Eduard Čech

Sur les nombres de Betti locaux

Ann. of Math. (3) 35 (1934), 678-701

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501033

Annals of Mathematics
Vol. 35, No. 3, July, 1934

SUR LES NOMBRES DE BETTI LOCAUX[1]

Par Eduard Čech

(Received November 23, 1933)

Soit R un espace topologique arbitraire; soit a un point donné de R; soit $k = 0, 1, 2, \cdots$. Au Chap. I, je définis le $k^{\text{ième}}$ *nombre de Betti local de R au point a*, désigné par $\beta_k(a, R)$. La signification du nombre $\beta_0(a, R)$ est très simple (v. n°3). Si $k \geqq 1$ et si l'espace R est un polyèdre, le nombre $\beta_k(a, R)$ coïncide, comme on pourrait le démontrer sans peine, avec le nombre maximum des $(k - 1)$-cycles en a lin. indépendants, au sens de *M. E. R. van Kampen*.[2]

Au Chap. II, je prouve deux théorèmes d'addition pour les nombres de Betti locaux. Ces théorèmes pourraient être sans peine généralisés.

Au Chap. III, je donne une nouvelle forme aux axiomes de ma théorie des variétés, exposée récemment dans ce Journal.[3] Dans la nouvelle forme, ces axiomes reposent sur la notion des nombres de Betti locaux et sur celle de la connexité locale d'ordre supérieur que j'étudie dans un autre Mémoire (cité au n°4). En se basant sur les nouveaux axiomes, on pourrait un peu simplifier quelques démonstrations dans *Variétés.*

Soit R un espace topologique arbitraire; soit S un sous-ensemble fermé de R; soit a un point donné de S; soit $k = 0, 1, 2, 3, \cdots$. Au Chap. IV, je définis ce qu'on pourrait appeler le $k^{\text{ième}}$ *nombre de Betti extérieur de S au point a*, désigné par $\alpha_k(a, R - S)$. Si l'espace R est régulier et localement connexe, l'ensemble S coupe l'espace R au point a localement en $\alpha_0(R - S) + 1$ régions (v. n°25); autrement dit S détermine en a une "lokale Zerschneidung" de R d'ordre $\alpha_0(R - S) + 1$ au sens de M. K. Zarankiewicz.[4]

Au Chap. V, je donne une localisation du théorème de dualité: *Si S est un sous-ensemble fermé de l'espace euclidien R_n à n dimensions,*[5] *on a en chaque point*

---

[1] J'ai exposé quelques résultats de ce Mémoire dans une conférence que j'ai faite le 5 juillet 1933 dans le Math. Kolloquium de M. Menger.

Après avoir terminé ce travail j'ai pris connaissance de deux notes de M. P. Alexandroff: *Sur les propriétés locales des ensembles fermés* (C. R. Paris 198, p. 227, 15 janvier 1934) et *Les groupes de Betti en un point* (ibidem, p. 315, 22 janvier 1934) qui semblent avoir beaucoup de points de contact avec mes recherches.

(Note de la rédaction: Un mémoire étendu de M. P. Alexandroff sur ces questions paraîtra dans le numéro d'octobre des Annals of Mathematics.)

[2] *Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze*, den Haag 1929, p. 26.

[3] *Théorie générale des variétés et de leurs théorèmes de dualité*, Annals of Math., t. 34, 1933, p. 621–730. Cité: *Variétés.*

[4] *Über die lokale Zerschneidung der Ebene*, Monatshefte f. Math. u. Phys., t. 39, 1932, p. 371.

[5] Le théorème est même démontré pour des espaces plus généraux que R_n.

a de S: $\beta_r(a, S) = \alpha_q(a, R - S)$, $0 \leqq p \leqq n - 1$, $q = n - p - 1$. En particulier l'ordre de coupure locale est un invariant topologique (local) de S.

Soit S *un sous-ensemble fermé de* R_{n-1}; soit a un point de S. Si a est un point intérieur de S, on a $\beta_{n-1}(a, S) = 1$; si a est un point frontière de S, on a $\beta_{n-1}(a, S) = 0$ (Cf. n°7, 6° et 7°). Donc, *si l'on immerge* S *dans un* R_n, a *est un point de coupure locale si et seulement si c'est un point intérieur de* S, *et l'ordre de coupure locale est alors égal à deux.*

Un cas particulier ($R = R_n$, $k = n - 1$) du théorème du n°5 est: *Soient* A *et* B *deux sous-ensembles fermés de* R_n; *soit* a *un point de* AB; *Supposons que* a *soit un point intérieur de* $A + B$, *mais un point frontière de* A *et de* B. *Alors* AB *coupe* R_n *localement en* a.

Un cas particulier ($R = R_n$, $k = n - 1$) du théorème du n°6 est: *Soient* A *et* B *deux sous-ensembles fermés de* R_n; *soit* a *un point de* AB. *Si* AB *coupe* R_n *localement en* a, *tandis que ni* A *ni* B *ne coupe* R_n *localement en* a, *alors* a *est un point intérieur de* $A + B$.

Un cas particulier ($R = R_2$, $k = 0$) du théorème du n°5 est: *Soient* A *et* B *deux sous-ensembles fermés du plan; soit* a *un point de* AB. *Si ni* A *ni* B *ne coupent localement le plan en* a, *tandis que* $A + B$ *coupe localement le plan en* a, *alors ou bien* a *est un point isolé de* AB (*et alors* $A + B$ *coupe le plan localement en* a *en deux régions*), *ou bien chaque entourage de* a *contient une infinité de composantes de* AB.

Un cas particulier ($R = R_2$, $k = 0$) du théorème du n°5 est: *Soient* A *et* B *deux sous-continus du plan; soit* a *un point de* AB. *Si* a *est un point isolé de* AB, *alors* $A + B$ *coupe le plan localement en* a. *Si chaque entourage de* a *contient une infinité de composantes de* AB, *alors* a *est un point de coupure locale du plan d'ordre infini pour* $A + B$.

Les deux derniers théorèmes constituent dans un certain sens une localisation des deux théorèmes classiques de *Janiszewski*.[6] Une localisation entièrement différente de ces théorèmes de *Janiszewski* se trouve au Mémoire cité au n°4.

Je suppose dans tous ce Mémoire que les coefficients des cycles et des homologies appartiennent à $\mathfrak{R}$, où $\mathfrak{R}$ signifie ou bien l'ensemble de tous les nombres rationnels ou bien l'ensemble de tous les entiers réduits mod p, p étant un nombre premier donné d'avance.

Pour les domaines $\mathfrak{R}$ ici considérés, les théorèmes locaux de dualité constituent une généralisation du *allgemeiner dimensionstheoretischer Rechtfertigungssatz* de *M. P. Alexandroff*.[7]

Quant à la théorie de l'homologie, je m'appuie sur mon Mémoire *Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque*,[8] cité: *Homologie*. Comme dans *Variétés* (p. 622, I), j'écrit C^p(p. ex.) au lieu de $\{C^p(\mathfrak{U})\}$ (*Homologie*, II, 20). Donc C^p est l'ensemble de tous les $C^p(\mathfrak{U})$, $\mathfrak{U}$ parcourant les réseaux[9] dans R.

---

[6] *Sur les coupures locales faites par les continus*, Prace mat.-fiz., t. 29, 1918, pp. 11–63.

[7] *Dimensionstheorie*, Math. Annalen, t. 106, pp. 161–238 (v. p. 208).

[8] Fund. Math., t. 19, 1932, pp. 149–183.

[9] La famille fondamentale de réseaux (*Homologie*, II, 1) est dans tout ce Mémoire celle de tous les réseaux ouverts (*Homologie*, III, 2).

Soit $\mathfrak{U}$ un réseau; soit $C^\circ(\mathfrak{U}) = \sum_{i=1}^{\alpha_0} r_i U_i (r_i \in \mathfrak{R}, U_i \in \mathfrak{U})$ un $(0, \mathfrak{U})$-cycle. Je pose $J[C^\circ(\mathfrak{U})] = \sum_{i=1}^{\alpha_0} r_i$. Si C° est un $(0, R)$-cycle absolu, le nombre $J[C^\circ(\mathfrak{U})]$ est, comme on le voit sans peine, indépendant du réseau $\mathfrak{U}$; je désigne ce nombre par $J(C^\circ)$.

I.

1. Soit R un espace topologique (*Homologie*, III, 1). Soit S un sous-ensemble fermé de R. Soit a un point donné de S. Soit $k = 0, 1, 2, \cdots$. Les lettres U, V, W désignent des entourages[10] de a dans R.

Soit $U \supset V$. Soit $\mathfrak{B}_k(V, U; S)$ l'ensemble de tous les (k, R)-cycles mod $(S - U)$ dans S; deux éléments C^k et D^k de $\mathfrak{B}_k(V, U; S)$ seront considérés comme égaux si et seulement si $C^k \sim D^k$ mod $(S - V)$ dans S. L'ensemble $\mathfrak{B}_k(V, U; S)$ est un module (*Homologie*, I, 1). Désignons par $\beta_k(V, U; S)$ le rang (*Homologie*, I, 3) de ce module si ce rang est fini; dans le cas contraire posons $\beta_k(V, U; S) = \infty$.

Pour $W \subset V \subset U$ on a évidemment $\beta_k(W, U; S) \leqq \beta_k(V, U; S)$.

Il en résulte que, l'entourage U de a étant donné, le nombre $\beta_k(V, U; S)$ a une valeur fixe (indépendante de V) pour tous les voisinages $V \subset U$ de a suffisamment petits; désignons par $\beta_k(a, U; S)$ cette valeur fixe.

Pour $W \subset V \subset U$ on a évidemment $\beta_k(W, V; S) \geqq \beta_k(W, U; S)$. On en déduit sans peine que $\beta_k(a, V; S) \geqq \beta_k(a, U; S)$ pour $V \subset U$. Par suite trois cas sont à distinguer:

1°. Il existe un nombre fini m $(= 0, 1, 2, \cdots)$ tel que $\beta_k(a, U; S) = m$ pour tous les entourages U de a suffisamment petits; dans ce cas on pose $\beta_k(a, S) = m$.

2°. Le nombre $\beta_k(a, U; S)$ est fini pour tous les entourages U de a, mais si m est un nombre fini arbitrairement donné, on a $\beta_k(a, U; S) > m$ pour tous les entourages U de a suffisamment petits; dans ce cas on pose $\beta_k(a, S) = \omega$.

3°. On a $\beta_k(a, U; S) = \infty$ pour tous les entourages U de a suffisamment petits; dans ce cas on pose $\beta_k(a, S) = \infty$.

2. De *Homologie*, III, 3–11 on déduit sans peine que le nombre $\beta_k(a, S)$ ne dépend nullement de l'espace R, mais seulement du nombre k, du point a et (localement) de l'espace S.

3. *Si l'espace R est régulier au point a,*[11] *le nombre $\beta_0(a, S)$ a toujours une des trois valeurs* 0, 1, ∞: *On a $\beta_0(a, S) = 0$ si et seulement s'il existe un entourage U de a tel que chaque composante de S a un point commun avec $R - U$. On a*

---

[10] *Entourage* d'un point ou d'un sous-ensemble est un ensemble ouvert contenant le point ou le sous-ensemble considéré.

[11] Cela signifie, comme on sait, que chaque entourage U de a contient un entourage V de a tel que $\bar{V} \subset U$.

$\beta_0(a, S) = 1$ *si et seulement si a est un point isolé de l'espace S. On a* $\beta_0(a, S) = \infty$ *si et seulement si, pour chaque entourage U de a, une infinité de composantes de S sont contenues dans SU.*

DÉMONSTRATION. Si a est un point isolé de S, on a évidemment $\beta_0(a, S) = 1$, car $\beta_0(V, U; S) = 1$ si U est tel que $SU = (a)$. S'il existe un entourage U de a tel que chaque composante de S rencontre $R - U$, d'après *Homologie*, III, 16 on a $\beta_0(W, V; S) = 0$ si $V \subset U$, d'où $\beta_0(a, S) = 0$. Ces deux cas étant exclus, pour chaque entourage U de a l'ensemble US contient une infinité de composantes de S et donc aussi une infinité de quasicomposantes de S. L'espace R étant régulier au point a, il existe un entourage V de a tel que $\bar{V} \subset U$. L'ensemble VS contient une infinité de quasicomposantes de S; chaque telle quasicomposante est évidemment essentielle mod $(S - U)$ au sens de *Homologie*, III, 15, d'où $\beta_0(V, U; S) = \infty$ d'après *Homologie*, III, 17. Donc $\beta_0(a, S) = \infty$.

II.

4. LEMME. *Soit R un espace complètement normal* (*Homologie*, III, 19). *Soient* φ *et* χ *deux sous-ensembles fermés de R. Soit* $\mathfrak{U}$ *un réseau donné dans R. Il existe un affinement* $\mathfrak{V}$ *de* $\mathfrak{U}$ *tel que, si une* $(p, \mathfrak{V})$*-chaîne est contenue dans* φ *et dans* χ (*Homologie*, II, 5), *elle est aussi contenue dans* $\varphi\chi$.

La démonstration se trouve au n°12 de mon Mémoire *Sur la connexité locale d'ordre supérieur* (à paraître dans Compositio Mathematica).

5. *Soit R un espace complètement normal. Soit* $R = A + B$, *A et B étant des sous-ensembles fermés de R. Soit* $k = 0, 1, 2, \cdots$. *Soit* $a \in AB$. *Soit* $\beta_{k+1}(a, A) = \beta_{k+1}(a, B) = 0$. *Alors* $\beta_k(a, AB) \geqq \beta_{k+1}(a, R)$.

