Eduard Čech

Remarques au sujet de la géométrie différentielle projective

Acta Math. Hungar. 5 (1954), 137-144

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501078

REMARQUES AU SUJET DE LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE PROJECTIVE

Par

E. ČECH (Prague)

Les idées révolutionnaires de BOLYAI et LOBATCHEVSKY ont ouvert la voie au développement vraiment gigantique de la géométrie et il n'est pas douteux que ce développement va se continuer avec la même vitesse pour encore long temps. C'était en géométrie différentielle où pour la première fois, par le mérite du génie de RIEMANN, les espaces non-euclidiens de BOLYAI et LOBATCHEVSKY se sont montré être seulement des premiers exemples d'une famille de plus en plus croissante d'espaces, dont l'étude occupe dans les dernières décades une place étendue dans les mathématiques modernes, grâce surtout au fait que la théorie de la relativité a attiré l'attention des physiciens aux méthodes et aux résultats de la géométrie différentielle.

Cependant, il me semble quelque fois que la géométrie différentielle moderne, si bien puissante que soit son étendue, commence à négliger l'intuition géométrique; quoiqu'il en soit, il est sûr qu'en géométrie différentielle, la littérature contient une disproportion trop élevée de Mémoires ne contenant que des généralisations aisées et des calculs formels et moi je me demande parfois si c'est encore de la *géométrie* que l'on y présente aux lecteurs. Aussi, il y a dans la géométrie différentielle moderne des thèmes de recherches étendues où la tâche d'exposer d'une manière à la fois courte et précise le contenu essentiel de l'investigation aux savants travaillant dans d'autres domaines de mathématiques, serait peut-être bien plus difficile que l'exposition détaillée déstinée pour les spécialistes. Or ceci, à mon avis, est regrettable.

C'étaient des considérations de tel genre qui m'ont conduit à oser de passer en revue devant cette audience éminente quelques résultats en géométrie différentielle projective qui, peut-être, n'ont pas une grande importance intrinsèque, mais où, d'autre part, l'énoncé des définitions et des résultats est bien moins compliqué que les démonstrations.

Naturellement, ceci n'est pas l'occasion pour une revue complète, de façon que je vais me limiter à une question particulière. C'était en 1916 [1]

[1] G. FUBINI, Applicabilità proiettiva di due superficie, *Rend. Circ. Mat. di Palermo* **41** (1916), p. 135—162.

que mon ami regretté FUBINI a introduit la notion de déformation projective et c'était en 1920 [2] qu'É. CARTAN a résolu, par moyen de la théorie des systèmes de PFAFF en involution, presque tout qu'à ce temps là semblait constituer le corps de problèmes s'y rattachant. Quelques années plus tard, j'ai réussi [3,4] à donner, usant des méthodes spéciales, des compléments qu'il serait peut-être difficile d'obtenir au moyen des méthodes d'É. CARTAN, quelque puissants que soient ces méthodes, en général. Pendant les 20 dernières années, au contraire, il semble que la théorie de la déformation projective n'a plus à signaler rien que soit essentiellement nouveau.

Or, j'ai créé récemment [5] une théorie générale des propriétés projectives de transformations, ce qui m'a conduit à trouver de nouvelles propriétés géométriques de la déformation projective, que je vais indiquer plus tard.

En quittant ces généralités, je commence par la définition du *contact analytique* due à FUBINI. Il est classique de dire que deux variétés V et V' ont au point commun A un contact d'ordre s, s'il est possible d'établir entre V et V' une correspondance à point fixe A telle que la distance de deux points correspondants prochains à A soit infinitésimale d'ordre $s+1$. C'est que FUBINI appelle *contact géométrique* d'ordre s, tandis que la notion de contact analytique s'applique seulement à une correspondance *donnée* entre V et V' et signifie naturellement que la propriété énoncée plus haut a lieu relativement à cette correspondance elle-même.

