les deux théorèmes nouveaux concernent les séries entières à une infinité de coefficients nuls et contiennent ceux de M. Hadamard et de M. Fabry comme des cas particuliers [2].

1. On peut généraliser le théorème I comme il suit:

I_1. *Condition nécessaire et suffisante pour que $z = e^{i\psi}$ soit un point singulier de la série* (1) *est donnée par la relation*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |B_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{3}{2},$$

où

$$B_n = \sum_{k=n\left(\frac{1}{4}-\mu\right)}^{n\left(\frac{1}{4}+\mu\right)} a_{n-k}\left(\frac{3}{4}\right)^k \binom{n-k}{k} e^{-ik\psi}$$

et μ est une constante arbitrairement petite, indépendante de n.

Pour la démonstration, nous décomposons le nombre A_n du théorème I en trois sommes partielles

$$(8) \qquad A_n = \sum_{k=0}^{n\left(\frac{1}{4}-\mu\right)-1} + \sum_{k=n\left(\frac{1}{4}+\mu\right)+1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} + B_n\,,$$

et, faisant usage de la relation

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{3}{4}\right)^k \binom{n-k}{k}\right|^{\frac{1}{n}} = p < \frac{3}{2}\,,$$

([1]) Rendiconti, 1923, vol. XXXII, fasc. 1°; ibid, idem, fasc. 2°.

([2]) J. Hadamard, *Essai sur l'étude etc.*, « Journal de mathém. », (4) *8*, 1892, pp. 101-186; E. Fabry, *Sur les points singuliers etc.*, « Annales de l'Éc. norm. » (3) *13*, 1896, pp. 107-114.

valable pour

$$k = n\left(\frac{1}{4} \pm \vartheta\right) \quad , \quad 0 < \vartheta \leqq \frac{1}{4} ,$$

nous en déduisons

$$\overline{\lim_{\to\infty}} \, |A_n - B_n|^{\frac{1}{n}} \leqq p < \frac{3}{2} .$$

Ensuite, nous faisons usage du lemme de M. Pringsheim [1]: Si

$$\overline{\lim} \, |P_n|^{\frac{1}{n}} = P \ , \ \overline{\lim} \, |p_n|^{\frac{1}{n}} = p < P \ ,$$

on a aussi

$$\overline{\lim} \, |P_n + p_n|^{\frac{1}{n}} = P \ ;$$

et de l'autre lemme qui en dérive: Si

$$\overline{\lim} \, |P_n + p_n|^{\frac{1}{n}} < P \ , \ \lim |p_n|^{\frac{1}{n}} \leqq p < P \ ,$$

on a aussi

$$\overline{\lim} \, |P_n|^{\frac{1}{n}} < P \ .$$

Si l'on y pose

$$P_n = B_n \ , \ p_n = A_n - B_n \ , \ P = \frac{3}{2} ,$$

on obtient le théorème: Chacune des deux équations (inégalités)

$$\overline{\lim} \, |A_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{3}{2} \ , \ \overline{\lim} \, |B_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{3}{2} ,$$

$$\left(\overline{\lim} \, |A_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{3}{2} \ , \ \overline{\lim} \, |B_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{3}{2}\right)$$

est une conséquence de l'autre. Or ceci est équivalent au théorème I_1.

Par conséquent, on peut, dans les théorèmes II, III et IV, remplacer les nombres A_n par les nouveaux nombres B_n.

2. La généralisation du théorème de M. Hadamard s'énonce comme il suit:

V. *Une suite du type* (5) *soit donnée. Si tous les a_n qui satisfont à une des conditions*

$$n_q (1 - \mu_1) \leqq n \leqq n_q (1 + \mu_1) , \tag{9}$$

[1] Loc. cit, pag. 80.

à l'exception des a_{n_q} seuls, sont égaux à zéro, alors la circonférence du cercle de convergence est la frontière du domaine d'existence de la fonction (1).

