Miloš Kössler

O singularitách řady mocninné, ležících na kružnici konvergenční

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 32 (1923), No. 35, 15 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501228

O singularitách řady mocninné, ležících na kružnici konvergenční.

Napsal

M. Kössler.

Předloženo dne 26. října 1923.

V Rendiconti real. accad. naz. dei lincei vol. XXXII. (5), 1° sem. fasc. 1°, 2° e 10° (1923)[1]) uveřejnil jsem ve dvou zněních (*A*) a (*B*) (viz K_1 a K_3) nutnou a postačující podmínku, které musí hověti koeficienty dané řady mocninné, aby bod ležící na obvodu kružnice konvergenční byl singulární, po případě obyčejný bod funkce řadou definované. Důkaz těchto kriterií jest tam pouze stručně naznačen s podotčením, že úplný bude uveřejněn jinde.

To jest prvým cílem této práce (odstavec 1. a 2.). Výsledek jest shrnut v kriteriích (*A*) a (*B*). (*B*) jest asi nejjednodušší dosud známá nutná a postačující podmínka pro to, aby bod daný na kružnici konvergenční byl singulární po příp. obyčejný.[2])

Opíraje se o tato kriteria, konstruoval jsem v citov. pojednáních řadu vět udávajících vztahy mezi koeficienty řady a polohou singularit na kružnici konvergenční. V této práci uvádím jiné věty a to obecnější, jichž znění pokládám za definitivní. Jsou to mimo dvě všeobecné poznámky za kriteriem (*B*) zejména věty (*C*), (I), (II). Příklady u posledních dvou uvedené ukazují, že dosud známé nejobecnější věty toho druhu (věta Vivanti-Dienes-ova, mezerová věta Hadamard-ova, věta Fatou-Polyova)[3]) jsou zcela speciálními případy vět tohoto

---

[1]) Tato tři pojednání budu v dalším citovati jako K_1, K_2 a K_3.

[2]) Pro porovnání buďtež zde citována starší složitější kriteria: Hadamard, La série de Taylor etc. Paříž 1901, p. 20, 22; Pringsheim, Münch. Berichte, 1912, p. 19.

[3]) Vivanti, Riv. di Matem., vol. 3, 1893, pp. 111—114; Dienes, Journ. de Math. (6) vol. 5, 1909, pp. 327—413; Fatou, Acta Math., vol. 30, 1906, p. 400; Polya-Hurwitz, Acta Math., vol. 40, 1916, pp. 179—183; Hadamard, Journ. de Math. (4) vol. 8, 1892, pp. 101—186.

pojednání. Při tom sluší vytknouti, že *společným* zdrojem všech těchto vět jest kriterium (B), kdežto dosud každá z nich byla odvozována jinou methodou. Zmíněná zobecnění umožněna jsou tedy jednak kriteriem (B) a za druhé důsledným užíváním posloupností typu L (viz vzorec (10)), vybraných z koeficientů dané řady mocninné. Na význam těchto posloupností pro theorii řad potenčních budiž zde zvláště upozorněno.

Prostředky tohoto pojednání jsou úmyslně omezeny na zcela elementární a proto vyloučeno jest z úvah vše, co souvisí s okruhem mezerové věty Fabry-ovy,[4]) který vyžaduje užívání jistých hlubších vlastností celistvých transcendent. Zobecnění této věty (viz také K_3 p. 531) bude tvořiti obsah jiné práce.

1. Řada mocninná

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \overline{\lim} \, | a_n |^{\frac{1}{n}} = 1, \qquad \text{(1)}$$

má poloměr konvergence rovný jedné.

Místo komplexní proměnné z zaveďme novou x pomocí transformace

$$z = x + \tfrac{3}{4} x^2 \qquad \text{(2)}$$

Tak obdržíme zcela formálně

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= f(x + \tfrac{3}{4} x^2) = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \\ A_n &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k a_{n-k} \end{aligned} \right\} \qquad \text{(3)}$$

Transformace (2) zobrazuje konformně rovinu z na rovinu x ve všech bodech, v nichž

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{3}{2} x \neq 0.$$

Jedinou výjimku tedy tvoří bod rozvětvení $x = -\tfrac{2}{3}$, $z = -\tfrac{1}{3}$. Z toho plyne, že vnitřním a obvodovým bodům kruhu $|x| \leq \tfrac{2}{3}$ v rovině x odpovídají vzájemně jednoznačně body vnitřní a obvodové jisté jednoduché uzavřené křivky (epicykloidy) v rovině z, určené transformací (2). Obvod této křivky dán jest vztahem

$$z = \tfrac{2}{3} e^{i\chi} + \tfrac{1}{3} e^{2i\chi}, \quad 0 \leq \chi < 2\pi \qquad \text{(4)}$$

a jest tedy pro ně $|z| < 1$ s jedinou výjimkou bodu $z = 1$, který odpovídá hodnotě $x = \tfrac{2}{3}$ (t. j. $\chi = 0$). Geometrický význam této okolnosti jest, že epicykloida (4) leží v rovině z uvnitř kružnice $|z| = 1$ a dotýká se této z vnitřku v jediném bodě $z = 1$. Z toho vyplývá dále, že, je-li ε malé číslo kladné, vnitřní a obvodové body kružnice $|x| \leq \tfrac{2}{3} + \varepsilon$ zobrazí se pomocí (2) na jistý obor roviny z, který vybočuje z kružnice

