Eduard Čech

Sur les arcs indépendants dans un continu localement connexe

Spisy Přírod. Fak. Univ. Brno 193 (1934), 10 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501031

S P I S Y
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

ANTONÍN ŠIMEK

ROK 1934 Čís. 193

SUR LES ARCS INDÉPENDANTS DANS UN CONTINU LOCALEMENT CONNEXE

PAR

EDUARD ČECH

VYCHÁZÍ S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDÁVÁ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 63

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

SUR LES ARCS INDÉPENDANTS DANS UN CONTINU LOCALEMENT CONNEXE.

Une des propriétés les plus importantes d'un continu R localement connexe est exprimée par le *n-Bogensatz*, démontré d'abord par M. Menger dans le cas particulier où R est une courbe régulière [Fund. Math. X], ensuite par M. Nöbeling dans le cas général où R est un continu localement connexe arbitraire [Fund. Math. XVIII; cf. aussi l'exposition donnée dans la *Kurventheorie* de M. Menger, chap. VI.] Une autre démonstration (ou on suppose d'ailleurs un peu plus généralement que R soit un espace *localement* compact et localement connexe) a été donné récemment par M. Zippin [Annals of Math., XXXIV].

Dans une conférence faite le 4 juillet 1933 dans le Math. Kolloquium de M. Menger, j'ai exposé une démonstration du *n-Bogensatz* (d'ailleurs un peu généralisé) qui, tout en suivant les grandes lignes de la démonstration de M. Nöbeling, en est différente dans le details du raisonnement. C'est cette démonstration que je reproduis dans la Note présente.

1. Un *graphe* G est un ensemble composé d'un nombre fini de points où l'on a distingué certains couples de points, appelés *côtés* du graphe. Si $G_1 \subset G$, le couple $a \in G_1$, $b \in G_1$ est un côté de G_1 si et seulement si c'est un côté de G. Un *chemin* dans G est une suite finie $\gamma = (a_0, a_1, \ldots, a_m)$ de points $a_i \in G \, (m \geqq 0)$ telle que (a_i, a_{i+1}) $(0 \leqq i \leqq m-1)$ sont des côtés de G. Les chemins $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ s'appellent *indépendants* si chaque point $a \in G$ appartient au plus à un d'eux. Soient A et B des ensembles de points *donnés d'avance* (pas nécessairement contenus dans G). $\gamma = (a_0, a_1, \ldots, a_m)$ est un chemin *de A à B* si $a_0 \in A$, $a_m \in B$. $C \subset G$ est une *coupure* de G (entre A et B) si le graphe $G - C$ ne contient aucun chemin de A à B. (P. ex. AG ou BG est une coupure.) Soit $n = 0, 1, 2, \ldots.$ On dit que G est *n fois connexe* (entre A et B) si chaque coupure de G contient au moins n points. (Chaque graphe est donc 0 fois connexe.)

LEMME. *Un graphe G n fois connexe contient n chemins indépendants entre A et B.*

Démonstration. Le théorème est banal pour $n = 0$, donc pour $G = 0$. On peut donc faire la supposition Σ que le théorème soit vrai (pour chaque choix de A, B, n) pour tous les graphes $G_1 \neq G \supset G_1$. On peut admettre que le graphe $G - (a)$ ne soit n fois connexe pour aucun choix de $a \in G$ (car autrement le théorème est une conséquence de la supposition Σ). Or chaque graphe $G-(a)$ est évidemment $(n-1)$ fois connexe car, C étant une coupure de $G-(a)$, $C+(a)$ en est une de G. Donc il existe, d'après Σ, des chemins $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$ indépendants dans $G-(a)$. Si $c \in AB$, alors $(a), \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ sont n chemins indépendants dans G. Supposons donc que $ABG=0$.

