Eduard Čech

О бикомпактных пространствах

Usp. Mat. Nauk 26, No.3 (159), 165-186 (1971)

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501111

1971 г. май—июнь *т. XXVI, вып. 3 (159)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 513.83

О БИКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ [1]

Э. Чех

Теория бикомпактных топологических пространств была широко развита П. С. Александровым и П. С. Урысоном в работе «Mémoire sur les espaces topologiques compacts» (Amsterdam, Verh. Kon. Acad. Wet. **14** : 1 (1929), 1—96; для ссылок на эту работу будет использоваться сокращение АУ). Дальнейшее развитие теория бикомпактных пространств получила в работе А. Н. Тихонова «Über die topologische Erweitrung von Räumen» (Math. Ann. **102** (1930)), где он показал, что полная регулярность является необходимым и достаточным условием для того, чтобы пространство являлось подпространством некоторого хаусдорфова бикомпактного пространства. Больше того, А. Н. Тихонов доказал, что для каждого вполне регулярного пространства S существует бикомпактное хаусдорфово пространство $\beta(S)$ такое, что (i) S всюду плотно в $\beta(S)$ и (ii) любая ограниченная непрерывная функция на S может быть непрерывно продолжена на $\beta(S)$. Легко видеть, что $\beta(S)$ однозначно определяется свойствами (i) и (ii). Цель настоящей статьи — более детальное изучение пространства $\beta(S)$.

Работа делится на четыре части. В первой части кратко излагаются некоторые хорошо известные определения и делается несколько простых замечаний. В частности, показывается, что произвольное топологическое пространство S определяет вполне регулярное пространство $\rho(S)$ таким образом, что значительную информацию о свойствах пространства S можно получить, изучая топологию пространства $\rho(S)$. Часть II посвящена теории упомянутого выше бикомпактного пространства $\beta(S)$. Здесь я повторяю только некоторые результаты этой части. Во-первых, если пространство S нормально, то $\beta(S)$ можно определить, не ссылаясь на непрерывные функции на пространстве S, в том смысле, что свойство (ii) можно заменить на следующее: если два замкнутых подмножества пространства S не пересекаются, то их замыкания в $\beta(S)$ также не пересекаются. Во-вторых, если S удовлетворяет первой аксиоме счетности, то S однозначно определяется пространством $\beta(S)$; при этом S — множество точек пространства $\beta(S)$, в которых выполняется первая аксиома счетности. Следовательно, в этом случае (включающем случай метризуемых пространств) изучение пространства S может

---

[1]) E. Č e c h, On bicompact spaces, Ann. of Math. 38 (1937), 823—844. Перевод выполнен А. И. Криворучко.

быть сведéно к изучению топологии пространства $\beta(S)$. Отсюда ясно, что весьма желательно продолжать изучение бикомпактных пространств и особенно пространства $\beta(S)$. Конечно, необходимо подчеркнуть, что $\beta(S)$ может быть определено только формально (не конструктивно), так как при его построении используется теорема Цермело. Если I обозначает пространство целых чисел, то думаю, что невозможно определить эффективно (в смысле Серпинского) и точки из $\beta(I)\setminus I$. Я даже не могу определить мощности множества $\beta(I)$. (Работа содержит и некоторые другие нерешенные проблемы.) Вместе с тем пространство $\beta(I)\setminus I$ дает положительное решение одной проблемы Александрова и Урысона (АУ, стр. 54). В части III вводится понятие топологически полных пространств и доказывается, что если S метризуемо, то оно топологически полно в том и только том случае, если гомеоморфно пространству с полной метрикой. Доказательство получается после незначительного изменения доказательства хорошо известной теоремы Хаусдорфа о том, что G_δ-множества в полном метрическом пространстве метризуемы полной метрикой. В части IV я рассматриваю локально нормальные пространства и доказываю, что локально нормальное пространство является открытым подмножеством некоторого нормального пространства. По-видимому, это было бы трудно доказать, не используя свойств пространства $\beta(S)$.

I

Множество S называется топологическим пространством, (а его элементы — точками), если выделено семейство $\mathfrak{F}$ подмножеств S (называемых замкнутыми подмножествами S), такое, что (1) все пространство S и пустое множество 0 замкнуты, (2) пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто, (3) объединение двух замкнутых множеств замкнуто. Множество $G \subset S$ называется открытым, если его дополнение замкнуто. Окрестностью множества $A \subset S$ (A может состоять из одной точки) называется открытое множество, содержащее A.

Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих данное множество A, называется замыканием A и обозначается через $\overline{A}$. Операция замыкания обладает следующими свойствами:

$$(1) \qquad \overline{0}=0, \quad (2)\ A\subset\overline{A}, \quad (3)\ \overline{A \cup B}=\overline{A} \cup \overline{B}, \quad (4)\ \overline{\overline{A}}=\overline{A}.$$

Обратно, можно определить понятие топологического пространства, отправляясь от оператора замыкания, удовлетворяющего условиям (1) — (4) и определяя замкнутые множества условием $\overline{A} = A$.

Открытой базой топологического пространства S называется семейство $\mathfrak{B}$ открытых множеств такое, что любое открытое множество является суммой некоторых элементов из $\mathfrak{B}$. Очевидно, семейство всех открытых множеств образует открытую базу. Любая открытая база обладает следующими свойствами: (1) для данной точки $x \in S$ существует $U \in \mathfrak{B}$ такое, что $x \in U$, (2) если даны точка $x \in S$ и два множества U, V такие, что $U \in \mathfrak{B}$, $V \in \mathfrak{B}$, $x \in U \cap V$, то существует множество W такое, что $x \in W$, $W \in \mathfrak{B}$, $W \subset U \cap V$. Наоборот, можно (и эта возможность очень часто используется) определить топологическое пространство, отправляясь от семейства $\mathfrak{B}$, удовлетворяющего условиям (1) и (2); тогда замыкание $\bar{A}$ множества A состоит из всех точек x таких, что из условий $U \in \mathfrak{B}$, $x \in U$ следует, что $U \cap A \neq 0$.

Фиксированное подмножество T топологического пространства S всегда рассматривается как топологическое пространство, в котором множество $A \subset T$ замкнуто в том и только в том случае, если A является пересечением T с замкнутым подмножеством в S. Множество A относительно открыто (т. е. открыто в T) тогда и только тогда, когда является пересечением T с некоторым открытым в S подмножеством. Относительным замыканием множества $A \subset T$ называется пересечение $T \cap \bar{A}$ множества T с замыканием A в S. Любая открытая база $\mathfrak{B}$ пространства S определяет открытую базу $\mathfrak{B}_0$ пространства T, элементами которой являются пересечения T с элементами базы $\mathfrak{B}$.

Отображением f топологического пространства S_1 в топологическое пространство S_2 называется соответствие между точками множеств S_1 и S_2 такое, что каждой точке $x \in S_1$ сопоставлена точка $f(x) \in S_2$; мы будем всегда предполагать, что для каждой точки $y \in S_2$ существует хотя бы одна точка $x \in S_1$ такая, что $f(x) = y$. Пространство S_1 является областью определения отображения f, S_2 — его областью значений. Образом $f(A)$ множества $A \subset S_1$ является множество всех точек $f(x)$, $x \in A$. Прообразом $f^{-1}(B)$ множества $B \subset S$ называется множество всех таких точек $x \in S_1$, что $f(x) \in B$. Отображение f взаимно однозначно, если из того, что $x_1 \in S_1$, $x_2 \in S_1$, $x_1 \neq x_2$ следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Если f взаимно однозначно, то определено обратное отображение f^{-1} пространства S_2 в пространство S_1, которое также является взаимно однозначным. Отображение f называется функцией, если область значений состоит из действительных чисел. Функция ограничена, если ее область значений — ограниченное множество. Отображение f называется непрерывным в точке $x \in S_1$, если для каждой окрестности V точки $f(x)$ существует окрестность U точки x такая, что $f(U) \subset V$; f называется непрерывным, если оно непрерывно в каждой точке $x \in S_1$. f непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого замкнутого в S_2 подмножества замкнут в S_1.

Множество $A \subset S$ называется G_δ-множеством, если существует счетная последовательность $\{G_n\}$ открытых подмножеств такая, что $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$; A называется F_σ-множеством, если существует такая счетная последовательность $\{F_n\}$ замкнутых множеств, что $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Дополнение G_δ-множества является F_σ-множеством. S называется T_0-пространством [1]), если замыкания различных точек не совпадают. S называется T_1-пространством [2]), если все его точки замкнуты. S является T_1-пространством в том и только том случае, когда пересечение всех окрестностей любой точки x является одноточечным

[1]) См. P. Alexandroff, H. Hopf, Topologie I, Berlin, 1935, стр. 58.

[2]) См. G. Birkhoff, On the combination of Topologies, Fund. Math. 26, стр. 162.

множеством. S называется хаусдорфовым пространством, если пересечение замыканий всех окрестностей любой точки x состоит из единственной точки x. Любое T_1-пространство является T_0-пространством. Каждое хаусдорфово пространство является T_1-пространством. Каждое подпространство T_0-пространства является T_0-пространством. То же справедливо для T_1-пространства и для хаусдорфовых пространств. Пусть $\mathfrak{B}$ — открытая база пространства S. Тогда S — T_0-пространство в том и только в том случае, если для любых двух различных точек x и y существует множество $U \in \mathfrak{B}$, содержащее только одну из этих точек. S является T_1-пространством тогда и только тогда, когда для любых двух несовпадающих точек x и y существует множество $U \in \mathfrak{B}$, содержащее x и не содержащее y. S — хаусдорфово пространство, если для любых двух различных точек x и y существуют такие множества U и V, что $U \in \mathfrak{B}$, $V \in \mathfrak{B}$, $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = 0$.

