Eduard Čech

Zur projektiven Differentialgeometrie

Deutsch. Akad. Wiss. Berlin. Schr. Forschungsinst. Math. 1 (1957), 138-142

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501092

Zur projektiven Differentialgeometrie*)

Von Eduard ČECH, Prag

1. In der *lokalen* Differentialgeometrie, auf welche dieser Vortrag sich beschränkt, untersucht man (für $n = 1, 2, 3, \ldots$) einen Raum X_n, dessen Punkte

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

durch n reelle oder komplexe Zahlen (die *Koordinaten* von x) darstellbar sind. Dabei werden nicht *alle* Punkte in Erwägung gezogen, sondern nur eine gewisse *Umgebung* eines Punktes, wobei die Umgebung während der Betrachtungen in der Regel wiederholt verkleinert wird, um einerseits Singularitäten zu vermeiden und andererseits lokale Existenzsätze aus der Theorie der Differentialgleichungen anwenden zu können. Das Bezugssystem der Koordinaten ist nicht von vornherein gegeben, sondern man setzt voraus, daß es erlaubt sei, statt der x_i neue Koordinaten y_i mittels eineindeutiger Transformationen

$$y_i = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2}$$

einzuführen, wobei

$$\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right| \neq 0$$

vorausgesetzt wird. In diesem Vortrag werden wir alle Funktionen als regulär analytisch annehmen und Realitätsfragen völlig beiseite lassen. Die bei solchen Transformationen invarianten lokalen Eigenschaften bezeichnen wir als X_n-*invariant.* (Gewöhnlich spricht man von *topologischer* Differentialgeometrie, obzwar unsere Transformationen (2) nur sehr spezielle topologische Transformationen sind.)

2. Für $1 \leq r \leq n$ bezeichne V_r (evtl. V'_r usw.) eine in X_n eingebettete r-dimensionale *Mannigfaltigkeit*, die für sich betrachtet ein Raum desselben Typus wie X_n (mit r anstatt n) ist und deren Punkte $u = (u_1, \ldots, u_r)$ mit gewissen Punkten (1) mit Hilfe von Gleichungen der Form

$$x_i = f_i(u_1, \ldots, u_r) \tag{3}$$

identifiziert werden, wobei der Rang der Matrix

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_\alpha}\right)$$

gleich r ist. Für $n = 3$ hat man nur *Kurven* V_1 und *Flächen* V_2, denn V_3 ist ja mit X_3 lokal identisch.

3. Man sagt, X_n sei ein *KLEINscher Raum*, falls in X_n eine LIEsche Transformationsgruppe G (in der lokalen Differentialgeometrie vielmehr ein Gruppenkeim) vorgegeben ist und nur bezüglich G invariante Eigenschaften studiert werden. (Es kommt auf dasselbe hinaus, nur zu G gehörige Transformationen zuzulassen.) Der Raum X_n heiße [1] E_n, [2] A_n, [3] P_n, falls G [1] die euklidische

*) Vortrag der Vormittagssitzung am Dienstag, dem 12. 10. 1954.

Bewegungsgruppe, [2] die affine Gruppe, [3] die projektive Gruppe ist. Die klassische Differentialgeometrie studiert E_3-invariante Eigenschaften, aber gerade unter den einfachsten und wichtigsten Begriffen dieser Geometrie gibt es solche, die sogar P_3-invariant sind. Hierher gehören z. B. der Begriff der Tangente und Schmiegebene einer $V_1 \subset E_3$, der Begriff der Tangentenebene einer $V_2 \subset E_3$ usw. Von Begriffen, deren P_3-Invarianz leicht beweisbar, aber nicht mehr trivial ist, seien etwa genannt: [1] das Verhältnis der Krümmungen im Punkte a zweier $V_1 \subset E_3$, die in a dieselbe Tangente und dieselbe Schmiegebene haben; [2] das Verhältnis der Gaussschen Krümmungsmaße im Punkte a zweier $V_2 \subset E_3$, die in a dieselbe Tangentenebene haben; [3] das Verhältnis der Torsionen im Punkte a zweier $V_1 \subset E_3$, die in a dieselbe Schmiegebene haben.