Prouvons d'abord qu'il existe une coupure C contenant n points et telle que $AG-C \neq 0 \neq BG-C$. Si $G-(A+B) \neq 0$, choisissons $a_1 \in G-(A+B)$. Puisque $G-(a_1)$ est $(n-1)$ fois connexe, mais non n fois connexe, il existe dans $G-(a_1)$ une coupure C_1 contenant $n-1$ points. Alors $C=C_1+(a_1)$ est une coupure de G contenant n points et l'ensemble AGC contient au plus $n-1$ points, car $a_1 \in C-AG$. Or AG contient au moins n points puisque c'est une coupure de G. Donc $AG-C \neq 0$ et pareillement on voit que $BG-C \neq 0$. Reste à étudier le cas $G \subset A+B$. Puisque $ABG=0$ et que l'on puisse supposer $n>0$, il existe un côté (a_1, a_2) de G tel que $a_1 \in A$, $a_2 \in B$. Si le graphe $G-(a_1)-(a_2)$ est $(n-1)$ fois connexe, il existe (en vertu de Σ) $n-1$ chemins indépendants $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$ dans $G-(a_1)-(a_2)$. Mais alors $(a_1, a_2), \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ sont n chemins indépendants dans G de manière que ce cas peut être exclu. Donc il existe une coupure $C'=(a_3, \ldots, a_s)$ $(s \leqq n)$ dans $G-(a_1)-(a_2)$. Alors $C=(a_1)+(a_2)+C'$ est une coupure de G. Puisque G est n fois connexe, on a $s=n$. Comme $ABG=0$, $a_1 \in AG$, $a_2 \in BG$ et que les ensembles AG et BG, étant des coupures de G, contiennent chacun au moins n points, on a, ici encore, $AG-C \neq 0 \neq BG-C$.

Soit donc $C=(c_1, \ldots, c_n)$ une coupure de G contenant n points et telle que $AG-C \neq 0 \neq BG-C$. Soit $G_1 \subset G$ l'ensemble de tous les points $b \in G$ tels qu'il existe dans G un chemin $(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ $(m \geqq 0)$ tel que $a_0 \in AG$, $a_m=b$, $a_i \in G-C$ pour $0 \leqq i \leqq m-1$. En remplaçant dans cette définition de G_1 l'ensemble A par B, on obtient $G_2 \subset G$. Soit $c \in G_1 G_2$; alors il existe dans G un chemin $(a_0, \ldots, a_h, \ldots, a_k)$ tel que $a_0 \in BG$, $a_k \in BG$, $a_h=c$ et $a_i \in G-C$ pour $i \neq h$; puisque C est une coupure, il en résulte que $c \in C$. Nous avons donc prouvé que $G_1 G_2 \subset C$. Comme $AG \subset G_1$, $AG-C \neq 0$, $G_1 G_2 \subset C$, on a $G_2 \neq G$; pareillement on obtient que $G_1 \neq G$.

Soit D un sous-ensemble de G_1 contenant au plus $n-1$ points. Comme $G_1 \subset G$ et que G soit n fois connexe, il existe un chemin γ dans $G-D$ de A à B. C étant une coupure, γ contient évidemment un chemin γ' de A à C. On voit sans peine que γ' est contenu dans G_1-D. Il en résulte que le graphe G_1 est n fois connexe entre A et C. D'après la supposition Σ, il existe donc dans G_1 n chemins indépendants $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_n$ de A à C; on peut supposer que $\gamma'_i . C=(c_i)$. Pareillement il existe dans G_2 n chemins indépendants $\gamma''_1, \gamma''_2, \ldots, \gamma''_n$ de C à B tels que $\gamma''_i . C=(c_i)$. Puisque $G_1 G_2 \subset C$, les $\gamma'_1+\gamma''_1, \ldots, \gamma'_n+\gamma''_n$ sont n chemins indépendants dans G de A à B.

2. Soit R un espace métrique. Soient A et B deux sous-ensembles fermés de R sans point commun. Soit D un sous-ensemble fermé de $A+B$. On dit que R est *n fois connexe entre A et B mod D* ($n=1, 2, 3, \ldots$) si, T étant un sous-ensemble de $R-D$ contenant au plus $n-1$ points et du reste arbitraire, il existe dans $R-T$ un arc de A à B (c'est-à-dire un arc simple aux extrémités $a \varepsilon A$ et $b \varepsilon B$).