[4]) Fabry, Ann. Ec. norm. (3) vol. 13, 1896, pp. 107—114

$|z| = 1$ jen v malém okolí bodu $z = 1$. V tomto okolí jest zobrazení to konformní a vzájemně jednoznačné. Z toho všeho plynou ihned tyto soudy. Protože $f(z)$ jest analytická pro $|z| < 1$, jest $F(x)$ analytická uvnitř i *na obvodu* kružnice $|x| = \frac{2}{3}$ s jedinou možnou výjimkou v bodě $x = \frac{2}{3}$. Je-li dále bod $z = 1$ obyčejným (singulárním) bodem funkce $f(z)$, jest také bod $x = \frac{2}{3}$ obyčejným (singulárním) bodem funkce $F(x)$ a také obráceně. Má tedy mocninná řada (3) pro $F(x)$ poloměr konvergence rovný $\frac{2}{3}$, když bod $z = 1$ jest singulární pro $f(z)$, nebo poloměr konvergence větší než $\frac{2}{3}$, když $z = 1$ jest obyčejný bod funkce $f(z)$. To vyjádříme ve tvaru kriteria (A):

Nutná a postačující podmínka pro to, aby $z = 1$ byl $\begin{Bmatrix} \text{obyčejný} \\ \text{singulární} \end{Bmatrix}$ bod funkce $f(z)$, jest dána vztahem

$$\overline{lim}\, |A_n|^{\frac{1}{n}} \begin{cases} < \frac{3}{2} \\ = \frac{3}{2} \end{cases} \qquad (A)$$

Limes sup. v tomto kriteriu nemůže tedy býti větší než $^3/_2$. A_n jest definováno v rovnicích (3).

Již z tohoto kriteria vyplývá řada vět (viz K_1 a K_2), kterých zde nebudu opakovati. Kriterium toto zjednodušíme. Dříve však uvedu čtyři pomocné věty, které v dalším nám budou prospěšny.

a) Jsou-li dány dvě posloupnosti kladných čísel

$$\alpha_n,\ \beta_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots \text{ a je-li}$$

$$\overline{lim}\ \alpha_n = \alpha,\ \overline{lim}\ \beta_n = \beta,$$

pak

$$\overline{lim}\ \alpha_n \beta_n \leqq \alpha \beta.$$

Je-li zvláště $lim\ \alpha_n = \alpha$, pak

$$\overline{lim}\ \alpha_n \beta_n = \alpha \beta.$$

b) Jsou-li dány dvě posloupnosti čísel kompleksních

$$P_n,\ p_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

a je li při tom

$$\overline{lim}\, |P_n|^{\frac{1}{n}} = P,\ \overline{lim}\, |p_n|^{\frac{1}{n}} = p < P,$$

pak

$$\overline{lim}\, |P_n + p_n|^{\frac{1}{n}} = P.$$

c) Jestliže z posloupnosti reálných čísel α_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ vybereme libovolným způsobem jinou posloupnost α_{n_q}, $q = 1, 2, \ldots$, pak

$$\overline{\lim_{q \to \infty}}\ \alpha_{n_q} \leqq \overline{lim}\ \alpha_n.$$

1*

d) Z posloupnosti reálných čísel a_n lze vždy vybrati nekonečně mnoha způsoby novou posloupnost a_{n_q}, $q = 1, 2, \ldots$, která má limitu a o které platí

$$\lim_{q \to \infty} a_{n_q} = \overline{\lim}\, a_n.$$

Věty *a*), *c*), *d*) jsou přímé a jednoduché důsledky definice limes superior; proto jich důkazy ponechávám čtenáři. Věta *b*) jest známa pod jménem Pringsheimovo lemma (Münch. Ber. 1912, p. 80 nebo Landau: Ergebnisse atd. Berlin, Springer 1916 p. 72).

2. V čísle A_n ve vzorci (3) vyskytují se vedle koeficientů řady (1) ještě kladné číselné konstanty

$$p(k) = \binom{n-k}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

Abychom kriterium (*A*) mohli zjednodušiti, musíme rozhodnouti, jak se tato čísla $p(k)$ mění při pevném n a proměnlivém $k = 0, 1, 2, \ldots \left[\frac{n}{2}\right]$. Z počátku patrně čísla ta stoupají s rostoucím k. K sledování dalších změn poslouží nám podíl

$$g(k) = \frac{p(k-1)}{p(k)} = \frac{4k(n-k+1)}{3(n+1-2k)(n+2-2k)}.$$

Pokud bude podíl ten menší než jedna, bude také $p(k) > p(k-1)$. Považujme podíl ten $g(x)$ za funkci *spojité* proměnné x. Jeho derivace

$$g'(x) = \frac{4}{3}\,\frac{2x^2 + 2(n+1)(n+2)\left(\frac{n+1}{2} - x\right)}{(n+1-2x)^2(n+2-2x)^2}$$

jest v intervalu $< 0, \left[\frac{n}{2}\right] >$, který přichází v úvahu, stále kladná a tedy $g(x)$ s rostoucím x tam vzrůstá. Protože z počátku jest $g(x) < 1$, tedy snad pro jisté x dosáhne $g(x)$ hodnoty *1* a pro větší x bude pak stále > 1. Jestliže taková hraniční hodnota pro x vskutku existuje, musí hověti rovnici

$$g(x) = 1,$$

to jest

$$16x^2 - 2x(8n+11) + 3(n+1)(n+2) = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou

$$x_{1,2} = \frac{8n + 11 \pm 4n\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{25}{16n^2}}}{16}.$$

