Čech, Eduard: Scholarly works

Eduard Čech

Sur le type différentiel anallagmatique d'une courbe plane ou gauche

Colloq. Math. 6 (1958), 141-143

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501097

Terms of use:

© Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, 1958

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. VI DÉDIÉ À M. CASIMIR KURATOWSKI 1958

SUR LE TYPE DIFFÉRENTIEL ANALLAGMATIQUE D'UNE COURBE PLANE OU GAUCHE

PAR

E. ČECH (PRAGUE)

Une courbe C de l'espace euclidien E_n sera appelée *ponctuellement régulière* si on peut exprimer les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'un point de C en fonctions n fois continûment différentiables d'un paramètre l tel que le déterminant $|d^i x_j/dl^j|$ soit partout $\neq 0$. Une telle courbe C possède en chaque point T_0 une tangente T_1, un plan osculateur $T_2, \ldots$, un hyperplan osculateur T_{n-1}. Chaque transformée projective de C est aussi ponctuellement régulière; s'il en est de même aussi pour les transformées dualistiques de C, nous appellerons C *projectivement régulière*. C possède alors des paramètres l projectivement réguliers qui ont la propriété suivante: pour chaque i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, les coordonnées non-homogènes de T_i sont des fonctions continûment différentiables (au moins une fois) et pour chaque l, la dérivée d'une au moins de ces fonctions est différente de zéro. Pour chaque paramètre l projectivement régulier et pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$ posons, $r_i(l) = \infty$ si les coordonnées non homogènes de $T_i(l)$ sont infiniment différentiables, et $r_i(l) = r (= 1, 2, \ldots)$ si ces coordonnées admettent des dérivées continues d'ordre r, mais non d'ordre $r+1$; soit $r_i(C)$ la valeur maximum de $r_i(l)$ si l parcourt tous les paramètres projectivement réguliers de C.

On voit sans peine que, si $r_i(C) = \infty$ pour une valeur de i, il en est de même pour chaque i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ et que, si $r_i(C) < \infty$, on a $|r_i(C) - r_{i+1}(C)| \leqslant 1$ pour chaque i $(0 \leqslant i \leqslant n-2)$. Mais le problème consistant à déterminer, pour tout n, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une $C \subset E_n$ projectivement régulière telle que les nombres $r_i(C)$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ aient des valeurs données est très difficile. Pour $n = 2, 3, 4$, on connaît ces conditions (voir mes Mémoires [1], [2]) que je vais rappeler ici pour $n = 2$ et pour $n = 3$.

Posons $r = \min\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} r_i(C)$ et supposons $r < \infty$. Pour $n = 2$, on a $r_0(C) = r_1(C) = r \geqslant 2$. Si $r_0(l) = r$, on a $r_1(l) = r-1$; si $r_1(l) = r$, on a $r_0(l) = r-1$.

Pour $n = 3$, on a $2 \leqslant r \leqslant \infty$. Pour $r < \infty$, quatre cas sont possibles:

I. On a $r_0(C) = r_1(C) = r_2(C) = r$. Si $r_0(l) = r$, on a $r_1(l) = r_2(l) = r-1$. Si $r_1(l) = r$, on a $r_0(l) = r_2(l) = r-1$. Si $r_2(l) = r$, on a $r_0(l) = r_1(l) = r-1$.

II. On a $r_0(C) = r_1(C) = r_2(C) = r$. Si $r_0(l) = r$, on a $r_1(l) = r-1$, $r_2(l) = r$. Si $r_1(l) = r$, on a $r_0(l) = r_2(l) = r-1$. Si $r_2(l) = r$, on a $r_0(l) = r$, $r_1(l) = r-1$.

III. On a $r_0(C) = r+1$, $r_1(C) = r_2(C) = r$. Si $r_0(l) = r+1$, on a $r_1(l) = r$, $r_2(l) = r-1$. Si $r_1(l) = r$, on a $r_0(l) \geqslant r$, $r_2(l) = r-1$. Si $r_2(l) = r$ on a $r_0(l) = r_1(l) = r-1$.

IV. On a $r_0(C) = r_1(C) = r$, $r_2(C) = r+1$. Si $r_0(l) = r$, on a $r_1(l) = r_2(l) = r-1$. Si $r_1(l) = r$, on a $r_0(l) = r-1$, $r_2(l) \geqslant r$. Si $r_2(l) = r+1$, on a $r_0(l) = r-1$, $r_1(l) = r$.