Теперь мы перейдем к доказательству того, что теория общих топологических пространств может быть полностью сведена к теории T_0-пространств. Пусть S — топологическое пространство. Две точки $x \in S$, $y \in S$ назовем эквивалентным, если $\overline{x} = \overline{y}$. Пусть F — замкнутое подмножество S, x и y — эквивалентные точки; если $x \in F$, то $\overline{x} \subset F$ но $y \in \overline{y}$ и $\overline{y} = \overline{x}$, следовательно, $y \in F$. Таким образом, получаем, что если замкнутое множество содержит некоторую точку, то оно содержит и все точки, эквивалентное данной. Пусть $\tau(x)$ — класс эквивалентности точки x. Тогда τ является отображением S в S_0, где S_0 — множество таких классов эквивалентности. Множество $A_0 \subset \subset S_0$ назовем замкнутым тогда и только тогда, когда прообраз $\tau^{-1}(A_0)$ замкнут в S. Очевидно, что S_0 — топологическое пространство, а τ — непрерывное отображение. Далее, очевидно, что $\tau(\overline{A}) = \overline{\tau(A)}$ для любого множества $A \subset S$; в частности, $\tau(\overline{x}) = \overline{\tau(x)}$. Если $\tau(x) \neq \tau(y)$, то $\overline{x} \neq \overline{y}$; так как $\overline{x}$ и $\overline{y}$ замкнуты, легко получить, что $\tau(\overline{x}) \neq \tau(\overline{y})$ или $\overline{\tau(x)} \neq \overline{\tau(y)}$, т. е. S_0 — T_0-пространство. Обратно, пусть S_0 — T_0-пространство. Пусть τ — отображение множества S в S_0. Назовем замкнутым в S прообраз любого замкнутого подмножества из S_0. Тогда S — общее топологическое пространство и τ можно рассматривать как отношение эквивалентности на нем. Очевидно, что топология S вполне описывается топологией пространства S_0. S называется регулярным пространством, если это T_0-пространство, обладающее следующим свойством: для каждой окрестности U произвольной точки x существует окрестность V точки x такая, что $\overline{V} \subset U$ [1]). Докажем, что любое регулярное пространство является хаусдорфовым пространством [2]). Пусть x и y — две различные точки S. Если $x \in \overline{y}$ и $y \in \overline{x}$, то, так как $\overline{x}$ и $\overline{y}$ замкнуты, $\overline{x} \subset \overline{y}$ и $\overline{y} \subset \overline{x}$, т. е. $\overline{x} = \overline{y}$, что невозможно. Не нарушая общности, можно предположить, что x не принадлежит $\bar{y}$, т. е. $S \setminus \bar{y}$ является окрестностью точки x. Тогда существует такая окрестность U точки x, что $\overline{U} \subset S \setminus \overline{y}$. Полагая $V = S \setminus \overline{U}$, получаем открытые множества U и V такие,

---

[1]) Окрестности могут выбираться из данной открытой базы пространства S.

[2]) Обычно предполагают, что S является T_1-пространством.

что $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = 0$, т. е. S — хаусдорфово пространство. Каждое подпространство регулярного пространства — регулярное пространство.

S называется вполне регулярным, если оно — T_0-пространство, удовлетворяющее следующему условию: для каждого замкнутого множества F и каждой точки $a \in S \setminus F$ существует непрерывная функция f на S такая, что $f(a) = 0$ и $f(x) = 1$ для каждой точки $x \in F$ [1]). Легко видеть, что вполне регулярное пространство регулярно и любое подмножество вполне регулярного пространства вполне регулярно.

Покажем теперь, что каждому топологическому пространству S можно сопоставить единственным образом определенное вполне регулярное пространство $\rho(S)$ таким образом, что в значительной мере топологию пространства S можно свести к топологии пространства $\rho(S)$. Две точки назовем эквивалентными (на некоторое время), если для этих точек x и y $f(x) = f(y)$ для каждой непрерывной функции. Каждой точке $x \in S$ сопоставим класс эквивалентности $\rho(x)$ точки x [2]). Получаем отображение ρ пространства S в $\rho(S) = S_1$. Определим топологию в S_1, построив открытую базу $\mathfrak{B}$ для S_1. Элемент $[f, I]$ базы $\mathfrak{B}$ будет определяться непрерывной функцией f на S и открытым интервалом I. При этом $[f, I]$ будет состоять из тех точек $\rho(x)$, для которых $f(x) \in I$. Чтобы доказать, что S_1 — топологическое пространство, нужно проверить, что семейство $\mathfrak{B}$ можно рассматривать как базу некоторой топологии. Во-первых, для каждой точки $a \in S$ существует $[f, I]$, содержащее $\rho(a)$. Во-вторых, пусть $\rho(a)$ принадлежит одновременно $[f_1, I_1]$ и $[f_2, I_2]$. Докажем, что существует $[f, I]$ такое, что $\rho(a) \in [f, I] \subset [f_1, I_1] \cap \cap [f_2, I_2]$. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что для $i = 1, 2$ интервал $f_i(a) - \varepsilon < < t < f_i(a) + \varepsilon$ является подмножеством I_i. Легко видеть, что мы можем положить $f(x) = | f_1(x) - f_1(a) | + | f_2(x) - f_2(a) |$, а за интервал I взять интервал $-2\varepsilon < t < 2\varepsilon$. Следовательно, S_1 — топологическое пространство.

Так как топология на S_1 определялась с помощью непрерывных функций на S, то легко видеть, что ρ — непрерывное отображение S в S_1; поэтому если φ — непрерывная функция на S_1, то $f(x) = \varphi[\rho(x)]$ — непрерывная функция на S. Более того, в нашем случае верно обратное: *любая непрерывная функция на S представима в виде суперпозиции $f(x) = \varphi[\rho(x)]$, где φ — непрерывная функция на S_1.*

Если $\rho(a)$ и $\rho(b)$ — две различные точки в S_1, то существует такая непрерывная на S функция f, что $f(a) \neq f(b)$. Возьмем два открытых непересекающихся интервала I_1 и I_2 так, чтобы $f(a) \in I_1$, $f(b) \in I_2$. Тогда $[f, I_1]$ и $[f, I_2]$ — два непересекающихся открытых в S_1 множества и $\rho(a) \in [f, I_1]$, $\rho(b) \in [f, I_2]$. Следовательно, S_1 — хаусдорфово пространство. Докажем, что S_1 вполне регулярно. Пусть Φ замкнуто в S_1 и не содержит точку $\rho(a)$. Существует множество $[f, I]$ такое, что $\rho(a) \in \in [f, I] \subset S_1 \setminus \Phi$; мы можем предположить, что I состоит из всех чисел t

---

[1]) Можно предполагать, что $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ для всех $x \in S$, так как мы можем заменить функцию f функцией φ, полагая $\varphi(x) = f(x)$, если $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $\varphi(x) = 0$, если $f(x) < 0$ и $\varphi(x) = 1$, если $f(x) > 1$.

[2]) Очевидно, из того, что $\tau(x) = \tau(y)$, следует, что $\rho(x) = \rho(y)$, но, конечно, мы можем ограничиться рассмотрением T_0-пространств.

таких, что $|f(a)-t|<\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$. Если $|f(x)-f(a)|\geqslant\varepsilon$, положим $g(x)=1$. Если $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, положим $g(x)=\varepsilon^{-1}|f(x)-f(a)|$. Тогда g — непрерывная функция на S и существует непрерывная функция φ на S_1 такая, что $g(x)=\varphi[\rho(x)]$. Легко видеть, что $\varphi[\rho(a)]=0$ и $\varphi(x)=1$ для каждой точки $x\in\Phi$. Пусть F — замкнутое подмножество S. Мы докажем, что *для того, чтобы $\rho(F)$ было замкнутым в S_1, необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки $a\in S\setminus\rho^{-1}[\rho(F)]$ существовала непрерывная на S функция f такая, что $f(a)=0$ и $f(x)=1$ для каждой точки $x\in F$*. Предположим сначала, что $\rho(F)$ не замкнуто и для точки a такой, что $\rho(a)\in\overline{\rho(F)}\setminus\rho(F)$, существует непрерывная на S функция такая, что $f(a)=0$ и $f(x)=1$ для точек $x\in F$. Тогда $f(x)=\varphi[\rho(x)]$, где φ — непрерывная на S_1 функция. Для $x\in\rho(F)$ будем иметь $\varphi(x)=1$; так как φ — непрерывна, то $\varphi(x)=1$ для $x\in\overline{\rho(F)}$, в частности, $\varphi[\rho(a)]=1$, т. е. $f(a)=1$, и мы приходим к противоречию. Теперь предположим, что $\rho(F)$ замкнуто в S_1. Пусть $a\in S\setminus\rho^{-1}[\rho(F)]$. Тогда $\rho(a)\in S_1\setminus\rho(F)$. Так как S_1 вполне регулярно, существует такая непрерывная на S_1 функция φ, что $\varphi[\rho(a)]=0$ и $\varphi(x)=1$ для каждой точки $x\in\rho(F)$. Полагая $f(x)=\varphi[\rho(x)]$, получаем непрерывную на S функцию и $f(a)=0$, а $f(x)=1$ для каждой точки $x\in F$. В качестве следствия получаем, что если S вполне регулярно, то ρ — гомеоморфизм.

Для вполне регулярных пространств справедливо следующее свойство. *Пусть σ — непрерывное отображение вполне регулярного пространства S в топологическое пространство R такое, что каждая непрерывная на S функция f представима в виде $f(x)=\varphi[\sigma(x)]$, где φ — непрерывная на R функция. Тогда отображение σ является гомеоморфизмом.* Докажем это. Пусть S вполне регулярно. Если $a\in S$, $b\in S$, $a\neq b$, то существует непрерывная на S функция f такая, что $f(a)\neq f(b)$; так как $f(x)=\varphi[\sigma(x)]$, то $\sigma(a)\neq\sigma(b)$, т. е. σ — взаимно однозначное отображение. Остается заметить, что если F замкнуто в S, то $\sigma(F)$ замкнуто в R. Если $\sigma(F)$ не замкнуто, то существует $a\in S$ такая, что $\sigma(a)\in\overline{\sigma(F)}\setminus\sigma(F)$. Пусть f — непрерывная функция такая, что $f(a)=0$ и $f(x)=1$ для точек $x\in F$. Но $f(x)=\varphi[\sigma(x)]$ и $\varphi[\sigma(a)]=0$, а $\varphi(x)=1$ для $x\in\sigma(F)$. Так как φ непрерывна, то $\varphi(x)=1$ и для точек из $\overline{\sigma(F)}$, а тогда $\varphi(a)=1$, и мы приходим к противоречию. Если S не вполне регулярно, то отмеченное только что свойство не выполняется, что сразу видно, если положить $\sigma=\rho$.

Рассмотрим следующие три свойства топологических пространств: (1) Если F_1 и F_2 — замкнутые непересекающиеся множества, то существуют такие открытые множества G_1 и G_2, что $F_1\subset G_1$, $F_2\subset G_2$ и $G_1\cap G_2=0$. (2) Если F_1 и F_2 — замкнутые непересекающиеся множества, то существует такая непрерывная на всем пространстве функция f, что $f(x)=0$ для каждой точки $x\in F_1$ и $f(x)=1$ для каждой точки $x\in F_2$ [1]). (3) Если F — замкнутое множество и φ — непрерывная на F ограниченная функция [2]), то существует непрерывная на всем пространстве функция f такая, что $f(x)=\varphi(x)$ для каждой точки $x\in F$. Легко видеть, что формально (2) более

[1]) См. сноску [1]) на стр. 169.

[2]) Легко доказать, что требование ограниченности можно опустить.

сильно, чем (1), а (3) более сильно, чем (2). Но П. С. Урысон доказал [1]), что все три условия эквивалентны. Пространство, удовлетворяющее этим условиям, называется нормальным. Условие (2) показывает, что нормальное T_1-пространство вполне регулярно (следовательно, регулярно и хаусдорфово).