4. Die elementare Differentialgeometrie einer $V_2 \subset E_3$ beginnt etwa mit den beiden Sätzen von Meusnier und Euler. Um in der P_3-Geometrie analog zu verfahren, sollte man also die „Projektivkrümmungen" ebener Schnitte im Punkte $a \in V_2$ mit P_3-Invarianten der V_2 in Beziehung setzen. Man sieht aber sofort ein, daß so etwas nicht so leicht ausführbar ist. Die ebene projektive Gruppe hat nämlich 8 Parameter; daraus ergibt sich mühelos, daß bei einer Gleichung $y = f(x)$ 6 sukzessive Differentiationen nur ein P_2-invariantes Bezugssystem liefern und erst die 7-te Differentiation die „Projektivkrümmung" ergibt. Andererseits rechnet man leicht nach, daß, wenn man die Gleichung $z = f(x, y)$ bis zur 7-ten Ordnung differenziert, nicht weniger als 23 unabhängige P_3-invariante Ausdrücke herauskommen. Die Projektivkrümmungen der ebenen Schnitte einer $V_2 \subset P_3$ durch diese 23 Invarianten auszudrücken ist zwar möglich, aber kompliziert und nutzlos. Um zu wirklich interessanten Ergebnissen in der projektiven Differentialgeometrie zu gelangen, muß man ganz anders verfahren.

5. Die projektive Differentialgeometrie entwickelte sich lange Zeit in zwei verschiedenen Richtungen, von denen die eine als Ergebnis langer Rechnungen zu Resultaten führte, deren geometrische Bedeutung manchmal nur sehr ungenügend erfaßt wurde, die andere dagegen in viele zersplitterte Einzeluntersuchungen zerfiel. Nur allmählich entwickelten sich wirklich allgemeine und sowohl analytisch wie geometrisch fruchtbare Begriffsbildungen von dauerndem Werte. Dabei zeigt sich, daß gewisse fundamentale Begriffe nicht nur P_n-invariant, sondern sogar X_n-invariant sind, während andere wesentlich projektive Natur haben.

6. Vielleicht der wichtigste X_n-invariante Begriff ist der Begriff der *Berührung*. Ist x^0 ein gemeinsamer Punkt zweier Kurven V_1, V_1' im X_n und hat man für $2 \leq j \leq n$

$$x_j - x_j^0 = \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha (x_1 - x_1^0)^\alpha \quad \text{auf} \quad V_1,$$

$$x_j - x_j^0 = \sum_{\alpha=1}^{\infty} a'_\alpha (x_1 - x_1^0)^\alpha \quad \text{auf} \quad V_1',$$

so sagt man, daß V_1 und V_1' in x^0 eine *Berührung der Ordnung k* haben, falls $a_\alpha = a'_\alpha$ für $1 \leq \alpha \leq k$. Ist $1 \leq r \leq s \leq n$, so haben $V_r \subset P_n$ und $V'_s \subset P_n$ im gemeinsamen Punkte x^0 eine Berührung der Ordnung k, wenn es zu jeder durch x^0 hindurchgehenden $V_1 \subset V_r$ eine $V_1' \subset V_s'$ gibt, die in x^0 V_1 in der Ordnung k berührt. Von einer Berührung der Ordnung k, aber nicht der Ordnung $k + 1$, sagt man, sie sei von der Ordnung *genau* k.

7. Um ein einfaches Beispiel eines X_n-invarianten Begriffs anzugeben, betrachten wir im X_n zwei Hyperflächen V_{n-1} und V_{n-1}', die im Punkte x^0 eine Berührung der Ordnung genau k haben. Die Tangenten in x^0 an den Durchschnitt D von V_{n-1} und V_{n-1}' bilden einen algebraischen Kegel K des Grades $k + 1$; wir nennen sie *Tangenten erhöhter Berührung* von V_{n-1} und V'_{n-1} in x^0. Eine Kurve $V_1 \subset V_{n-1}$ hat nämlich in $x^0 \in V_1$ eine Berührung der Ordnung $k + 1$ mit V_{n-1}' dann und nur dann, wenn ihre Tangente t in x^0 eine Tangente erhöhter Berührung ist. Sei nun etwa $n = 3$, so daß D eine Kurve (mit singulärem Punkte x^0) ist. Ist t eine *einfache* Tangente erhöhter Berührung, so hat D genau einen Zweig Z, der t in x^0 berührt, und x^0 ist ein einfacher Punkt von Z. Dann hat für $r = 2, 3, \ldots$ V_1 dann und nur dann in x^0 eine Berührung der Ordnung $k + r$ mit V_2', wenn V_1 in x^0 eine Berührung der Ordnung r mit Z hat. Ist dagegen t eine *mehrfache* Tangente erhöhter Berührung, so sind 2 Fälle möglich. Entweder hat *keine* t in x^0 berührende $V_1 \subset V_2$ in diesem Punkte eine Berührung der Ordnung $k + 2$ mit V_1', oder es hat im Gegenteil *jede* solche V_1 in x^0 eine solche Berührung.