DÉMONSTRATION. On voit sans peine qu'il suffit de prouver que, U étant un entourage donné de a, l'inégalité $\beta_{k+1}(a, U; R) \geqq m$ $(= 0, 1, 2, \cdots)$ entraîne que $\beta_k(a, U; AB) \geqq m$. Soit donc $\beta_{k+1}(a, U; R) \geqq m$ et soit $V \subset U$ un entourage de a. Evidemment, il suffit d'en déduire que $\beta_k(V, U; AB) \geqq m$.

Puisque $\beta_{k+1}(a, A) = 0$, on a $\beta_{k+1}(a, V; A) = 0$. Donc il existe un entourage $W_1 \subset V$ de a tel que $\beta_{k+1}(L_1, V; A) = 0$ pour chaque entourage $L_1 \subset W_1$ de a. Pareillement on voit qu'il existe un entourage $W_2 \subset V$ de a tel que $\beta_{k+1}(W_1', V; B) = 0$ pour chaque entourage $W_2' \subset W_2$ de a. Posons $W = W_1W_2$ de manière que $\beta_{k+1}(W, V; A) = \beta_{k+1}(W, V; B) = 0$.

Puisque $\beta_{k+1}(a, U; R) \geqq m$, on a $\beta_{k+1}(W, U; R) \geqq m$. Donc il existe des $(k + 1, R)$-cycles C_i^{k+1} mod $(R - U)$ $(1 \leqq i \leqq m)$ tels que l'homologie

$$\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{k+1} \sim 0 \text{ mod } (R - W) \quad (r_i \in \mathfrak{R}) \text{ entraîne que } r_1 = \cdots = r_m = 0.$$

Donc il existe un réseau $\mathfrak{U}_1$ tel que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_1) \sim 0$ mod $(R - W)$ entraîne que $r_1 = \cdots = r_m = 0$.

Soit $\mathfrak{U}_2$ un affinement de $\mathfrak{U}_1$ normal (*Homologie*, II, 15 et 16) rel. aux cycles mod $(B - V)$ dans B. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_3$ de $\mathfrak{U}_2$ d'après 4, en y posant $\varphi = B$, $\chi = R - V$. Soit $\mathfrak{U}_4$ un affinement de $\mathfrak{U}_3$ normal rel. aux cycles mod $(A - V)$ dans A. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_5$ de $\mathfrak{U}_4$ d'après 4, en y posant $\varphi = A$, $\chi = R - V$. Soit $\mathfrak{U}_6$ un affinement de $\mathfrak{U}_5$ normal rel. aux cycles mod $(AB - V)$ dans AB. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_7$ de $\mathfrak{U}_6$ d'après 4, en y posant $\varphi = AB$, $\chi = R - U$ ainsi qu'un affinement $\mathfrak{U}_8$ de $\mathfrak{U}_7$ de nouveau d'après 4, mais en y posant $\varphi = A$, $\chi = B$. Soit $\pi_{21} = \text{Pr.}\ (\mathfrak{U}_{21}\ \mathfrak{U}_1), \cdots,$ $\pi_{87} = \text{Pr.}\ (\mathfrak{U}_8, \mathfrak{U}_7)_1$ $\pi_{31} = \pi_{21}\ \pi_{321} \cdots$.

Comme $A + B = R$, on peut poser $C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_8) = C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - C_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8)$ $(1 \leqq i \leqq m)$, où $C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) \subset A$, $C_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) \subset B$. Soit $\Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8)$ cette partie de la $(k, \mathfrak{U}_8)$-chaîne $FC_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8)$ dont les simplexes sont $\neq 0$ mod $(R - U)$. Comme $C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_8) \to 0$ mod $(R - U)$, on a $FC_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) = FC_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8)$ mod $(R - U)$; donc $\Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8)$ est aussi cette partie de la chaîne $FC_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8)$ dont les simplexes sont $\neq 0$ mod $(R - U)$. Comme $C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) \subset A$, on a $\Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8) \subset A$. Comme $C_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) \subset B$, on a $\Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8) \subset B$. D'après la définition de $\mathfrak{U}_8$ il en résulte que $\Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8) \subset AB$, d'où $F\Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8) \subset AB$. Comme $\Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8) = FC_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8)$ mod $(R - U)$, on a $F\Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8) \subset R - U$. Donc $F\pi_{87}\Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8) \subset AB$, $F\pi_{87}\Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8) \subset R - U$, d'où $F\pi_{87}\ \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8) \subset AB - U$ d'après la définition de $\mathfrak{U}_8$. Donc $\pi_{86}\ \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8)$ est un $(k, \mathfrak{U}_6)$-cycle mod $(AB - U)$ dans AB. D'après la définition de $\mathfrak{U}_6$, $\pi_{85}\ \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8)$ est un $(k, \mathfrak{U}_5)$-cycle essentiel mod $(AB - U)$ dans AB.

Il ne reste qu'à démontrer que les $(k, \mathfrak{U}_5)$-cycles $\pi_{85}\ \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8)$ $(1 \leqq i \leqq m)$ ne sont liés par aucune homologie mod $(AB - V)$ dans AB, car alors (*Homologie*, II, 28) $\beta_k(V, U; AB) \geqq m$, c. q. f. d.

Soit donc $\sum_{i=1}^{m} r_i\ \pi_{85}\ \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8) \sim 0$ mod $(AB - V)$ dans AB $(r_i \in \mathfrak{R})$; on doit prouver que $r_1 = \cdots = r_m = 0$. L'homologie qui vient d'être écrite signifie qu'il existe une $(k + 1, \mathfrak{U}_5)$-chaîne $D^{k+1}(\mathfrak{U}_5)$ dans AB telle que

(1) $FD^{k+1}(\mathfrak{U}_5) = \pi_{85} \sum_{i=1}^{m} r_i\ \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8)$ mod $(AB - V)$. Or $\sum_{i=1}^{m} r_i\ C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) \to \sum_{i=1}^{m} r_i\ \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8)$ mod $(R - U)$. Donc la $(k + 1, \mathfrak{U}_5)$-chaîne $\pi_{85} \sum_{i=1}^{m} r_i\ C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - D^{k+1}(\mathfrak{U}_5)$ est située dans A et sa frontière est située dans $(R - V)$.

D'après la définition de $\mathfrak{U}_5$, on a donc $F\pi_{85} \sum_{i=1}^{m} r_i\ C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - FD^{k+1}(\mathfrak{U}_5) \subset A - V$. Donc $\pi_{84} \sum_{i=1}^{m} r_i\ C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{54}\ D^{k+1}(\mathfrak{U}_5)$ est un $(k + 1, \mathfrak{U}_4)$-cycle mod $(A - V)$ dans A. D'après la définition de $\mathfrak{U}_4$, $\pi_{83} \sum_{i=1}^{m} r_i\ C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{53}\ D^{k+1}(\mathfrak{U}_5)$ est un $(k + 1, \mathfrak{U}_3)$-cycle essentiel mod $(A - V)$ dans A et par suite

(2) $\pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_{i\,1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{51}\, D^{k+1}(\mathfrak{U}_5)$ est un $(k+1, U_1)$-cycle essentiel

mod $(A - V)$ dans A. De plus $\sum_{i=1}^{m} r_i\, C_{i\,2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) \to \sum_{i=1}^{m} r_i\, \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_8)$ mod $(R - U)$. On voit donc, en tenant compte aussi de (1), que la $(k+1, \mathfrak{U}_3)$-chaîne $\pi_{83} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_{i\,2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{53}\, D^{k+1}(\mathfrak{U}_5)$ est située dans B et que sa frontière est située dans $(R - V)$. D'après la définition de $\mathfrak{U}_3$, on a donc $F\pi_{83} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_{i\,2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - F\pi_{53}\, D^{k+1}(\mathfrak{U}_5) \subset B - V$. Donc $\pi_{82} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_{i\,2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{52}\, D^{k+1}(\mathfrak{U}_5)$ est un $(k+1, \mathfrak{U}_2)$-cycle mod $(B - V)$ dans B. D'après la définition de $\mathfrak{U}_2$

(3) $\pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_{i\,2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{51}\, D^{k+1}(\mathfrak{U}_5)$ est un $(k+1, \mathfrak{U}_1)$-cycle essentiel

mod $(B - V)$ dans B.

Comme $\beta_{k-1}(W, V; A) = 0$, il résulte de (2) (en vertu de *Homologie*, II, 28) que $\pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{i\,1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{51} D^{k+1}(\mathfrak{U}_5) \sim 0$ mod $(A - W)$ dans A. Comme $\beta_{k+1}(W, V; B) = 0$, il résulte de (3) que $\pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{i\,2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{51} D^{k+1}(\mathfrak{U}_5) \sim 0$ mod $(B - W)$ dans B. Donc il existe des $(k+2, \mathfrak{U}_1)$-chaînes $E_1^{k+2}(\mathfrak{U}_1) \subset A$ et $E_2^{k+2}(\mathfrak{U}_1) \subset B$ telles que

$$E_1^{k+2}(\mathfrak{U}_1) \to \pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{i\,1}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{51} D^{k+1}(\mathfrak{U}_5) \bmod (A - W),$$

$$E_2^{k+2}(\mathfrak{U}_1) \to \pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{i\,2}^{k+1}(\mathfrak{U}_8) - \pi_{51} D^{k+1}(\mathfrak{U}_5) \bmod (B - W).$$

Donc $E_1^{k+2}(\mathfrak{U}_1) - E_2^{k+2}(\mathfrak{U}_1) \to \pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_8)$ mod $(R - W)$, d'où $\pi_{81} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_8) \sim 0$ mod $(R - W)$. Or, C_i^{k+1} étant un $(k+1, R)$-cycle mod $(R - U)$, on a $\pi_{81} C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_8) \sim C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_1)$ mod $(R - U) \subset (R - W)$. Donc $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_1) \sim 0$ mod $(R - W)$. D'après la définition de $\mathfrak{U}_1$, il en résulte que $r_1 = \cdots = r_m = 0$, c.q.f.d.

6. *Soit R un espace complètement normal. Soit $R = A + B$, A et B étant des sous-ensembles fermés de R. Soit $a \in AB$. Soit $k = 0, 1, 2, \cdots$. Soit $\beta_k(a, A) = \beta_k(a, B) = 0$. Alors $\beta_k(a, AB) \leqq \beta_{k+1}(a, R)$.*

DÉMONSTRATION. On voit sans peine qu'il suffit de prouver que, U étant un entourage donné de a, il existe un entourage $V \subset U$ de a tel que l'inégalité $\beta_k(a, U; AB) \geqq m$ $(= 0, 1, 2, \cdots)$ entraîne que $\beta_{k+1}(a, V; R) \geqq m$. Soit donc $\beta_k(a, U; AB) \geqq m$. Comme $\beta_k(a, A) = \beta_k(a, B) = 0$, on a

$$\beta_k(a, U; A) = \beta_k(a, U; B) = 0.$$

Donc on peut choisir l'entourage $V \subset U$ de a de manière que

$$\beta_k(V, U; A) = \beta_k(V, U; B) = 0$$

Il s'agit de prouver que, W étant un entourage de a contenu dans V, on a $\beta_{k+1}(W, V; R) \geqq m$.

Puisque $\beta_k(a, U; AB) \geqq m$, on a $\beta_k(W, U; AB) \geqq m$. Donc il existe des (k, R)-cycles Γ_i^k mod $(AB - U)$ dans AB $(1 \leqq i \leqq m)$ tels que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^k \sim 0 \bmod (AB - W)$ dans AB $(r_i \in \mathfrak{R})$ entraîne que $r_1 = \cdots = r_m = 0$.

Donc il existe un réseau $\mathfrak{U}_1$ tel que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod (AB - W)$ dans AB entraîne que $r_1 = \cdots = r_m = 0$. Déterminons d'après 4 d'abord un affinement $\mathfrak{U}_2$ de $\mathfrak{U}_1$ et ensuite un affinement $\mathfrak{U}_3$ de $\mathfrak{U}_2$, en y posant dans le premier cas $\varphi = AB$, $\chi = R - W$ et dans le second $\varphi = A$, $\chi = B$. Soit $\mathfrak{U}_4$ un affinement de $\mathfrak{U}_3$ normal rel. aux cycles mod $(R - V)$ dans R. Soit $\pi_{21} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2)$, $\pi_{32} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$, $\pi_{43} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_4, \mathfrak{U}_3)$, $\pi_{42} = \pi_{32}\pi_{43}, \cdots$. Puisque les $\Gamma_i^k (1 \leqq i \leqq m)$ sont des (k, R)-cycles mod $(AB - U)$ dans AB, ce sont aussi des (k, R)-cycles mod $(A - U)$ dans A. Or $\beta_k(V, U; A) = 0$, de manière que $\Gamma_i^k \sim 0 \bmod (A - V)$ dans A. Pareillement $\Gamma_i^k \sim 0 \bmod (B - V)$ dans B, car $\beta_k(V, U; B) = 0$. Donc il existe des $(k + 1, \mathfrak{U}_4)$-chaînes $C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_4) \subset A$ et $C_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_4) \subset B$ telles que

(1) $C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_4) \to \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_4) \bmod (A - V)$, $\qquad C_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_4) \to \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_4) \bmod (B - V)$.

Posons $C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_4) = C_{i1}^{k+1}(\mathfrak{U}_4) - C_{i2}^{k+1}(\mathfrak{U}_4)$. Alors $C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_4) \to 0 \bmod (R - V)$ de sorte que, d'après la définition de $\mathfrak{U}_4$, $\pi_{43} C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_4)$ est un $(k + 1, \mathfrak{U}_3)$-cycle essentiel mod $(R - V)$.