Если пространство S нормально, то $\rho(S)$ также нормально. Пусть Φ_1 и Φ_2 — два замкнутых непересекающихся подмножества в $\rho(S)$. Тогда $F_1 = \rho^{-1}(\Phi_1)$ и $F_2 = \rho^{-1}(\Phi_2)$ — замкнутые непересекающиеся в S подмножества. Так как S нормально, то существует непрерывная функция f на S такая, что $f(x) = 0$ для всех точек $x \in F_1$ и $f(x) = 1$ для точек $x \in F_2$. Но $f(x) = \varphi[\rho(x)]$, где φ — непрерывная на $\rho(S)$ функция. Очевидно, $\varphi(x) = 0$, если $x \in \Phi_1$, и $\varphi(x) = 1$, если $x \in \Phi_2$. *Если пространство S нормально, то для точек $a \in S$, $b \in S$ $\rho(a) = \rho(b)$ тогда и только тогда, когда $\bar{a} \cap \bar{b} \neq 0$.* Предположим сначала, что $c \in \bar{a} \cap \bar{b}$. Если f — непрерывная функция на S, то легко видеть, что $f(a) = f(b) = f(c)$, следовательно, $\rho(a) = \rho(b)$. Теперь предположим, что $\bar{a} \cap \bar{b} = 0$. Тогда существует непрерывная на S функция такая, что $f(a) = 0$, $f(b) = 1$ и, следовательно, $\rho(a) \neq \rho(b)$.

Если пространство S нормально и F замкнуто в S, то $\rho(F)$ замкнуто в $\rho(S)$. Пусть $a \in S \setminus \rho^{-1}[\rho(F)]$. Для $x \in F$ имеем $\rho(a) \neq \rho(x)$, следовательно, $\bar{a} \cap \bar{x} = 0$, поэтому $\bar{a} \cap F = 0$. Но тогда существует непрерывная на S функция f такая, что $f(x) = 1$, если $x \in F$ и $f(x) = 0$, если $x \in \bar{a}$, а тогда и $f(a) = 0$. А мы знаем, что из этого следует замкнутость $\rho(F)$ в $\rho(S)$. Последние две теоремы показывают, что если S нормально, то $\rho(S)$ и топология на нем может быть описана следующим образом: пространство $\rho(S)$ состоит из точек $\rho(x)$, сопоставленных точкам $x \in S$ так, что $\rho(x) = \rho(y)$ в том и только в том случае, если $\bar{x} \cap \bar{y} \neq 0$; при этом множество $\Phi \subset \rho(S)$ замкнуто в $\rho(S)$ тогда и только тогда, когда $\rho^{-1}(\Phi)$ замкнуто в S. Представляет интерес дать подобное описание для $\rho(S)$ и в общем случае.

Если пространство S нормально, то необходимым и достаточным условием для того, чтобы множество $A \subset S$ было замкнутым G_δ-множеством является существование такой непрерывной на S функции f, что $f(x) = 0$ в том и только в том случае, если $x \in A$. Предположим сначала, что такая функция f существует. Тогда $A = \{f(x) = 0\}$ замкнуто, а $G_n = \{\,|f(x)| < 1/n\}$ — открытое множество и $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Обратно, пусть $A = \bar{A} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, где G_n — открыто. Так как S нормально, существуют непрерывные на S функции f_n такие, что $f_n(x) = 0$ для $x \in A$, $f_n(x) = 1$ для $x \in S \setminus G_n$, и $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$ на S. Теперь достаточно положить $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n(x)$.

Точка x топологического пространства S называется точкой полного накопления множества $A \subset S$, если для каждой окрестности U точки x мощ-

---

[1]) P. Urysohn, Über die Mâchtigkeit zusammenhangender Mengen, Math. Ann. 94 (1925).

ность множества $A \cap U$ равна мощности множества A. Семейство $\mathfrak{C}$ подмножеств пространства S называется монотонным, если для каждых двух множеств A, B из этого семейства либо $A \subset B$ либо $B \subset A$. Семейство $\mathfrak{C}$ подмножеств пространства S называется покрытием пространства S, если каждая точка $x \in S$ принадлежит некоторому множеству из $\mathfrak{C}$.

Рассмотрим следующие три условия: (1) Каждое бесконечное подмножество пространства S имеет хотя бы одну точку полного накопления. (2) Монотонное семейство непустых замкнутых множеств имеет непустое пересечение. (3) Всякое покрытие пространства S, состоящее из открытых множеств, содержит конечное покрытие пространства S. Известно, что эти три условия попарно эквивалентны [1]. Пространство, удовлетворяющее этим условиям, называется бикомпактным. Бикомпактное хаусдорфово пространство нормально [2] (следовательно, вполне регулярно). Замкнутое подмножество бикомпактного пространства является бикомпактным пространством [3]. Обратно, бикомпактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто. Легко получить, что взаимно однозначное непрерывное отображение бикомпактного хаусдорфова пространства является гомеоморфизмом.

Пусть $\{S_\iota\}$, $\iota \in I$,— семейство множеств, занумерованное элементами некоторого множества I. Декартовым произведением $\prod\limits_\iota S_\iota$ семейства $\{S_\iota\}$ называется множество всех $x = \{x_\iota\}$, где $x_\iota \in S_\iota$; при этом x_ι называется координатой точки x. Если каждое S_ι является топологическим пространством, мы вводим топологию на $S = \prod\limits_\iota S_\iota$, определяя элементы открытой базы $\mathfrak{B}$ следующим образом: элементы $\mathfrak{B}$ — это множества вида $\prod\limits_\iota G_\iota$, где (1) каждое G_ι — открытое подмножество S_ι и (2) $S_\iota = G_\iota$, за исключением конечного числа индексов ι. Легко видеть, что S является T_0-пространством в том и только в том случае, если каждый сомножитель S_ι является T_0-пространством. То же верно для T_1-пространства, а также для хаусдорфовых, регулярных и вполне регулярных пространств. Если S нормально, то каждое пространство S_ι нормально, но обратное неверно.

Декартово произведение $S = \prod\limits_\iota S_\iota$ любого семейства бикомпактных пространств является бикомпактным пространством. Используя теорему Цермело, мы можем предположить, что множество I состоит из всех трансфинитов, меньших некоторого данного. Пусть дано бесконечное множество $A \subset S$. Мы должны найти точку полного накопления $z = \{z_\iota\}$ в S для множества A. Будем строить по трансфинитной индукции координаты z_ι точки z так, чтобы выполнялось следующее условие π_ι: Если дано конечное число индексов $\iota_n < \iota$ и для каждого ι_n выбрана окрестность G_n точки z_{ι_n} (в пространстве S_{ι_n}), то мощность пересечения множества A с множеством точек $x = \{x_\iota\}$, для которых $x_{\iota_n} \in G_n$ (для каждого данного индекса ι_n), равна мощности множества A. Ясно, что если для каждого $\iota \in I$ выбрана

[1] АУ, стр. 8.
[2] АУ, стр. 26.
[3] АУ, стр. 47.

такая точка z_ι, то $z = \{z_\iota\}$ — точка полного накопления множества A. Предположим, что для некоторого $\lambda \in I$ точки z_ι (со свойством π_ι) уже выбраны для всех $\iota < \lambda$, а точку z_λ со свойством π_λ выбрать нельзя. Тогда для каждой точки $y_\lambda \in S_\lambda$ существует окрестность $T(y_\lambda)$ точки y_λ (в пространстве S_λ), существует конечное множество $M(y_\lambda)$ индексов $\iota < \lambda$ и окрестностей $G(z_\iota, y_\lambda)$, каждая из которых соответствует индексу $\iota \in M(y_\lambda)$, такие, что множество $A \cap H(y_\lambda) \cap K(y_\lambda)$ имеет мощность меньше мощности множества A, где $H(y_\lambda)$ — множество всех таких точек $\{x_\iota\}$, для которых $x_\lambda \in T(y_\lambda)$, а $K(y_\lambda)$ — множество таких точек $\{x_\iota\}$, для которых $x_\iota \in G(z_\iota, y_\lambda)$ для всех $\iota \in M(y_\lambda)$. Так как S_λ бикомпактно, существует конечное число точек $y_\lambda^{(i)} \in S_\lambda$ $(1 \leqslant i \leqslant m < \infty)$ таких, что $\bigcup_{i=1}^{m} T(y_\gamma^{(i)}) = S_\lambda$. Мощность множества $\bigcup_{i=1}^{m} (A \cap H(y_\lambda^{(i)}) \cap K(y_\lambda^{(i)}))$ меньше мощности A. С другой стороны, $\bigcup_{i=1}^{m} H(y_\lambda^{(i)}) = S$, а тогда мощность множества $A \cap (\bigcap_{i=1}^{m} K(y_\lambda^{(i)}))$ меньше мощности A, что противоречит условию π_μ, где $\iota \leqslant \mu < \lambda$ для каждого $\iota \in \bigcup_{i=1}^{m} M(y_\lambda^{(i)})$.

II

Так как бикомпактное хаусдорфово пространство вполне регулярно, каждое подмножество бикомпактного хаусдорфова пространства вполне регулярно. Следуя А. Н. Тихонову, мы докажем обратное: *каждое вполне регулярное пространство является подмножеством некоторого бикомпактного хаусдорфова пространства.*

Пусть S — вполне регулярное пространство. Пусть T обозначает интервал $0 \leqslant t \leqslant 1$, Φ — множество всех непрерывных на S функций f таких, что $f(S) \subset T$. Выберем множество I той же мощности, что и Φ, и установим взаимно однозначное соответствие между элементами Φ и I. Пусть f_ι — функция, соответствующая $\iota \in I$. Для $\iota \in I$ положим $T_\iota = T$ и пусть $R = \prod_\iota T_\iota$. Так как T_ι — бикомпактное хаусдорфово пространство, то R — также бикомпактное хаусдорфово пространство. Положим для каждого $x \in S$ $g(x) = \xi = \{\xi_\iota\} \in R$, где $\xi_\iota = f_\iota(x)$. Тогда g — отображение пространства S в пространство $S^* = g(S) \subset R$. Легко проверить, что g является гомеоморфизмом. Для $\iota \in I$ и $\xi \in R$ положим $\varphi_\iota(\xi) = \xi_\iota$. Тогда φ_ι — непрерывная на R функция и $\varphi_\iota(R) = T$. Более того, $\varphi_\iota[g(x)] = f_\iota(x)$ для $x \in S$.

Если S вполне регулярно, пусть $\beta(S)$ обозначает какое-нибудь пространство, удовлетворяющее следующим условиям: (1) $\beta(S)$ — бикомпактное хаусдорфово пространство, (2) $S \subset \beta(S)$, (3) S всюду плотно в $\beta(S)$ (т. е. замыкание S в пространстве $\beta(S)$ совпадает с $\beta(S)$), (4) каждая непрерывная ограниченная на S функция f может быть непрерывно продолжена [1]) на $\beta(S)$.