Ceci étant, supposons qu'une correspondance C entre deux variétés V et V' soit donnée; choisissons un point A de V et désignons par B l'image de A dans V'. Soit alors H une correspondance auxiliaire, dépendant de la position de A, entre la variété V et une variété auxiliaire V^*, et portant elle aussi le point A dans le point B. Cela donne lieu à une correspondance entre les deux variétés V' et V^*, possédant un point fixe en B. Si maintenant V' et V^* ont en B un contact analytique d'ordre s, alors nous disons que la correspondance auxiliaire H réalise, au point A, un contact analytique d'ordre s entre V et V'. Le cas qui nous intéresse ici est celui où H est une *homographie*; alors, si l'ordre de contact $s=1$, nous disons que H est une

[2] É. CARTAN, Sur la déformation projective des surfaces, *Ann. Éc. Norm. Sup.*, (3) **37** (1920), p. 259—356.

[3] E. ČECH, Sur les surfaces qui admettent ∞^1 déformations projectives en elles mêmes, *Publ. Fac. Sc. de l'Univ. Masaryk*, nº 40, (1924), 47 pages.

[4] E. ČECH, Réseaux R à invariants égaux, *Publ. Fac. Sc. de l'Univ. Masaryk*, nº 143 (1931), 29 pages.

[5] E. ČECH, Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами, Чехословацкий Математический Журнал; I. **2** (77) (1952), p. 92—107; II. **2** (77) (1952), p. 109—123; III. **2** (77) (1952), p. 125—148; IV. **2** (77) (1952), p. 149—166; V. **2** (77) (1952), p. 167—188. Les Mémoires VI et VII de cette série sont en train d'être publiés au même Journal; le Mémoire VIII est en préparation. Les Mémoires I, II, III ont paru aussi en français au même Journal: I. **74** (1949), p. 32—48; II. **75** (1950), p. 123—136; III. **75** (1950), p. 137—157.

homographie tangente au point A à la correspondance entre V et V'; si $s=2$, nous disons que H est une *homographie osculatrice* au point A à la correspondance entre V et V'. Il est bien évident que l'homographie *tangente* existe toujours, quelque soit la correspondance initiale C entre V et V'; naturellement, je suppose que C soit suffisamment regulière et je suppose même que C soit exprimable par des fonctions holomorphes. D'ailleurs, l'homographie tangente n'est pas determinée univoquement.

FUBINI considère le cas d'une correspondance C entre deux *surfaces* V et V' de l'espace ordinaire et il appelle C une *déformation projective* si, pour chaque position du point A sur la surface V, il existe une homographie osculatrice H, qui de nouveau n'est pas déterminée univoquement. FUBINI exclut le cas de surfaces développables et il prouve que condition nécessaire et suffisante pour la déformation projective est l'invariance d'une forme différentielle fractionnaire $(\beta du^3+\gamma dv^3):2du\,dv$, où u et v sont des paramètres *asymptotiques* de la surface V. Il en résulte que la notion de courbe asymptotique est invariante pour les déformations projectives, ce qui découle d'ailleurs immédiatement de la définition géométrique de la déformation projective. Quant au numérateur $\beta du^3+\gamma dv^3$, il s'évanouit identiquement pour les quadriques et il se réduit a βdu^3 dans le cas ou V est une surface réglée dont $u=$const. sont les génératrices. Si enfin V est une surface non réglée, alors $\beta du^3+\gamma dv^3=0$ définit une terne de tangentes à V au point A qu'on appelle tangentes de DARBOUX. L'invariance des tangentes de DARBOUX par rapport aux déformations projectives découle géométriquement p. ex. de l'invariance des courbes asymptotiques et de la construction suivante des tangentes de DARBOUX donnée dans un de mes premiers travaux scientifiques: [6] dans le plan tangent à la surface V au point A, il existe deux paraboles, chacune desquelles a en A un contact du 2e ordre avec une courbe asymptotique et dont l'axe est parallèle à l'autre tangente asymptotique en A; les deux paraboles se coupent, outre en A, dans trois points A_1, A_2, A_3 et les droites AA_1, AA_2, AA_3 sont les tangentes de DARBOUX.