Soit $k=0, 1, 2, \ldots$. Soient $H_1, \ldots, H_k$ des sous-ensembles donnés de $R-D$. Soient $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ des nombres positifs donnés. Soit $T \subset R-D$. Désignons par $[k, \varepsilon, T, H]$ l'ensemble de tous les arcs $C \subset R-T$ de A à B tels qu'on ait $\varrho(t, C) > \varepsilon_i$ pour chaque point $t \varepsilon TH_i$ ($1 \leqq i \leqq m$; ϱ signifie la distance).

LEMME. Prémisse: *Soit R un espace compact, localement connexe et n-fois connexe entre A et B mod D. Soient $\{H_i\}$ ($i=1, 2, 3, \ldots$) des sous-ensembles donnés de $R-D$, fermés dans R et $\neq 0$.*

Thèse: *Il existe des nombres positifs ε_i ($i=1, 2, 3, \ldots$), $\varepsilon_i < \varrho(H_i, D)$ ($=\infty$ si $D=0$) tels que $[k, \varepsilon, T, H]=0$ pour $k=0, 1, 2, \ldots$ et pour chaque $T \subset R-D$ contenant au plus $n-1$ points.*

Démonstration. Les nombres ε_i vont être construits par récurrence. Soit donc $k=0, 1, 2. \ldots$ et supposons que l'on ait déjà déterminé des nombres ε_i ($1 \leqq i \leqq k$) tels que $0 < \varepsilon_i < \varrho(H_i, D)$ et que $[k, \varepsilon, T, H] \neq 0$ pour chaque $T \subset R-D$ contenant au plus $n-1$ points. Il s'agit de prouver l'existence d'un nombre $\varepsilon_{k+1} > 0$ tel que $[k+1, \varepsilon, T, H] \neq 0$ pour chaque $T \subset R-D$ contenant au plus $n-1$ points. [On peut alors supposer que $\varepsilon_{k+1} < \varrho(H_{k+1}, D)$ car il est évidemment permis de diminner le nombre ε_{k+1}.] Supposons au contraire que pour $\nu=1, 2, 3, \ldots$ et $\varepsilon_{k+1}=\frac{1}{\nu}$ il existe toujours un ensemble $T_\nu \subset R-D$ contenant au plus $n-1$ points et tel que $[k+1, \varepsilon, T_\nu, H]=0$, ce qui vent dire que $\varrho(T_\nu H_{k+1}, C) \leqq \frac{1}{\nu}$ pour chaque arc $C \varepsilon [k, \varepsilon, T_\nu, H]$. Remarquons que la suite d'ensembles $\{T_\nu\}$ peut être remplacée par une sous-suite arbitraire, sans qu'elle perde ses propriétés; nous nous servirons couramment de cette remarque dans ce qui suit.

Tout d'abord, on peut supposer que tous les ensembles T_ν contiennent le même nombre s de points ($1 \leqq s \leqq n-1$): soit $T_\nu=(t_{\nu 1}, t_{\nu 2}, \ldots, t_{\nu s})$. Ensuite, l'espace R étant compact, on peut admettre que les limites $\lim_{\nu=\infty} t_{\nu j}=t_j$ existent pour $1 \leqq j \leqq s$. Soit T'_ν l'ensemble qui s'obtient de $T_\nu=(t_{\nu 1}, t_{\nu 2}, \ldots, t_{\nu s})$ en remplaçant chaque point $t_{\nu j}$ par t_j si $t_j \varepsilon R-D$; les autres points $t_{\nu j}$ passant inaltérés T_ν à T'_ν. L'ensemble T'_ν contient au plus $s \leqq n-1$ points et l'on a $T'_\nu \subset R-D$, de manière qu'il existe un arc $C_\nu \varepsilon [k, \varepsilon, T'_\nu, H]$.

