Eduard Čech

Deformazioni proiettive nel senso di Fubini e generalizzazioni

Conf. Sem. Mat. Univ. Bari (1955), 1-12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501082

CONFERENZE
DEL
SEMINARIO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITÀ DI BARI

Direttore: Prof. M. Manarini
Consiglio di redazione: M. Manarini, T. Viola

9

EDUARD ČECH

DEFORMAZIONI PROIETTIVE NEL SENSO DI FUBINI E GENERALIZZAZIONI

BARI
GIUS. LATERZA & FIGLI
1955

Il prof. Eduard Cech è nato a Stracov (Cecoslovacchia) il 29 giugno 1893. Ha conseguito la laurea di dottore in filosofia nel 1920 all'Università di Praga. Nel 1921-22 ha studiato col Fubini a Torino. Nel 1934-35 è stato membro dell'*Institute for Advanced Study* di Princeton, N. J.

Nel 1923 ebbe la cattedra di matematica all'Università di Brno (Cecoslovacchia) e dal 1945 tiene la stessa cattedra all'Università di Praga. È capo di una fiorente scuola geometrica in Cecoslovacchia. I campi di ricerche del prof. Cech sono la geometria differenziale, la topologia combinatoria, la topologia generale. Sono fondamentali alcune sue memorie pubblicate in *Fund. Math.* (1932) e in *Annals of Math.* (1933, 1935, 1936). In questi ultimi anni ha portato importanti contributi anche alla teoria proiettiva differenziale delle trasformazioni puntuali. In collaborazione col Fubini è autore del classico trattato in due volumi: *Geometria proiettiva differenziale* (Zanichelli, Bologna 1926 e 1927) e del volume: *Introduction à la géomètrie projective differentielle* (Gauthier-Villars, Paris, 1931). È pure autore del volume: *Projektivni diferencilni geometrie* (Jednota, Praga, 1926).

Il prof. Cech è membro ordinario dell'*Accademia delle Scienze cecoslovacca*, della *Società delle Scienze di Wroclaw* (Breslavia). È dottore onoris causa dell'Università di Varsavia.

EDUARD ČECH

DEFORMAZIONI PROIETTIVE NEL SENSO DI FUBINI E GENERALIZZAZIONI

Conferenza tenuta il 9 febbraio 1955.

PREMESSA: Tutte le funzioni si suppongono olomorfe. Non si studia che l'intorno di un punto generico. Si trascurano questioni di realtà.

1 — Due *curve* Γ, Γ' hanno nel punto comune a un *contatto d'ordine* k se esiste una corrispondenza C $(\Gamma \twoheadrightarrow \Gamma')$, con $a = Ca$, tale che per $x' = Cx$ la distanza $x\,x'$ sia infinitesima d'ordine $k+1$ (almeno) rispetto ad $a\,x$. Se la scelta di C non importa, si ha **contatto ordinario**; se C è data, si ha **contatto analitico.**

Due varietà V, V' di dimensioni d, d' $(d \leqq d')$ hanno nel punto comune a un **contatto ordinario d'ordine** k se per ogni curva Γ di V passante per a si ha una curva Γ' di V' che ha con Γ in a contatto ordinario d'ordine k.

Sia $d = d'$ e si consideri una corrispondenza C $(V \twoheadrightarrow V')$ con $a = Ca$. Se per ogni Γ si ha nel punto a contatto

(1) ordinario, (2) analitico rispetto a C

d'ordine k fra Γ e $\Gamma' = C\,\Gamma$, si dice che V e V' hanno in a contatto

(1) *geometrico,* (2) *analitico*

d'ordine k rispetto a C.

Per $d = d' = 1$ non c'è differenza fra contatto ordinario e contatto geometrico.

Un contatto qualsiasi si dirà di **ordine esatto** k se è d'ordine k, ma non è d'ordine $k+1$.

2 — Sia V una varietà immersa in S_r, V' una varietà immersa in S'_r (non importa se $S_r = S'_r$). Sia H una corrispondenza $S_r \twoheadrightarrow S'_r$; sia a un punto di V, $a' = Ha$.