Pro dosti velká n mohu užiti binomické řady a obdržím výraz

$$x_{1,2} = \frac{8n + 11 \pm (4n+4)}{16} \pm \frac{B}{n},$$

kdež
$$0 < B < \frac{25}{32}.[5])$$
Z těchto dvou kořenů leží v uvažovaném intervallu jen
$$x = \frac{n}{4} + \frac{7}{16} - \frac{B}{n}.$$
Při tom součet
$$\frac{n}{4} + \frac{7}{16} = \frac{4(n+1)+3}{16}$$
nemůže býti číslem celým a převyšuje nejblíže menší číslo celistvé nejméně o $^3/_{16}$ (a nejvýše o $^{15}/_{16}$). Protože pak $\frac{B}{n}$ pro $n \geqq 16$ jest menší než $^1/_{16}$, bude nutně celistvé číslo $\varkappa$ nejblíže menší než x
$$\varkappa = \left[\frac{n}{4} + \frac{7}{16}\right] = \left[\frac{n+1}{4}\right].$$
Význam tohoto čísla jest následující. Pro $n \geqq 16$ čísla $p(k)$ s rostoucím k nejdříve vzrůstají. Největší hodnoty nabude $p(k)$ pro $k = \varkappa$. Potom $p(k)$ stále ubývá. Ke kritickému $k = \varkappa$ přísluší ve výrazu A_n koeficient řady (1)
$$a_{n-\left[\frac{n+1}{4}\right]}.$$
Nazveme ho *střední* koeficient čísla A_n a dokážeme si větu pomocnou: Každý koeficient a_N řady (1) jest středním koeficientem aspoň v jednom z čísel A_n. Větu tu upotřebíme pak v odstavci 3. Věta jest identická s tvrzením: Ke každému celistvému a kladnému N dá se nalézti celistvé a kladné n splňující rovnici
$$n - \left[\frac{n+1}{4}\right] = N.$$
Jestliže takové n vůbec existuje, pak má jeden z tvarů $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$. Je-li $n = 4k$, pak musí býti $N = 4k - \left[\frac{4k+1}{4}\right] = 3k$; avšak také obráceně, je-li $N = 3k$, hoví rovnici $n = 4k$. Je-li $n = 4k+1$, jest patrně $N = 3k+1$ a je-li konečně $n = 4k+2$ nebo $n = 4k+3$, jest v obou případech $N = 3k+2$. Protože pak N má nutně jeden z tvarů $3k$, $3k+1$, $3k+2$, tedy naše rovnice jest řešitelna celistvým číslem n tvaru $4k$, $4k+1$, $4k+2$ nebo $4k+3$.

Dosud jsme určili, které mezi čísly $p(k)$ jest největší a který jest relativní vztah mezi sousedními čísly $p(k)$ a $p(k-1)$. Avšak numerický výpočet čísla
$$p(k) = \left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{(n-k)!}{k!\,(n-2k)!}$$

[5]) Jak ukazuje jednoduchý počet, platí tyto vztahy určitě pro $n \geqq 16$.

pro velká n a k není v přesné formě vůbec dostupný; na štěstí stačí pro naše účely, když užijeme Stirlingovy formule pro faktoriály. Obdržíme po lehkém počtu

$$p(k) = \left(\frac{3}{4\varrho}\right)^{\varrho n} \left\{\frac{(1-\varrho)^{1-\varrho}}{(1-2\varrho)^{1-2\varrho}}\right\}^n \left\{\frac{1-\varrho}{2\pi n \varrho (1-2\varrho)}\right\}^{\frac{1}{2}} (1+\eta)_k,$$

kdež $\varrho = \frac{k}{n}$, $\eta_k \to 0$, když současně $k \to \infty$, $n \to \infty$.

Upotřebíme v dalším n-tou odmocninu

$$p(k)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{3}{4\varrho}\right)^{\varrho} \frac{(1-\varrho)^{1-\varrho}}{(1-2\varrho)^{1-2\varrho}} \left\{1 + \vartheta_k\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\lim_{\substack{k \to \infty \\ n \to \infty}} \vartheta_k = 0. \qquad \varepsilon < \varrho < \tfrac{1}{2} - \varepsilon; \quad \varepsilon > 0.$$

Blíže si všimneme dvou speciálních případů, když totiž

$$\varrho = \frac{1}{4} \pm \frac{h}{n} \quad \text{nebo} \quad \varrho = \frac{1}{4} \pm \mu,$$

kdež čísla h a μ považuji za kladné konstanty na n nezávislé. V prvém případě[6]) bude

$$p\left(\frac{n}{4} \pm h\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{3}{2} \cdot (1 + \vartheta_n'), \quad \lim_{n \to \infty} \vartheta_n' = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

kdežto v druhém případě obdržíme

$$p\left(\frac{n}{4} \pm \mu n\right)^{\frac{1}{n}} = \sigma \,.\, (1 + \vartheta_n), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\tfrac{1}{4} > \mu > 0, \quad \sigma < \tfrac{3}{2}, \quad \lim_{n \to \infty} \vartheta_n = 0,$$

neboť součin

$$\left(\frac{3}{4\varrho}\right)^{\varrho} \frac{(1-\varrho)^{1-\varrho}}{(1-2\varrho)^{1-2\varrho}}$$

nabývá svého *absolutního* maxima $\frac{3}{2}$ pro $\varrho = 1/4$ (v intervalu $< 0, \frac{1}{2} >$).