Soit U, resp. V, un entourage ouvert de DA, resp. de DB si petit que (1) $\overline{U}\overline{V}=\overline{U}B=\overline{V}A=0$, (2) $\varrho(H_i, \overline{U}+\overline{V}) > \varepsilon_i$ pour $1 \leqq i \leqq k$,

(3) $\varrho\ (H_{k+1},\ \overline{U}+\overline{V})>0$, (4) $t_j \in R-(\overline{U}+\overline{V})$ pour chaque valeur de j $(1\leqq j\leqq s)$ telle que $t_j \in R-D$. En remplaçant $\{T_\nu\}$ par une sous-suite on obtient que $t_{\nu j} \in U$ si $t_j \in DA$, et $t_{\nu j} \in V$ si $t_j \in DB$. Soient $a_\nu \in A$ et $b_\nu \in B$ les deux extrémités de C_ν; on peut supposer que $C_\nu-(a_\nu)-(b_\nu) \subset R-(A+B)$. En remplaçant $\{T_\nu\}$ par une sous-suite on parvient à réaliser un des quatre cas qui suivent:

Cas I. Soit $a_\nu \in A-D$, $b_\nu \in B-D$ pour chaque ν. Comme $C_1 T'_1=0$, $C_1 D=0$, il existe un nombre $\eta>0$ tel que $\varrho\ (t_j,\ C_1)>\eta$ pour $1\leqq j\leqq s$. Comme $C_1 \in [k,\ \varepsilon,\ T'_1, H]$ et que l'on ait $H_i D=0$, on a $\varrho\ (t_j,\ C_1)>\varepsilon_i$ pour $1\leqq j\leqq s$, $1\leqq i\leqq k$, $t_j \in H_i$. Pour ν suffisamment grand on a aussi $\varrho\ (t_{\nu j},\ C_1)>\eta$ pour $1\leqq j\leqq s$, ainsi que $\varrho\ (t_{\nu j},\ C_1)>\varepsilon_i$ pour $1\leqq j\leqq s$, $1\leqq i\leqq k$, $t_j \in H_i$. Donc $C_1 \in [k,\ \varepsilon,\ T_\nu,\ H]$ et $\varrho\ (T_\nu,\ H_{k+1},\ C_1)>\eta$, d'où $C_1 \in [k+1,\ \varepsilon,\ T_\nu,\ H]$, ce qui est une contradiction, car $[k+1,\ \varepsilon,\ T_\nu,\ H]=0$.

Cas II. Soit $a_\nu \in A-D$, $b_\nu \in BD$ pour chaque ν. Puisque l'espace R est compact et localement connexe, il existe un nombre fini u de continus K_r $(1\leqq r\leqq u)$ localement connexes et tels que $F(U)=\overline{U}-U\subset\sum_{r=1}^{u} K_r$, les continus K_r étant si petits que l'on ait (1) $\sum_{r=1}^{u} K_r.\ (T_\nu+T'_\nu)=0$ pour chaque ν, (2) $\varrho\ (H_i,\ \sum_{r=1}^{u} K_r)>\varepsilon_i$ pour $1\leqq i\leqq k$, (3) $\varrho\ (H_{k+1},\ \sum_{r=1}^{u} K_r)>0$. Les extrémités de l'arc C_ν étant $a_\nu \in U$ et $b_\nu \in R-\overline{U}$, C_ν rencontre $F(U)$ et par suite aussi $\sum_{r=1}^{u} K_r$. Soit p_ν le premier point d'intersection de l'arc C_ν (orienté de a_ν à b_ν) avec $\sum_{r=1}^{u} K_r$. Par un passage à une sous-suite on obtient que $p_\nu \in K'=K_{r_0}$ pour chaque ν. Le point p_ν décompose l'arc C_ν en deux arcs: C'_ν aux extrémités a_ν et p_ν et C''_ν aux extrémités p_ν et b_ν. Comme $p_1 \in K'$, $p_\nu \in K'$, où K' est un continu localement connexe, il existe un arc simple $E_\nu \subset K'$ aux extrémités p_ν et p_1. La somme $C'_\nu+E_\nu+C''_1$ contient un arc C_ν^* aux extrémités a_ν et b_1. On voit sans peine que, pour les valeurs suffisamment grands de ν, ou a $C_\nu^* \in [k,\ \varepsilon,\ T_\nu,\ H]$, d'où $\varrho\ (T_\nu H_{k+1},\ C_\nu^*)\geqq\frac{1}{\nu}$ d'après la definition de T_ν. Comme $C'_\nu\subset U$, $E_1\subset K'$, $\overline{U} H_{k+1}=K' H_{k+1}=0$, il en résulte que $\varrho\ (T_\nu H_{k+1},\ C''_1)\leqq\frac{1}{\nu}$, ce qui est évidemment une contradiction.