Si dice che H *realizza* nel punto a un contatto ordinario d'ordine k, se v'è in a' contatto ordinario d'ordine k fra V' ed HV.

Sia ancora C una corrispondenza $V \twoheadrightarrow V'$ con $a' = Ca$ (V e V' hanno adesso la stessa dimensione d).

Si dice che H realizza in a contatto geometrico o analitico d'ordine k rispetto a C, se si ha in a' contatto geometrico, oppure analitico, d'ordine k fra HV e V' rispetto alla corrispondenza C^* $(HV \twoheadrightarrow V')$ tale che $C^*y = Cx$ per $y = Hx$ ed ogni x di V.

3 — Noi siamo interessati principalmente nel caso che sia data una superficie σ di S_3, una superficie σ' di S'_3 (non importa se $S_3 = S'_3$) ed una corrispondenza C $(\sigma \twoheadrightarrow \sigma')$.

Se a è un punto di σ, $a' = Ca$, allora un'*omografia*

(1) *tangente* , (2) *osculatrice*

a C nel punto a è una corrispondenza omografica H fra S_3 e S'_3 che realizza in a contatto analitico del

(1) primo , (2) secondo

ordine delle superficie σ, σ' rispetto a C.

Per ogni scelta di σ, σ', C e del punto a, esistono sempre omografie H tangenti a C in a e sono ∞^6; le parti di H relative al piano tangente a σ in a non sono che ∞^2.

4 — La corrispondenza $C\ (\sigma \twoheadrightarrow \sigma')$ si chiama **deformazione** (o **applicabilità**) **proiettiva** di σ se, per ogni punto a della superficie σ, esiste almeno una omografia osculatrice a C nel punto a. Si ha allora, per ogni punto a, ∞^1 di tali omografie H e, se H_0 è una di esse, la più generale H è $H = H_0 h$, dove h percorre, oltre l'identità, tutte le omologie (speciali) dello spazio S_3 di centro a e piano d'omologia nel piano tangente a σ in a.

Escludiamo il caso banale che C sia una corrispondenza *omografica* fra le due superficie σ, σ'.

Dalla definizione di deformazione proiettiva segue immediatamente che, in una deformazione proiettiva ogni curva asintotica di σ si trasforma in una asintotica di σ' ed ogni retta situata su σ in una retta di σ'.

Se σ è un **piano**, allora ogni curva situata su σ è asintotica; lo stesso vale per σ'; sicchè anche σ' è un piano; inoltre ogni retta di σ va in una retta di σ'. Dunque *il* *piano è proiettivamente indeformabile,* cioè ogni deformazione proiettiva del piano è banale (è un'omografia).

5 — Sia ora σ una **superficie sviluppabile**, cioè o un cono o la superficie generata dalle tangenti ad una curva sghemba; i piani sono esclusi. Per un punto generico di σ passa un'asintotica sola (retta); lo stesso vale per σ'. Dunque ad una sviluppabile σ corrisponde per applicabilità proiettiva una sviluppabile σ', ed alle generatrici di σ corrispondono le generatrici di σ'.

Si può dimostrare che la corrispondenza fra la generatrice g di σ e la generatrice g' di σ' è proiettiva e che in tale proiettività al punto singolare di g (vertice del cono o punto di contatto con lo spigolo di regresso) corrisponde il punto singolare di g.

Inversamente siano σ, σ' due superficie sviluppabili arbitrarie (non importa se qualcheduna è un cono). Si scelga comunque una legge che fa corrispondere ad ogni generatrice g di σ una generatrice g' di σ' e, per ogni g, si scelga una proiettività π fra le punteggiate g, g' soggetta solo alla condizione che il punto singolare di g si trasformi nel punto singolare di g'. La corrispondenza puntuale fra σ e σ che nasce in tal modo è una deformazione proiettiva.

Dunque le deformazioni proiettive fra due superficie sviluppabili σ, σ' date, esistono e dipendono da tre funzioni arbitrarie di una variabile (una che fissa la corrispondenza fra le generatrici e due che fissano le proiettività π). Rammentiamo di nuovo che i piani sono esclusi.