FUBINI ne résout pas les questions d'existence, ce qui, comme j'ai déjà dit, a été fait par É. CARTAN. Les théorèmes de CARTAN sont les suivants:

(1) Les plans sont projectivement indéformables; plus précisément, une déformation projective d'un plan se réduit à une simple homographie.

(2) Chaque surface développable (qui n'est pas un plan) est projectivement déformable et la déformation dépend de 3 fonctions arbitraires d'un argument.

(3) Chaque surface réglée non développable est projectivement déformable et la déformation dépend d'une fonction arbitraire d'un argument.

[6] E. ČECH, L'intorno d'un punto d'una superficie considerato dal punto di vista proiettivo, *Annali di Matem.*, (3) **31** (1922), p. 191—206.

(4) Quant aux surfaces non réglées projectivement déformables, elles sont *exceptionnelles* et dépendent de 6 fonctions arbitraires d'un argument. Si la surface non règlée V est projectivement déformable, alors la déformation dépend seulement de constantes arbitraires dont le nombre h ne peut être égal qu'à 1, 2 ou 3. Le cas $h=1$ est le cas général; le cas $h=3$ a lieu pour les surfaces dont les asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires et qui dépendent de 2 fonctions arbitraires, mais le cas $h=3$ a lieu pour d'autres classes de surfaces dont les propriétés géométriques sont moins claires et qui dépendent seulement de quelques constantes arbitraires. Quant au cas $h=2$, CARTAN a prouvé seulement que des surfaces de tel genre, *s'il en existe,* ne peuvent dépendre que des constantes arbitraires. La question d'existence ainsi posée est déclarée non résolue au nécrologue d'É. CARTAN paru récemment au *Bull. Amer. Math. Soc.*, [7] quoique j'ai donné des exemples effectifs de telles surfaces déjà en 1924 [3] et d'autres exemples sept années plus tard. [4]

Cependant, à ce qu'il me semble, la détermination de *toutes* les surfaces avec $h=2$ n'a pas été faite jusqu'à présent.

En laissant de côté le cas de surfaces développables, à chaque déformation projective d'une surface on peut attacher un réseau conjugué appelé par CARTAN *réseau conjugué de déformation projective*; en suivant M. FINIKOFF [8] je l'appellerai plus brièvement *réseau base* (de déformation), ces tangentes *tangentes de base* et les congruences engendrées par ces tangentes, *congruences base.* Au Mémoire de 1920, CARTAN ne donne qu'une déscription géométrique compliquée des tangentes base. Quelques années plus tard, CARTAN et moi ont trouvé, [9] indépendamment l'un d'autre, une autre déscription bien plus simple, à savoir que l'homographie osculatrice H dans un point A de la surface V réalise un contact géométrique du 3e ordre pour une courbe tracée sur V et passant par A si, et seulement si, sa tangente en A est une tangente de base. A ce qu'il me semble, c'est à FUBINI qu'on doit la remarque que les réseaux base sont identiques aux réseaux nommés R et introduit indépendamment par DEMOULIN [10] et TZITZÉICA [11] par une voie tout-à-fait différente. Il existe une théorie étendue de transformations dites asymptotiques de réseaux et congruences R que je me contente à mentionner. [12]

[7] S. S. CHERN et C. CHEVALLEY, Élie Cartan and his mathematical work, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **58** (1952), p. 217—250.

[8] С. П. Фиников, Теория конгруэнций (1950), p. 434.

[9] V. G. FUBINI et E. ČECH, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, (1931), p. 89.

[10] A. DEMOULIN, Sur les surfaces R et les surfaces Ω, *Comptes Rendus Acad., Paris,* **153** (1911), p. 590—593.

[11] G. TZITZÉICA, Sur certains réseaux conjugués, *Comptes Rendus Acad., Paris,* **152** (1911), p. 1077—1079.

[12] V. G. FUBINI et E. ČECH, *Geometria proiettiva differenziale,* vol. I (1926), chap. V.

D'autre part, pour raisons de brièveté je n'était pas parfaitement précis dans ce qui précède: en réalité, il se peut que le réseau base se réduise à une famille de courbes asymptotiques comptée deux fois; mais, dans cet exposé sommaire, je vais continuer à n'être pas subtilement précis.