Cas III: $a_\nu \in AD$, $b_\nu \in B-D$ ne diffère que formellement du cas II.

Cas IV. Soit $a_\nu \in AD$, $b_\nu \in BD$ pour chaque ν. Posons $F(U)\subset\sum_{r=1}^{u} K_r$, les continus K_r jouissant des mêmes propriètés comme dans le cas II, et posons analoguement $F(V)\subset\sum_{r=1}^{v} K'_r$. De nouveau, soit p_ν le premier point d'intersection de l'arc C_ν avec $\sum_{r=1}^{u} K_r$ et soit q_ν le dernier point d'intersection de C_ν avec $\sum_{r=1}^{\nu} K'_r$. On peut supposer que $p_\nu \in K_1$, $q_\nu \in K'_1$ pour chaque ν. Les points p_ν et q_ν décomposent l'arc C_ν en trois arcs C'_ν, C''_ν, C'''_ν aux extrémités a_ν, p_ν; p_ν, q_ν; q_ν, b_ν. Les continus K_1 et K'_1 étant localement connexes, il existe des arcs simples $E_1 \subset K_1$ et $E'_1 \subset K'_1$ dont les extrémités sont resp. p_1, p_ν et q_1, q_ν. La somme $C'_\nu + E_1 + C''_1 + E''_1 + C'''_\nu$ contient un arc simple C_ν^* aux extrémités a_ν et b_ν. On voit sans peine que, pour les valeurs suffisamment grands de ν, on a $C_\nu^* \in [k, \varepsilon, T_\nu, H]$, d'où $\varrho\ (T_\nu H_{k+1}, C_\nu^*) \geqq \frac{1}{\nu}$. Comme $C'_\nu \subset \overline{U}$, $C'''_\nu \subset \overline{V}$, $(\overline{U} + \overline{V})\, H_{k+1} = 0$, $E_1 \subset K_1$, $E'_1 \subset K'_1$, $(K_1 + {}+ K'_1)\, H_{k+1} = 0$, il en résulte que $\varrho\ (T_\nu H_{k+1}, C_1^*) \leqq \frac{1}{\nu}$, ce qui est une contradiction.

3. LEMME. Prémisse: *L'espace R soit compact, localement connexe et n fois connexe entre A et B mod D.*

Thèse: *Il existe une décomposition $R - D = \sum_{\lambda=1}^{\infty} K_\lambda$ telle que (1) les ensembles K_λ sont ouverts et connexes, (2) Z étant un entourage arbitraire de D, il existe un entier l tel que $K_\lambda \subset Z$ pour tous les $\lambda > l$, (3) $s \leqq n - 1$ valeurs arbitraires $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ de λ étant donnés, R contient un arc C de A à B tel que les inégalités $CK_\lambda \neq 0 \neq K_\lambda K_\mu$ entraînent que $K_\mu K_{\lambda_1} = \ldots = K_\mu K_{\lambda_s} = 0$.*