6 — Sia σ una **quadrica non singolare**. Per ogni suo punto a passano due rette di σ che si trasformano in due rette di σ', la quale quindi è di nuovo una quadrica non singolare.

Inversamente, siano σ e σ' due quadriche non singolari e sia C una corrispondenza $\sigma \twoheadrightarrow \sigma'$ che fa passare ogni retta di σ in una retta di σ'. Allora C è una deformazione proiettiva.

Risulta che le deformazioni proiettive fra due quadriche non singolari date dipendono da due funzioni arbitrarie di una variabile.

7 — Sia ora σ una **rigata sghemba**; le quadriche sono escluse. Per ogni punto di σ passano due linee asintotiche di cui una sola è retta. Lo stesso vale per σ'; sicchè anche σ' è una rigata sghemba. Ma date due rigate sghembe σ, σ' non esiste in generale nessuna deformazione proiettiva $\sigma \twoheadrightarrow \sigma'$.

Mentre le rigate sghembe dipendono da tre funzioni arbitrarie di una variabile, le deformate proiettive di una rigata sghemba σ data non dipendono che da una sola funzione arbitraria di una variabile.

Se σ possiede una retta direttrice, lo stesso vale per σ', ma fra due rigate date con retta direttrice non esiste in generale nessuna deformazione proiettiva.

Lo stesso stato di cose vi è se σ appartiene ad un complesso lineare non speciale.

Se la rigata σ appartiene ad una congruenza lineare, lo stesso vale per σ'.

Inversamente, se ciascuna delle due rigate date σ, σ' appartiene ad una congruenza lineare, vi sono ∞^3 deformazioni proiettive $\sigma \twoheadrightarrow \sigma'$; non importa se qualcheduna delle due congruenze lineari sia speciale.

Torniamo al caso di una deformazione proiettiva C fra due rigate sghembe qualunque σ, σ'; g, g' essendo la coppia generica di generatrici corrispondenti, si dica π la parte di C relativa alle punteggiate g, g'. Poniamoci la domanda se la corrispondenza π $(g \twoheadrightarrow g')$ è proiettiva.

La risposta è positiva se σ (e quindi nemmeno σ') non appartiene ad una congruenza lineare.

Se σ appartiene alla congruenza lineare L, sicchè σ' appartiene ad una congruenza lineare L', allora la risposta è necessariamente negativa nel caso che fra le due congruenze lineari L, L' ve ne sia precisamente una speciale.

Invece la risposta è certamente positiva se L, L' sono ambedue speciali.

Se nessuna delle L, L' è speciale, allora la risposta può essere positiva o negativa; fra le ∞^3 deformazioni proiettive fra due tali σ, σ' date, ve ne sono ∞^2 per cui la risposta è positiva.

8 — Sia infine σ una **superficie non rigata**. Allora σ è, in generale, **proiettivamente indeformabile**; cioè non ammette che deformazioni proiettive banali. Vi sono però superficie non rigate eccezionali, dipendenti da sei funzioni arbitrarie di una variabile, che sono proiettivamente deformabili. Se la superficie σ appartiene a tale classe eccezionale, possiamo domandare quale sia la totalità delle sue deformate proiettive (se $\sigma \twoheadrightarrow \sigma'$ è una deformazione proiettiva, $\sigma' \twoheadrightarrow \sigma''$ una trasformazione omografica, allora anche $\sigma \twoheadrightarrow \sigma''$ è una deformazione proiettiva che s'identifica con la $\sigma \twoheadrightarrow \sigma'$).

Una superficie non rigata proiettivamente deformabile ammette sempre almeno ∞^1 deformazioni proiettive, e generalmente non più che ∞^1. Vi sono però anche superficie non rigate proiettivamente deformabili in ∞^2 o in ∞^3 modi (non vi sono altre possibilità); a tali superficie ritorniamo più avanti (n. 12).