Tyto výsledky pomohou nám k zjednodušení kriteria (A). Zvolme libovolnou na n nezávislou konstantu μ, takže

$$0 < \mu < \tfrac{1}{4}$$

a označme si celistvá čísla

$$[n(\tfrac{1}{4} - \mu)] = n_1, \quad [n(\tfrac{1}{4} + \mu)] = n_2;$$

[6]) Prvé dva faktory v rovnici (5) jsou spojité funkce veličiny ϱ a nabývají pro $\varrho = 1/4$ hodnoty $3/2$. Námi uvažované ϱ liší se však od $1/4$ při velikém n jen o veličinu $\pm h/n$ a tedy součin prvých dvou faktorů pravé strany v (5) bude se lišiti od $3/2$ jen o veličinu řádu $1/n$. Toho výrazem jest rovnice (6).

číslo A_n rozečteme pak ve tvar

$$A_n = \sum_{k=0}^{n_1-1} \binom{n-k}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k a_{n-k} + \sum_{k=n_1}^{n_2} + \sum_{k=n_2+1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Prostřední součet označme B_n, první C_n a třetí D_n. Dokážeme si, že

$$\overline{lim}\ A_n|^{\frac{1}{n}} = \overline{lim}\,|B_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Součet C_n a D_n mají úhrnem počet sčítanců menší než $n/2$. Každý z těch sčítanců skládá se ze dvou faktorů, totiž a_{n-k} a $p\,(k)$. Největší mezi čísly $|a_{n-k}|$ v těchto součtech označím g_n a největší z faktorů $p\,(k)$ tam se vyskytujících f_n. Podle vlastností těchto faktorů bude to buď $p\,(n_1-1)$ nebo $p\,(n_2+1)$. Pak jest jistě

$$|C_n + D_n| < \frac{n}{2} \cdot g_n \cdot f_n \text{ a tedy}$$

$$|C_n + D_n|^{\frac{1}{n}} < \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} g_n^{\frac{1}{n}} f_n^{\frac{1}{n}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Vzrůstá-li n, bude při nepromĕnlivém μ stále podle (7)

$$p\,(n_1-1)^{\frac{1}{n}} = \sigma_1\,(1+\vartheta)_n^{(1)};\quad p\,(n_2+1) = \sigma_2\,(1+\vartheta_n^{(2)})\ ^{7)}$$

a tedy

$$\overline{lim}\ f_n^{\frac{1}{n}} = \text{Větší z čísel } (\sigma_1, \sigma_2) < \tfrac{3}{2}.$$

Dále jest podle (1)

$$\overline{\lim_{n-k \to \infty}}\ |a_{n-k}|^{\frac{1}{n-k}} = 1$$

a tedy k libovolně malému η dá se nalézti N tak veliké, že pro všechna $n-k \geqq N$ platí

$$|a_{n-k}|^{\frac{1}{n-k}} < 1 + \eta$$

a tedy

$$|a_{n-k}|^{\frac{1}{n}} < (1+\eta)^{\frac{n-k}{n}} < 1 + \eta.$$

Proto také

$$|g_n|^{\frac{1}{n}} < 1 + \eta$$

a tedy, protože η jest libovolně malé,

$$\overline{lim}\ |g_n|^{\frac{1}{n}} \leqq 1.$$

---

[7]) σ_1 a σ_2 jsou při tom funkce konstanty μ a nezávisí na n. Dále jest $\sigma_1 < \frac{3}{2}$, $\sigma_2 < \frac{3}{2}$.

Dále jest

$$\lim \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Aplikujeme-li nyní na nerovninu (9) tyto výsledky a pomocnou větu *a*), obdržíme

$$\overline{lim}\, | C_n + D_n |^{\frac{1}{n}} \leqq \text{větší z čísel } (\sigma_1, \sigma_2) < \tfrac{3}{2}.$$

V Pringsheimově pomocné větě *b*) položme nyní

$$P_n = A_n, \quad p_n = - C_n - D_n$$

a předpokládejme, že jest jako v kriteriu (*A*)

$$\overline{lim}\, | A_n |^{\frac{1}{n}} = \tfrac{3}{2}.$$

Pak jsou podmínky věty *b*) splněny a platí tedy

$$\overline{lim}\, | A_n - C_n - D_n |^{\frac{1}{n}} = \overline{lim}\, | B_n |^{\frac{1}{n}} = \tfrac{3}{2}.$$

Je-li obráceně $\overline{lim}\, | B_n |^{\frac{1}{n}} = \tfrac{3}{2}$, bude podle věty *b*) pro $P_n = B_n$, $p_n = C_n + D_n$ také $\overline{lim}\, | A_n |^{\frac{1}{n}} = \tfrac{3}{2}$. Nerovnina $\overline{lim}\, | B_n |^{\frac{1}{n}} > \tfrac{3}{2}$ jest nemožná, neboť by podle věty *b*) měla za následek $\overline{lim}\, A_n^{\frac{1}{n}} > \tfrac{3}{2}$, což odporuje větě (*A*). Zbývá ještě rozhodnouti co nastane, když $\overline{lim}\, | A_n |^{\frac{1}{n}} < \tfrac{3}{2}$. Důsledkem podle předešlého nemůže býti $\overline{lim}\, | B_n |^{\frac{1}{n}} \geqq \tfrac{3}{2}$ a zbývá tedy jen možnost $\overline{lim}\, | B_n |^{\frac{1}{n}} < \tfrac{3}{2}$. V kriteriu (*A*) můžeme tedy čísla A_n nahraditi jednoduššími součty B_n, takže získáváme kriterium (*B*):

Nutná a postačující podmínka pro to, aby $z = 1$ byl $\left\{\begin{matrix}\text{obyčejný} \\ \text{singulární}\end{matrix}\right\}$ bod funkce (1) $f(z)$ jest, dána vztahem

$$\overline{lim}\, | B_n |^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \left| \sum_{k=\left[\left(\frac{1}{4}+\mu\right)\right]}^{k=\left[\left(\frac{1}{4}-\mu\right)\right]} \binom{n-k}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k a_{n-k} \right|^{\frac{1}{n}} \left\{\begin{matrix} < \frac{3}{2} \\ \\ = \frac{3}{2} \end{matrix}\right. \qquad (B)$$

kdež μ jest libovolná kladná konstanta

$$0 < \mu \leqq \frac{1}{4}\,{}^{8)}$$

na n nezávislá.