8. Um ein Beispiel einer nur *projektiv* invarianten Eigenschaft der Berührung anzugeben, gehen wir aus vom *Dualitätsprinzip*: die Ebenen eines P_3 sind Punkte eines neuen (dualen) P_3, der Π_3 heißen möge. Die Schmiegebenen einer (nicht ebenen) $V_1 \subset P_3$ bilden im Π_3 die *duale Kurve* W_1. Seien nun V_1, V_1' zwei Kurven, die in x^0 eine Berührung genau k-ter Ordnung mit $k \leq 2$ (und folglich dieselbe Schmiegebene τ in x^0) haben. Die genaue Berührungsordnung $\bar{k}$ der dualen Kurven W_1, W_1' in τ hat einen der drei Werte $k - 1$, k, $k + 1$. Liegen V_1 und V_1' auf einer $V_2 \subset P_3$, so ist $\bar{k} = k$ dann und nur dann, wenn die Tangente in x^0 an V_1 (und V_1') eine *asymptotische* Tangente von V_2 ist.

9. Bis jetzt war die Rede nur von Berührung *in einem Punkte*. Man betrachte jedoch zwei Hyperflächen V_{n-1}, V_{n-1}' in X_n, die *längs einer* V_{n-2} eine Berührung der Ordnung k haben. Man kann nach Bedingungen einer *Erhöhung* der Berührungsordnung fragen. Während nun für den Fall eines einzelnen Berührungspunktes die Anzahl der nötigen Bedingungen gleich $\binom{k+n-1}{k+1}$ ist, hat man in unserem Fall nur eine *einzige* Bedingung. Von dieser Bemerkung ausgehend, habe ich vor 30 Jahren einige Sätze über V_2 in A_3 und P_3 angegeben. Da die Frage weiter verfolgt zu werden verdient, will ich hier die P_3-Sätze wiederholen. Dabei sind Regelflächen ausgeschlossen.

[1] Haben V_2 und V_2' längs V_1 eine Berührung 2-ter Ordnung und ist V_1 Darbouxsche Kurve auf V_2, so ist V_1 Darbouxsche Kurve auf V_2'.

[2] Haben V_2 und V_2' längs V_1 eine Berührung 2-ter Ordnung und ist V_1 Segresche Kurve auf V_2, so ist V_1 Segresche Kurve auf V_2' dann und nur dann, wenn die Berührung von 3-ter Ordnung ist.

[3] Haben V_2 und V_2' längs einer gemeinsamen DARBOUXschen Kurve V_1 eine Berührung 3-ter Ordnung, so haben V_2 und V_2' längs V_1 dieselbe erste und zweite Achse.

[4] Haben V_2 und V_2' längs einer gemeinsamen SEGREschen Kurve V_1 eine Berührung 3-ter Ordnung, so haben V_2 und V_2' längs V_1 dieselbe erste und zweite projektive Normale.

[5] Haben V_2 und V_2' längs einer nicht asymptotischen V_1 eine Berührung 3-ter Ordnung, so fallen längs V_1 die LIEschen F_2 beider Flächen dann und nur dann zusammen, wenn die Berührung von 4-ter Ordnung ist.

10. Bis jetzt war nur von *gewöhnlicher* Berührung die Rede. Es ist ein großes Verdienst von G. FUBINI, den Begriff der *analytischen Berührung* formuliert und dessen Wichtigkeit klar erkannt zu haben. Von einer analytischen Berührung kann man nur dann sprechen, wenn eine hier als analytisch vorausgesetzte Korrespondenz zwischen zwei Mannigfaltigkeiten V_r, V_r' (derselben Dimension) mit einem Fixpunkt x^0 vorliegt. Sind $x \in V_r$, $x' \in V_r'$ entsprechende Punkte, so lautet die Bedingung analytischer Berührung k-ter Ordnung, daß für $x \to x^0$

$$\max_i |x_i - x_i'| = O\left[\max_i |x_i - x_i^0|\right]^{k+1};$$

der Begriff ist X_n-invariant. Die gewöhnliche Berührung k-ter Ordnung ist offenbar mit analytischer Berührung derselben Ordnung in bezug auf eine willkürlich wählbare Korrespondenz identisch. Umgekehrt kann analytische Berührung auf die gewöhnliche durch Benutzung des Raumes P der Punktepaare (x, x'), $x \in X_n$, $x' \in X_n$, zurückgeführt werden. In P betrachte man einerseits die aus den Paaren (x, x), $x \in X_n$ bestehende *Diagonale* D, andererseits die durch die vorgelegte Korrespondenz zwischen V_r und V_r' definierte r-dimensionale Mannigfaltigkeit (V_r, V_r'), bestehend aus (x, x') mit $x \in V_r$, $x' \in V_r'$. Eine analytische Berührung k-ter Ordnung in x^0 zwischen V_r und V_r' ist dann gleichwertig mit gewöhnlicher Berührung k-ter Ordnung in (x^0, x^0) zwischen D und (V_r, V_r').