Il ne reste qu'à démontrer que les $\pi_{43} C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_4) (1 \leqq i \leqq m)$ ne sont liés par aucune homologie mod $(R - W)$, car alors (v. *Homologie*, II, 28) on a $\beta_{k+1}(W, V; R) \geqq m$, c.q.f.d.

Soit donc $\pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_4) \sim 0 \bmod (R - W) (r_i \in \mathfrak{R})$; il s'agit d'en déduire que $r_1 = \cdots = r_m = 0$. L'homologie qui vient d'être écrite signifie qu'il existe une $(k + 2, \mathfrak{U}_3)$-chaîne $D^{k+2}(\mathfrak{U}_3)$ telle que

$$(2) \quad D^{k+2}(\mathfrak{U}_3) \to \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{k+1}(\mathfrak{U}_4) \quad \text{mod } (R - W).$$

Puisque $R = A + B$, on peut poser $D^{k+2}(\mathfrak{U}_3) = D_1^{k+2}(\mathfrak{U}_3) - D_2^{k+2}(\mathfrak{U}_3)$, où $D_2^{k+2}(\mathfrak{U}_3) \subset A$, $D_2^{k+2}(\mathfrak{U}_3) \subset B$. Il résulte de (1) et (2) que

$$(3) \quad \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{i\,1}^{k+1}(\mathfrak{U}_4) - FD_1^{k+2}(\mathfrak{U}_4) = \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{i\,2}^{k+1}(\mathfrak{U}_4) - FD_2^{k+2}(\mathfrak{U}_3)$$

mod $(R - W)$. Désignons par $E^{k+1}(\mathfrak{U}_3)$ cette partie d'un (et donc aussi de l'autre) membre de (3) dont les simplexes sont $\not\equiv 0$ mod $(R - W)$. Alors $E^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \subset A$, $E^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \subset B$, d'où $E^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \subset AB$ d'après la définition de $\mathfrak{U}_3$. En outre

$$FD_1^{k+2}(\mathfrak{U}_3) = \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{i\,1}^{k+1}(\mathfrak{U}_4) - E^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \quad \text{mod } (R - W),$$

d'où $\pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i C_{i\,1}^{k+1}(\mathfrak{U}_4) - E^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \to 0$ mod $(R - W)$. En tenant compte de (1), on en déduit que $FE^{k+1}(\mathfrak{U}_3) - \pi_{43} \sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_4) \subset R - W$. Donc la $(k, \mathfrak{U}_2)$-chaîne

$$(4) \quad F\pi_{32} E^{k+1}(\mathfrak{U}_3) - \pi_{42} \sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_4)$$ est située dans $(R - W)$. Puisque $E^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \subset AB$, $\Gamma_i^k(\mathfrak{U}_4) \subset AB$, la chaîne (4) est aussi située dans AB. D'après la définition de $\mathfrak{U}_2$, la chaîne (4) est donc située dans $AB - W$. Donc $\pi_{32} E^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \to \pi_{42} \sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_4)$ mod $(AB - W)$, d'où

$$\pi_{31} E^{k+1}(\mathfrak{U}_3) \to \pi_{41} \sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_4) \text{ mod } (AB - W).$$

Donc $\pi_{41} \sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_4) \sim 0$ mod $(AB - W)$ dans AB. Or, Γ_i^k étant un (k, R)-cycle mod $(AB - U)$ dans AB, on a $\pi_{41} \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_4) \sim \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_1)$ mod $(AB - U)$ dans AB. Comme $W \subset U$, il en résulte que $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^k(\mathfrak{U}_1) \sim 0$ mod $(AB - W)$ dans AB. D'après la définition de $\mathfrak{U}_1$, on en déduit que $r_1 = \cdots = r_m = 0$, c.q.f.d.

III.

7. Soit $n = 1, 2, 3, \cdots$. Soit R un espace topologique. Soit $S \subset R$. Nous dirons que R est *une variété à n dimensions* mod S *d'ordre* 0, ou *une* $V_0^n(S)$, si les axiomes suivants sont vérifiés:

1°. *R est un espace bicompact.*[12]

[12] Cela signifie: 1° a et b étant deux points distincts de R, il existe des ensembles ouverts U et V tels que $a \in U$, $b \in V$, $UV = 0$; 2° de chaque famille d'ensembles ouverts recouvrant R on peut extraire une famille finie recouvrant R.

2°. *Chaque sous-ensemble ouvert de R est un F_σ dans R.*
3°. *L'ensemble S est fermé dans R.*
4°. $\dim R - S = n$.
5°. *R est localement connexe d'ordre n rel. à $\mathfrak{R}$ à chaque point $x \in R - S$.*[13]
6°. *Pour $x \in R - S$ on a $\beta_n(x, R) = 1$.*
7°. *A étant un sous-ensemble fermé de R, on a $\beta_n(x, A) = 0$ pour chaque $x \in A \cdot \overline{R - A} - S$.*

8. *Soit $S \subset T = \overline{T} \subset R$. Si R est une $V_0^n(S)$, R est* évidemment *aussi une $V_0^n(T)$.*

9. *Soit R un espace topologique; soit $S \subset R$, R est une $V_0^n(S)$ si et seulement s'il satisfait aux axiomes A_1, A_2, A_3, A_4, B, D_1, D_2, E énoncés dans Variétés, nos.* 1, 2, 3, 7, 9, 11, 12, 13.

DÉMONSTRATION. Les axiomes A_1, A_2, A_3, A_4, B disent la même chose que les axiomes 1° — 5°. On doit donc déduire d'abord la validité de D_1, D_2, et E en supposant 1° — 7°, ce qui sera fait aux n^{os} 9.11 (pour D_1), 9.12 (pour D_2) et 9.13 (pour E), et ensuite la validité de 6° et 7° en supposant A_1, A_2, A_3, A_4, B, D_1, D_2, E, ce qui sera fait aux n^{os} 9.21 (pour 6°) et 9.22 (pour 7°).

9.11 Soit Γ^{n-1} un $(n - 1, R)$-cycle du type t_2 dans A (*Variétés*, 10). Soit H le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$ (*Variétés* 10.3) de manière que $H = \overline{H} \subset R - S$. On doit prouver (*Variétés*, 11) que l'ensemble $H - A$ est ouvert. Supposons le contraire. Il existe donc un point $a \in (H - A)\overline{R - H} \subset H \cdot \overline{R - H} - S$. D'après l'axiome 7° on a $\beta_n(a, H) = 0$. Or soit C^n le cycle relatif correspondant à Γ^{n-1} d'après *Variétés* 10.1. Donc C^n est un (n, R)-cycle mod A dans H et $FC^n(\mathfrak{U}) \sim \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans A pour chaque réseau $\mathfrak{U}$. Soit U un entourage de a si petit que $UA = 0$ Purisque $\beta_n(a, H) = 0$, on a $\beta_n(a, U; H) = 0$. Donc il existe un entourage $V \subset U$ de a tel que $\beta_n(V, U; H) = 0$. Or $A \subset H - U$, de sorte que C^n est un (n, R)-cycle mod $(H - U)$ dans H. Comme $\beta_n(V, U; H) = 0$, on a $C^n \sim 0$ mod $(H - V)$ dans H. Donc il existe pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ une $(n + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $M^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset H$ et une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $D^n(\mathfrak{U}) \subset H - V$ telles que $M^{n+1}(\mathfrak{U}) \rightarrow C^n(\mathfrak{U}) - D^n(\mathfrak{U}) \rightarrow 0$, d'où $FD^n(\mathfrak{U}) \sim \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans A. Or ceci signifie qu'il existe pour chaque $\mathfrak{U}$ une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $E^n(\mathfrak{U}) \subset A$ telle que $D^n(\mathfrak{U}) - E^n(\mathfrak{U}) \rightarrow \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$, d'où $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $(H - U) + A \subset H$. D'après la définition de H il en résulte que $a \in H - U$, ce qui est une contradiction.

9.12. Soit $a \in R - S$. On doit prouver (*Variétés*, 12) que le point a est situé à l'intérieur d'un $(n - 1, R)$-cycle du type t_2. Soit P_2 un sommet du réseau gén. $\mathfrak{P}_2$ (*Variétés*, 9.2) contenant le point a. D'après l'axiome 6° on a $\beta_n(a, R) = 1$ d'où, comme on le voit sans peine, $\beta_n(a, \overline{P}_2) = 1$. Donc il existe un entourage $U \subset P_2$ de a tel que $\beta_n(a, U; \overline{P}_2) = 1$. Donc il existe un entourage $V \subset U$ de a tel que $\beta_n(W, U; \overline{P}_2) = 1$ pour chaque entourage $W \subset V$ de a.

[13] Cela signifie (v. le n°18 du Mémoire cité au n° 4): Chaque entourage P de x contient un entourage Q de x tel que $\Gamma^n \sim 0$ dans $\overline{P}$ pour chaque (n, R)-cycle absolu Γ^n dans $\overline{Q}$.

En particulier $\beta_n(V, U; \overline{P}_2) = 1$ de sorte qu'il existe un(n, R)-cycle C^n mod $(\overline{P}_2 - U)$ dans $\overline{P}_2$ qui n'est pas ~ 0 mod $(\overline{P}_2 - V)$ dans $\overline{P}_2$, tandis que chaque (n, R)-cycle mod $(\overline{P}_2 - U)$ dans $\overline{P}_2$ est $\sim rC^n(r \in \mathfrak{R})$ mod $(\overline{P}_2 - V)$ dans $\overline{P}_2$ et par suite aussi mod $(\overline{P}_2 - W)$ dans $\overline{P}_2$ pour chaque entourage $W \subset V$ de a. Comme $\beta_n(W, U; \overline{P}_2) = 1$, il en résulte que C^n n'est ~ 0 mod $(\overline{P}_2 - W)$ dans P pour aucun choix de $W \subset V$. Pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ soit $\Gamma^{n-1}(\mathfrak{U}) = FC^n(\mathfrak{U})$. C^n étant un (n, R)-cycle mod $(\overline{P}_2 - U)$ dans $\overline{P}_2$, on voit sans peine que Γ^{n-1} est un $(n - 1, R)$-cycle absolu dans $(\overline{P}_2 - U)$. Evidemment $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $\overline{P}_2$; donc (*Variétés*, 10) Γ^{n-1} est un $(n - 1, R)$-cycle du type t_2 dans $A = \overline{P}_2 - U$. Soit H le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$. On doit prouver que $a \in H - A$. Or $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $\overline{P}_2$, de sorte que (*Variétés* 10.3)$H \subset \overline{P}_2$. Supposons par impossible que le point a n'appartienne pas à $H - A$. Alors il existe un entourage $W \subset V$ de a tel que $WH = 0$, d'où $H \subset \overline{P}_2 - W$. Or $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans H d'après la définition de H, de sorte que pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ il existe une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $D^n(\mathfrak{U}) \subset H$ telle que $FD^n(\mathfrak{U}) \sim \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans $A = \overline{P}_2 - U$, d'où $F[C^n(\mathfrak{U}) - D^n(\mathfrak{U})] \sim 0$ dans $\overline{P}_2 - U$. Donc il existe une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $E^n(\mathfrak{U}) \subset \overline{P}_2 - U$ telle que $C^n(\mathfrak{U}) - D^n(\mathfrak{U}) - E^n(\mathfrak{U}) \to 0$. D'après *Homologie*, II, 21 on peut s'arranger de façon que $\{C^n(\mathfrak{U}) - D^n(\mathfrak{U}) - E^n(\mathfrak{U})\}$ soit un (n, R)-cycle dans $\overline{P}_2$. Or $P_2 \in \mathfrak{P}_2$, de sorte que $C^n(\mathfrak{U}) - D^n(\mathfrak{U}) - E^n(\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $\overline{P}_2$ d'après *Variétés*, 9.1–9.3. Donc il existe pour chaque $\mathfrak{U}$ une $(n + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $M^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset \overline{P}_2$ telle que $C^n(\mathfrak{U}) = FM^{n+1}(\mathfrak{U}) + D^n(\mathfrak{U}) + E^n(\mathfrak{U})$. Or $D^n(\mathfrak{U}) \subset H \subset \overline{P}_2 - W$, $E^n(\mathfrak{U}) \subset \overline{P}_2 - U \subset \overline{P}_2 - W$, de sorte que $C^n \sim 0$ mod $(\overline{P}_2 - W)$ dans $\overline{P}_2$, ce qui est une contradiction.

9.13. Soit $a \in R - S$; soit Q un entourage de a. D'après l'axiome 6° on a $\beta_n(a, R) = 1$ et par suite aussi $\beta_n(a, \bar{Q}) = 1$. Donc il existe un entourage $Q_1 \subset Q$ de a tel que $\beta_n(a, Q_2; \bar{Q}) = 1$ pour chaque entourage $Q_2 \subset Q_1$ de a. On peut supposer que Q_1 fasse partie d'un sommet du réseau gén. $\mathfrak{P}_2$ (*Variétés*, 9.3). Soit Q_2 un entourage de a contenu dans Q_1. Comme $\beta_n(a, Q_2; \bar{Q}) = 1$, il existe un entourage Q_3 de a tel que $\beta_n(Q_3, Q_2; \bar{Q}) = 1$.