Пространство $\beta(S)$ существует для каждого вполне регулярного пространства S. Используя обозначения, введенные выше, мы видим, что

---

[1]) Из свойства (3) следует, что функция f однозначно определяет свое непрерывное продолжение.

замыкание множества S^* в R удовлетворяет условиям (1) — (4) для пространства S^*, так что $\beta(S^*)$ существует. Так как S и S^* гомеоморфны, $\beta(S)$ также существует. *Для вполне регулярного пространства S пространство $\beta(S)$ определяется однозначно.* Точнее, если B_1 и B_2 удовлетворяют условиям (1) — (4) пространства $\beta(S)$, то существует гомеоморфизм h пространств B_1 и B_2 такой, что $h(x) = x$ для каждой точки $x \in S$. Это лишь частный случай следующей теоремы. *Пусть S вполне регулярно, а B — пространство, удовлетворяющее условиям* (1) — (3) *пространства* $\beta(S)$. *Тогда существует непрерывное отображение h пространства $\beta(S)$ в B такое, что* (*i*) $h(x) = x$ *для каждой точки x из S,* (*ii*) $h[\beta(S)\setminus S] = B\setminus S$. *Отображение h взаимно однозначно* (*и, следовательно, является гомеоморфизмом*) *тогда и только тогда, когда B удовлетворяет условию* (4). Пусть I, T, R, g и S^* обозначают то же, что и выше. Разобьем множество I на два непересекающихся подмножества I_1 и I_2, полагая, что $\iota \in I_1$ в том и только в том случае, если функция f_ι может быть непрерывно продолжена на B. Пусть R_1 обозначает произведение $\prod\limits_{\iota} T_\iota$, где $\iota \in I_1$ и $T_\iota = T$ для каждого ι. Для каждого $x \in B$ пусть $g_1(x) = \xi = \{\xi_\iota\}_{\iota \in I_1} \in R$, где $\xi_\iota = \varphi_\iota(x)$, а φ_ι — продолжение функции f_ι на B. Тогда g_1 — гомеоморфное отображение B в $B^* = g_1(B) \subset R_1$. Для каждого $\xi = \{\xi_\iota\}_{\iota \in I} \in R$ положим $k(\xi) = \{\xi_\iota\}_{\iota \in I_1} \in R_1$. Очевидно, что k — непрерывное отображение R в R_1. Легко видеть, что $R[g(x)] = g_1(x)$ для $x \in S$, так что $k(S^*) \subset B^*$. Так как k непрерывно, $k(\bar{S}^*) \subset \bar{B}^*$, где $\bar{S}^*$ — замыкание S^* в R и $\bar{B}^*$ — замыкание B^* в пространстве R_1. Но B^* — бикомпактное хаусдорфово пространство, поэтому k определяет непрерывное отображение k_0 пространства $\bar{S}^*$ в B^*, а k_0 определяет непрерывное отображение h пространства $\beta(S)$ в подпространство $h[\beta(S)] \subset B$; очевидно, что $h(x) = x$ для каждой точки $x \in S$. Пространство $h[\beta(S)]$, как непрерывный образ бикомпактного пространства $\beta(S)$, бикомпактно. Следовательно, $h[\beta(S)]$ замкнуто в B, но $h[\beta(S)] \supset S$, поэтому $h[\beta(S)] = B$, т. е. h — непрерывное отображение $\beta(S)$ в B. Если B удовлетворяет условию (4) пространства $\beta(S)$, то $I_1 = I$, $R_1 = R$ и k — тождественное отображение, а тогда h — гомеоморфизм.

Возвращаясь к общему случаю, мы еще должны доказать, что $h[\beta(S)\setminus S] = B\setminus S$. Конечно, $h[\beta(S)\setminus S] \supset B\setminus S$. Предположим, что существует точка $b \in \beta(S)\setminus S$ такая, что $a = h(b) \in S$. Так как $\beta(S)$ — бикомпактное хаусдорфово пространство, то оно вполне регулярно. Следовательно, существует непрерывная функция φ на $\beta(S)$ такая, что $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$. Пусть Q — множество всех таких точек $x \in S$, для которых $\varphi(x) \geqslant {}^1/_2$. Тогда Q замкнуто в S и существует замкнутое подмножество P пространства B такое, что $Q = S \cap P$. Так как и B вполне регулярно, то существует такая непрерывная на B функция ψ, что $\psi(a) = 0$, $\psi(x) = 1$ для каждой точки $x \in P$ и $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$ на B. Из свойства (4) пространства $\beta(S)$ следует существование непрерывной функции χ на $\beta(S)$, для которой $\chi(x) = \psi(x)$ в точках $\chi \in S$, следовательно, $\chi(a) = 0$. Так как h — непрерывное отображение $\beta(S)$ в B, $\psi[h(x)]$ — непрерывная на $\beta(S)$ функция. Множество C всех точек $x \in \beta(S)$, для которых $\psi[h(x)] = \chi(x)$, замкнуто в $\beta(S)$ и содержит множество

S, которое всюду плотно в $\beta(S)$; поэтому $C = \beta(S)$ и $\chi(b) = \psi[h(b)] = \psi(a) = 0$. Множество D всех точек, для которых одновременно $\varphi(x) > {}^1/_2$ и $\chi(x) < {}^1/_2$, открыто в $\beta(S)$ и не пусто, так как $b \in D$. Далее, так как S всюду плотно в $\beta(S)$, то существует точка $c \in S \cap D$. Ввиду того, что $c \in D$, имеем $\chi(c) < {}^1/_2$; но $c \in S$ и, следовательно, $\chi(c) = \psi(c)$ и $\psi(c) < {}^1/_2$, но тогда из определения Q получаем, что $\varphi(c) < {}^1/_2$, что ведет к противоречию.

Два подмножества A_1 и A_2 топологического пространства S назовем вполне отделимыми, если существует непрерывная на S функция f такая, что $f(x) = 0$ для всех точек $x \in A_1$ и $f(x) = 1$ для всех точек $x \in A_2$. Легко видеть, что A_1 и A_2 вполне отделимы тогда и только тогда, когда замкнутые множества $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$ вполне отделимы. Мы знаем, что S вполне регулярно в том и только том случае, если любая точка и любое замкнутое множество, ее не содержащее, вполне отделимы. Мы знаем, что S нормально в том и только том случае, если два замкнутых непересекающихся множества всегда вполне отделимы.

Пусть S — вполне регулярное пространство. Мы охарактеризовали пространство $\beta(S)$ условиями (1) — (4), данными выше. Покажем теперь, что $\beta(S)$ можно охарактеризовать условиями (1), (2), (3) и (4)$'$, где (4)$'$ означает следующее: Если A_1 и A_2 — два вполне отделимых в S подмножества, то замыкания A_1 и A_2 в пространстве $\beta(S)$ не пересекаются. Предположим сначала, что A_1 и A_2 вполне отделимы в S. Тогда существует непрерывная на S функция f такая, что $f(x) = 0$ для каждой точки $x \in A_1$ и $f(x) = 1$ для каждой точки $x \in A_2$. Мы можем предположить, что $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ на S, так что существует непрерывное продолжение φ функции f на $\beta(S)$. Пусть $\overline{A}_1$ — замыкание множества A_1 в $\beta(S)$, $\overline{A}_2$ — замыкание множества A_2 в $\beta(S)$. Тогда $\varphi(x) = 0$ для всех точек из $\overline{A}_1$ и $\varphi(x) = 1$ для точек из $\overline{A}_2$, так что $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = 0$. Обратно, пусть пространство B удовлетворяет условиям (1), (2), (3), (4)$'$. Существует непрерывное отображение h пространства $\beta(S)$ в пространство B такое, что $h(x) = x$ для всех x из S. Достаточно доказать, что отображение h взаимно однозначное. Предположим, что это не так. Тогда существуют две точки, $a \in \beta(S)$, $b \in \beta(S)$ такие, что $a \neq b$, а $h(a) = h(b)$. Существует такая непрерывная на $\beta(S)$ функция f, что $f(a) = 0$, $f(b) = 1$. Пусть A_1 — множество всех точек из S, для которых $f(x) \leqslant {}^1/_3$, A_2 — множество всех точек, для которых $f(x) \geqslant {}^2/_3$. Легко видеть, что A_1 и A_2 — вполне отделимые подмножества пространства S, так что $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = 0$, где замыкание берется в пространстве B. Так как $h(a) = h(b)$, мы придем к противоречию, если докажем, что $h(a) \in \overline{A}_1$ и $h(b) \in \overline{A}_2$. Пусть U — любая окрестность точки $h(a)$ в пространстве B. Тогда $h^{-1}(U)$ — окрестность точки a в пространстве $\beta(S)$. Так как $f(a) = 0$, а S всюду плотно в $\beta(S)$, то легко видеть, что $f^{-1}(U) \cap A \neq 0$, следовательно, $U \cap A \neq 0$. Так как U — произвольная окрестность точки $h(a)$ в пространстве B, то $h(a) \in \overline{A}_1$; аналогично доказываем, что $h(b) \in \overline{A}_2$.

В частном случае, когда пространство S — нормальное T_1-пространство, из только что доказанного следует, что $\beta(S)$ может быть охарактеризовано условиями (1), (2), (3) и (5), где (5) означает следующее: Если F_1 и F_2 —

замкнутые непересекающиеся в S множества, то замыкания F_1 и F_2 в пространстве $\beta(S)$ не пересекаются. Обратно, если существует пространство B, удовлетворяющее условиям (1), (2), (3) и (5), то S нормально, а $B = \beta(S)$. В самом деле, легко видеть, что условие (5) сильнее условия (4)', так что $B = \beta(S)$. Если F_1 и F_2 — замкнутые подмножества пространства S и $F_1 \cap F_2 = 0$, то $\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 = 0$, где замыкание берется в B. Так как B — бикомпактное хаусдорфово пространство, то оно нормально, а тогда и S нормально.