9 — Sia σ una **superficie non sviluppabile** e siano u, v parametri asintotici di σ, vale a dire coordinate curvilinee su σ tali che $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ siano le asintotiche. Scegliendo arbitrariamente il fattore arbitrario delle coordinate omogenee del punto $x = x\,(u\,,\,v)$ di σ, si hanno equazioni della forma

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \beta \frac{\partial x}{\partial v} + px\,, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \gamma \frac{\partial x}{\partial u} + \delta \frac{\partial x}{\partial v} + qx\,; \end{aligned}$$

e queste equazioni fissano σ a meno della sua posizione nello spazio proiettivo S_3. La forma differenziale fratta

$$(2) \qquad \frac{\beta du^3 + \gamma dv^3}{2du dv}$$

è l'**elemento lineare proiettivo** (Fubini) di σ; esso non dipende dal fattore arbitrario delle coordinate omogenee di x ed è invariante rispetto al cambiamento

$$(3) \qquad \bar{u} = \varphi_1(u) \quad , \quad \bar{v} = \varphi_2(v)$$

oppure

$$(4) \qquad \bar{u} = \varphi_2(v) \quad , \quad \bar{v} = \varphi_1(u)$$

dei parametri asintotici u, v. Escludendo (4), lo stesso vale anche per le **forme elementari** (Bompiani)

$$(5) \qquad \beta \frac{d u^2}{d v} \quad , \quad \gamma \frac{d v^2}{d u}\,,$$

che si scambiano l'una con l'altra applicando le (4). Dalle (1) discende immediatamente che $\beta = \gamma = 0$ per quadriche, $\beta \neq 0 = \gamma$ per rigate se $u = \text{cost.}$ lungo le generatrici ($\beta = 0 \neq \gamma$ se $v = \text{cost.}$ lungo le generatrici), $\beta \neq 0 \neq \gamma$ per superficie non rigate.

Nel campo delle superficie non sviluppabili, condizione necessaria e sufficiente per l'applicabilità proiettiva è l'uguaglianza degli elementi lineari proiettivi (o delle due forme elementari) delle due superficie.

La necessità di tale condizione risulta subito dalla seguente interpretazione geometrica delle forme (2) e (5). Sia $x = x\,(u\,,\,v)$ un punto di una superficie σ non rigata, τ il piano tangente a σ nel punto x, Γ_1 l'asintotica $v = \text{cost.}$ e Γ_2 l'asintotica $u = \text{cost.}$, ambedue Γ_1, Γ_2 passando per x; t_1, t_2 siano le tangenti a Γ_1 Γ_2 nel punto x. Nel piano τ si scelga una retta g che non passi per x; sia c_1 (c_2) la conica del piano

τ che ha in x contatto ordinario del secondo ordine con Γ_1 (Γ_2) e che tocca la retta g nel suo punto d'intersezione con t_2 (t_1). Sia ancora c_3 la cubica del piano τ con punto doppio x i cui due rami in x hanno quivi contatto ordinario del secondo ordine con Γ_1 e Γ_2 rispettivamente ed i cui tre flessi stanno sulla retta g. Infine sia

$$x' = x + \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)$$

un punto di σ infinitamente vicino ad x, il quale, trascurando infinitesimi del secondo ordine, sta nel piano τ e siano y_0, y_1, y_2, y_3 le intersezioni ($\neq x$) della retta (xx') con le linee g, c_1, c_2, c_3. Allora i birapporti

$$(x y_3\, x' y_0) \quad , \quad (x y_1\, x' y_0) \quad , \quad (x y_2\, x' y_0)$$

sono rispettivamente uguali a

$$-\frac{\beta du^3 + \gamma dv^3}{2 du dv} \quad , \quad -\frac{1}{2} \frac{\beta du^2}{dv} \quad , \quad -\frac{1}{2} \frac{\gamma dv^2}{dv} \;.$$

Se per es. $\beta \neq 0 = \gamma$, delle c_1, c_2, c_3 rimane solo la conica c_1 ed il significato geometrico della prima delle (5) resta inalterato.

Sia σ una superficie *non sviluppabile* dello spazio S_3. Si dica S_3^* lo spazio duale; i piani tangenti a σ sono punti di una superficie σ^* dello spazio S_3^*. Se (2) è l'elemento lineare proiettivo di σ, allora quello di σ^* è

$$-\frac{\beta du^3 + \gamma dv^3}{2 du dv} \;.$$

Quindi ogni deformazione proiettiva di σ è simultaneamente deformazione della σ^* duale.