Soient Γ_1^{n-1}, Γ_2^{n-1} deux $(n - 1, R)$-cycles absolus dans $(\bar{Q}_1 - Q_2)$ qui soient ~ 0 dans $\bar{Q}_1$. Il suffit de prouver (*Variétés*, 13) qu'il existe deux nombres $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$, dont un au moins $\neq 0$, tels que $r_1\Gamma_1^{n-1} + r_2\Gamma_2^{n-1} \sim 0$ dans $(\bar{Q} - Q_3)$. Soient C_1^n, C_2^n les cycles relatifs correspondant a Γ_1^{n-1}, Γ_2^{n-1} d'après *Variétés*, 10.1. Ce sont donc des (n, R)-cycles mod $(\bar{Q}_1 - Q_2)$ dans $\bar{Q}_1$ tels que $FC_i^n(\mathfrak{U}) \sim \Gamma_i^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans $(\bar{Q}_1 - Q_2)$ pour $i = 1, 2$ et pour chaque réseau $\mathfrak{U}$. Les C_i^n étant des (n, R)-cycles mod $(\bar{Q}_1 - Q_2)$ dans $\bar{Q}_1$, l'équation $\beta_n(Q_3, Q_2; \bar{Q}) = 1$ entraîne qu'il existe deux nombres $r_1, r_2 \in \mathfrak{R}$, dont un au moins $\neq 0$, tels que $r_1C_1^n + r_2C_2^n \sim 0$ mod $(\bar{Q} - Q_3)$ dans $\bar{Q}$. Donc il existe pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ une $(n + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $M^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset \bar{Q}$ et une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $D^n(\mathfrak{U}) \subset \bar{Q} - Q_3$ telles que

$$M^{n+1}(\mathfrak{U}) \to r_1C_1^n(\mathfrak{U}) + r_2C_2^n(\mathfrak{U}) - D^n(\mathfrak{U}) \to 0.$$

Or $FC_i^n(\mathfrak{U}) \sim \Gamma_i^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans $\bar{Q}_1 - Q_2 \subset \bar{Q} - Q_3$, de sorte qu'il existe deux $(n, \mathfrak{U})$-chaînes $E_i^n(\mathfrak{U}) \subset \bar{Q} - Q_3$ $(i = 1, 2,)$ telles que $FC_i^n(\mathfrak{U}) = \Gamma_i^{n-1}(\mathfrak{U}) + FE_i^n(\mathfrak{U})$.

d'où $r_1\Gamma_1^{n-1}(\mathfrak{U}) + r_2\Gamma_2^{n-1}(\mathfrak{U}) = F[D^n(\mathfrak{U}) - r_1E_1^n(\mathfrak{U}) - r_2E_2^n(\mathfrak{U})]$, donc $r_1\Gamma_1^{n-1} + r_2\Gamma_2^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{Q} - Q_3$, c.q.f.d.

9.21. Soit $a \in R - S$. On doit prouver que $\beta_n(a, R) = 1$. Si l'on avait $\beta_n(a, R) > 1$, il existerait un entourage U de a tel que $\beta_n(V, U; R) > 1$ pour chaque entourage $V \subset U$ de a. Or c'est impossible d'après *Variétés*, 14.1. Donc il suffit de prouver que $\beta_n(a, R) \geqq 1$.

D'après l'axiome D_2 il existe un $(n - 1, R)$-cycle Γ^{n-1} du type t_2 dans A tel que le point a appartient à l'intérieur de Γ^{n-1}. Soit H le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$ de sorte que $a \in H - A$. D'après l'axiome D_1, l'ensemble $H - A$ est un entourage de a. Evidemment $\beta_n(a, R) = \beta_n(a, H)$. Il suffit donc de prouver que $\beta_n(a, H) \geqq 1$. Supposons au contraire que $\beta_n(a, H) = 0$, d'où $\beta_n(a, H - A; H) = 0$. Donc il existe un entourage $V \subset H - A$ de a tel que $\beta_n(V, H - A; H) = 0$. Soit C^n le cycle relatif correspondant à Γ^{n-1} d'après *Variétés*, 10.1. Donc C^n est un (n, R)-cycle mod A dans H tel que $FC^n(\mathfrak{U}) \sim \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans A pour chaque réseau $\mathfrak{U}$. Comme $\beta_n(V, H - A; H) = 0$, on a $C^n \sim 0$ mod $(H - V)$ dans H. Donc il existe pour chaque $\mathfrak{U}$ une $(n + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $M^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset H$ et une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $D^n(\mathfrak{U}) \subset H - V$ telles que $M^{n+1}(\mathfrak{U}) \to C^n(\mathfrak{U}) - D^n(\mathfrak{U}) \to 0$. Or $FC^n(\mathfrak{U}) \sim \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans A de sorte qu'il existe une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $E^n(\mathfrak{U}) \subset A$ telle que $\Gamma^{n-1}(\mathfrak{U}) = F[C^n(\mathfrak{U}) - E^n(\mathfrak{U})]$. Donc $D^n(\mathfrak{U}) + E^n(\mathfrak{U}) \to \Gamma^{n-1}(\mathfrak{U})$, d'où $\Gamma^{n-1} \sim 0$ dans $A + (H - U)$, donc $H = A + (H - U)$ d'après la définition de H, d'où la contradiction $a \in A + (H - U)$.

9.22. Soit A un sous-ensemble fermé de R et soit $a \in A \cdot \overline{R - A} - S$. On doit prouver que $\beta_n(a, A) = 0$. Supposons au contraire que $\beta_n(a, A) \geqq 1$. Il en résulte que $\beta_n(a, U; A) \geqq 1$ pour chaque entourage U de a suffisamment petit. D'après *Variétés* 12.1 on peut choisir cet entourage U de manière qu'il existe un $(n - 1, R)$-cycle absolu Δ^{n-1} dans $\bar{U} - U$ tel que $\Delta^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{U}$, mais non pas $\Delta^{n-1} \sim 0$ dans un vrai sous-ensemble fermé de $\bar{U}$. D'après *Variétés*, 14.1 il existe un entourage $V \subset U$ de a tel qu'à chaque couple C^n, D^n de (n, R)-cycles mod $(R - U)$ on puisse attacher deux nombres $r, s \in \mathfrak{R}$ ($r \neq 0$ ou $s \neq 0$) de manière que $rC^n + sD^n \sim 0$ mod $(R - V)$. On peut supposer que $\bar{V} \subset R - S$. Soit (*Variétés*, 1.2) W un entourage de a tel que $\bar{W} \subset V$. Comme $\beta_n(a, U; A) \geqq 1$, on a $\beta_n(W, U; A) \geqq 1$. Comme $a \in \overline{R - A}$, il existe un ensemble ouvert $Q \neq 0$ tel que $A\bar{Q} = 0$, $\bar{Q} \subset V$. Soit Φ la famille de tous les réseaux $\mathfrak{U}$ d'ordre mod $S \leqq n$ (*Variétés*, 7.2) et tels que 1° $u \in \mathfrak{U}$, $uS \neq 0$ entraîne que $u \subset R - V$; 2° $u \in \mathfrak{U}$, $u - V \neq 0$ entraîne que $u(Q + W) = 0$, 3° $u \in \mathfrak{U}$, $uA \neq 0$ entraîne que $uQ = 0$. On voit sans peine (v. *Variétés*, 7.4) que la famille Φ est complète (rel. à la famille fondamentale de tous les réseaux ouverts; v. *Homologie*, II, 30 et III, 2). Comme $\beta_n(W, U; A) \geqq 1$, il existe un (n, R)-cycle C^n mod $(A - U)$ dans A qui n'est pas ~ 0 mod $(A - W)$ dans A. Comme $\Delta^{n-1} \sim 0$ dans $\bar{U}$, il existe pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $D^n(\mathfrak{U}) \subset U$ telle que $FD^n(\mathfrak{U}) \sim \Delta^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans $\bar{U} - U$. D'après *Homologie*, II, 21 on peut s'arranger de façon que $D^n = \{D^n(\mathfrak{U})\}$ soit un (n, R)-cycle mod $(\bar{U} - U)$ dans $\bar{U}$. Donc C^n et D^n sont deux (n, R)-cycles mod $(R - U)$ de manière qu'il existe deux nembres $r, s \in \mathfrak{R}$ ($r \neq 0$ ou $s \neq 0$) tels que $rC^n + sD^n \sim 0$ mod $(R - V)$. Donc il existe pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ une $(n + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $M^{n+1}(\mathfrak{U})$ et une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $E^n(\mathfrak{U}) \subset R - V$ telles que $FM^{n+1}(\mathfrak{U}) = rC^n(\mathfrak{U}) + sD^n(\mathfrak{U}) - E^n(\mathfrak{U})$. Soit $\mathfrak{U} \in \Phi$. L'ordre mod S de $\mathfrak{U}$ étant $\leqq n$, chaque simplexe de $M^{n+1}(\mathfrak{U})$ contient un sommet u tel que $uS \neq 0$, d'où $u \subset R - V$; il en résulte que $M^{n+1}(\mathfrak{U}) \subset R - V$. Donc $rC^n(\mathfrak{U}) + sD^n(\mathfrak{U}) \subset R - V$ pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$.

Soit d'abord $s = 0$, d'où $r \neq 0$ et par suite $C^n(\mathfrak{U}) \subset R - V$ pour $\mathfrak{U} \in \Phi$. Comme $C^n(\mathfrak{U}) \subset A$ et comme aucun sommet de $\mathfrak{U} \in \Phi$ ne peut rencontrer simultanément W et $R - V$, on a $C^n(\mathfrak{U}) \subset A - W$ pour $\mathfrak{U} \in \Phi$. La famille Φ étant complète, on arrive à la contradiction que $C^n \sim 0$ mod $(A - W)$ dans A.

Passons au cas $s \neq 0$. Pour $\mathfrak{U} \in \Phi$ on a $C^n(\mathfrak{U}) \subset A$, $rC^n(\mathfrak{U}) + sD^n(\mathfrak{U}) \subset R - V$, $s \neq 0$, d'autre part un sommet de $\mathfrak{U}$ ne peut rencontrer simultanément ni A et Q, ni $R - V$ et Q. Il en résulte que pour $\mathfrak{U} \in \Phi$ aucun sommet d'un simplexe de $D^n(\mathfrak{U})$ ne peut rencontrer Q. Comme $D^n(\mathfrak{U}) \subset \bar{U}$, on a $D^n(\mathfrak{U}) \subset \bar{U} - Q$ pour $\mathfrak{U} \in \Phi$. Or $FD^n(\mathfrak{U}) \sim \Delta^{n-1}(\mathfrak{U})$ dans $\bar{U} - U \subset \bar{U} - Q$ de manière que $\Delta^{n-1}(\mathfrak{U}) \sim 0$ dans $(\bar{U} - Q)$ pour $\mathfrak{U} \in \Phi$. La famille Φ étant complète, on arrive à la contradiction que $\Delta^{n-1} \sim 0$ dans $(\bar{U} - Q)$.

10. Soit R une $V_0^n(S)$. On dit que R est *orientable* mod S s'il existe un (n, R)-cycle G^n mod S tel que, pour $A = \bar{A} \subset R$, $R - (A + S) \neq 0$, G^n n'est $\sim$ mod S à aucun (n, R)-cycle mod S dans $(A + S)$. Un tel cycle G^n s'appelle alors un (n, R)-*cycle principal* mod S. *Orienter* R mod S signifie que l'on choisit un (n, R)-cycle principal mod S bien déterminé.

11. *G^n est un (n, R)-cycle principal* mod S *si et seulement si pour $A = \bar{A} \subset R$, $R - (A + S) \neq 0$ on n'a jamais $G^n \sim 0$* mod $(A + S)$.

Démonstration. I. Supposons que $G^n \sim 0$ mod $(A + S)$. On doit prouver que $G^n \sim H^n$ mod S, H^n étant un (n, R)-cycle mod S dans $(A + S)$. Or pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ il existe une $(n + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $M^{n+1}(\mathfrak{U})$ et une $(n, \mathfrak{U})$-chaîne $H^n(\mathfrak{U}) \subset A + S$ telles que $M^{n+1}(\mathfrak{U}) \to G^n(\mathfrak{U}) - H^n(\mathfrak{U})$ mod S, d'où $H^n(\mathfrak{U}) \to 0$ mod S, car $G^n(\mathfrak{U}) \to 0$ mod S. D'après *Homologie*, II, 21 on peut s'arranger de façon que $H^n = \{H^n(\mathfrak{U})\}$ soit un (n, R)-cycle mod S dans $(A + S)$. Evidemment $G^n \sim H^n$ mod S.

II. Supposons que $G^n \sim H^n$ mod S, H^n étant un (n, R)-cycle mod S dans $(A + S)$. Alors évidemment $G^n \sim 0$ mod $(A + S)$.

12. *Soit $S \subset T = \bar{T} \subset R$.* Evidemment, *si R est une $V_0^n(S)$ orientable* mod S, *R est aussi une $V_0^n(T)$ orientable* mod T.

13. *Soit R une $V_0^n(S)$. R est orientable* mod S *si et seulement si l'axiome F* (*Variétés*, 16) *est satisfait.*

Démonstration. I. Supposons que l'axiome F soit vérifié. Nous avons construit un (n, R)-cycle principal mod S dans *Variétés* 17–17.5.

Soit G^n un (n, R)-cycle principal mod S. Pour chaque $x \in R - S$, soit (v. *Variétés*, 15) $\Theta_2(x)$ la famille de tous les $(n-1, R)$-cycles du type t_2 dans A, A étant assujetti à la condition de ne pas contenir x. On doit (*Variétés*, 15 et 16) attacher à chaque $a \in R - S$, $\Gamma^{n-1} \in \theta_2(a)$ un nombre $\omega(a, \Gamma^{n-1}) \in \mathfrak{R}$ selon les conditions suivantes: 1°$\omega(a, \Gamma^{n-1}) = 0$ si et seulement si le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$ ne contient pas le point a, 2° pour $\Gamma^{n-1} \in \theta_2(a)$, $r \in \mathfrak{R}$ on doit avoir $\omega(a, r\,\Gamma^{n-1}) = r\,\omega(a, \Gamma^{n-1})$; 3° pour $\Gamma_1^{n-1}, \Gamma_2^{n-2}, \Gamma_1^{n-1} + \Gamma_2^{n-1} \in \theta_2(a)$ on doit avoir $\omega(a, \Gamma_1^{n-1} + \Gamma_2^{n-1}) = \omega(a, \Gamma_1^{n-1}) + \omega(a, \Gamma_2^{n-1})$, 4° $a \in R - S$ et $\Gamma^{n-1} \in \theta_2(a)$ étant donnés, il doit exister un entourage V de a tel que $x \in V$ entraîne que $\Gamma^{n-1} \in \theta_2(x)$ et que $\omega(x, \Gamma^{n-1}) = \omega(a, \Gamma^{n-1})$.