Пусть S — вполне регулярное пространство, а T замкнуто в S. Пусть $\overline{T}$ — замыкание множества T в пространстве $\beta(S)$. Тогда $\overline{T} = \beta(T)$ *в том и только в том случае, если каждая ограниченная непрерывная функция на* T *допускает непрерывное продолжение на* S. Предположим сначала, что $\overline{T} = \beta(T)$. Пусть f — непрерывная ограниченная функция на T. Тогда существует ограниченная непрерывная на $\overline{T}$ функция g, являющаяся продолжением функции f. Так как $\overline{T}$ замкнуто в $\beta(S)$, а $\beta(S)$ нормально, то существует непрерывное продолжение φ функции g на пространство $\beta(S)$. Следовательно, f может быть непрерывно продолжено на пространство $S \subset \beta(S)$. Обратно, предположим, что каждая непрерывная ограниченная функция на T может быть непрерывно продолжена на S. Конечно, $\overline{T}$ удовлетворяет условиям (1) — (3) (относительно T); поэтому, чтобы доказать, что $\overline{T} = \beta(T)$, достаточно проверить выполнение условия (4)' (опять относительно T). Предположим, что $A_1 \subset T$, $A_2 \subset T$ — вполне отделимы в пространстве T. Тогда существует непрерывная функция f на T такая, что $f(x) = 0$ для всех $x \in A_1$, $f(x) = 1$ для всех $x \in A_2$ и $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ для всех $x \in T$, следовательно, A_1 и A_2 вполне отделимы в пространстве S. Так как $\beta(S)$ удовлетворяет условию (4)' (относительно S), то $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = 0$, где замыкания берутся в $\beta(S)$. Но очевидно, что $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$ являются замыканиями множеств A_1 и A_2 в пространстве $\overline{T}$, так что $\overline{T}$ в самом деле удовлетворяет условию (4)' относительно T.

Из только что доказанной теоремы получаем следствие: *Если S — нормальное T_1-пространство, то $\overline{T} = \beta(T)$ (замыкание берется в $\beta(S)$) для каждого замкнутого подмножества T пространства S. Если вполне регулярное пространство S не нормально, то существует замкнутое подмножество $T \subset S$, для которого $\overline{T} \neq \beta(T)$.*

Семейство Φ окрестностей точки x топологического пространства S назовем полным, если для каждой окрестности G точки x существует окрестность U такая, что $U \in \Phi$ и $U \subset G$. Минимальное кардинальное число полных семейств окрестностей точки x называется характером [1]) точки x (в пространстве S) и обозначается через $\chi(x) = \chi_s(x)$. Если $T \subset S$, $x \in T$, то очевидно, что $\chi_T(x) \leqslant \chi_S(x)$.

Пусть S — вполне регулярное пространство. Тогда для каждой точки $a \in S$ имеем $\chi_S(a) = \chi_{\beta(S)}(a)$.

Пусть Φ — полная система окрестностей точки a в пространстве S, мощность которой равна $\chi_S(a)$. Достаточно построить полное семейство Ψ

[1]) АУ, стр. 2.

окрестностей точки a в пространстве $\beta(S)$ такое, чтобы мощность Ψ не превосходила мощности Φ. Для этого каждому $U \in \Phi$ сопоставим $\tau(U) \in \Psi$ следующим образом: $\tau(U) = \beta(S)\setminus\overline{S\setminus U}$ [замыкание берется в пространстве $\beta(S)$]. Пусть Ψ — множество всех элементов $\tau(U)$, $U \in \Phi$. Очевидно, Ψ — семейство окрестностей точки a в пространстве $\beta(S)$ и мощность Ψ не больше $\chi_S(a)$. Остается доказать, что для каждой окрестности G точки a в пространстве $\beta(S)$ существует окрестность $U \in \Phi$, для которой $\tau(U) \subset G$. Пусть f — такая непрерывная на $\beta(S)$ функция, что $f(a) = 0$ и $f(x) = 1$ для всех $x \in \beta(S)\setminus G$. Пусть H — множество всех точек $x \in S$, для которых $f(x) < 1/2$. Докажем, что $\tau(U) \subset G$, где U — такая окрестность точки a, что $U \in \Phi$ и $u \subset H$. Предположим противное. Пусть существует точка $b \in \tau(U)\setminus G$. Так как $b \in \beta(S)\setminus G$, то $f(b) = 1$. Пусть V — произвольная окрестность точки b в пространстве $\beta(S)$. Так как $f(b) = 1$ и S всюду плотно в $\beta(S)$, то существует точка $c \in S \cap V$, в которой $f(c) > 1/2$. Так как $U \subset H$, то c не принадлежит U, т. е. $c \in S\setminus U$ и $(S\setminus U) \cap V \neq 0$. Но V — произвольная окрестность точки в пространстве $\beta(S)$, следовательно, $b \in \overline{S\setminus U} = \beta(S)\setminus\tau(U)$ и получено противоречие.

Пусть S —вполне регулярное пространство. Если $A \subset \beta(S)\setminus S$ — непустое замкнутое G_δ-множество в $\beta(S)$, то мощность A не меньше $2^{\aleph_0}$. Так как A — замкнутое G_δ-множество в $\beta(S)$, то существует непрерывная на $\beta(S)$ функция f такая, что $f(x) = 0$ для всех точек из A и $f(x) > 0$ для остальных точек. Множество всех точек $x \in \beta(S)$, для которых $f(x) < n^{-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, открыто и не пусто. Так как S всюду плотно в $\beta(S)$, то существует точка $a_n \in S$, для которой $f(a_n) < n^{-1}$. Так как $A \cap S = 0$, то $f(a_n) > 0$. Очевидно, что a_n можно выбрать так, чтобы $f(a_{n+1}) < f(a_n)$. Пусть $\{r_n\}$ — занумерованное некоторым образом множество рациональных чисел интервала $0 < t < 1$. Тогда существует такая непрерывная на полупрямой $0 < t < \infty$ функция φ, что $0 < \varphi(t) < 1$ и $\varphi[f(a_n)] = r_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Так как $f(x) > 0$ для всех $x \in S$, то мы получаем непрерывную на S функцию g, где $g(x) = \varphi[f(x)]$ для $x \in S$. Функция g ограничена и существует непрерывное продолжение h функции g на пространство $\beta(S)$. Выберем действительное число α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Существует последовательность $i_1 < i_2 < \ldots$, такая, что $r_{i_n} \to \alpha$ при $n \to \infty$. Пусть M_n — множество точек $a_{i_n}, a_{i_{n+1}}, a_{i_{n+2}}, \ldots$, так что $M_n \subset S$, $M_n \supset M_{n+1}$, $M_n \neq 0$. Так как $\beta(S)$ — бикомпакт, то существует точка $b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{M}_n$. Ввиду непрерывности функций f и h имеем $f(\overline{M}_n) \subset \overline{f(M_n)}$, $h(\overline{M}_n) \subset \overline{h(M_n)} \subset \overline{g(M_n)}$ и $f(b) \in \bigcap \overline{f(M_n)}$, $h(b) \in \bigcap \overline{g(M_n)}$. Так как $f(a_{i_n}) \to 0$, $g(a_{i_n}) \to \alpha$ при $n \to \infty$, то получаем, что $f(b) = 0$, $h(b) = \alpha$. Но если $f(b) = 0$, то $b \in A$. Таким образом, для каждого α на отрезке $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ множество A содержит точку b, в которой $h(b) = \alpha$. Следовательно, мощность A не меньше, чем $2^{\aleph_0}$.

Пусть S_1 и S_2 — два вполне регулярных пространства, удовлетворяющие первой аксиоме счетности. Тогда, если $\beta(S_1)$ гомеоморфно $\beta(S_2)$, то S_1 и S_2 гомеоморфны. Можно предполагать, что $\beta(S_1) = \beta(S_2)$. Согласно предыдущей теореме ни одна точка $x \in \beta(S_1)\setminus S_1$ не есть G_δ-множество в $\beta(S_1)$.

Но каждая точка $x \in S_2$ удовлетворяет в S_2 первой аксиоме счетности и поэтому есть G_δ-множество в $\beta(S_1) = \beta(S_2)$. Поэтому $S_2 \subset S_1$ аналогично $S_1 \subset S_2$, так что $S_1 = S_2$.

Пусть I — бесконечное счетное множество, состоящее из изолированных точек (т. е. пространство натуральных чисел). Возникает проблема определить мощность $\mathfrak{m}$ множества точек пространства $\beta(I)$. Все, что я знаю, это то, что

$$2^{\aleph_0} \leqslant \mathfrak{m} \leqslant 2^{2^{\aleph_0}}.$$

Легко видеть, что каждая точка из I изолирована в $\beta(I)$. Поэтому I открыто в $\beta(I)$. Так как I счетно, то это F_σ — множество в $\beta(I)$. Следовательно, $\beta(I) \setminus I$ — замкнутое G_δ-множество в $\beta(I)$, так что мощность $\beta(I) \setminus I$ не меньше, чем $2^{\aleph_0}$. С другой стороны, так как I — всюду плотно в хаусдорфовом пространстве $\beta(I)$, то легко видеть, что точка $x \in \beta(I)$ вполне определяется семейством всех множеств $A \subset I$, для которых $x \in \overline{A}$, так что мощность множества точек $\beta(I)$ не больше мощности $2^{2^{\aleph_0}}$ всех семейств подмножеств множества I.

Топологическое пространство S называется компактным, если для всякого бесконечного множества $A \subset S$ существует такая точка $x \in S$, что $x \in \overline{A \setminus x}$.

Пусть нормальное T_1-пространство S не компактно. Тогда мощность $\beta(S) \setminus S$ не меньше мощности $\beta(I)$. Так как S не компактно, существует замкнутое множество $F \subset S$, гомеоморфное I. Кроме того, S нормально, $\beta(I) = \overline{I} \subset \beta(S)$, следовательно, $\beta(I) \setminus I \subset \beta(S) \setminus S$. Но множества $\beta(I) \setminus I$ и $\beta(I)$ равномощны.

Я не знаю, остается ли теорема справедливой, если заменить нормальность полной регулярностью. Можно показать, что нормальность может быть заменена следующим более слабым условием [1]). Если F_1 и F_2 — два замкнутых подмножества S, F_1—счетное множество, а $F_1 \cap F_2 = 0$, то существуют два открытых множества G_1, G_2 такие, что $G_1 \supset F_1$, $G_2 \supset F_2$, $G_1 \cap G_2 = 0$.

Если пространство S компактно, то множество $\beta(S) \setminus S$ может состоять из одной точки. Пусть S — множество всех трансфинитов $< \omega_1$, где ω_1 — первый несчетный трансфинит. Пусть S_0 — множество трансфинитов $\leqslant \omega_1$. Пусть топология S и S_0 — обычная топология упорядоченных множеств. Хорошо известно, что S — компактное нормальное T_1-пространство, а S_0 — бикомпактное хаусдорфово пространство. Докажем, что $S_0 = \beta(S)$. Так как очевидно, что S_0 удовлетворяет условиям (1) — (3) для $\beta(S)$, достаточно доказать, что непрерывная функция f на S допускает непрерывное продолжение на S_0. Это легко вытекает из следующей теоремы. Если f — непрерывная на S функция, то существует точка $\xi \in S$ такая, что f постоянна для $x \geqslant \xi$. Достаточно доказать, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\xi(\varepsilon) \in S$ такая, что $| f(x) - f(y) | < \varepsilon$ для $x \in S$, $y \in S$, $x > \xi(\varepsilon)$, $y > \xi(\varepsilon)$. Предположим противное. Тогда существуют в S две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ такие, что $a_n < b_n < a_{n+1}$ и $| f(a_n) - f(b_n) | \geqslant \varepsilon$. Но это невозможно,

[1]) АУ, стр. 58.