Je finirai ces courtes notices historiques en remarquant que déjà en 1920 CARTAN[13] a exposé, d'une manière extrêmemant sommaire, les résultats qu'il a acquis dans une théorie de la *déformation projective des congruences de droites* dont la définition géométrique est presque le même comme la définition donnée plus haut de la déformation projective des surfaces. Il se trouve qu'une congruence de droites est en général projectivement indéformable, les congruences projectivement déformables dépendant d'une fonction arbitraire de deux arguments. Parmi les déformations projectives il y a une classe distinguée, la classe des *déformations projectives singulières,* définie par la propriété de l'homographie osculatrice de porter les foyers de la première congruence dans ceux de la seconde. Or les déformations projectives singulières des congruences de droites sont attachées aux déformations projectives de surfaces, les congruences dont il s'agit étant celles que j'ai appelé plus haut congruences base de déformation projective des surfaces. Cependant la connexion découverte par CARTAN entre le problème de déformation projective des surfaces et celui de déformation projective singulière de congruences de droites n'apparaît chez lui que par voie de calcul et se sont seulement mes derniers travaux qui ont révélé la vraie mature géométrique de cette connexion remarquable, comme je vais l'expliquer plus loin.

La communication citée de CARTAN est intitulée Sur le problème général de déformation. Le programme qui est esquis dans cette communication n'a pas d'ailleurs été poussé beaucoup plus loin dans les 30 années découlées jusqu'ici du moment de sa publication. Dans mes travaux récents et dans ceux qui vont suivre, mon point de départ est différent de celui de CARTAN et de tous les travailleurs antérieurs. Au lieu de définir à priori certaines classes de transformations et d'étudier ensuite les problèmes d'existence relatives, je me propose de créer une théorie différentielle générale non plus de variétés, mais de transformations elles mêmes. La méthode extrêmement puissante des systèmes différentiels en involution, crée en 1901 par É. CARTAN[14] et généralisée ensuite par KÄHLER,[15] permet de résoudre très vite une foule de questions d'existence, ce qui permet de prévoir quelles sont les classes de transformations qui méritent une étude plus détaillée.

[13] É. CARTAN, Sur le problème général de la déformation, *C. R. du Congres Int. des Math. de Strasbourg en* 1920, p. 397—400.

[14] É. CARTAN, Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales, *Ann. Ec. Norm. Sup.* (3), 18 (1901), p. 241—311.

[15] E. KÄHLER, *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen* (1934).

Les résultats de mes recherches font objet d'une série de *Mémoires au Journal Tchécoslovaque de Mathématiques.*[5] Jusqu'ici, 5 Mémoires de la série ont déjà paru, deux sont sous presse et je suis en train de finir le manuscrit du huitième. Jusqu'à présent je n'expose que la théorie différentielle projective des transformations d'espaces *linéaires.*

Parmi les correspondances autre deux espaces linéaires S_n et S'_n, une classe particulièrement simple est donnée par les correspondances qui se laissent décomposer en ∞^1 de *transformations homographiques d'hyperplans.* Dans un Mémoire non publié, mais écrit il y a déjà quelques années, j'ai fait la classification de telles correspondances pour $n=3$. Par contre, j'ai publié seulement la détermination de *correspondances développables.* Voici ce qui ceci veut dire. Considérons une famille ∞^1 de correspondances homographiques $H(t)$ entre S_n et S'_n, dépendant d'un paramètre t. Dans l'espace doublement projectif $S_n \times S'_n$, chaque homographie $H(t)$ a comme image une variété à n dimensions dépendant du paramètre t. S'il arrive que ces ∞^1 variétés possèdent une enveloppe, alors cette enveloppe est l'image d'une correspondance entre S_n et S'_n, et ce sont précisément des correspondances de cette nature que j'appelle développables. L'expression analytique de correspondances développables est extrêmement simple. En négligeant des cas limites, on prend une correspondance arbitraire entre une courbe $A(t)$ appartenant à S_n et une courbe $B(t)$ appartenant à S'_n et on attache au point