Soit donc $a \in R - S$ et soit $\Gamma^{n-1} \sim \theta_2(a)$ un $(n-1, R)$-cycle du type t_2 dans A. Soit H le porteur de l'homologie $\Gamma^{n-1} \sim 0$. Lorsque $a \in R - H$, soit $\omega(a, \Gamma^{n-1}) = 0$. Supposons donc que $a \in H$. Soit C^n le (n, R)-cycle mod A dans H déduit de Γ^{n-1} d'après *Variétés*, 10.1. D'après *Variétés*, 11, l'ensemble $H - A$ est un entourage de a. Evidemment C^n et G^n sont deux (n, R)-cycles mod $R - (H - A)$ dans R. D'après *Variétés*, 14.1 il existe un entourage $V \subset H - A$ de a et deux nombres $r, s \in \mathfrak{R}$ ($r \neq 0$ ou $s \neq 0$) tels que $rC^n + sG^n \sim 0$ mod $(R - V)$. D'après 11 on a $r \neq 0$. Posons $\omega(a, \Gamma^{n-1}) = -s/r$.

On vérifie sans peine que les propriétés 1° — 4° sont vérifiées.

14. *Soit R un $V_0^n(S)$. Soit $a \in R - S$. Il existe un entourage $V \subset R - S$ de a tel que $R - S$ est orientable* mod $(R - V)$.

Démonstration. D'après 8,6° on a $\beta_n(a, R) = 1$. Donc il existe un entourage $U \subset R - S$ de a tel que $\beta_n(a, U; R) = 1$. Donc il existe un entourage $V \subset U$ de a tel que $\beta_n(V, U; R) = 1$. Donc il existe un (n, R)-cycle G^n mod $(R - U)$ qui n'est pas ~ 0 mod $(R - V)$. Soit W un ensemble ouvert tel que $0 \neq W \subset V$. Soit $b \in W$. On voit sans peine que

$$1 \leqq \beta_n(b, U; R) \leqq \beta_n(W, U; R) \leqq \beta_n(V, U; R) = 1,$$

d'où $\beta_n(W, U; R) = 1$. On en déduit sans peine en premier lieu qu'il existe un (n, R)-cycle C^n mod $(R - U)$ qui n'est pas ~ 0 mod $(R - W)$ et en second lieu qu'il existe un nombre $r \in \mathfrak{R}$ tel que $G^n \sim rC^n$ mod $(R - W)$ et donc aussi mod $(R - V)$. Puisque G^n n'est pas ~ 0 mod $(R - V)$, on a $r \neq 0$. Donc G^n n'est ~ 0 mod $(R - W)$ pour aucun choix de l'ensemble W ouvert et tel que $0 \neq W \subset V$. D'après 11 G^n est un (n, R)-cycle principal mod $(R - V)$.

15. *Soit R une $V_0^n(S)$. Pour $0 \leqq k \leqq n - 1$ nous allons considérer les deux axiomes suivants:*

I^k. *R est localement connexe d'ordre k rel. à $\mathfrak{R}$ à chaque point $x \in R - S$.*

II^k. *Pour $x \in R - S$ on a $\beta_k(x, R) = 0$.*

On dit que R est une *variété à n dimensions d'ordre p* ($1 \leqq p \leqq n$) mod S, ou une $V_p^n(S)$, si c'est une $V_0^n(S)$ vérifiant les axiomes I^k et II^k pour $n - p \leqq k \leqq n - 1$.

16. *Soit* $S \subset T = \overline{T} \subset R$, $1 \leqq p \leqq n$. *Si* R *est une* $V^n_p(S)$, R *est* évidemment *aussi une* $V^n_p(T)$.

17. *Soit* $0 \leqq p \leqq q \leqq n$. Evidemment *une* $V^n_q(S)$ *est aussi une* $V^n_p(S)$.

18. *Soit* $0 \leqq k \leqq n - 1$. *Les deux axiomes* I^k *et* II^k *sont équivalents aux axiomes* G^k (*Variétés*, 21) et H^{k-1} (*Variétés* 27; pour $k = 0$ l'axiome H^{-1} doit signifier que l'ensemble $R - S$ est dense en soi).[14]

Démonstration. L'axiome I^k est identique à l'axiome G^k. Soit d'abord $k = 0$. On doit prouver que si l'ensemble $R - S$ est localement connexe (au sens classique), l'axiome II^0 est équivalent à l'axiome H^{-1}. Or c'est une conséquence immédiate du théorème du n°3.

Passons au cas $1 \leqq k \leqq n - 1$. Il suffit de déduire d'abord l'axiome H^{k-1} de l'axiome II^k, ce qui sera fait au n°18.1, et ensuite l'axiome II^k des axiomes G^k et H^{k-1}, ce qui sera fait au n°18.2.

18.1. Supposons la validité de II^k. Soit $a \in R - S$ et soit P un entourage donné de a. On a $\beta_k(a, R) = 0$, d'où $\beta_k(a, \overline{P}) = 0$. Soient P_1 et P_2 deux entourages de a tels que $P_2 \subset P_1 \subset P$. Puisque $\beta_k(a, \overline{P}) = 0$, on a $\beta_k(a, P_2; \overline{P}) = 0$. Donc il existe un entourage $P_3 \subset P_2$ de a tel que $\beta_k(P_3, P_2; \overline{P}) = 0$. Soit Γ^{k-1} un $(k - 1, R)$-cycle absolu dans $(\overline{P}_1 - P_2)$; soit $\Gamma^{k-1} \sim 0$ dans $\overline{P}_1$. Il suffit (*Variétés* 21) d'en déduire que $\Gamma^{k-1} \sim 0$ dans $(\overline{P} - P_3)$.

Comme $\Gamma^{k-1} \sim 0$ dans $\overline{P}_1$, il existe pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ une $(k, \mathfrak{U})$-chaîne $C^k(\mathfrak{U}) \subset \overline{P}_1$ telle que $FC^k(\mathfrak{U}) \sim \Gamma^{k-1}(\mathfrak{U})$ dans $\overline{P}_1 - P_2$. D'après *Homologie*, II, 21 on peut s'arranger de façon que $C^k = \{C^k(\mathfrak{U})\}$ soit un (k, R)-cycle mod $(\overline{P}_1 - P_2)$ dans $\overline{P}_1$. Comme $P_1 \subset P$, $\beta_k(P_3, P_2; \overline{P}) = 0$, on a $C^k \sim 0$ mod $(\overline{P} - P_3)$ dans $\overline{P}$. Donc il existe pour chaque réseau $\mathfrak{U}$ une $(k + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $M^{k+1}(\mathfrak{U}) \subset \overline{P}$ et une $(k, \mathfrak{U})$-chaîne $D^k(\mathfrak{U}) \subset \overline{P} - P_3$ telles que $M^{k+1}(\mathfrak{U}) \to C^k(\mathfrak{U}) - D^k(\mathfrak{U}) \to 0$. Comme $FC^k(\mathfrak{U}) \sim \Gamma^{k-1}(\mathfrak{U})$ dans $(\overline{P}_1 - P_2)$, il existe une $(k, \mathfrak{U})$-chaîne $E^k(\mathfrak{U}) \subset \overline{P}_1 - P_2 \subset \overline{P} - P_3$ telle que $C^k(\mathfrak{U}) - E^k(\mathfrak{U}) \to \Gamma^{k-1}(\mathfrak{U})$. Donc $D^k(\mathfrak{U}) - E^k(\mathfrak{U}) \to \Gamma^{k-1}(\mathfrak{U})$, d'où $\Gamma^{k-1} \sim 0$ dans $(\overline{P} - P_3)$, c.q.f.d.

18.2. Supposons la validité des axiomes G^k et H^{k-1}. Soit $a \in R - S$. On doit prouver que $\beta_k(a, R) = 0$. D'après l'axiome G^k, chaque entourage P suffisamment petit de a possède la propriété suivantes: chaque (k, R)-cycle absolu dans $\overline{P}$ est ~ 0 dans R. Il suffit de prouver que $\beta_k(a, P; R) = 0$ pour chaque tel entourage P. Soit P_1 un entourage de P tel que $\overline{P}_1 \subset P$. D'après l'axiome H^{k-1}, chaque entourage P_3 suffisamment petit de a possède la propriété suivante: Si Γ^{k-1} est un $(k - 1, R)$-cycle absolu dans $(\overline{P}_1 - P_1)$ et si $\Gamma^{k-1} \sim 0$ dans $\overline{P}_1$, on a $\Gamma^{k-1} \sim 0$ dans $(\overline{P} - P_3)$. Il suffit de prouver que $\beta_k(P_3, P; R) = 0$ pour chaque tel entourage P_3. Soit C^k un (k, R)-cycle mod $(R - P)$. On doit prouver que $C^k \sim 0$ mod $(R - P_3)$.

Soit Φ la famille complète de réseaux qui se déduit de la famille N définie

---

[14] On doit remarquer que, si R est une $V^n_0(S)$, R vérifie toujours l'axiome H^{-1}, ce qui résulte p. ex. de *Variétés*, 12.2.

dans *Homologie*, IV, 2 en y remplaçant R_1, R_2, R_3, α, α_1, α_2, α_3, resp. par $\overline{P}_1$, $R - P_1$, $\overline{P}_1 - P_1$, $R - P$, 0, $R - P$, 0. Pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$ on peut poser (v. *Homologie*, IV, 6, où on remplace n par $k - 1$) $C^k(\mathfrak{U}) = C_1^k(\mathfrak{U}) - C_2^k(\mathfrak{U})$, où $C_1^k(\mathfrak{U}) \subset \overline{P}_1$, $C_2^k(\mathfrak{U}) \subset R - P_1$. Posons $FC_1^k(\mathfrak{U}) = \Gamma^{k-1}(\mathfrak{U})$. Les $\Gamma^{k-1}(\mathfrak{U})$ définissent (*Homologie*, IV, 12) un $(k - 1, R)$-cycle absolu Γ^{k-1} dans $(\overline{P}_1 - P_1)$ tel que $C_1^k(\mathfrak{U}) \rightarrow \Gamma^{k-1}(\mathfrak{U})$ pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$, d'où $\Gamma^{k-1} \sim 0$ dans $\overline{P}_1$. On a donc $\Gamma^{k-1} \sim 0$ dans $(\overline{P} - P_3)$. Donc il existe pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$ une $(k, \mathfrak{U})$-chaîne $D^k(\mathfrak{U})$ dans $(\overline{P} - P_3)$ telle que $D^k(\mathfrak{U}) \rightarrow \Gamma^{k-1}(\mathfrak{U})$, d'où $C_1^k(\mathfrak{U}) - D^k(\mathfrak{U}) \rightarrow 0$. Soit $\mathfrak{U} \in \Phi$; la famille Φ étant complète, il existe un affinement $\mathfrak{B} \in \Phi$ de $\mathfrak{U}$ normal rel. aux cycles absolus dans $\overline{P}$; soit $\pi = \mathrm{Pr}(\mathfrak{B}, \mathfrak{U})$. On a

$$C_1^k(\mathfrak{B}) \subset \overline{P}_1 \subset \overline{P},\ D^k(\mathfrak{B}) \subset \overline{P} - P_3 \subset \overline{P},\ C_1^k(\mathfrak{B}) - D^k(\mathfrak{B}) \rightarrow 0.$$

Donc $\pi C_1^k(\mathfrak{B}) - \pi D^k(\mathfrak{B})$ est un $(k, \mathfrak{U})$-cycle absolu essentiel dans $\overline{P}$, d'où $\pi C_1^k(\mathfrak{B}) - \pi D^k(\mathfrak{B}) \sim 0$. Donc il existe une $(k + 1, \mathfrak{U})$-chaîne $M^{k+1}(\mathfrak{U})$ telle que $M^{k+1}(\mathfrak{U}) \rightarrow \pi C_1^k(\mathfrak{B}) - \pi D^k(\mathfrak{B})$. Comme $C^k(\mathfrak{B}) = C_1^k(\mathfrak{B}) - C_2^k(\mathfrak{B})$, on a

$$M^{k+1}(\mathfrak{B}) \rightarrow \pi C^k(\mathfrak{B}) + \pi C_2^k(\mathfrak{B}) - \pi D^k(\mathfrak{B}).$$

Or $C_2^k(\mathfrak{B}) \subset R - P_1 \subset R - P_3$, $D^k(\mathfrak{B}) \subset \overline{P} - P_3 \subset R - P_3$. Par suite $\pi C^k(\mathfrak{B}) \sim 0 \bmod (R - P_3)$. D'autre part $\pi C^k(\mathfrak{B}) \sim C^k(\mathfrak{U}) \bmod (R - P) \subset R - P_3$. Donc $C^k(\mathfrak{U}) \sim 0 \bmod (R - P_3)$ pour chaque $\mathfrak{U} \in \Phi$. La famille Φ étant complète, on a $C^k \sim 0 \bmod (R - P_3)$. c.q.f.d.