Aux notions précédentes de nature projective correspondent des notions analogues appartenant à la géométrie anallagmatique (géométrie du groupe de Möbius). Une courbe $C \subset E_n$ sera dite *anallagmatiquement régulière* si C est la projection stéréographique d'une courbe $\Gamma \subset E_{n+1}$ projectivement régulière, située sur une hypersphère de E_{n+1}. Pour simplifier le langage, supposons que C soit non seulement anallagmatiquement, mais aussi projectivement régulière. Une telle $C \subset E_n$ possède en chaque point K_0 un cercle osculateur $K_1, \ldots$, une hypersphère osculatrice K_{n-1}. C possède des *paramètres anallagmatiquement réguliers* qui ont la propriété suivante: pour chaque i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, les coordonnées non-homogènes de $K_i(l)$ sont des fonctions continûment différentiables (au moins une fois) et pour chaque l la dérivée d'une au moins de ces fonctions est $\neq 0$. Pour chaque paramètre l anallagmatiquement régulier et pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$ posons $s_i(l) = \infty$ si les coordonnées non homogènes de $K_i(l)$ sont infiniment différentiables, et $s_i(l) = s$ $(= 1, 2, 3, \ldots)$ si elles ont des dérivées continues d'ordre s, mais non d'ordre $s+1$; soit $s_i(C)$ la valeur maximum de $s_i(l)$ si l parcourt tous les paramètres anallagmatiquement réguliers de C. On a donc $s_0(C) = r_0(C)$. Si $s_i(C) = \infty$ pour une valeur de C, on a $s_i(C) = \infty$ pour chaque C $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$. Si $s_i(C) < \infty$, on a $|s_0(C) - s_1(C)| \leqslant 2$ et $|s_i(C) - s_{i+1}(C)| \leqslant 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n-2)$.

Pour $n = 2$ et pour $n = 3$, je vais indiquer les relations nécessaires et suffisantes entre les nombres $s_i(C)$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$. Les démonstrations seront publiées ailleurs. Posons $s = \min\limits_{0 \leqslant i \leqslant n-1} s_i(C)$ et admettons $s < \infty$.

Pour $n = 2$, on a $s_0(C) = s+1$, $s_1(C) = s \geqslant 2$. Si $s_0(l) = s+1$, on a $s_1(l) = s-1$. Si $s_1(l) = s$ on a $s_0(l) = s-1$.

Pour $n = 3$, on a $2 \leqslant s \leqslant \infty$. Pour chaque $s < \infty$, quatre cas sont possibles:

I. $s_0(C) = s+2$, $s_1(C) = s_2(C) = s$. Si $s_0(l) = s+2$, on a $s_1(l) = s$, $s_2(l) = s-1$. Si $s_1(l) = s$, on a $s_0(l) \geqslant s$, $s_2(l) = s-1$. Si $s_2(l) = s$, on a $s_0(l) = s_1(l) = s-1$.

II. $s_0(C) = s+1$, $s_1(C) = s_2(C) = s$. Si $s_0(l) = s+1$, on a $s_1(l) = s_2(l) = s-1$. Si $s_1(l) = s$, on a $s_0(l) = s_2(l) = s-1$. Si $s_2(l = s$, on a $s_0(l) = s_1(l) = s-1$.

III. $s_0(l) = s+1$, $s_1(l) = s_2(l) = s$. Si $s_0(l) = s+1$, on a $s_1(l) = s-1$, $s_2(l) = s$. Si $s_1(l) = s$, on a $s_0(l) = s_2(l) = s-1$. Si $s_2(l) = s$, on a $s_0(l) \geqslant s$, $s_1(l) = s-1$.

IV. $s_0(l) = s_2(l) = s+1, s_1(l) = s$. Si $s_0(l) = s+1$, on a $s_1(l) = s_2(l) = s-1$. Si $s_1(l) = s$, on a $s_0(l) = s-1$, $s_2(l) \geqslant s$. Si $s_2(l) = s+1$, on a $s_0(l) = s-1$, $s_1(l) = s$.

TRAVAUX CITÉS

[1] E. Čech, *Détermination du type différentiel d'une courbe à deux, trois ou quatre dimensions*, Czechoslovak Mathematical Journal 7 (82) (1957), nº 4, p. 599-631.

[2] — *Classe différentielle des courbes. Sections et projections*, Revue de Mathématiques pures et appliquées 2 (1957), p. 151-159.

Reçu par la Rédaction le 30. 11. 1957