Kriterium pro libovolný obvodový bod $z = e^{i\varphi}$ liší se od předešlého jen tím, že v něm klademe místo čísel a_{n-k} čísla $a_{n-k} \cdot e^{-ik\varphi}$.

---

[8]) Důkaz jsme vedli pro $\mu < \frac{1}{4}$; avšak pro $\mu = \frac{1}{4}$ přechází věta v kriterium (*A*).

Dodatek pro $z = e^{i\varphi}$ vyplývá z této okolnosti: Má-li funkce $f(\zeta)$ $\left\{\begin{matrix}\text{singulární}\\ \text{obyčejný}\end{matrix}\right\}$ bod $\zeta = e^{i\varphi}$, má funkce

$$f_1(z) = f(z \,.\, e^{i\varphi}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\varphi} \,.\, z^n$$

$\left\{\begin{matrix}\text{singulární}\\ \text{obyčejný}\end{matrix}\right\}$ bod $z = 1$ a také obráceně.

Věta tato jest zcela obecná a proto ve zvláštních případech nepodává pohodlného kriteria. O takových pojednáme v odstavci následujícím. Zde všimneme si jistých dvou obecných důsledků věty (B).

Nechť bod $z = 1$ jest singulární pro funkci (1). Z čísel B_n definovaných v kriteriu (B) dá se vybrati podle pomocné věty d) posloupnost B_{n_q} té vlastnosti, že existuje limita

$$\lim_{q \to \infty} |B_{n_q}|^{\frac{1}{n_q}} = \frac{3}{2} \,.$$

Tuto posloupnost mohu vždy vybrati tak, že každé číslo B_{n_q} utvořeno jest z jiných koeficientů řady (1), to jest, že týž koeficient řady (1) není obsažen ve dvou číslech B_{n_q}.[9]) Mohu dokonce docíliti způsobem v poznámce naznačeným, že nekonečně mnoho koeficientů a_N řady (1) nebude súčastněno na tvoření čísel B_{n_q}. *Potom žádnou změnou těchto nesúčastněných koeficientů a_N nemohu zrušiti singularitu bodu $z = 1$.* (Při tom ovšem máme na mysli jen takové změny, které neruší základní podmínku rovnice (1) $\lim |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$.) Tím však není řečeno, že bychom nemohli tak pozměniti *jakost* této singularity. Důkaz jest téměř samozřejmý. Existuje-li totiž uvažovaná limita, pak podle věty c) mají čísla $|B_n|^{\frac{1}{n}}$ touž anebo větší limes superior a tedy podle (B) jest bod $z = 1$ singulární bez ohledu na nesúčastněné koeficienty. Příklad takového rozdělení koeficientů na súčastněné a nesúčastněné nalezne čtenář ve větě (I) a v příkladu 2. v odstavci třetím. Dále jest zřejmo, že obdobná věta platí i pro singularitu libovolného bodu $z = e^{i\varphi}$ kružnice konvergenční.

Druhá poznámka dotýká se řad (1) s *reálnými* koeficienty. Má-li taková řada na kružnici konvergenční singulární bod $z = e^{i\varphi}$, musí míti podle (B) také singul. bod komplexně sdružený $z = e^{-i\varphi}$, neboť $|B_n|$ se substitucí $e^{-i\varphi}$ za $e^{+i\varphi}$ nezmění. Tato věta dá se snad rozšířiti na *všechny* singulární body funkce řadou takovou definované; prostředky tohoto pojednání k tomu však nestačí. Dále jest zřejmo, že větu tuto nelze obrá-

[9]) K tomu dojdu na př. takto: Vyberu posloupnost B_{m_q}, která má shora uvedenou limitu. Z té vynechám všechny členy mající společné koeficienty a_N s členem B_{m_1}. První nevypuštěný bude B_{m_p}. Tak pokračuji dále s tímto členem. Vzniklá posloupnost nevynechaných členů $B_{m_1}, B_{m_p}, \ldots$ hoví pak podmínkám.

titi.[10]) Podotýkám, že druhou poznámku jest možno připojiti i k oběma starším kriteriím, kdežto prvá neplatí pro kriterium odvozené z Eulerovy transformace.

Přejdeme nyní k aplikacím kriteria (B) na některé zvláštní případy

3. Nechť jest dána řada (1). Podle pomocné věty *d*) můžeme z čísel $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ vybrati nekonečně mnoha způsoby posloupnosti a_{n_q}, $q = 1, 2, \ldots$, o nichž platí

$$\lim_{q \to \infty} |a_{n_q}|^{\frac{1}{q}} = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (10)$$

Každou takovou posloupnost, o níž platí rovnice (10), budeme nazývati *posloupnost typu L*.