11. Man betrachte in X_n eine Korrespondenz zwischen V_r und V_r'. Der Fall $r = n$ ist nicht ausgeschlossen. Wir setzen voraus, daß im betrachteten Fixpunkt x^0 eine analytische Berührung der Ordnung *genau* k stattfindet [d. h. *analytische* Berührung $(k+1)$-ter Ordnung findet *nicht* statt]. Sei nun V_1 eine auf V_r gelegene Kurve, die durch x^0 mit der Tangente t hindurchgeht, und sei V_1' das Bild von V_1 auf V_r'. Man kann nun fragen, ob in x^0 zwischen V_1 und V_1'

(I) analytische Berührung $(k+1)$-ter Ordnung,
(II) gewöhnliche Berührung $(k+1)$-ter Ordnung

stattfindet. Es stellt sich heraus, daß es nur von der Tangente t abhängt, ob Fall (I) bzw. (II) stattfindet oder nicht. Wir sagen, t sei *Haupttangente* (im Fall I) oder *charakteristische Tangente* (im Fall II) der vorgelegten Korrespondenz im Fixpunkt x^0. Es ist klar, daß eine Haupttangente auch charakteristisch ist. Haupt- und charakteristische Tangenten existieren nicht immer. Ist *jede* Tangente t in x^0 charakteristisch, so hat man in x^0 zwischen V_r und V_r' eine „geometrische" Berührung $(k+1)$-ter Ordnung im Sinne von FUBINI.

12. Unter den Voraussetzungen der Nr. 11 betrachte man nun eine *nicht* charakteristische Tangente t an V_r in x^0 und nehme vorläufig an, der Raum sei ein P_n. Dann beweist man, daß es im Geradenbündel mit Mittelpunkt x^0 genau eine Gerade t^* gibt so, daß für jede Kurve $V_1 \subset V_r$ mit Tangente t in x^0 die Berührungsordnung zwischen V_1 und der Bildkurve V_1' nach Projektion von irgendeinem auf t^* gelegenen Zentrum aus sich auf $k+1$ erhöht. Die Gerade t^*, die *nicht* notwendig Tangente an V_r in x^0 ist, heiße *linearisierende Gerade* der Geraden t und die Transformation $t \to t^*$ heiße die *linearisierende Transformation* der vorgelegten Korrespondenz im Fixpunkt x^0. Die so definierte Transformation ist algebraisch, in einem Sinne rational und vom Grade $k+1$. Ist t eine charakteristische Tangente, so ist t^* mit t identisch; ist t speziell eine Haupttangente der Korrespondenz, so wird t^* unbestimmt.

13. Wir haben in Nr. 12 vorausgesetzt, der Raum sei ein P_n. Für den Fall eines beliebigen X_n ist der Begriff der geraden Linie nicht definiert und muß durch den Begriff der *Richtung* in x^0 ersetzt werden. Es ist nun sehr wichtig, daß der auf diese Weise entstehende Begriff der linearisierenden Richtung t^* zu einer V_r in x^0 berührenden Richtung t und dann natürlich auch der auf ihm beruhende Begriff der linearisierenden Transformation einer Korrespondenz $V_r \to V_r'$ in einem Fixpunkt X_n-invariant ist.

14. Seien nun X_n und X_n' beliebige Räume und sei $\sum$ eine vorgelegte Schar von Transformationen $X_n \to X_n'$. Eine Korrespondenz zwischen $V_r \subset X_n$ und $V_r' \subset X_n'$ heiße eine $\sum$-Deformation der Ordnung k, falls es zu jedem Punkt $x^0 \in V_r$ (mit Bildpunkt $x^{0\prime} \in V_r'$) eine Transformation $K \in \sum$ gibt, die eine analytische Berührung k-ter Ordnung zwischen V_r und V_r' *realisiert* in dem Sinne, daß in x^0 eine solche Berührung zwischen V_r' und der durch K transformierten Mannigfaltigkeit V_r statthat. Zu einer solchen $\sum$-Deformation definiert man dann in naheliegender Weise die zugehörigen linearisierenden Transformationen.

15. Die in Nr. 14 eingeführten äußerst allgemeinen Begriffsbildungen wurden von mir und später auch von Villa, Vaona und Muracchini mit Erfolg zunächst auf das projektive Studium von Transformationen $P_n \to P_n'$ angewandt. $\sum$ ist dann die Schar aller kollinearen Abbildungen von P_n auf P_n'. Ich habe außerdem auch den Fall untersucht, daß P_n und P_n' zueinander *duale* Räume sind und Eigenschaften von Transformationen $P_n \to P_n'$ bezüglich der Schar aller *Polaritäten* studiert werden. Untersuchungen über eine Fülle von anderen bemerkenswerten Spezialfällen sind im Gange. Ich glaube schon jetzt sagen zu dürfen, daß die hier kurz beschriebenen Begriffsbildungen als Anfang eines neuen umfangreichen Zweiges der Differentialgeometrie, nämlich einer ganz allgemeinen *Differentialgeometrie der Transformationen*, bezeichnet werden dürfen.