Si ha di più: Se $\sigma \twoheadrightarrow \sigma'$ è una deformazione proiettiva, se a è un punto di σ e a^* è il piano tangente a σ in a ossia il punto corrispondente della σ^* duale, allora le omografie osculatrici alla deformazione proiettiva $\sigma \twoheadrightarrow \sigma'$ sono identiche alle omografie osculatrici alla deformazione proiettiva duale $\sigma^* \twoheadrightarrow \sigma'^*$.

Intuitivamente si può dire che l'omografia che porta tre punti infinitamente vicini di σ nelle loro immagini rispetto alla deformazione proiettiva $\sigma \twoheadrightarrow \sigma'$ porta necessariamente anche tre piani tangenti a σ infinitamente vicini nei piani corrispondenti.

Per una superficie *sviluppabile* σ tale enunciato è *in generale falso*; v. il mio articolo *Sur la déformation projective des surfaces développables* che uscirà nel *Czechoslovak Mathematical Journal*.

10 — Sia C una deformazione proiettiva $\sigma \rightarrowtail \sigma'$; sia H un'omografia osculatrice a C in un punto a di σ (sappiamo che di tali H ve ne sono ∞^1). Una curva Γ tracciata su σ e passante per a si dica, anzitutto, **geometricamente (analiticamente) distinta**, se H realizza nel punto a un contatto ordinario (analitico) del terzo ordine di Γ e $C\Gamma$ rispetto a C. Se ogni Γ passante per a fosse geometricamente distinta, allora H realizzerebbe in a un contatto geometrico del terzo ordine di σ e σ' rispetto a C; noi escludiamo tale caso perchè, eccettuate le deformazioni proiettive banali, esso non può aver luogo in un punto generico di σ.

Se Γ tocca in a una tangente asintotica a σ, allora Γ è necessariamente geometricamente distinta per ogni scelta di H. Se t è una tangente asintotica a σ in a e se, per una scelta particolare dell'omografia osculatrice H e per una curva particolare Γ di σ che tocca t in a, Γ è analiticamente distinta, allora ogni curva di σ che tocca t in a è analiticamente distinta per ogni scelta dell'omografia osculatrice; la *tangente asintotica* t sarà detta in tal caso **tangente di Cartan** rispetto a C.

La *tangente non asintotica* t di σ in a si dice *tangente di* CARTAN rispetto a C se, per una scelta particolare dell'omografia osculatrice H, vi è su σ una curva particolare Γ che tocca t in a e che è geometricamente distinta rispetto a H; allora ogni curva di σ che tocca t in a è geometricamente distinta rispetto ad ogni scelta dell'omografia osculatrice. Inoltre, in tal caso vi è un'omografia osculatrice ben determinata rispetto alla quale ogni curva Γ di σ che tocca t in a è analiticamente distinta, mentre per altre scelte dell'omografia osculatrice nessuna di tali Γ può essere analiticamente distinta.

Escludiamo il caso che σ (e quindi anche σ') sia una sviluppabile, rimandando all'articolo citato nel n. 9. Vi sono due casi (oltre il caso banale già escluso): deformazioni proiettive del tipo R_0 e quelle del tipo R'. Nel primo caso si ha, in ogni punto a di σ, una sola tangente di CARTAN t che è necessariamente una tangente *asintotica*. Nel secondo caso si hanno, in ogni punto a di σ, due tangenti distinte di CARTAN che sono *coniugate* l'una all'altra.

11 — Ogni rigata sghemba σ ammette deformazioni proiettive del tipo R_0 per cui le generatrici sono tangenti di CARTAN e, se σ non appartiene ad una congruenza lineare, essa non può ammettere altre deformazioni proiettive.

Si dirà *superficie* R_0 una superficie *non rigata* che ammette deformazioni proiettive del tipo R_0.