Démonstration. L'ensemble D étant fermé dans l'espace compact R, il existe une suite $\{W_\nu\}$ d'entourages ouverts de D telle que $\overline{W}_{\nu+1} \subset W_\nu$ et qu'à chaque entourage Z de D on puisse attacher un nombre ν tel que $Z \supset W_\nu$, d'où $\prod_{1}^{\infty} W_\nu = D$. Soit $G_\nu = R - \overline{W}_\nu$, d'où $\overline{G}_\nu \subset G_{\nu+1}$ et $R - D_\nu = \sum_{1}^{\infty} \overline{G}_\nu$. Soit $G_0 = 0$, $H_\nu = \overline{G}_\nu - G_{\nu-1}$, donc $R - D = \sum_{1}^{\infty} H_\nu$. A la suite d'ensembles $\{H_\nu\}$ attachons une suite $\{\varepsilon_\nu\}$ de nombres positifs d'après le lemme du n° 2. Chaque point $p \in H_\nu$ est contenu dans un ensemble $L_\nu(p)$ ouvert, connexe et si petit que (1) le diamètre de $L_\nu(p)$ soit inférieur aux nombres $\frac{1}{3}\varepsilon_\mu$ [max. $(1, \nu - 4) \leqq \mu \leqq {} \leqq \nu + 4$], (2) $L_\nu(p) \subset G_{\nu+1}$ pour $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, (3) $L_\nu(p) \subset R - \overline{G}_{\nu-2}$ pour $\nu = 3, 4, 5, \ldots$. L'ensemble H_ν étant compact en soi, on peut extraire de la famille $\{L_\nu(p)\}$ une suite finie $L_{\nu 1}, L_{\nu 2}, \ldots, L_{\nu r_\nu}$ recouvrant H_ν. On voit sans peine que la suite

$$K_1 = L_{11}, \ \ldots, \ K_{r_1} = L_{1 r_1}, \ K_{r_1+1} = L_{21}, \ \ldots, \ K_{r_1+r_2} = L_{2 r_2}, \ K_{r_1+r_2+1} = L_{31}, \ \ldots$$

fournit la décomposition cherchée $R - D$.

4. THEOREME. *Soit A et B deux sous-ensembles fermés es disjoints d'un espace R compact et localement connexe. Soit D un sous-ensemble fermé de $A + B$. Supposons que R soit n fois connexe entre A et B*

mod D. Il existe n arcs $\Delta_1, \Delta_1, \ldots, \Delta_n$ entre A et B tels que $\Delta_i \Delta_j \subset D$ pour $1 \leqq i < j \leqq n$.

Démonstration. Construisons une décomposition $R - D = \sum_1^\infty K_\lambda$ d'après le lemme du n° 3. Pour $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$, choisissons un point $p_\lambda \in K_\lambda$. Ordonnons tous les couples (K_λ, K_μ) tels que $K_\lambda K_\mu \neq 0$ dans une suite simple $\{L_k\} = \{(K_{\lambda_k}, K_{\mu_k})\}$. Les ensembles K_{λ_k} et K_{μ_k} étant ouverts et connexes; l'ensemble $K_{\lambda_k} + K_{\mu_k}$ est aussi ouvert et connexe, car $K_{\lambda_k} K_{\mu_k} \neq 0$. Comme l'espace R est compact et localement connexe, il existe (pour $k = 1, 2, 3, \ldots$) un arc simple $C'_k \subset K_{\lambda_k} + K_{\mu_k}$ aux extrémités p_{λ_k} et p_{μ_k}.

On peut même construire pour chaque k un arc simple $C_k \subset K_{\lambda_k} + K_{\mu_k}$ aux extrémités p_{λ_k} et p_{μ_k} de manière que, pour $h < k$, l'intersection $C_h C_k$ ait un nombre fini de composantes. On construira les arcs C_k par récurrence, en posant $C_1 = C'_1$. Supposons généralement que, pour une valeur donnée de k ($= 2, 3, \ldots$), on ait déjà construit les arcs $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}$. Divisons l'arc C'_k en des arcs partiels en nombre fini de manière que, γ étant un arc partiel quelconque, ou bien toutes les deux extrémités de γ appartiennent à l'ensemble $\sum_{h=1}^{k-1} C_h$, ou bien l'ensemble $\gamma . \sum_{h=1}^{k-1} C_h$ contienne précisément un point, ce point étant une extrémité de γ. Une telle division de C'_k est évidemment possible; en vertu de l'inclusion $C'_k \subset K_{\lambda_k} + K_{\mu_k}$, on peut même supposer que les arcs partiels soient si petits que, si γ est un arc partiel dont les deux extrémités α_1 et α_2 appartiennent à l'ensemble $\sum_{h=1}^{k-1} C_h$, il soit possible de joindre α_1 à α_2 par un arc contenu dans $(K_{\lambda_k} + K_{\mu_k}) \dot{.} \sum_{h=1}^{k-1} C_h$. L'arc C_k cherché s'obtient alors de C'_k en y omettant d'abord les arcs partiels dont les extrémités sont situés dans $\sum_{h=1}^{k-1} C_h$, ensuite en remplaçant chaque arc omis par un arc qui possède les mêmes extrémités et qui est situé dans $(K_{\lambda_k} + K_{\mu_k}) \dot{.} \sum_{h=1}^{k-1} C_h$, enfin en prenant dans le continu élémentaire ainsi obtenu un arc simple C_k aux extrémités p_{λ_k} et p_{μ_k}.

