Miloš Kössler

Nouveaux théorèmes sur les singularités des séries entières

Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. 32 (1923), No. 5, pp. 83–85

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501233

trica $\psi(\vartheta_{21}, \vartheta_{22}, \ldots, \vartheta_{2\nu})$ quando il sistema del 1° ordine $\vartheta_{21}, \vartheta_{22}, \ldots, \vartheta_{2\nu}$ appartenga al medesimo sistema di 2° ordine del precedente, e quindi, per la solita ragione, sarà ψ esprimibile razionalmente per φ. Analogamente accadrebbe pei sistemi d'ordine superiore e in conclusione si ha dunque che:

Se $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}$ e $\vartheta_{21}, \vartheta_{22}, \ldots, \vartheta_{2\nu}$ sono due sistemi di sistaticità del medesimo ordine r, appartenenti a uno stesso sistema d'ordine $r+1$, qualsiasi funzione razionale e simmetrica di $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{1\nu}$ è razionalmente esprimibile per un'altra qualsiasi funzione razionale e simmetrica di $\vartheta_{21}, \vartheta_{22}, \ldots, \vartheta_{2\nu}$.

Matematica. — *Nouveaux théorèmes sur les singularités des séries entières.* Nota di MILOŠ KÖSSLER, presentata dal Corrispondente G. FUBINI.

Dans cette Note je poursuis l'étude initiée dans une Note précédente (Ces Rendiconti, vol. XXXII, 1° sem., pag. 26: *Sur les singularités* ecc.).

1. Faisant usage du théorème II de la Note citée, on peut obtenir, ne changeant que les angles φ_N, qu'un point $e^{i\psi}$, choisi à volonté sur la circonférence du cercle de convergence, devienne singulier pour $f(z)$. Cas particulier de tels changements est l'addition de l'angle π ou le changement du signe de a_n. À cet effet choisissons la suite (5) de façon que les nombres A_{N_q}, dans lesquels les membres de (5) occupent des positions distinguées, définissent des groupes des a_n sans élément communs à deux: c'est-à-dire que les groupes $N_q^{\text{ième}}$ et $N_r^{\text{ième}}$ soient sans élément commun, toute fois que $q \gtreqless r$. Or il suffit à cet effet de choisir la suite (5) de manière que

$$n_{q+1} \geqq 2(1+\lambda)\, n_q, \tag{7}$$

λ étant une constante positive arbitrairement petite. Dans ce cas, le nombre N_q, appartenant à n_q satisfait, d'après (2), aux inégalités

$$\nu - \gamma \nu^{\frac{2}{3}-\vartheta} < n_q < \nu + \gamma \nu^{\frac{2}{3}+\vartheta} \qquad \nu = \left[\frac{N_q}{4}\right],$$

d'où, par un calcul facile,

$$N_q > 4n_q(1-\eta_0),\ N_q < 4n_q(1+\eta_1),\ N_q - \left[\frac{N_q}{2}\right] > 2n_q(1-\eta_2),$$

$$\lim \eta_0 = \lim \eta_1 = \lim \eta_2 = 0 \ ,\ q \to \infty .$$

Les termes a_n du $N_{q+1}^{\text{ième}}$ groupe commencent par le plus petit index

$$n = N_{q+1} - \left[\frac{N_{q+1}}{2}\right];$$

ceux du $N_q^{\text{ième}}$ groupe finissent par le plus grand index $n = N_q$. Il suffit évidemment, pour l'absence demandée de termes communs, que

$$N_{q+1} - \left[\frac{N_{q+1}}{2}\right] > N_q .$$

D'après les inégalités précédentes, il suffit que

$$2n_{q+1}(1 - \eta_2) > 4n_q(1 - \eta_1) .$$

Or ceci est assuré, commençant d'un certain q, par l'inégalité (7).

Cela étant posé, choisissons un tel groupe A_{N_q} déterminé dont a_{n_q} soit un coefficient distingué. De ce qui a été dit, on voit tout de suite que ce groupe ne contient aucun autre terme de la suite (5). Changeons dans ce groupe les angles φ_N de manière que l'inégalité (6) soit remplie dans tout ce groupe. Or si l'on choisit parmi les a_{n_q} (et, par suite, aussi les A_{n_q}) une suite infinie arbitraire (par un choix des entiers q) et que l'on effectue, dans tous les groupes correspondants, l'opération indiquée, le point $z = e^{i\psi}$ deviendra, d'après II, un point singulier pour la série (1). Il est évident qu'on peut simplement laisser φ_N inaltéré, si la condition (6) est remplie; ou y ajouter π, si elle ne l'est pas.