Jest zřejmo, že jedině existence posloupnosti tohoto typu jest příčinou singularit, ležících na jednotkové kružnici.[11]) Proto obrátíme k posloupnostem typu L svůj hlavní zřetel.

Podle pomocné věty na str. 5—6 každý člen takové posloupnosti a_{n_q} jest středním koeficientem v jistém čísle B_{N_q}. Při tom N_q určeno jest vztahy

$$n_q \equiv \lambda \ (\mathrm{mod}\ 3), \quad N_q = \frac{4\,n_q - \lambda}{3}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (11)$$

kdež λ jest nejmenší kladné řešení napsané shody. Mimo svůj střední koeficient obsahuje číslo B_{N_q} ještě jiné koeficienty řady (1). Ty budeme nazývati stručně *družina* čísla a_{n_q}. Jsou to podle definice čísel B_n v kriteriu (B) koeficienty

$$\left.\begin{aligned} & a_{n_q+s}, \quad s = -\lambda_2, -\lambda_2+1, \ldots -1, +1, +2, \ldots, +\lambda_1, \\ & \text{kdež} \\ & \lambda_1 = N_q - n_q - \left[N_q\left(\frac{1}{4} - \mu\right)\right] = \left[\frac{N_q+1}{4}\right] - \left[N_q\left(\frac{1}{4} - \mu\right)\right] \\ & -\lambda_2 = N_q - n_q - \left[N_q\left(\frac{1}{4} + \mu\right)\right] = \left[\frac{N_q+1}{4}\right] - \left[N_q\left(\frac{1}{4} + \mu\right)\right] \end{aligned}\right| \ (12)$$

Všimněme si nyní blíže čísla B_{N_q}, obsahujícího právě koeficient a_{n_q} a jeho družinu.

$$B_{N_q} = \sum_{s=\lambda_1}^{s=-\lambda_2} p(s)\, a_{n_q+s}\, e^{i\varphi(n_q+s)}.$$

Při tom bereme v úvahu bod $z = e^{i\varphi}$ a symboly $p(s)$ nyní značíme příslušné faktory tvaru $\binom{n-k}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k$ v kriteriu (B), z nichž největší jest

[10]) Řada $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$ má jen dvě kompl. sdružené singularity $z = \pm i$, avšak nemá reálné koeficienty.

[11]) Neboť kdyby žádná posloupnost typu L neexistovala, nemohlo by býti podle pomocné věty *d*) $\lim |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$, což by se příčilo předpokladům.

p (0). Mimo to víme o nich

$$p(0) > p(1) > p(2) > \ldots$$
$$p(0) > p(-1) > p(-2) > \ldots$$

Tedy můžeme psáti

$$B_{Nq} = e^{-i\psi_q + i\varphi_q} \, . \, p(0) \sum_{s=\lambda_1}^{-\lambda_2} \varepsilon_s \, a_{n_q+s} \, e^{i(s\varphi + \psi_q)}, \ldots\ldots\ldots \quad (13a)$$

kdež ψ_q jest *libovolný* úhel a ε_s jsou čísla kladná splňující vztahy

$$\ldots < \varepsilon_{-2} < \varepsilon_{-1} < \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots, \; \varepsilon_0 = 1.$$

Úhel ψ_q mohu zvoliti tak, že součet v mezích λ_1, $-\lambda_2$ ve vzorci (13a) stane se číslem reálným a kladným.[12]) Při této volbě bude

$$|B_{Nq}| = p(0) \sum_{s=\lambda_1}^{-\lambda_2} \varepsilon_s \, |a_{n_q+s}| \cos(\varphi s + \varphi_{n_q+s} + \psi_q), \ldots\ldots \quad (13)$$

značím-li $a_\sigma = |a_\sigma| \, e^{i\varphi_\sigma}$. Při libovolné volbě čísla ψ_q platí tedy

$$|B_{Nq}|^{\frac{1}{Nq}} \geqq p(0)^{\frac{1}{Nq}} \left\{ \sum_{s=\lambda_1}^{-\lambda_2} \varepsilon_s \, |a_{n_q+s}| \cos(s\varphi + \varphi_{n_q+s} + \psi_q) \right\}^{\frac{1}{Nq}} \ldots \quad (14)$$

Tohoto vzorce upotřebíme k tomu, abychom odvodili *postačující* podmínky pro singularitu bodu $z = e^{i\varphi}$.

Podle vzorce (6) jest totiž[13])

$$\lim_{q \to \infty} p(0)^{\frac{1}{Nq}} = \tfrac{3}{2}.$$

Rovnice

$$\lim_{q \to \infty} \left| \sum_{s=\lambda_1}^{-\lambda_2} \varepsilon_s \, |a_{n_q+s}| \cos(s\varphi + \varphi_{n_q+s} + \psi_q) \right|^{\frac{1}{Nq}} = 1, \ldots\ldots \quad (15)$$

jest tedy podle (14) a pomocné věty *a*) postačující k tomu, aby

$$\overline{\lim_{q \to \infty}} \, |B_{Nq}|^{\frac{1}{Nq}} \geqq \tfrac{3}{2}$$

a tedy podle pomocné věty *d*) také postačující k tomu, aby

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \, |B_n|^{\frac{1}{n}} \geqq \tfrac{3}{2}.$$

To však podle kriteria (*B*) značí, že bod $z = e^{i\varphi}$ jest singulárním. Výsledek vyslovíme jako větu (*C*):

[12]) Součet ten má tvar: $e^{i\psi_q}$. komplexní číslo na ψ_q nezávislé $= e^{i\psi_q} . r . e^{i\Phi}$. Volbou $\psi_q = 2\pi - \Phi$ dosáhnu cíle. Zvolím-li však ψ_q jinak, bude reálná část součtu menší než jeho prostá hodnota.