Se u, v sono parametri asintotici e se le tangenti di CARTAN toccano le asintotiche

$v = \text{cost.}$ allora nella notazione (1) condizione necessaria e sufficiente per una superficie R_0 è

$$\frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u \; \partial v} = 0 \qquad (\beta \neq 0) \;;$$

le deformazioni proiettive corrispondenti sono ∞^1 (astraendo dalla posizione della trasformata nello spazio proiettivo). Le superficie R_0 dipendono da cinque funzioni arbitrarie di una variabile.

12 — Passiamo alla considerazione di una deformazione proiettiva $C\,(\sigma \twoheadrightarrow \sigma')$ del tipo R. Le tangenti di CARTAN di C inviluppano sulla superficie σ una rete coniugata che sarà detta **rete di Cartan** di C. Una rete coniugata tracciata su una superficie σ si dirà *rete* R se ciascuna delle due congruenze rettilinee di cui essa è una rete focale o è una congruenza W (le falde focali stanno in corrispondenza asintotica) o la seconda falda focale degenera in una retta. Si prova che la rete di CARTAN di una deformazione proiettiva del tipo R è una rete R. Inversamente, data su una superficie σ una rete R, esistono sempre precisamente ∞^1 deformazioni proiettive di σ per cui la rete data è la rete di CARTAN (si astrae dalla posizione della trasformata di σ nello spazio proiettivo).

Una rete R è sempre **isotermoconiugata**, vale a dire i parametri asintotici u, v di σ possono esser scelti in modo che l'equazione differenziale della rete sia

$$du^2 - dv^2 = 0 \; . \tag{6}$$

Nella notazione (1), la rete (6) è una rete R se e soltanto se

$$\frac{\partial \beta}{\partial v} = \frac{\partial \gamma}{\partial u} \; .$$

Su una quadrica, ogni rete isotermoconiugata è R; sicchè le reti R su una quadrica dipendono da due funzioni arbitrarie di una variabile. Su una rigata sghemba σ che non appartiene ad una congruenza lineare non vi è nessuna rete R: se invece σ appartiene ad una congruenza lineare, allora le reti R su σ dipendono da una funzione arbitraria di una variabile.

Una superficie non rigata che contiene una rete R si dirà **superficie R**; tali superficie dipendono da sei funzioni arbitrarie di una variabile.

In generale, una superficie R non contiene che una sola rete R; essa è allora proiettivamente deformabile in ∞^1 modi. Se una superficie R contiene più di una rete R, essa ne contiene o ∞^1 (ed è proiettivamente deformabile in ∞^2 modi) oppure ∞^2 (ed è proiettivamente deformabile in ∞^3 modi).

Alla classe di superficie R con ∞^2 reti R appartengono tutte le superficie non rigate di cui tutte le asintotiche stanno in complessi lineari; tali superficie dipendono da due funzioni arbitrarie di una variabile.

Vi sono altre superficie R con ∞^2 reti R che son tutte note, ma dipendono solo da costanti arbitrarie. Anche le superficie R con ∞^1 reti R dipendono solo da costanti arbitrarie. Il problema di determinarle *tutte* non è ancora risolto; ho trovato i primi esempi nel 1924 e più tardi (1931) ho determinato tutte quelle per cui una delle reti R è ad invarianti uguali.

Sia C una deformazione proiettiva $\sigma \twoheadrightarrow \sigma'$; ci limitiamo al caso che la superficie σ sia non sviluppabile. In ogni punto a scegliamo una delle due tangenti di CARTAN, sia t, (ma non si esclude il caso R_0 in cui si ha una sola tangente di CARTAN); il luogo di tali tangenti è una congruenza rettilinea L. Tutte le ∞^1 omografie osculatrici a C in a trasformano la punteggiata t mediante la stessa proiettività π. Le ∞^2 proiettività π prese insieme formano una trasformazione $T(S_3 \twoheadrightarrow S'_3)$ che porta la congruenza L in una congruenza L'.

La trasformazione T è **totalmente asintotica** nel senso che, essendo R una rigata qualunque della congruenza R ed R' l'immagine di R mediante T, ad ogni curva asintotica di R corrisponde una curva asintotica di R'. Inoltre, se R tocca σ lungo un'asintotica, allora $R \twoheadrightarrow R'$ è una deformazione proiettiva.