19. En tenant compte de 14, on déduit de 9, 13 et 18 d'après *Variétés*, 65 et 66 les théorèmes suivants.

19.1. *Soit* $0 \leqq p \leqq \dfrac{n-1}{2}$. *Une* $V_p^n(S)$ *vérifie les axiomes* I^k(n°15) *pour* $0 \leqq k \leqq p$.

19.2. *Soit* $0 \leqq p \leqq n/2 - 1$. *Une* $V_p^n(S)$ *vérifie les axiomes* II^k(n°15) *pour* $0 \leqq k \leqq p - 1$.

19.3. *Soit* $\dfrac{n-1}{2} \leqq p \leqq n$. *Une* $V_p^n(S)$ *est une* $V_n^n(S)$.

20. Soient M_1 et M_2 deux modules (*Homologie*, I, 1). D'après *M. Pontragin*,[15]) nous dirons que M_1 et M_2 sont *duels* (*primitifs*) si l'on a défini le produit $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}$ pour $\alpha \in M_1$ et $\beta \in M_2$ jouissant des propriétés suivantes: 1° $(\alpha_1 + \alpha_2)\beta = \alpha_1\beta + \alpha_2\beta$ pour $\alpha_1 \in M_1$, $\alpha_2 \in M_1$, $\beta \in M_2$; 2° $\alpha(\beta_1 + \beta_2) = \alpha\beta_1 + \alpha\beta_2$ pour $\alpha \in M_1$, $\beta_1 \in M_2$, $\beta_2 \in M_2$; 3° $(r\alpha)\beta = \alpha(r\beta) = r(\alpha\beta)$ pour $r \in \mathfrak{R}$, $\alpha \in M_1$, $\beta \in M_2$; 4° si $\alpha \in M_1$ et si $\alpha\eta = 0$ pour chaque $\eta \in M_2$, on a $\alpha = 0$; 5° si $\beta \in M_2$ et si $\xi\beta = 0$ pour chaque $\xi \in M_1$, on a $\beta = 0$.

20.1. *Soient* M_1 *et* M_2 *deux modules duels. Soient* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ *des éléments de* M_1 *en nombre fini tels que* $\sum_{i=1}^{m} r_i\alpha_i = 0$ $(r_i \in \mathfrak{R})$ *entraîne que* $r_1 = \cdots = r_m = 0$.

[15] Math. Annalen, t. 105, 1931, pp. 165–205. V. *Variétés*, 61.

Il existe des éléments $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ *de* M_2 *tels que* $\alpha_i\beta_j = \delta_{ij}$ pour $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq m$, δ_{ij} étant le symbole de Kronecker: $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

DÉMONSTRATION. I. Soit d'abord $m = 1$. On a $\alpha_1 \in M$, $\alpha_1 \neq 0$. D'après 20, 4° il existe un élément $\eta \in M_2$ tel que $\alpha_1 \eta = r \neq 0$. Posons $\beta_1 = 1/r\ \eta$. Alors $\alpha_1\beta_1 = 1$ d'après 20,3°.

II. Soit $m \geqq 2$ et supposons que le théorème soit vrai pour $m - 1$. Donc il existe des éléments $\beta_1', \cdots, \beta_{m-1}'$ de M_2 tels que $\alpha_i \beta_j = \delta_{ij}$ pour $1 \leqq i \leqq m - 1$, $1 \leqq j \leqq m - 1$. Soit $\alpha_m \beta_i' = r_i (1 \leqq i \leqq m - 1)$. Comme $\alpha_m - \sum_{i=1}^{m-1} r_i \alpha_i \neq 0$, d'après I il existe un élément β_m' de M_2 tel que $(\alpha_m - \sum_{i=1}^{m-1} r_i \alpha_i)\beta_m' = 1$. Posons $\alpha_i \beta_m' = s_i (1 \leqq i \leqq m - 1)$ Il suffit de poser

$$\beta_i = \beta_i' - r_i \beta_m' + r_i \sum_{j=1}^{m-1} s_j \beta_j' (1 \leqq i \leqq m - 1), \qquad \beta_m = \beta_m' - \sum_{j=1}^{m-1} s_j \beta_j'$$

pour que l'on ait $\alpha_i \beta_j = \delta_{ij}$ $(1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq m)$.

21. Rappelons encore le théorème de dualité sous la forme dont nous allons nous servir au Chap. V (*Variétés*, 64):

Soit $0 \leqq p \leqq n$. *Soit* $t = \min (p, n - p)$. *Soit* R *une* $V_t^n(S)$ *orientable* mod S. *Le* $p^{\text{ème}}$ *groupe de Betti* $\mathfrak{G}_p$ *de l'espace* R mod S *est duel au* $(n - p)^{\text{ème}}$ *groupe de Betti bicompact* $\mathfrak{H}_{n-p}$ *de l'espace* $R - S$.

Les éléments de $\mathfrak{G}_p$ sont les (p, R)-cycles mod S, deux tels cycles C^p et D^p étant considérés comme égaux si et seulement si $C^p \sim D^p$ mod S. Les éléments de $\mathfrak{H}_{n-p}$ sont les $(n - p, R)$-cycles absolus situés dans un sous-ensemble bicompact arbitraire de $R - S$, deux tels cycles Γ^{n-p} et Δ^{n-p} étant considérés comme égaux si et seulement s'il existe un sous-ensemble bicompact A de $R - S$ tel que $\Gamma^{n-p} \sim \Delta^{n-p}$ dans A.

IV.

22. Soit R un espace topologique. Soit B un sous-ensemble ouvert de R. Soit C^k un (k, R)-cycle absolu $(k = 0, 1, 2, \cdots)$. Nous disons que C^k *est situé à l'intérieur de* B s'il existe un ensemble $F \subset B$ fermé dans R et tel que $C^k \subset F$; nous disons que $C^k \sim 0$ *à l'intérieur de* B s'il existe un ensemble F fermé dans R et tel que $C^k \sim 0$ dans F.

23. Soit R un espace topologique. Soit A un sous-ensemble fermé de R. Soit a un point donné de A. Soit $k = 0, 1, 2, \cdots$. Les lettres U, V, W désignent des entourages de a dans R.

Soit $U \supset V$. Soit $\mathfrak{A}_k(V, U; R - A)$ l'ensemble de tous les (k, R)-cycles absolus Γ^k situés à l'intérieur de $V - A$; pour $k = 0$ il faut supposer encore que $J(\Gamma^k) = 0$. Deux éléments Γ^k et Δ^k de $\mathfrak{A}_k(V, U; R - A)$ seront considérés comme égaux si et seulement si $\Gamma^k \sim \Delta^k$ à l'intérieur de $U - A$. L'ensemble

$\mathfrak{A}_k(V, U; R - A)$ est un module. Désignons par $\alpha_k(V, U; R - A)$ le rang de ce module si ce rang est fini; dans le cas contraire posons $\alpha_k(V, U; R - A) = \infty$.

Pour $W \subset V \subset U$ on a évidemment $\alpha_k(W, U; R - A) \leqq \alpha_k(V, U; R - A)$. Il en résulte que, l'entourage U de a étant donné, le nombre $\alpha_k(V, U; R - A)$ a une valeur fixe (indépendante de V) pour tous les voisinages $V \subset U$ de a suffisamment petits; désignons par $\alpha_k(a, U; R - A)$ cette valeur fixe.

Pour $W \subset V \subset U$ on a évidemment $\alpha_k(W, V; R - A) \geqq \alpha_k(W, U; R - A)$. On en déduit sans peine que $\alpha_k(a, V; R - A) \geqq \alpha_k(a, U; R - A)$ pour $V \subset U$, Par suite trois cas sont à distinguer:

1°. Il existe un nombre fini m $(= 0, 1, 2, \cdots)$ tel que $\alpha_k(a, U; R - A) = m$ pour tous les entourages U de a suffisamment petits; dans ce cas on pose $\alpha_k(a, R - A) = m$.

2°. Le nombre $\alpha_k(a, U; R - A)$ est fini pour les entourages U de a, mais si m est un nombre fini arbitrairement donné, on a $\alpha_k(a, U; R - A) > m$ pour tous les entourages U de a suffisamment petits; dans ce cas on pose $\alpha_k(a, R - A) = \omega$.

3°. On a $\alpha_k(a, U; R - A) = \infty$ pour tous les entourages U de a suffisamment petits; dans ce cas on pose $\alpha_k(a, R - A) = \infty$.

24. En général, le nombre $\alpha_k(a, R - A)$ n'est pas complètement déterminé par l'espace $(R - A) + (a)$, il faut connaître aussi l'espace R. Or on voit sans peine (v. *Homologie*, III, 3–11) que, l'espace $(R - A) + (a)$ et son point a étant donnés, pour connaître le nombre $\alpha_k(a, R - A)$ il suffit de savoir encore de chaque sous-ensemble de $R - A$ s'il est ou non fermé dans R. En particulier si l'espace R est bicompact, le nombre $\alpha_k(a, R - A)$ ne dépend que de l'espace $(R - A) + (a)$ (localement) et de son point a; car un sous-ensemble de $R - A$ est alors fermé dans R si et seulement s'il est bicompact. Il suffit même que l'espace R soit localement bicompact au point a, c'est-a-dire qu'il existe un entourage U de a tel que l'ensemble soit bicompact.

25. Les énoncés suivants sont faciles à vérifier:[16]

L'équation $\alpha_0(a, R - A) = m$ $(= 0, 1, 2, \cdots)$ *signifie que, si U est un entourage de a suffisamment petit, le point a appartient à la frontière de $(m + 1)$ constituants*[17] *de $U - A$, tandis que a n'appartient pas à la frontière de la somme de tous les autres constituants de $U - A$. Si l'espace R est régulier et localement connexe, l'équation* $\alpha_0(a, R - A) = m$ *signifie qu'il existe des entourages U de a arbitrairement petits tels que l'ensemble $U - A$ ait $m + 1$ composantes tandis que, pour chaque entourage U de a suffisamment petit, l'ensemble $U - A$ a plus que m composantes.*

L'équation $\alpha_0(a, R - A) = \omega$ *signifie*: 1° *si U est un entourage de a suffisamment*

[16] Le cas banal où A contient tout un entourage de a dans R y est tacitement exclu.

[17] Un *constituant* d'un sous-ensemble M de R est un sous-ensemble de M maximé (saturé) rel. à la propriété que chaque couple de ses points se laisse unir par un sous-ensemble de M connexe et fermé dans R.

petit, le point a appartient à la frontière d'un nombre fini de constituants de $U - A$, tandis que a n'appartient pas à la frontière de la somme de tous les autres constituants de a, 2° m étant un nombre fini arbitrairement donné, le point a appartient à la frontière de plus que m constituants de l'ensemble $U - A$ pour chaque entourage de a suffisamment petit. Si l'espace R est régulier et localement connexe, l'équation $\alpha_0(a, R - A) = \omega$ signifie: 1° il existe des entourages U de a arbitrairement petits tels que l'ensemble $U - A$ ait un nombre fini de composantes; 2° m étant un nombre fini arbitrairement donné, l'ensemble $U - A$ a plus que m composantes pour chaque entourage U de a suffisamment petit.

V.

26. *Soit R une $V_0^n(S)$. Soit A un sous-ensemble fermé de R. Soit $a \in A - S$. Alors $\alpha_0(a, R - A) \leqq \beta_{n-1}(a, A)$.*

DÉMONSTRATION. Le théorème est banal si $a \in A - \overline{R - A}$, car alors $\alpha_0(a, R - A) = 0$. Supposons donc que $a \in \overline{R - A}$. On voit sans peine qu'il suffit de démontrer l'énoncé suivant: Soit $m = 1, 2, 3, \cdots$; soit U un entourage de a suffisamment petit; soit $\alpha_0(a, U; R - A) \geqq m$; alors $\beta_{n-1}(a, U; A) \geqq m$.

Soit $U \subset R - S$ un entourage de a si petit que (v. 14) R soit orientable mod $(R - U)$. Soit $\alpha_0(a, U; R - A) \geqq m$. On doit prouver que $\beta_{n-1}(V, U; A) \geqq m$ pour chaque entourage $V \subset U$ de a.

D'après 7, 6° on a $\beta_n(a, R) = 1$, d'où $\beta_n(a, V; R) \leqq 1$. Donc il existe un entourage $W \subset V$ de a tel que $\beta_n(W, V; R) \leqq 1$. Comme $a \in \overline{R - A}$, on a $W - A \neq 0$.

Comme $\alpha_0(a, U; R - A) \geqq m$, on a $\alpha_0(W, U; R - A) \geqq m$. Donc il existe des $(0, R)$-cycles absolus $\Gamma_i^0 (1 \leqq i \leqq m)$ situés à l'intérieur de $W - A$, tels que $J(\Gamma_i^0) = 0$ et tels que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^0 \sim 0$ à l'intérieur de $U - A (r_i \in \mathfrak{R})$ entraîne que $r_1 = \cdots = r_m = 0$. D'après 21 (v. aussi 20.1), où on pose $p = n$ et où on remplace S par $A + (R - U)$ (v. 8 et 12), il existe des (n, R)-cycles $E_i^n (1 \leqq i \leqq m)$ mod $A + (R - U)$ tels que $E_i^n \Gamma_j^0 = \delta_{ij}$ pour $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq m$. Soit G^n un (n, R)-cycle principal mod $(R - U)$.