[13]) Podle nynějšího značení jest totiž $p(o)$ identické s $p\left(\left[\frac{n+1}{4}\right]\right)$ při označení užívaném ve vzorci (6).

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Postačující podmínka pro singularitu bodu } z = e^{i\varphi} \textit{ jest dána} \\ \textit{vztahem (15)}\end{array}\right\} \ldots (C)$$

I tato věta jest ještě značně obecná. Teprve specialisací její dojdeme k řadě vět udávajících nové a snadno přehledné vztahy mezi koeficienty řady (1) a polohou singularit na kružnici konvergenční. Několik takových specialisací nyní uvedeme.

Střední člen v součtu (15) jest (pro $s = 0$)

$$|a_{n_q}| \cos (\varphi_{n_q} + \psi_q).$$

Zvolím-li úhly ψ_q tak, že bude

$$\lim_{q \to \infty} [\cos (\varphi_{n_q} + \psi_q)]^{\frac{1}{Nq}} = 1,$$

bude také podle věty a)

$$\lim_{q \to \infty} \left| |a_{n_q}| \cos (\varphi_{n_q} + \psi_q) \right|^{\frac{1}{Nq}} = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

neboť a_{n_q} tvoří posloupnost typu L a tedy

$$\lim | a_{n_q} |^{\frac{1}{Nq}} = \lim_{q \to \infty} \left\{ | a_{n_q} |^{\frac{1}{n_q}} \right\}^{\frac{n_q}{Nq}} = 1.$$

Střední člen součtu (15) sám o sobě splňuje tedy rovnici (15). Jestliže nyní družina tohoto členu (t. j. ostatní sčítanci v (15)) nezmění tento stav, bude větě (C) vyhověno. To nastane na př. za okolností, které uvedeny jsou v následující větě (I):

Z koeficientů řady (1) vyberme některou posloupnost typu L:

$$a_{n_q} = | a_{n_q} | . e^{i\varphi_{n_q}}, \; q = 1, 2, \ldots$$

Ke každému a_{n_q} přísluší určitá družina koeficientů (viz (12)) a_{n_q+s}.

Dají-li se nalézti úhly ψ_q, takže platí

$$1^0) \quad \lim \{ \cos (\varphi_{n_q} + \psi_q) \}^{\frac{1}{Nq}} = 1,$$

$$2^0) \quad \cos \{ \varphi_{n_q+s} + s\,\varphi + \psi_q \} \geqq 0$$

pro všechna q a všechna s (v úvahu přicházející), jest bod $z = e^{i\varphi}$ singulárním bodem řady (1). … (I)

Důkaz plyne z toho, že 1^0) má za následek splnění rovnice (16) a z podmínky 2^0) k tomu připojené pak plyne ihned platnost rovnice (15). K této větě nutno jest podotknouti, že posloupností typu L existuje nekonečně mnoho pro každou řadu (1); aby bod $z = e^{i\varphi}$ byl singulární, k tomu stačí, splňuje-li aspoň jedna z těch posloupností větu (I).

Příklad 1. Věta V i v a n t i-D i e n e s-o v a[14]) zní: *Všechny* koeficienty řady (1) nechť mají tvar $r e^{i\psi}$, $r \geqq 0$, $\cos \psi > \vartheta > 0$, kdež ϑ jest konstanta. Pak $z = 1$ jest singulární bod funkce (1). To jest zcela speciální případ věty (I), jak patrno z následujícího. Zvolme v (I) libovolnou posloupnost L a položme $\psi_q = 0$, $\varphi = 0$. Jsou-li splněny podmínky věty V. D., pak platí také

$$1 \geqq \cos \varphi_{n_q} > \vartheta; \quad \cos (\varphi_{r_q+s}) > \vartheta > 0.$$

Z prvé nerovniny plyne, že ve větě (I) splněna jest podmínka 1⁰) a druhá nerovnina jest identická s podmínkou 2⁰).

Z tohoto důkazu jest patrno, že věta V. D. připouští ostřejší formulaci: Podmínka $\cos \psi > \vartheta > 0$ nechť jest splněna jen pro jistou posloupnost L, pro ostatní pak koeficienty stačí žádati méně, totiž $\cos \psi \geqq 0$. Různá jiná zobecnění věty V. D. na př. volbou $\psi_q = 2\pi - \varphi_{n_q}$ ponechávám čtenáři.[15])

Příklad 2. Věta I. umožňuje nám provésti takové změny v *arku* některých koeficientů řady (1), že předem zvolený bod $z = e^{i\varphi}$ na kružnici konvergenční stane se singulárním. Zvláštním případem změn těch jest pouhá změna znamení při koeficientech oněch. Zvolíme posloupnost a_{n_q} typu L, takže k ní příslušná čísla B_{N_q} a tedy i družiny koeficientů při a_{n_q} neobsahují žádná dvě týž koeficient řady (1) (viz poznámku čís. 9). Dále zvolíme úhly ψ_q ve větě I. obsažené ve tvaru

$$\psi_q = 2\pi - \varphi_{n_q}.$$

Podmínka 1⁰) ve větě té jest tedy splněna. Aby bod daný $z = e^{i\varphi}$ byl singulárním, zbývá splniti podmínku 2⁰. Toho docílíme změnou arků φ_{n_q+s} takovou, aby nerovnina 2⁰ byla splněna pro všechna q a všechna s. Nejjednodušší mezi nekonečně mnoha možnými změnami toho druhu jest pak tato: Necháme úhel φ_{n_q+s} beze změny, když nerovnost 2⁰) jest splněna a zvětšíme resp. zmenšíme úhel ten o π, když kosinus v nerovnině obsažený jest záporný. Tato změna arku o π jest však identická se změnou znamení při koeficientu a_{n_q+s}. Po změně té jest splněna podmínka 2⁰) a tedy bod $z = e^{i\varphi}$ jest singulární.