Pour la démonstration, nous formons celles des sommes B_{N_q} dont a_{n_q} est le terme moyen. Les deux indices sont liés par la relation

$$N_q - \left[\frac{N_q}{4}\right] = \frac{3}{4} N_q + \vartheta = n_q \qquad (0 \leqq \vartheta < 1) .$$

Dans la somme B_{N_q}, ceux des a_n figurent pour lesquels

$$n_q \left[(1 - \frac{4}{3}\mu)(1 - \frac{\vartheta}{n_q}) \right] \leqq n \leqq n_q \left[(1 + \frac{4}{3}\mu)(1 - \frac{\vartheta}{n_q}) \right] .$$

Le nombre μ pouvant être choisi à volonté, d'après le théorème I_1, on peut effectuer ce choix de façon que, pour tous les q supérieurs à un nombre fini, les bornes, précédemment écrites pour n, soient plus étroites que (9). Il suffit, par exemple, de poser $\mu = \frac{1}{2}\mu_1$. Alors

$$|B_{N_q}| = \left(\frac{3}{4}\right)^k \binom{N_q - k}{k} |a_{n_q} e^{-i\psi k}| .$$

De là on voit tout de suite que, *indépendamment de la valeur de* ψ,

$$\lim |B_{N_q}|^{\frac{1}{n_q}} = \frac{3}{2} .$$

En vertu de I_1, tous les points $|z| = 1$ sont singuliers. Le théorème de M. Hadamard en est un cas particulier.

Exemple. Soit, dans la série (1), $\lim\limits_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$. Chaque suite infinie, contenue dans la suite des coefficients de (1), est alors du type (5). Choisissons par exemple

$$n_q = 10^{10^q} , \ \mu_1 = 10^{-3} .$$

Si tous coefficients a_n, pour lesquels

$$10^{10} - 10^7 \leqq n \leqq 10^{10} + 10^7 , \ 10^{100} - 10^{97} \leqq n \leqq 10^{100} + 10^{97} , \text{ etc.},$$

sont nuls, à l'exceptions des a_{n_q}, alors la série (1) satisfait aux conditions du théorème V. Les coefficients a_n, pour lesquels

$$0 \leqq n < 10^{10} - 10^7 , \ 10^{10} + 10^7 < n < 10^{100} - 10^{97} , \text{ etc.},$$

restent *entièrement arbitraires* et leur choix est sans influence à la formulation du théorème V.

3. La généralisation du théorème de M. Fabry s'énonce:

VI. *Définissons des « groupes des lacunes » des coefficients de la série* (1) *par les diségalités* (9). *Si tous les coefficients de* (1), *appartenant aux groupes des lacunes et différents de zéro* (¹), *forment la suite*

$$a_{m_p}\ ,\ p=1,2,3\ldots,$$

et si

(10) $$\lim_{p\to\infty}\frac{m_p}{p}=\infty\ ,$$

alors la circonférence du cercle de convergence est la frontière du domaine d'existence.

Le théorème diffère de celui de M. Fabry seulement en ce: que la condition (10) ne doit être vérifiée que pour certains groupes de coefficients. Dans le théorème de M. Fabry (qui est évidemment un cas particulier de VI) la condition (10) doit être verifiée par la suite de tous les coefficients de (1) différents de zéro.

La démonstration de ce théorème, ainsi qu'une exposition plus détaillée de tous les théorèmes précédents, sera donnée dans un autre Recueil.

Anatomia. — *Intorno ai centri e alle vie gustatorie del cervello di Carassius auratus: Contributo allo studio comparativo del sistema nervoso centrale dei Teleostei* (²). Nota della dott. EMMA CASATI, presentata dal Corrisp. E. GIACOMINI.

Riferisco alcuni dei risultati principali ricavati da una serie di ricerche che ho eseguite intorno all'apparato gustatorio centrale di *Carassius auratus*, specie di Ciprinoide alquanto trascurata sotto questo riguardo.

Si deve ascrivere al Herrick il merito di aver riconosciuto la funzione gustatoria dell'apparato interno dei nervi vago e facciale, il quale apparato nei Ciprinoidi mostra una particolare differenziazione già antecedentemente notata e studiata dal Bellonci e dal Mayser. L'Edinger e la sua scuola si dimostrarono alquanto dubbiosi circa tale interpetrazione e ancor oggi specialisti della nevrologia comparata, come ad es. il Kappers, pur consentendovi in linea generale, accolgono con qualche riserva le vedute di Herrick. Giova però notare che nessuno dei predetti autori ha ricerche proprie intorno al problema e i loro giudizi si riducono, in ultima analisi, a una critica delle osservazioni altrui.

(¹) Dans tous les groupes des lacunes, il peut y avoir, outre les a_{n_q}, toute une série des coefficients divers de zéro; *tous* ces coefficients de *tous* les groupes des lacunes forment la suite des a_{m_p}.

(²) Lavoro eseguito nell'Istituto di anatomia comparata dell'Università di Bologna.