Supposons que $rG^n + \sum_{i=1}^{m} r_i E_i^n \sim 0$ mod $A + (R - W) (r \in \mathfrak{R}, r_i \in \mathfrak{R})$. Il en résulte (*Variétés*, 56, 4°) que $(rG^n + \sum_{i=1}^{m} r_i E_i^n) \cdot \Gamma_j^0 = 0$ pour $1 \leqq j \leqq m$. Or on a $G^n \Gamma_j^0 = 0$, car $J(\Gamma_j^0) = 0$. (V. *Variétés*, 19.1, 4° et 57.) Donc $\sum_{i=1}^{m} r_i E_i^n \Gamma_j^0 = 0$ pour $1 \leqq j \leqq m$, d'où $r_1 = \cdots = r_m = 0$, donc $rG^n \sim 0$ mod $A + (R - W)$. Comme $W - A \neq 0$, le cycle G^n n'est pas ~ 0 mod $A + (R - W)$ (v. 11). Donc $r = 0$.

Nous venons de prouver que les $G^n, E_1^n, \cdots, E_m^n$ ne sont liés par aucune homologie mod $A + (R - W)$. Donc il existe un réseau $\mathfrak{U}_1$ tel que l'homologie

$rG^n(\mathfrak{U}_1) + \sum_{i=1}^{m} r_i E_i^n(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod A + (R - W)(r \in \mathfrak{R},\ r_i \in \mathfrak{R})$ entraîne que $r = r_1 = \cdots = r_m = 0$; d'après 11 on peut supposer que $G^n(\mathfrak{U}_1)$ n'est pas $\sim 0 \bmod (R - W)$. Soit $\mathfrak{U}_2$ un affinement de $\mathfrak{U}_1$ normal rel. aux cycles mod $(R - V)$. Soit $\mathfrak{U}_3$ un affinement de $\mathfrak{U}_2$ normal rel. aux cycles mod $(A - U)$ dans A. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_4$ de $\mathfrak{U}_3$ d'après 4, en y posant $\varphi = A$, $\chi = R - U$. Soit $\pi_{21} = \text{Pr.}\,(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1), \cdots, \pi_{31} = \pi_{21} \cdot \pi_{32}, \cdots$.

Les E_i^n étant des (n, R)-cycles mod $A + (R - U)$, il existe des $(n - 1, \mathfrak{U}_4)$-chaînes $C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \subset A$ et $D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \subset R - U$ telles que $E_i^n(\mathfrak{U}_4) \to C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) + D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4)$. Donc $FC_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) = -FD_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \subset R - U$. D'autre part $FC_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \subset A$. Donc $FC_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \subset A - U$ d'après la définition de $\mathfrak{U}_4$. En vertu de la définition de $\mathfrak{U}_3$, les $\pi_{42}C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4)(1 \leqq i \leqq m)$ sont donc des $(n - 1, \mathfrak{U}_2)$-cycles essentiels mod $(A - U)$ dans A. Reste à prouver que les $\pi_{42}C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4)$ ne sont liés par aucune homologie mod $(A - V)$ dans A, car alors (v. *Homologie*, II, 28) on a $\beta_{n-1}(V, U; A) \geqq m$, c.q.f.d.

Soit donc $\pi_{42} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) \sim 0 \bmod (A - V)$ dans $A\,(r_i \in \mathfrak{R})$; on doit prouver que $r_1 = \cdots = r_m = 0$. L'homologie qui vient d'être écrite signifie qu'il existe une $(n, \mathfrak{U}_2)$-chaîne $N^n(\mathfrak{U}_2) \subset A$ et une $(n - 1, \mathfrak{U}_2)$-chaîne $T^{n-1}(\mathfrak{U}_2) \subset A - V$ telles que $N^n(\mathfrak{U}_2) \to \pi_{42} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) + T^{n-1}(\mathfrak{U}_2)$. Comme $E_i^n(\mathfrak{U}_4) \to C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) + D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4)$, on a

$$\pi_{42} \sum_{i=1}^{m} r_i E_i^n(\mathfrak{U}_4) - N^n(\mathfrak{U}_2) \to \pi_{42} \sum_{i=1}^{m} r_i D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_4) - T^{n-1}(\mathfrak{U}_2) \subset R - V.$$

En vertu de la définition de $\mathfrak{U}_2$, on en déduit que $\pi_{41} \sum_{i=1}^{m} r_i E_i^n(\mathfrak{U}_4) \to \pi_{21} N^n(\mathfrak{U}_2)$ est un $(n, \mathfrak{U}_1)$-cycle essentiel mod $(R - V)$. Or nous savons d'une part que $G^n(\mathfrak{U}_1)$ n'est pas $\sim 0 \bmod (R - W)$, d'autre part que $\beta_n(W, V; R) \leqq 1$. On en déduit qu'il existe un nombre $r \in \mathfrak{R}$ tel que

$$rG^n(\mathfrak{U}_1) + \pi_{41} \sum_{i=1}^{m} r_i E_i^n(\mathfrak{U}_4) - \pi_{21} N^n(\mathfrak{U}_2) \sim 0 \bmod (R - W),$$

ce qui entraîne que

$$rG^n(\mathfrak{U}_1) + \pi_{41} \sum_{i=1}^{m} r_i E_i^n(\mathfrak{U}_4) \sim 0 \bmod A + (R - W).$$

Or $\pi_{41}E_i^n(\mathfrak{U}_4) \sim E_i^n(\mathfrak{U}_1) \bmod A + (R - V) \subset A + (R - W)$. Donc $rG^n(\mathfrak{U}_1) + \sum_{i=1}^{m} r_i E_i^n(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod A + (R - W)$. D'après la définition de $\mathfrak{U}_1$, il en résulte que $r_1 = \cdots = r_m = 0$, c.q.f.d.

27. *Soit* $0 \leqq p \leqq n - 2$. *Soit* $q = n - p - 1$. *Soit* $t = \min(p + 1, q)$. *Soit* R *une* $V_t^n(S)$. *Soit* A *un sous-ensemble fermé de* R. *Soit* $a \in R - S$. *Soit* $\beta_{p+1}(a, R) = 0$.[18] *Alors* $\alpha_q(a, R - A) \leqq \beta_p(a, A)$.

DÉMONSTRATION. On voit sans peine qu'il suffit de démontrer l'énoncé suivant: Soit $m = 1, 2, \cdots$; soit U un entourage de a suffisamment petit, soit $\alpha_q(a, U; R - A) \geqq m$; alors $\beta_p(a, U; R - A) \geqq m$.

Soit $U \subset R - S$ un entourage de a si petit que (v. 14) R soit orientable mod $(R - U)$. Soit $\alpha_q(a, U; R - A) \geqq m$. On doit prouver que $\beta_p(V, U; A) \geqq m$ pour chaque entourage $V \subset U$ de a.

Puisque $\beta_{p+1}(a, R) = 0$, on a $\beta_{p+1}(a, V; R) = 0$. Donc il existe un entourage $W \subset V$ de a tel que $\beta_{p+1}(W, V; R) = 0$. Comme $\alpha_q(a, U; R - A) \geqq m$, on a $\alpha_q(W, U; R - A) \geqq m$. Donc il existe des (q, R)-cycles absolus $\Gamma_i^q (1 \leqq i \leqq m)$ situés à l'intérieur de $W - A$ et tels que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^q \sim 0$ à l'intérieur de A $(r_i \in \mathfrak{R})$ entraîne que $r_1 = \cdots = r_m = 0$. D'après 21 (v. aussi 20.1), où on remplace p par $p + 1$ et S par $A + (R - U)$ (v. 12 et 16) il existe des $(p + 1, R)$-cycles $E_i^{p+1} (1 \leqq i \leqq m)$ mod $A + (R - U)$ tels que $E_i^{p+1}\, \Gamma_i^q = \delta_{ij}$ $(1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq m)$.

Soit $\sum_{i=1}^{m} r_i E_i^{p+1} \sim 0$ mod $A + (R - W)$ $(r_i \in \mathfrak{R})$. Alors $\sum_{i=1}^{m} r_i E_i^{p+1}\, \Gamma_j^q \sim 0$ (*Variétés*, 56, 4°), d'où $r_1 = r_2 = \cdots = r_m = 0$. Donc les $E_1^{p+1}, \cdots, E_m^{p+1}$ ne sont liés par aucune homologie mod $A + (R - W)$. Donc il existe un réseau $\mathfrak{U}_1$ tel que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_1) \sim 0$ mod $A + (R - W)$ entraîne que $r_1 = \cdots = r_m = 0$. Soit $\mathfrak{U}_2$ un affinement de $\mathfrak{U}_1$ normal rel. aux cycles mod $(R - V)$.

Soit $\mathfrak{U}_3$ un affinement de $\mathfrak{U}_2$ normal rel. aux cycles mod $(A - U)$ dans A. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_4$ de $\mathfrak{U}_3$ d'après 4, en y posant $\varphi = A$, $\chi = R - U$. Soit $\pi_{21} = \mathrm{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1), \cdots, \pi_{31} = \pi_{21} \cdot \pi_{32}, \cdots$.

Les E_i^{p+1} étant des $(p + 1, R)$-cycles mod $A + (R - U)$, il existe des $(p, \mathfrak{U}_4)$-chaînes $C_i^p(\mathfrak{U}_4) \subset A$ et $D_i^p(\mathfrak{U}_4) \subset R - U$ telles que $E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \rightarrow C_i^p(\mathfrak{U}_4) + D_i^p(\mathfrak{U}_4)$. Donc $FC_i^p(\mathfrak{U}_4) - FD_i^p(\mathfrak{U}_4) \subset R - U$. D'autre part $FC_i^p(\mathfrak{U}_4) \subset A$. Donc $FC_i^p(\mathfrak{U}_4) \subset A - U$ d'après la définition de $\mathfrak{U}_4$. En vertu de la définition de $\mathfrak{U}_3$, les $\pi_{42}\, C_i^p(\mathfrak{U}_4)$ $(1 \leqq i \leqq m)$ sont donc des $(p, \mathfrak{U}_2)$-cycles essentiels mod $(A - U)$ dans A. Reste à prouver que les $\pi_{42}\, C_i^p(\mathfrak{U}_4)$ ne sont liés par aucune homologie mod $(A - V)$ dans A, car alors (v. *Homologie*, II, 28) on a $\beta_p(V, U; A) \geqq m$, c.q.f.d. Soit donc $\pi_{42} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p(\mathfrak{U}_4) \sim 0$ mod $(A - V)$ dans $A (r_i \in \mathfrak{R})$; on doit prouver que $r_1 = \cdots = r_m = 0$. L'homologie qui vient

[18] *Si* $p \leqq \frac{n-1}{2}$ cette hypothèse est une conséquence des—précédentes en vertu de 19.2.

d'être écrite signifie qu'il existe une $(p + 1, \mathfrak{U}_2)$-chaîne $N^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \subset A$ et une $(p, \mathfrak{U}_2)$-chaîne $T^p(\mathfrak{U}_2) \subset A - V$ telles que $N^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \to \pi_{42} \sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^p(\mathfrak{U}_4) - T^p(\mathfrak{U}_2)$. Comme $E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \to C_i^p(\mathfrak{U}_4) + D_i^p(\mathfrak{U}_4)$, on a

$$\pi_{42} \sum_{i=1}^{m} r_i\, E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - N^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \to \pi_{42} \sum_{i=1}^{m} r_i\, D_i^p(\mathfrak{U}_4) - T^p(\mathfrak{U}_2) \subset R - V.$$

En vertu de la définition de $\mathfrak{U}_2$, on en déduit que $\pi_{41} \sum_{i=1}^{m} r_i\, E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \to \pi_{21}\, N^{p+1}(\mathfrak{U}_2)$ est un $(p + 1, \mathfrak{U}_4)$-cycle essentiel mod $(R - V)$. Or on a $\beta_{p+1}(W, V; R) = 0$. Donc $\pi_{41} \sum_{i=1}^{m} r_i\, E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4) - \pi_{21}\, N^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \sim 0$ mod $(R - W)$, d'où $\pi_{41} \sum_{i=1}^{m} r_i\, E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \sim 0$ mod $A + (R - W)$. Or $\pi_{41}\, E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_4) \sim E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_1)$ mod $A + (R - V) \subset A + (R - W)$. Donc $\sum_{i=1}^{m} r_i\, E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_1) \sim 0$ mod $A + (R - W)$. D'après la définition de $\mathfrak{U}_1$, il en résulte que $r_1 = \cdots = r_m = 0$, c.q.f.d.

28. *Soit R une $V_0^q(S)$. Soit A un sous-ensemble fermé de R. Soit $a \in A - S$. Soit $\beta_{n-1}(a, R) = 0$. Alors $\alpha_0(a, R - A) \geqq \beta_{n-1}(a, A)$.*

DÉMONSTRATION. Le théorème est banal si $a \in A - \overline{R - A}$, car alors $\beta_{n-1}(a, A) = \beta_{n-1}(a, R) = 0$. Supposons donc que $a \in \overline{R - A}$. On voit sans peine qu'il suffit de démontrer l'énoncé suivant: soit $m = 1, 2, 3, \cdots$; soit U un entourage de a suffisamment petit; soit $\beta_{n-1}(a, U; A) \geqq m$; alors il existe un entourage $V \subset U$ de a tel que $\alpha_0(a, V; R - A) \geqq m$.

Soit $U \subset R - S$ un entourage de a si petit que (v. 14) R soit orientable mod $(R - U)$. Soit G^n un (n, R)-cycle principal mod $(R - U)$. Soit $\beta_{n-1}(a, U; A) \geqq m$. Comme $\beta_{n-1}(a, R) = 0$, on a $\beta_{n-1}(a, U; R) = 0$; donc il existe un entourage $V \subset U$ de a tel que $\beta_{n-1}(V, U; R) = 0$. On doit prouver que $\alpha_0(W, V; R - A) \geqq m$ pour chaque entourage $W \subset V$ de a. Comme $a \in \overline{R - A}$, on a $W - A \neq 0$.