Obdobně řeší se úloha, která káže provésti změnu arků nebo znamení u koeficientů řady (1) tak, aby předem daný konečný nebo nekonečný (avšak spočetný) počet bodů $z = e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2} \dots$ byl skupinou bodů singulárních pro funkci (1). K tomu cíli zvolím posloupnost typu L stejně jako pro jediný bod. Vybe u z ní tolik různých nekonečných posloupností, z nichž žádné dvě nemají společný člen, kolik bodů singulárních mám utvořiti. V každé takové posloupnosti provedu změny arků nebo znamének při koeficientech, jako jsme to učinili při jediném bodě a to tak, aby k posloupnosti té přiřazený bod stal se singulárním. Po pro-

[14]) l. c.

[15]) Viz také K_1 a K_2.

vedení všech těch změn stanou se všechny žádané body singulárními. Jestliže ve zvláštním případě bodů těch jest nekonečně mnoho a jestliže při tom pokrývají kružnici konvergenční všude hustě, stane se kružnice ta přirozenou hranicí funkce (1). To pak jest v podstatě obsah věty F a t o u-P o l y o v y.[16]) V dosud známých důkazech této věty není však ukázáno, *jak* změna znamének má se provésti. V odstranění tohoto nedostatku a v možnosti nahraditi změnu znamének změnou arků spočívá naše zobecnění.

Jiná aplikace věty (*C*) přivede nás k podstatnému zobecnění známé věty H a d a m a r d o v y.[17]) Vyslovme ihned výsledek:

Vyberme mezi koeficienty řady (*I*) *posloupnost typu.L*: $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ *Jestliže o koeficientech družiny každého z čísel* a_{n_q} *bude platiti*

$$\sum_{s=\lambda_1}^{1} |a_{n_q+s}| + \sum_{s=-1}^{\lambda_2} a_{n_q-s} = |a_{n_q}| \,.\, r_q,$$

kdež

$$o \leqq r_q < 1, \quad \overline{\lim} \, |1 - r_q|^{\frac{1}{Nq}} = 1, \qquad \text{(II)}$$

pak kružnice konvergenční jest přirozenou hranicí funkce (*I*).

O levé straně vzorce (15) platí totiž za podmínek větou vyslovených a při volbě $\psi_q = 2\pi - \varphi_{n_q}$, že jest větší než číslo

$$\{ |a_{n_q}| - |a_{n_q}| \,.\, r_q \}^{\frac{1}{Nq}} = |a_{n_q}|^{\frac{1}{Nq}} \,.\, |1 - r_q|^{\frac{1}{Nq}}.$$

Protože $\lim\limits_{q \to \infty} |a_{n_q}|^{\frac{1}{Nq}} = 1$ jest limes sup. ve vzorci (15) větší nebo rovno 1. Prvá možnost by vedla podle (15) k soudu

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \, |B_n|^{\frac{1}{n}} > \tfrac{3}{2},$$

což jest podle věty (*B*) nemožné. Zbývá tedy jen možnost druhá, která

[16]) l. c. Věta ona zní: Ke každé řadě (1) lze zvoliti posloupnost $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots$, kde každé $\varepsilon_n = \pm 1$, takže řada

$$a_0 \varepsilon_0 + a_1 \varepsilon_1 z + a_2 \varepsilon_2 z + \ldots$$

má jednotkovou kružnici za přirozenou hranici.

[17]) l. c. Věta ta zní: Potenční řada (1) nechť má tvar

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{m_k} z^{m_k}. \quad (o \leqq m_1 < m_2 < \ldots).$$

Při tom nechť existuje kladná konstanta ε, takže

$$m_{k+1} > (1 + \varepsilon)\, m_k.$$

Pak řada má jednotkovou kružnici za přirozenou hranici.

podle věty (C) dostačí k tomu, aby *kterýkoliv* bod $z = e^{i\varphi}$ (pro libovolné φ) byl singulárním pro řadu (1).

Již zcela speciální volba $r_q = 0$ vede k větě obecnější než jest Hadamardova v tom směru, že „mezery“ v koeficientech řady (1) nemusí následovati po každém členu od nuly různém. Stačí totiž, když jsou rovny nule jen koeficienty tvořící družiny posloupnosti L.

Jiná volba čísla r_q, na př.

$$r_q = \frac{konst.}{n_q}$$

vede k řadám tvaru (1), v nichž dokonce *žádný* koeficient nemusí býti roven nule a při nichž přece kružnice konv. jest přirozenou hranicí. Příkladem takové řady jest ta, v níž

$$\begin{array}{lll} 0 \leqq |a_n| \leqq konst. & \text{pro} & n \neq 2^q, \; q = 1, 2, 3, \ldots \\ |a_n| \geqq konst.\, n & \text{pro} & n = 2^q. \end{array}$$

Čtenář se sám snadno přesvědčí, že tato řada splňuje žádané podmínky, když konstantu μ v kriteriu (B) se vyskytující vhodně zvolíme.