2. Maintenant, nous allons généraliser le théorème de Fatou-Polya de la manière suivante:

III. *Si, dans la série*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad a_n = |a_n| e^{i\varphi_n} ,$$

on change, convenablement, dans certains groupes de coefficients, les valeurs des angles φ_n, *la circonférence du cercle de convergence devient la frontière du domaine d'existence de la fonction* [1].

La démonstration est simple. Choisissons la suite (5) de manière que

$$n_{q+1} \geqq 2n_q(1 + \lambda)$$

et ordonnons les termes d'après le schème rectangulaire suivant des indices

$$\begin{array}{llllll} n_1 & n_3 & n_6 & n_{10} & \cdot & \cdot \\ n_2 & n_5 & n_9 & \cdot & \cdot & \\ n_4 & n_8 & \cdot & \cdot & & \\ n_7 & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & & & & & \end{array}$$

Ensuite, ordonnons tous les nombres rationnels de l'intervalle $(0, 1)$ dans la suite

$$t_1 , t_2 , t_3 , \dots , t_j , \dots$$

[1] Un cas particulier de tels changements est l'addition de π à certains φ_n.

À l'angle $\psi_j = 2\pi t_j$ associons la $j^{\text{ième}}$ ligne du schème rectangulaire. Ces a_{n_q} qui appartiennent à la ligne en question, peuvent être considérés comme des termes d'une suite du type (5) et donc, d'après le numéro précédent, on peut faire de manière que le point $z = e^{i\psi_j}$ devienne singulier. Or, effectuons cela pour tous les ψ_j. Les points singuliers remplirons alors toute la circonférence du cercle de convergence.

On a ainsi, non seulement le théorème de Fatou-Polya, mais encore un procédé déterminé pour les changements des angles φ_n, resp. des signes des a_n, dans chaque cas particulier.

2. Le théorème II généralise celui de M. Vivanti, mais non celui de M. Dienes. J'énonce encore une généralisation du théorème de M. Dienes:

IV. *Si nous remplaçons, dans l'énoncé II, la condition 2° par la suivante:*

2°') *pour chaque groupe* $N_q^{\text{ième}}$, *on peut trouver un angle fixe* ψ_q *et un nombre positif* δ_q, *de façon que l'on ait*

$$\cos(\varphi_N - \psi_q) \geqq \delta_q \;, \quad \overline{\lim_{q \to \infty}} \sqrt[N_q]{\delta_q} = 1 \,,$$

pour tous les coefficients $a_N = |a_N|\, e^{i\varphi_N}$ *du groupe, alors le point* $z = 1$ *est singulier.*

La démonstration est analogue à celle du théorème II.

Idromeccanica. — *Sull' influenza della viscosità nei moti piani irrotazionali dei liquidi naturali. - Onde semplici smorzate.* Nota II di UMBERTO CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

7. *Moti permanenti.* – Se si tratta di moti permanenti, tanto c quanto w^* non dipendono esplicitamente dal tempo t, per cui la (20) si riduce alla seguente:

$$\frac{c^2}{h}\frac{dW^{*2}}{df^*} - ig\left\{\frac{1}{w^*(f^*+i)} - \frac{1}{w^*(f^*-i)}\right\} = \frac{4\nu c}{h} W^* \frac{d^2W^*}{df^{*2}} + \frac{4\nu c}{h^2}\left(\frac{dW^*}{df^*}\right)^2 .$$

essendo ora

$$W^* = \sqrt{w(f^*+i)\cdot w^*(f^*-i)}\,.$$

Esprimendo mediante f e w, per le (17) e la prima delle (19), si ottiene [1]

$$\text{(21)}\qquad \frac{dW^2}{df} - ig\left\{\frac{1}{w(f+iq)} - \frac{1}{w(f-iq)}\right\} = \frac{4\nu q^2}{h} W \frac{d^2W}{df^2} + 4\nu c\left(\frac{dW}{df}\right)^2 ,$$

essendo

$$W = \sqrt{w(f+iq)\cdot w(f-iq)}\,.$$

[1] Cfr. loco ultimo citato, pag. 199.