13 — Il concetto di deformazione proiettiva di una superficie non sviluppabile è strettamente connesso con quello di **deformazione proiettiva di una rete piana.** Una rete piana consta di due sistemi ∞^1 di curve piane. Sia data una rete ρ nel piano S_2, una rete ρ' nel piano S_2', e una corrispondenza $C(S_2 \twoheadrightarrow S'_2)$ che porta ρ in ρ'. C si dirà **deformazione proiettiva della rete** ρ se per ogni punto a di S_2 esiste un'omografia $H(S_2 \twoheadrightarrow S'_2)$ tangente nel punto a alla corrispondenza C ed inoltre osculatrice nel punto a alle corrispondenze parziali relative alle due curve di ρ che passano per a.

La connessione fra la deformazione proiettiva delle superficie e quella delle reti piane è come segue.

Sia C una corrispondenza *asintotica* $\sigma \twoheadrightarrow \sigma'$, σ e σ' essendo due superficie non sviluppabili. Proiettiamo σ da un punto O scelto ad arbitrio in un piano S_2 e σ' da un punto O' pure arbitrario in un piano S'_2. Le proiezioni delle asintotiche formano due reti, ρ in S_2 e ρ' in S'_2 e la corrispondenza C determina una corrispondenza $\overline{C}$ fra S_2 ed S'_2, la quale è una deformazione proiettiva di ρ se e soltanto se C è deformazione proiettiva di σ.

Anche per **reti piane** si può definire un elemento lineare proiettivo, l'invarianza del quale è condizione necessaria e sufficiente per deformazione proiettiva. Introducendo nel piano S_2 coordinate curvilinee u, v in modo che $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ siano le curve di ρ, ed analogamente per S'_2, si ha che l'elemento lineare proiettivo di ρ ha la forma (2), dove β, γ son certe funzioni di u, v. Scegliendo tali funzioni β, γ ad arbitrio, si dimostra che le reti ρ corrispondenti esistono sempre e dipendono da quattro funzioni di una variabile (il caso $\beta = \gamma = 0$ forma un'eccezione piuttosto apparente). Se la proiezione delle asintotiche di una superficie σ è la rete ρ, allora σ e ρ hanno lo stesso elemento lineare proiettivo.

14 — Un sistema ∞^1 di superficie dello spazio S_3 si dirà **strato di superficie.** Sia C una corrispondenza $S_3 \twoheadrightarrow S'_3$ che trasforma uno strato Σ di S_3 in uno strato Σ' di S'_3. La corrispondenza C si dirà **deformazione proiettiva dello strato** Σ, se per ogni punto a di S_3 esiste un'omografia H tangente in a alla corrispondenza C che sia simultaneamente osculatrice in a alla corrispondenza parziale relativa a quella superficie dello strato Σ che passa per a.

Escludiamo il caso banale che C sia una corrispondenza omografica fra S_3 e S'_3. Esistono corrispondenze $C(S_3 \twoheadrightarrow S'_3)$ che sono deformazioni proiettive di due (ma non di più di due) strati; è nota la descrizione geometrica di tali corrispondenze.

Se lo strato Σ è composto di piani, allora ogni corrispondenza $S_3 \twoheadrightarrow S'_3$ che cambia tutti i piani di Σ in piani è una deformazione proiettiva di Σ.

È possibile (VAONA) dare la descrizione geometrica delle deformazioni proiettive di strati composti di superficie sviluppabili. Esistono però anche deformazioni proiettive di strati composti di superficie non sviluppabili che possono essere divise in due classi secondo il tipo (R o R_0) di deformazioni delle singole superficie di cui lo strato è composto.

Per brevità non ritengo opportuno di descrivere qui altre interessanti generalizzazioni della deformazione proiettiva di superficie.

FINITO DI STAMPARE IL 10 NOVEMBRE 1955. — STAB. D'ARTI GRAFICHE GIUS. LATERZA & FIGLI - BARI 16024