Puisque $\beta_{n-1}(a, U; A) \geqq m$, on a $\beta_{n-1}(W, U; A) \geqq m$. Donc il existe des $(n - 1, R)$-cycles $C_i^{n-1} (1 \leqq i \leqq m)$ mod $(A - U)$ dans A tels que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^{n-1} \sim 0$ mod $(A - W)$ dans $A (r_i \in \mathfrak{R})$ entraîne que $r_1 = \cdots = r_m = 0$. Soit $\mathfrak{U}_1$ un réseau tel que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i\, C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_1) \sim 0$ mod $(A - W)$ dans A entraîne que $r_1 = \cdots = r_m = 0$. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_2$ de $\mathfrak{U}_1$ d'après 4, en y posant $\varphi = A$, $\chi = R - W$. Puisque $W - A \neq 0$, on peut supposer (v. 11) que $G^n(\mathfrak{U}_2)$ n'est pas ~ 0 mod $A + (R - W)$. Soit $\mathfrak{U}_3$ un affinement de $\mathfrak{U}_2$ normal rel. aux cycles mod $A + (R - V)$. Soit $\pi_{21} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_{32} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$, $\pi_{31} = \pi_{21} \cdot \pi_{32}$. Les C_i^{n-1} étant des $(n - 1, R)$-cycles mod $(R - U)$, on a $C_i^{n-1} \sim 0$ mod $(R - V)$, car $\beta_{n-1}(V, U; R) = 0$. Donc il existe des $(n, \mathfrak{U}_3)$-chaînes $E_i^n(\mathfrak{U}_3)$ et des $(n - 1, \mathfrak{U}_3)$-chaînes $D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3) \subset R - V$ telles que $E_i^n(\mathfrak{U}_3) \to C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3) - D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3)$, D'après la définition de $\mathfrak{U}_3$, il en résulte que les $\pi_{32}\, E_i^n(\mathfrak{U}_3)$ sont des $(n, \mathfrak{U}_2)$-cycles essentiels mod $A + (R - V)$.

Si l'on a $rG^n(\mathfrak{U}_2) + \pi_{32} \sum_{i=1}^m r_i\, E_i^n(\mathfrak{U}_3) \sim 0$ mod $A + (R - W)(r \in \mathfrak{R},\ r_i \in \mathfrak{R})$, il existe des $\mathfrak{U}_2$-chaînes $M^{n+1}(\mathfrak{U}_2)$, $N_1^n(\mathfrak{U}_2) \subset A$ et $N_2^n(\mathfrak{U}_2) \subset R - W$ telles que

$$M^{n+1}(\mathfrak{U}_2) \to rG^n(\mathfrak{U}_2) + \pi_{32} \sum_{i=1}^m r_i\, E_i^n(\mathfrak{U}_3) - N_1^n(\mathfrak{U}_2) - N_2^n(\mathfrak{U}) \to 0.$$

Comme $E_i^n(\mathfrak{U}_3) \to C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3) - D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3)$, il en résulte que

$$\pi_{32} \sum_{i=1}^m r_i\, C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3) = \pi_{32} \sum_{i=1}^m r_i\, D_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3) - rFG^n(\mathfrak{U}_2) + FN_1^n(\mathfrak{U}_2) + FN_2^n(\mathfrak{U}_2),$$

d'où on déduit que la chaîne

(1) $FN_1^n(\mathfrak{U}_2) - \pi_{32} \sum_{i=1}^m r_i\, C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3)$ est située dans $(R - W)$. La chaîne (1) étant aussi située dans A, il résulte de la définition de $\mathfrak{U}_2$ qu'elle est située dans $(A - W)$. Donc $\pi_{32} \sum_{i=1}^m r_i C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3) \sim 0$ mod $(A - W)$ dans A, d'où $\pi_{31} \sum_{i=1}^m r_i C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3) \sim 0$ mod $(A - W)$ dans A. Or $\pi_{31} C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_3) \sim C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_1)$ mod $(A - U)$ dans A. Comme $U \supset W$, il en résulte que $\sum_{i=1}^m r_i C_i^{n-1}(\mathfrak{U}_1) \sim 0$ mod $(A - W)$ dans A, d'où $r_1 = \cdots = r_m = 0$, d'après la définition de $\mathfrak{U}_1$. Donc $rC^n(\mathfrak{U}_2) \sim 0$ mod $A + (R - W)$, ce qui entraîne que $r = 0$.

Nous venons de prouver que les

(2) $G^n(\mathfrak{U}_2)$, $\pi_{32} E_1^n(\mathfrak{U}_3)$, $\cdots$, $\pi_{32} E_m^n(\mathfrak{U}_3)$ ne sont liés par aucune homologie mod $A + (R - W)$. Or les (2) sont des $(n, \mathfrak{U}_2)$-cycles essentiels mod $A + (R - V)$. Soient

(3) $G^n, E_1^n, \cdots, E_m^n$ des (n, R)-cycles mod $A + (R - V)$ attachés aux (2) selons *Homologie*, II, 28. Evidemment les (3) ne sont liés par aucune homologie mod $A + (R - W)$. D'après 21 (v. aussi 20.1), où on pose $p = n$ et où on remplace S par $A + (R - W)$ (v. 8 et 12), il existe des $(0, R)$-cycles $\Gamma_i^0 (0 \leqq i \leqq m)$ situés à l'intérieur de $W - A$ et tels que

$$G^n \Gamma_0^0 = 1,\ G^n \Gamma_i^0 = 0\ (1 \leqq i \leqq m),\ E_i^n \Gamma_j^0 = \delta_{ij}\ (1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq m).$$

Comme $G^n \Gamma_i^0 = 0$ $(1 \leqq i \leqq m)$, on voit sans peine (v. *Variétés*, 19.1, 4° et 57) que $J(\Gamma_i^0) = 0$ pour $1 \leqq i \leqq m$. Soit $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^0 \sim 0$ à l'intérieur de $V - A$ $(r_i \in \mathfrak{R})$. Comme E_j^n $(1 \leqq j \leqq m)$ est un (n, R)-cycle mod $A + (R - V)$, il résulte de *Variétés*, 56, 4° que $E_j^n \sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^0 = 0$, d'où $r_1 = \cdots = r_m = 0$. Donc les Γ_i^0 $(1 \leqq i \leqq m)$ sont des $(0, R)$-cycles absolus située à l'intérieur de $W - A$, ils ne sont liés par aucune homologie à l'intérieur de $W - A$, et on a $J(\Gamma_i^0) = 0$ $(1 \leqq i \leqq m)$. Donc $\alpha_0(W, V; R - A) \geqq m$, c.q.f.d.

29. *Soit* $0 \leqq p \leqq n - 2$. *Soit* $q = n - p - 1$. *Soit* $t = \min(p + 1, q)$. *Soit* R *une* $V_t^n(S)$. *Soit* A *un sous-ensemble fermé de* R. *Soit* $a \in A - S$. *Soit* $\beta_p(a, R) = 0$.[19] *Alors* $\alpha_q(a, R - A) \geqq \beta_p(a, A)$.

Démonstration. On voit sans peine qu'il suffit de démontrer l'énoncé suivant: Soit $m = 1, 2, 3, \cdots$; soit U un entourage de a suffisamment petit; soit $\beta_p(a, U; A) \geqq m$; alors il existe un entourage $V \subset U$ de a tel que $\alpha_q(a, V; R - A) \geqq m$.

Soit $U \subset R - S$ un entourage de a si petit que (v. 14) R soit orientable mod $(R - U)$. Soit $\beta_p(a, U; A) \geqq m$. Comme $\beta_p(a, R) = 0$, on a $\beta_p(a, U; R) = 0$; donc il existe un entourage $V \subset U$ de a tel que $\beta_p(V, U; R) = 0$. On doit prouver que $\alpha_q(W, V; R - A) \geqq m$ pour chaque entourage $W \subset V$ de a.

Puisque $\beta_p(a, U; A) \geqq m$ on a $\beta_p(W, U; A) \geqq m$. Donc il existe des (p, R)-cycles $C_i^p (1 \leqq i \leqq m)$ mod $(A - U)$ dans A tels que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p \sim 0 \bmod (A - W)$ dans $A (r_i \in \mathfrak{R})$ entraîne que $r_1 = \cdots = r_m = 0$. Soit $\mathfrak{U}_1$ un réseau tel que l'homologie $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod (A - W)$ dans A entraîne que $r_1 = \cdots = r_m = 0$. Déterminons un affinement $\mathfrak{U}_2$ de $\mathfrak{U}_1$ d'après 4, en y posant $\varphi = A$, $\chi = R - W$. Soit $\mathfrak{U}_3$ un affinement de $\mathfrak{U}_2$ normal rel. aux cycles mod $A + (R - V)$. Soit $\pi_{21} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_1)$, $\pi_{32} = \text{Pr.}(\mathfrak{U}_3, \mathfrak{U}_2)$, $\pi_{31} = \pi_{21}\pi_{32}$.

Les C_i^p étant des (p, R)-cycles mod $(R - U)$, on a $C_i^p \sim 0 \bmod (R - V)$, car $\beta_p(V, U; R) = 0$. Donc il existe des $(p + 1, \mathfrak{U}_3)$-chaînes $E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_3)$ et des $(p, \mathfrak{U}_3)$-chaînes $D_i^p(\mathfrak{U}_3) \subset R - V$ telles que $E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \to C_i^p(\mathfrak{U}_3) - D_i^p(\mathfrak{U}_3)$. D'après la définition de $\mathfrak{U}_3$, il en résulte que les $\pi_{32} E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_3)$ sont des $(p + 1, \mathfrak{U}_2)$-cycles essentiels mod $A + (R - V)$.

Si l'on a $\pi_{32} \sum_{i=1}^{m} r_i E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \sim 0 \bmod A + (R - W)(r_i \in \mathfrak{R})$, il existe des $\mathfrak{U}_2$-chaînes $M^{p+2}(\mathfrak{U}_2)$, $N_1^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \subset A$ et $N_2^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \subset R - W$ telles que

$$M^{p+2}(\mathfrak{U}_2) \to \pi_{32} \sum_{i=1}^{m} r_i E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_0) - N_1^{p+1}(\mathfrak{U}_2) - N_2^{p+1}(\mathfrak{U}_2) \to 0.$$

[19] Si $p \leqq n/2$, cette hypothèse est une conséquence des précedentes en vertu de 19.2.

Comme $E_i^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \to C_i^p(\mathfrak{U}_3) - D_i^p(\mathfrak{U}_3)$, il en résulte que

$$\pi_{32} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p(\mathfrak{U}_3) = \pi \sum_{i=1}^{m} r_i D_i^p(\mathfrak{U}_3) + FN_1^{p+1}(\mathfrak{U}_2) + FN_2^{p+1}(\mathfrak{U}_2),$$

d'où on déduit que la chaine

(1) $FN_1^{p+1}(\mathfrak{U}_2) - \pi_{32} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p(\mathfrak{U}_3)$ est située dans $(R - W)$. La chaîne (1) étant aussi située dans A, il résulte de la définition de $\mathfrak{U}_2$ qu'elle est située dans $(A - W)$. Donc $\pi_{32} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p(\mathfrak{U}_3) \sim 0 \bmod (A - W)$ dans A, d'où $\pi_{31} \sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p(\mathfrak{U}_3) \sim 0 \bmod (A - W)$ dans A. Or $\pi_{31} C_i^p(\mathfrak{U}_3) \sim C_i^p(\mathfrak{U}_1) \bmod (A - U)$ dans A. Comme $U \supset W$, il en résulte que $\sum_{i=1}^{m} r_i C_i^p(\mathfrak{U}_1) \sim 0 \bmod (A - W)$ dans A, d'où $r_1 = \cdots = r_m = 0$ d'après la définition de U_1.

Nous venons de prouver que les

(2) $\pi_{32} E_1^{p+1}(\mathfrak{U}_3) \cdots, \pi_{32} E_m^{p+1}(\mathfrak{U}_3)$ ne sont liés par aucune homologie mod $A + (R - W)$. Or les (2) sont des $(p + 1, \mathfrak{U}_2)$-cycles essentiels mod $A + (R - V)$. Soient

(3) $E_1^{p+1}, \cdots, E_m^{p+1}$ des $(p + 1, R)$-cycles mod $A + (R - V)$ attachés aux (2) selon *Homologie*, II, 28. Evidemment les (3) ne sont liés par aucune homologie mod $A + (R - W)$. D'après 21 (v. aussi 20.1), où on remplace p par $p + 1$ et S par $A + (R - W)$ (v. 12 et 16), il existe des (q, R)-cycles absolus Γ_i^q $(1 \leqq i \leqq m)$ situés à l'intérieur de $(W - A)$ et tels que $E_i^{p+1}\Gamma_j^q = \delta_{ij}$ $(1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq m)$. Soit $\sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^q \sim 0$ à l'intérieur de $V - A (r_i \epsilon \mathfrak{R})$. Comme $E_j^{p+1}(1 \leqq j \leqq m)$ est un $(p + 1, R)$-cycle mod $A + (R - V)$, il résulte de *Variétés*, 56, 4° que $E_j^{p+1} \sum_{i=1}^{m} r_i \Gamma_i^q = 0$, d'où $r_1 = \cdots = r_m = 0$. Donc les Γ_i^q $(1 \leqq i \leqq m)$ sont des (q, R) absolus situés à l'intérieur de $W - A$ et ne liés par aucune homologie à l'intérieur de $V - A$. Donc $\alpha_q(W, V; R - A) \geqq m$, c.q.f.d.

BRNO, CZECHOSLOVAKIA.