потому что тогда f терпела бы разрыв в точке α, где α — первый трансфинит, бо́льший, чем каждое a_n.

Скажем, что $x \in S$ является k-точкой [1]), если существует последовательность $\{x_n\} \subset S \setminus (x)$ такая, что $\lim x_n = x$, т. е. для каждой окрестности U точки x имеем $x_n \in U$, за исключением конечного числа индексов n. П. С. Александров и П. С. Урысон поставили вопрос о том, существует ли бикомпактное хаусдорфово пространство, плотное в себе и не содержащее k-точек [2]). Мы докажем, что пространство $\beta(I) \setminus I$ обладает этим свойством. Предположим, что существует точка $c \in \beta(I) \setminus I$ и последовательность $\{a_n\} \subset (\beta(I) \setminus I) \setminus (c)$, для которых $\lim a_n = c$. Можно предположить, что точки a_n попарно различны. Пусть A_n — множество точек $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ вместе с точкой c. Тогда A_n замкнуто в $\beta(I)$. Будем последовательно строить открытые множества U_n пространства $\beta(I)$ следующим образом. Пусть U_1 — любое открытое множество, такое, что $a_1 \in U_1$ и $\overline{U}_1 \cap A_2 = 0$. Если для некоторого n мы уже построили множество U_n такое, что $\overline{U}_n \cap A_{n+1} = 0$, то за U_{n+1} берем открытое множество, содержащее a_{n+1}, но такое, что $\overline{U}_{n+1} \cap \overline{U}_i = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ и $\overline{U}_{n+1} \cap A_{n+2} = 0$. Легко видеть, что последовательное построение множеств U_n может быть продолжено. Теперь положим $\Phi = I \cap (\bigcup U_{2n-1})$, $\Psi = I \cap (\bigcup U_{2n})$. Тогда $\Phi \cap \Psi = 0$; а множества Φ и Ψ замкнуты в I. Но тогда $\overline{\Phi} \cap \overline{\Psi} = 0$, где замыкание берется в $\beta(I)$. Но, с другой стороны, так как I всюду плотно в $\beta(I)$, U_n — открыто в $\beta(I)$, легко видеть, что $\overline{I \cap U_n} = \overline{U}_n$, так что $a_n \in \overline{I \cap U_n}$ и легко получить, что $c \in \overline{\Phi} \cap \overline{\Psi}$.

III

Мы скажем, что пространство S топологически полно, если существует такое бикомпактное хаусдорфово пространство $B \supset S$, что S является G_δ-множеством в B. Конечно, S тогда вполне регулярно. G_δ-множество в топологически полном пространстве является топологически полным пространством. Замкнутое подмножество топологически полного пространства топологически полно.

Топологическое пространство S топологически полно в том и только в том случае, если оно вполне регулярно и является G_δ-множеством в своем расширении $\beta(S)$. Если S является G_δ-множеством в $\beta(S)$, то, так как $\beta(S)$ — бикомпактное хаусдорфово пространство, S топологически полно. Обратно, предположим, что S топологически полно. Тогда существует хаусдорфово бикомпактное пространство $B \supset S$ и S является G_δ-множеством в B. Пусть B_0 — замыкание S в пространстве B. Тогда B_0 — бикомпактное хаусдорфово пространство, S всюду плотно в B_0 и является G_δ-множеством в B_0. Мы знаем, что существует непрерывное отображение h пространства $\beta(S)$ в пространство B_0 такое, что $h^{-1}(S) = S$. Следовательно, S является G_δ-множеством в $\beta(S)$. *Пусть T—вполне регулярное* [3]) *пространство, S—топологически*

[1]) АУ, стр. 53.

[2]) АУ, стр. 54.

[3]) Я не знаю, является ли это предположение необходимым.

полное пространство, $S \subset T$. *Тогда* S — G_δ*-множество в замыкании пространства* S *в пространстве* T. Пусть S_0— замыкание S в $\beta(T)$. Достаточно доказать, что S является G_δ-множеством в S_0. Так как S_0 — бикомпактное хаусдорфово пространство и S плотно в S_0, существует непрерывное отображение h пространства $\beta(S)$ в S_0 такое, что $h[\beta(S)\setminus S] = S_0 \setminus S$. Так как S топологически полное, существуют такие замкнутые подмножества $F_n \subset \beta(S)$, что $\bigcup F_n = \beta(S)\setminus S$, следовательно, $S_0\setminus S = \bigcup h(F_n)$. Каждое множество F_n бикомпактно, так что каждое множество $h(F_n)$ — бикомпактное подмножество хаусдорфова пространства S_0 и потому замкнуто. Следовательно, S является G_δ-множеством в S_0. *Пусть* T — *топологически полное пространство. Пусть* $S \subset T$. *Тогда* S *топологическиполно в том и только том случае, если является пересечением замкнутого подмножества и* G_δ*-множества в* T. Если $S = F \cap H$, где F замкнуто в T, H — G_δ-множество в T, то F топологически полно, а S — G_δ-множество в F, так что S — топологически полное пространство. Обратно, пусть S топологически полно. Тогда S является G_δ-множеством в замыкании $\overline{S}$ пространства S в T, так что $S = \overline{S} \cap H$, где H—G_δ-множество в T. *Пусть* S — *непустое топологически полное пространство*[1]). *Тогда* $\{G_n\}$ *—последовательность открытых всюду плотных подмножеств* S. *Тогда* $H = \bigcap G_n \neq 0$ *и, более того,* H *всюду плотно в* S. Существует регулярное компактное (на самом деле бикомпактное) пространство $K \supset S$, в котором S является G_δ-множеством. Можно предполагать, что $\overline{S} = K$, где замыкание берется в K. Так как G_n открыто в S, существует открытое в K множество Γ_n такое, что $G_n = S \cap \Gamma_n$. Так как S — G_δ-множество в K, то $S = \bigcap \Delta_n$, где Δ_n — открытое в K множество. Так как S плотно в K, а G_n плотно в S, то G_n плотно в K. Возьмем произвольную точку $a_0 \in S$ и произвольную окрестность V точки a_0 в пространстве S. Мы должны доказать, что $H \cap V \neq 0$. Пусть $V = S \cap U_0$, где U_0 — окрестность точки a_0 в пространстве K. Так как G_1 плотно в K, то существует точка $a_1 \in G_1 \cap U_0 = S \cap \Gamma_1 \cap U_0 \subset \Delta_1 \cap \Gamma_1 \cap U_0$. Следовательно, $\Delta_1 \cap \Gamma_1 \cap U_0$ — окрестность точки a_1 в пространстве K. Так как K регулярно, то существует такая окрестность U_1 точки a_1, что $\overline{U}_1 \subset \Delta_1 \cap \Gamma_1 \cap U_0$. Вообще, пусть для некоторого значения n дана точка $a_n \in G_n$ и ее окрестность U_n (в пространстве K) такая, что $\overline{U}_n \subset \Delta_n \cap \Gamma_n \cap U_{n-1}$. Тогда $a_n \in G_n \subset S$ и $S \cap U_n$ — окрестность точки a_n в пространстве S. Так как G_{n+1} плотно в S, то существует точка $a_{n+1} \in G_{n+1} \cap U_n = S \cap \Gamma_{n+1} \cap U_n \subset \Delta_{n+1} \cap \Gamma_{n+1} \cap U_n$.

Следовательно, $\Delta_{n+1} \cap \Gamma_{n+1} \cap U_n$ — окрестность точки a_{n+1} в регулярном пространстве K и существует такая окрестность U_{n+1} точки a_{n+1} (в пространстве K), что $\overline{U}_{n+1} \subset \Delta_{n+1} \cap \Gamma_{n+1} \cap U_n$. Таким образом, мы построили последовательность точек $\{a_n\}$ и такую последовательность открытых множеств $\{U_n\}$, что $a_n \in G_n \cap U_n$, $\overline{U}_{n+1} \subset \Delta_{n+1} \cap \Gamma_{n+1} \cap U_n$. Так как $a_n \in U_n$, то $U_n \neq 0$. Из компактности пространства K следует,

---

[1]) Из доказательства видно, что это предположение можно ослабить, требуя лишь, чтобы S было G_δ-множеством в некотором регулярном компактном пространстве.

что существует точка $b \in \overline{U}_n$, но так как $\overline{U}_{n+1} \subset U_n$, то $b \in \bigcap U_n$. Так как $\overline{U}_{n+1} \subset \Delta_{n+1} \cap \Gamma_{n+1} \cap U_n$, то $b \in (\bigcap \Delta_n) \cap (\bigcap \Gamma_n) = S \cap (\bigcap \Gamma_n) = \bigcap G_n = H$. Кроме того, $b \in U_0$, так что в $b \in H \cap U_0 = H \cap V$. Пусть S — метрическое пространство. Последовательностью Коши в пространстве S называется такая последовательность точек $\{x_n\} \subset S$, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует число p такое, что расстояние между точками x_m и x_n меньше ε, как только $m > p$ и $n > p$. Метрическое пространство S называется метрическим полным, если для каждой последовательности Коши $\{x_n\} \subset S$ существует точка $x \in S$ такая, что $\lim x_n = x$. Топологическое пространство называется вполне метризуемым, если оно гомеоморфно метрически полному пространству.

Сейчас мы докажем нашу основную теорему: *Метризуемое пространство топологически полно тогда и только тогда, когда оно вполне метризуемо.*

Пусть S — метрически полное пространство, ρ — метрика на нем. Мы можем предположить, что $\rho(x, y) \leqslant 1$ для каждой пары точек, так как в противном случае мы можем заменить метрику ρ метрикой ρ_1, полагая $\rho(x, y) = \rho_1(x, y)$, если $\rho(x, y) \leqslant 1$ и $\rho_1(x, y) = 1$, если $\rho(x, y) > 1$. Так как S — метрическое пространство, то оно вполне регулярно и существует пространство $\beta(S)$. Для каждой точки $a \in S$ $\rho(a, x)$ — ограниченная непрерывная на S функция, так что существует непрерывное продолжение $\varphi_a(x)$ на $\beta(S)$ функции $\rho(a, x)$. Если $a \in S$, $b \in S$, то множество $T(a, b)$ всех точек $x \in \beta(S)$, для которых $\varphi_a(x) + \varphi_b(x) \geqslant \rho(a, b)$, замкнуто в $\beta(S)$ и содержит S. Так как S всюду плотно в $\beta(S)$, то $T(a, b) = \beta(S)$, т. е. $\varphi_a(x) + \varphi_b(x) \geqslant \rho(a, b)$ для всех точек $x \in \beta(S)$.