$$X = A(t) + \tau_1 A'(t) + \cdots + \tau_{n-1} A^{(n-1)}(t)$$

le point

$$Y = B(t) + \tau_1 B'(t) + \cdots + \tau_{n-1} B^{(n-1)}(t).$$

Il y a des correspondances entre S_n et S'_n de nature simple dont l'étude est très utile comme un moyen d'étudier des correspondances plus compliquées. Je vais mentionner ici ce qu'on peut appeler des *projections doubles.* Immergons l'espace $S_n = S'_n$ dans un S_{n+1} et considérons dans S_{n+1} une variété V à n dimensions ainsi que deux points fixes P et Q en dehors de S_n. La projection double correspondante attache au point X de S_n le point Y de S'_n si les deux droites PX ef QY ont un point commun situé sur V.

En particulier, soit pour $n=2$ V une quadrique doublement réglée et pour $n \geqq 3$ un cône projetant une telle quadrique, le centre de projection ayant $n-3$ dimensions. La projection double correspondante est une transformation se laissant décomposer *en deux manières différentes l'une de l'autre* en ∞^1 de transformations homographiques d'hyperplans et il n'existe pas d'autres transformations qui permettent deux décompositions pareilles. Le cas de *trois* décompositions de tel genre est possible seulement pour $n=2$ et c'est seulement la *transformation quadratique birationnelle du plan* qui jouit de cette propriété.

Je n'insisterai pas sur la foule d'autres correspondances remarquables que j'ai trouvé pendant mes recherches et je passe à expliquer les résultats relatifs à la déformation projective mentionnés plus haut. Soit une déformation projective portant une surface non développable V dans une surface V', forcément aussi non développable. A chaque point A de V il existe ∞^1 homographies osculatrices H, mais la partie de H relative au plan tangent à V en A est la même pour chaque choix de H. Or faisons passer par chaque point A de V une tangente déterminée τ à la surface V. Nous obtenous une transformation C de l'espace ambiant S_3 en faisant correspondre, à chaque point de τ, le point qui lui correspond dans l'homographie H relative au point de contact A. On peut se demander s'il est possible d'arranger cette construction de manière que H soit l'homographie tangente à C tout le long de chaque droite τ. Il se trouve que ceci a lieu si et seulement si τ est une tangente base. C'est de cette manière que j'attache géométriquemet à une déformation projective de la surface V la déformation projective singulière C de la congruence L engendrée par les droites τ.

Mais il y a plus. La transformation C de la congruence L possède une propriété géométrique caractéristique, qui est extrêmement simple et intuitive. En effet C est une transformation asymptotique de la congruence L. Voici ce qui cela veut dire: *Une surface réglée S tout à fait arbitraire contenue dans L est portée par C dans une surface réglée S' de telle façon qu'à chaque courbe asymptotique de S correspond une courbe asymptotique de S'*. Outre ceci, nous avons une autre circonstance très remarquable. Si on choisit la surface réglée S de telle façon qu'elle touche la surface originale V le long d'une courbe asymptotique de V, alors il se montre que, dans ce cas particulier, la correspondance entre les deux surfaces réglées S et S' est une déformation projective. En partant de ceci, on prouve qu'une déformation projective d'une surface non réglée V peut être considérée comme une enveloppe d'une famille ∞^1 de déformations projectives de surfaces réglées. A ce qu'il me semble, ce fait mérite d'être approfondi. Après 36 années depuis la création de la notion de déformation projective, cette notion acquiert ainsi finalement une vie nouvelle, cette fois vraiment géométrique et intuitive. Quel dommage que je ne puis plus communiquer ces résultats au feu ami FUBINI qui avait guidé mes premiers pas dans la vie scientifique!

ЗАМЕЧАНИИ К ПРОЕКТИВНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Э. ЧЕХ (Прага)

(Резюме)

Автор дает обзор исследований, связанных с проективными деформациями, введенными Фубини. Говоря о роли этого понятия в исследованиях по проективной геометрии, он дает сводку относящихся сюда своих результатов и результатов Э. Картана.