Для $a \in S$ и $n = 1, 2, 3, \ldots$ пусть $\Gamma(a, n)$ множество всех точек $x \in \beta(S)$, для которых $\varphi_a(x) < n^{-1}$. Так как функция $\varphi_a(x)$ непрерывна, $\Gamma(a, n)$ — открытое подмножество пространства $\beta(S)$, то $G_n = \bigcup_{a \in S} \Gamma(a, n)$ — открытое множество. Мы докажем, что $S = \bigcap G_n$, так что S является G_δ-множеством в $\beta(S)$ и, таким образом, топологически полно. Очевидно, что $\bigcap G_n \supset S$. Пусть $b \in \bigcap G_n$. Мы должны доказать, что $b \in S$. Из определения множества G_n следует, что существует точка $a_n \in S$, для которой $\varphi_{a_n}(b) < n^{-1}$. Поэтому $\rho(a_n, a_m) \leqslant \varphi_{a_n}(b) + \varphi_{a_m}(b) < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, так что $\{a_n\}$ — последовательность Коши в S. Так как S метрически полно, то существует такая точка $a \in S$, что $a = \lim a_n$. Достаточно доказать, что $a = b$. Предположим, что $a \neq b$. Так как $\beta(S)$ — хаусдорфово пространство, существуют открытые в $\beta(S)$ множества U и V такие, что $a \in U$, $b \in V$ и $U \cap V = 0$. Так как $U \cap S$ — окрестность точки a в метрическом пространстве S, то существует целое $n > 0$ такое, что U содержит все точки $x \in S$, для которых $\rho(a, x) < 2 \cdot n^{-1}$. Это можно записать в форме $S \cap W \subset U$, где W — множество всех точек $x \in \beta(S)$, для которых $\varphi_a(x) < 2 \cdot n^{-1}$. Так как φ непрерывна, то W — открытое подмножество пространства $\beta(S)$. Из того, что S плотно в $\beta(S)$, U, V и W открыты в $\beta(S)$, следует, что $W \subset \overline{W} = \overline{S \cap W} \subset \overline{U} \subset \beta(S) \setminus V$, или $W \cap V = 0$. Следовательно, для каждой точки $x \in S$ имеем $\rho(a, x) \leqslant \rho(a, a_n) + \rho(a_n x) \leqslant n^{-1} + \rho(a_n x)$ и мы легко получаем, что для каждой точки $x \in \beta(S)$, $\varphi_a(x) \leqslant \varphi_{a_n}(x) + n^{-1}$, в частности, $\varphi_a(b) \leqslant \varphi_{a_n} + n^{-1} < n^{-1} + n^{-1} = 2n^{-1}$, что противоречит нашему предположению.

Теперь предположим, что метрическое пространство S топологически полно. Пусть ρ — метрика на S; опять предположим, что $\rho(x, y) \leqslant 1$ для каждой пары точек. Так как S топологически полно, то существует последовательность $\{F_n\}$ замкнутых подмножеств в пространстве $\beta(S)$ такая, что $\beta(S) \setminus S = \bigcup F_n$. Если $S = \beta(S)$, то S — метрическое бикомпактное пространство, а тогда хорошо известно, что S метрически полно. Предположим, что $S \neq \beta(S)$. Тогда мы можем предположить, что для каждого n множество $F_n \neq 0$. Для каждой точки $a \in S$ $\rho(a, x)$ — ограниченная непрерывная функция на S, допускающая непрерывное продолжение φ_a на $\beta(S)$. Если точка $b \in \beta(S)$ отлична от точки a, то существуют открытые подмножества U и V пространства $\beta(S)$ такие, что $a \in U$, $b \in V$, $U \cap V = 0$. Так как $S \cap U$ — окрестность точки a в метрическом пространстве S, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что U содержит точки $x \in S$, для которых $\rho(a, x) < \varepsilon$. Из того, что S плотно в $\beta(S)$, следует, что $\overline{U}$ содержит все точки $x \in \beta(S)$, для которых $\varphi_a(x) < \varepsilon$. Так как $U \subset \beta(S) \setminus V = \overline{\beta(S) \setminus V}$, получаем, что $\overline{U} \subset \beta(S) \setminus V$, так что $b \in \beta(S) \setminus \overline{U}$ и, следовательно, $\varphi_a(b) \geqslant \varepsilon$. Итак, мы доказали, что $\varphi_a(b) > 0$ для всех $b \in \beta(S) \setminus a$. Из того, что $F_n \neq 0$ и замкнуто в $\beta(S)$, следует, что функция $\varphi_a(x)$, рассматриваемая на F_n, достигает максимального значения $\sigma(a, F_a)$. Так как $a \in S$, $F_n \cap S = 0$, то $\sigma(a, F_n) > 0$.

Если $a \in S$, $b \in S$, то $\rho(a, x) \leqslant \rho(a, b) + \rho(b, x)$ для всех $x \in S$, следовательно, $\varphi_a(x) \leqslant \rho(a, b) + \varphi_b(x)$ для всех $x \in \beta(S)$. Поэтому $\sigma(a, F_n) \leqslant \rho(a, b) + \sigma(b, F_n)$ и аналогично $\sigma(b, F_n) \leqslant \rho(a, b) + \sigma(a, F_n)$. Следовательно, $|\sigma(a, F_n) - \sigma(b, F_n)| \leqslant \rho(a, b)$. Теперь положим для $x \in S$, $y \in S$

$$f_n(x, y) = \rho(x, y) + \sigma(x, F_n) + \sigma(y, F_n),$$

$$g_n(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{f_n(x, y)},$$

$$\rho_0(x, y) = \rho(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} g_n(x, y).$$

Так как $\rho(x, y) \geqslant 0$, $\sigma(x, F_n) > 0$, $\sigma(y, F_n) > 0$, то $f_n(x, y) > 0$. Следовательно, $g_n(x, y)$ определено и $0 \leqslant g_n(x, y) \leqslant 1$, так что ряд $\sum -2^{-n} g_n(x, y)$ сходится. Очевидно, что $\rho_0(x, y) = \rho_0(y, x)$ и $\rho_0(x, x) = 0$, в то время как $\rho_0(x, y) > 0$, если $x \neq y$. Теперь докажем, что $\rho_0(x, z) \leqslant \rho_0(x, y) + \rho_0(y, z)$ для $x \in S$, $y \in S$, $z \in S$. Так как $\frac{t_1}{c+t_1} \leqslant \frac{t_2}{c+t_2}$ для $c > 0$, $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$ и так как $0 \leqslant \rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$, то мы получаем, что

$$g_n(x, z) \leqslant \frac{\rho(x, y) + \rho(y, z)}{\rho(x, y) + \rho(y, z) + \sigma(x, F_n) + \sigma(y, F_n)}.$$

Поскольку

$$\sigma(y, F_n) \leqslant \sigma(x, F_n) + \rho(x, y),$$
$$\sigma(y, F_n) \leqslant \sigma(z, F_n) + \rho(y, z),$$

то

$$\rho(x, y)+\rho(y, z)+\sigma(x, F_n)+\sigma(z, F_n)\geqslant\begin{cases}\rho(x, y)+\sigma(x, F_n)+\sigma(y, F_n),\\ \rho(y, z)+\sigma(y, F_n)+\sigma(z, F_n),\end{cases}$$

следовательно,

$$g_n(x, y)+g_n(y, z)\geqslant g_n(x, z) \quad \text{и} \quad \rho_0(x, z)\leqslant\rho_0(x, y)+\rho_0(y, z).$$

Итак, ρ_0 — метрика на множестве S. Покажем теперь, что ρ_0 и ρ — эквивалентные метрики на S, т. е. что для $x\in S$ и $\{x_n\}\subset S$, $\lim\rho(x_n, x)=0$ тогда и только тогда, когда $\lim\rho_0(x_n, x)=0$. Так как $0\leqslant\rho(x_n, x)\leqslant\leqslant\rho_0(x_n, x)$, то $\lim\rho(x_n, x)=0$, если $\lim\rho_0(x_n, x)=0$. Обратно, предположим, что $\lim\rho(x_n, x)=0$. Выберем $\varepsilon>0$ и целое k так, чтобы $2^{-k+1}<<\varepsilon$. Тогда для всех n

$$\sum_{i=k+1}^{\infty}2^{-i}g_i(x_n, x)\leqslant\sum_{i=k+1}^{\infty}2^{-i}<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\rho_0(x_n, x)<\rho(x_n, x)+\sum_{i=1}^{k}2^{-i}g_i(x_n, x)+\frac{1}{2}\varepsilon\leqslant$$

$$\leqslant\rho(x_n, x)+\sum_{i=1}^{k}2^{-i}\frac{\rho(x_n, x)}{\rho(x_n, x)+\sigma(x, F_i)}+\frac{1}{2}\varepsilon.$$

Так как $\lim\rho(x_n, x)=0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}2^{-i}\frac{\rho(x_n, x)}{\rho(x_n, x)+\sigma(x, F_i)}=0,$$

так что существует такое целое p, что для $n>p$ мы имеем

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{k}2^{-i}\frac{\rho(x_n, x)}{\rho(x_n, x)+\sigma(x, F_i)}<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

Поэтому $\rho_0(x_n, x)<\rho(x_n, x)+\varepsilon$ для каждого $n>p$. Так как $\lim\rho(x_n, x)==0$, а $\varepsilon>0$ — произвольное, то $\lim\rho_0(x_n, x)=0$. Итак, мы доказали, что ρ и ρ_0 — эквивалентные метрики, т. е. что метрические пространства $S=(S, \rho)$ и (S, ρ_0) гомеоморфны.

Остается доказать, что пространство (S, ρ_0) метрически полно. Предположим, что $\{x_n\}$ — последовательность Коши в пространстве (S, ρ_0). Мы должны доказать, что существует точка $x\in S$ такая, что $\lim\rho_0(x_n, x)==0$ или, что то же самое, $\lim\rho(x_n, x)=0$. Так как $\beta(S)$ — бикомпакт, то существует точка $x\in\beta(S)$, каждая окрестность U которой (в пространстве $\beta(S)$) содержит бесконечное число точек последовательности $\{x_n\}$. Достаточно доказать, что $x\in S$, а тогда, так как $\{x_n\}$ — последовательность Коши, $\lim\rho(x_n, x)=0$. Предположим, что $x\in\beta(S)\setminus S=\bigcup F_n$. Тогда $x\in F_n$ для некоторого $k>0$.

Докажем, что $\sigma(x_n, F_k)\to 0$ при $n\to\infty$. Выберем $\varepsilon>0$. Тогда существует целое $p>0$ такое, что $\rho(x_n, x_m)\leqslant\rho_0(x_n, x_m)<\varepsilon$ для $n>p$, $m>p$. Число $\sigma(x_n, F_k)$ — минимальное значение функции $\varphi_{x_n}(y)$ на множестве F_k.

Так как $x \in F_k$, то $0 < \sigma(x_n, F_k) \leqslant \varphi_{x_n}(x)$. Существует окрестность Ω_n точки x такая, что $| \varphi_{x_n}(z) - \varphi_{x_n}(x) |$ ε для всех точек $z \in \Omega_n$. Существует целое $m_n > p$ такое, что $x_{m_n} \in \Omega_n$ и $| \varphi_{x_n}(x_{m_n}) - \varphi_{x_n}(x) | < \varepsilon$, т. е. $| \rho(x_n, x_{m_n}) - \varphi_{x_n}(x) | < \varepsilon$. Так как $n > p$, $m_n > p$, то $\rho(x_n, x_{m_n}) < \varepsilon$, следовательно, $\varphi_{x_n}(x) < 2\varepsilon$. Поэтому $0 < \sigma(x_n, F_k) < 2\varepsilon$ для $n > p$, так что $\sigma(x_n, F_k) \to 0$ при $n \to \infty$. Так как $\{x_n\}$ — последовательность Коши в (S, ρ_0), то существует целое p такое, что $\rho_0(x_n, x_p) < 2^{-k-2}$ для всех $n > p$. Но

$$\rho_0(x_n, x_p) \geqslant 2^{-k} g_k(x_n, x_p) = 2^{-k} \frac{\rho(x_n, x_p)}{\rho(x_n, x_p) + \sigma(x_n, F_k) + \sigma(x_p, F_k)}.$$

Так как $\sigma(x_p, F_k) \leqslant \rho(x_n, x_p) + \sigma(x_n, F_k)$, то получаем, что

$$\rho_0(x_n, x_p) \geqslant 2^{-k-1} \frac{\rho(x_n, x_p)}{\rho(x_n, x_p) + \sigma(x_n, F_k)} \geqslant 0,$$

так что для каждого $n > p$ имеем

$$0 \leqslant \frac{\rho(x_n, x_p)}{\rho(x_n, x_p) + \sigma(x_n, F_k)} < \frac{1}{2},$$

следовательно, $\rho(x_n, x_p) < \sigma(x_n, F_k)$. Но $\sigma(x_n, F_k) \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $\rho(x_n, x_p) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, существует такое целое $q > 0$, что для всех $n > q$ имеем $\rho(x_n, x_p) < \frac{1}{2} \varphi_{x_p}(x)$. [Так как $x_p \in S$, $x \in \beta(S) \setminus S$, то $\varphi_{x_p}(x) > 0$.] Существует окрестность U точки x в пространстве $\beta(S)$ такая, что $\varphi_{x_p}(z) > \frac{1}{2} \varphi_{x_p}(x)$ для каждой точки $z \in U$. В то же время существует такое целое $n > q$, что $x_n \in U$ и $\rho(x_n, x_p) = \varphi_{x_p}(x_n) > \frac{1}{2} \varphi_{x_p}(x)$. Полученное противоречие доказывает теорему.

IV

Пусть S — вполне регулярное пространство, $\lambda(S)$ — множество всех точек $x \in \beta(S)$, обладающих окрестностями U (в пространстве $\beta(S)$) для которых $S \cap \overline{U}$ — нормальное пространство [$\overline{U}$ — замыкание множества U в $\beta(S)$]. Легко видеть, что $\lambda(S)$ — открытое подмножество пространства $\beta(S)$.

Пусть F_1 и F_2 — два замкнутых непересекающихся подмножества вполне регулярного пространства S. Тогда $\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \setminus \lambda(S) = 0$, где замыкание берется в пространстве $\beta(S)$. Предположим, что существует точка $a \in \overline{F}_1 \cap \cap \overline{F}_2 \cap \lambda(S)$. Так как $a \in \lambda(S)$, то существует окрестность U точки a такая, что $S \cap \overline{U}$ — нормальное пространство. Существует окрестность V точки a такая, что $\overline{V} \subset U$. Пусть $\Phi_1 = \overline{V} \cap F_1$, $\Phi_2 = (\overline{U} \cap F_2) \cup (S \cap (\overline{U} \setminus U))$. Тогда Φ_1 и Φ_2 — замкнутые подмножества в $S \cap \overline{U}$ и $\Phi_1 \cap \Phi_2 = 0$. Кроме того, легко видеть, что $a \in \overline{\Phi}_1 \cap \overline{\Phi}_2$. Так как $S \cap \overline{U}$ — нормальное пространство, то существует ограниченная непрерывная функция на $S \cap \overline{U}$ такая, что $f(x) = 0$ для всех $x \in \Phi_1$ и $f(x) = 1$ для всех $x \in \Phi_2$. Для всех $x \in S$ положим (*i*) $g(x) = f(x)$, если $x \in S \cap U$, (*ii*) $g(x) = 1$, если $x \in S \setminus U$.

Тогда легко видеть, что g — непрерывное продолжение функции f на пространство S. Пусть φ — непрерывное продолжение функции g на пространство $\beta(S)$. Мы имеем $\varphi(x)=f(x)=0$ для всех $x\in\Phi_1$ и $\varphi(x)=f(x)=1$ для всех $x\in\Phi_2$. Так как φ — непрерывная функция, то $\varphi(x)=0$ для всех $x\in\overline{\Phi}_1$ и $\varphi(x)=1$ для всех $x\in\overline{\Phi}_2$, т. е. $\overline{\Phi}_1\cap\overline{\Phi}_2=0$, что противоречит исходному предположению.

Топологическое пространство S назовем локально нормальным, если каждая точка $x\in S$ обладает такой окрестностью U, что $\overline{U}$ — нормальное пространство. Каждое нормальное пространство локально нормально, а так же открытое подмножество локально нормального пространства локально нормально.

Локально нормальное T_1 — пространство вполне регулярно. Пусть a — некоторая точка локально нормального пространства S, а V — окрестность точки a. Существует окрестность U точки a, для которой $\overline{U}$ — нормальное пространство. Так как $\overline{U\cap V}$ замкнуто в $\overline{U}$, то $\overline{U\cap V}$ — нормальное пространство. Но (a) и $\overline{U\cap V}\setminus U\cap V$ — замкнутые непересекающиеся подмножества пространства $\overline{U\cap V}$ и существует непрерывная функция f на $\overline{U\cap V}$ такая, что $f(a)=0$ и $f(x)=1$ для всех $x\in\overline{U\cap V}\setminus U\cap V$. Для $x\in S$ положим (i) $g(x)=f(x)$, если $x\in U\cap V$, (ii) $g(x)=1$, если $x\in S\setminus(U\cap V)$. Легко видеть, что g —непрерывная функция на S такая, что $g(a)=0$ и $g(x)=1$ для всех $x\in S\setminus V$. Поэтому S вполне регулярно.

Вполне регулярное пространство не обязано быть локально нормальным. Пусть ω — первое бесконечное порядковое число, ω_1 — первое несчетное порядковое число, пусть S_1 — пространство всех порядковых чисел $\leqslant\omega$, S_2 — пространство всех порядковых чисел $\leqslant\omega_1\cdot\omega$. Топология на S_1 и S_2 определяется обычным способом с помощью интервалов. Пусть S_{12} — декартово произведение пространств S_1 и S_2. Пусть T — множество всех точек $(x, y)\in S_{12}$, для которых $x\in\omega$, а $y=\omega_1\cdot n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Пусть $S=S_{12}\setminus T$. Тогда это вполне регулярное не локально нормальное пространство.

Легко видеть, что вполне регулярное пространство S локально нормально тогда и только тогда, когда $S\subset\lambda(S)$. Я не знаю, существует ли вполне регулярное пространство $S\neq 0$ такое, что $S\cap\lambda(S)=0$.

T_1-пространство S локально нормально тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно открытому подмножеству нормального T_1- пространства [1]). Мы знаем, что открытое подмножество нормального T_1-пространства — локально нормальное T_1-пространство. Обратно, пусть S — локально нормальное T_1-пространство. Пусть S_0 — пространство, состоящее из точек пространства S и некоторой новой точки ω, топология на котором определяется следующим образом. Если $\omega\in A\subset S_0$, то A замкнуто в S_0 тогда и только тогда, когда $A\setminus(\omega)$ замкнуто в S. Если $A\subset S_0\setminus(\omega)=S$, то A замкнуто в S_0 тогда и только тогда, когда (i) A замкнуто в S и (ii) $\overline{A}\subset\lambda(S)$, где замыкание берется в $\beta(S)$. Легко видеть, что S_0 — T_1-пространство и

[1]) Я не знаю, необходимо ли в этой теореме ограничиваться T_1-пространством.

S — открытое подмножество S_0. Остается показать, что пространство S_0 нормально. Пусть F_1 и F_2—два замкнутых непересекающихся подмножества пространства S_0. Можно предполагать, что $F_1 \subset S$. Так как F_1 замкнуто в S_0, то замыкание $\overline{F}_1$ множества F_1 в пространстве $\beta(S)$ лежит в $\lambda(S)$. Пусть $F_3 = F_2 \setminus (\omega)$. Тогда F_1 и F_3 — два замкнутых подмножества пространства S и $F_1 \cap F_3 = 0$. Но тогда $\overline{F}_1 \cap \overline{F}_3 \cap \lambda(S) = 0$ [замыкания опять берутся в $\beta(S)$]. А тогда $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_3 \cup (\beta(S) \setminus \lambda(S))$ — два замкнутых непересекающихся подмножества пространства $\beta(S)$ и существует непрерывная функция φ на $\beta(S)$ такая, что $\varphi(x) = 0$ для всех $x \in \overline{F}_1$ и $\varphi(x) = 1$ для всех $x \in \overline{F}_3 \cup \cup (\beta(S) \setminus \lambda(S))$. Определим функцию f на S_0 следующим образом. Если $x \in S$, то $f(x) = \varphi(x)$, кроме того, $f(\omega) = 1$. Тогда легко видеть, что f — непрерывная функция на S_0 и $f(x) = 0$ для всех $x \in F_1$ и $f(x) = 1$ для всех $x \in F_2$.

Я закончу еще двумя нерешенными вопросами. Топологическое пространство S называется наследственно нормальным, если каждое его подмножество нормально. Топологическое пространство S назовем локально наследственно нормальным, если каждая точка $x \in S$ обладает такой окрестностью U, что $\overline{U}$ — наследственно нормальное пространство. Назовем пространство S наследственно локально нормальным, если каждое его подмножество локально нормально. Легко видеть, что локально наследственно нормальное пространство наследственно локально нормально. Я не знаю, верно ли обратное. Любое открытое подмножество наследственно нормального пространства наследственно нормально. Я не знаю, всякое ли локально наследственно нормальное пространство гомеоморфно открытому подмножеству наследственно нормального пространства.