Aucun arc C_k ne rencontre l'ensemble D; d'ailleurs, à partir d'un certain rang, tous les arcs C_k sont contenus dans un entourage arbitrairement donné de D. Il en résulte que chaque arc de la suite $\{C_k\}$ ne peut rencontrer qu'un nombre fini d'arcs de cette suite. En divisant convenablement chaque arc C_k, on obtient une suite infinie $\{c_r\}$ d'arcs simples tels que: (1) chaque arc c_r est contenu dans un arc C_k; (2) pour $1 \leqq r < s$, l'ensemble $c_r . c_s$ est vide ou bien se réduit à une extrémité commune de c_r et de c_s; (3) $\sum_{r=1}^\infty c_r = \sum_{k=1}^\infty C_k$. A chaque c_r on peut attacher un $C_k \supset c_r$ et par suite deux indices λ et μ tels que $c_r \subset K_\lambda + K_\mu$, $K_\lambda K_\mu \neq 0$.

Soit $\{U_\nu\}$ une suite décroissante d'entourages ouverts de AD et telle que $\prod\limits_1^\infty \overline{U}_\nu = AD$; soit $\{V_\nu\}$ une suite pareille relative à l'ensemble BD. Pour chaque ν soit $Q_\nu = \Sigma C_k$, la sommation s'étendant à toutes les valeurs (en nombre fini) de k telles qu'une au moins des deux égalités $K_{\lambda_k}(U_\nu + V_\nu) = 0$, $K_{\mu_k}(U_\nu + V_\nu) = 0$ ait lieu. Q_ν est une somme d'un nombre fini d'arcs de la suite $\{c_r\}$. Soit G_ν l'ensemble de toutes les extrémités des arcs $c_r \subset Q_\nu$; G_ν est un graphe, si l'on définit comme côtés de G_ν les couples (t_r, τ_r), où t_r et τ_r sont les deux extrémités de $c_r \subset Q_\nu$. Pour chaque valeur de ν soit α_ν l'ensemble de tous les points p_{λ_k} tels que $K_{\lambda_k}(A + U_\nu) \neq 0 = K_{\mu_k}(A + U_\nu)$ et de tous les points p_{μ_k} tels que $K_{\lambda_k}(A + U_\nu) = 0 \neq K_{\mu_k}(A + U_\nu)$. L'ensemble β_ν se définit pareillement, en remplaçant $A + U_\nu$ par $B + V_\nu$. Evidemment $\alpha_\nu + \beta_\nu \subset G_\nu$.

Chaque graphe G_ν est n fois connexe entre α_ν et β_ν. Soit $T = (t_1, \ldots, t_s)$ un sous-ensemble de G_ν contenant $s \leqq n - 1$ points. On doit prouver que l'ensemble Q_ν contient un arc de α_ν à β_ν sans point commun avec T. Pour $1 \leqq j \leqq s$, il existe un indice ν_j tel que $t_j \in K_{\nu_j}$. D'après le lemme du n° 3, l'espace R contient un arc Γ aux extrémités $a \in A$ et $b \in B$ tel que les inégalités $\Gamma K_\lambda \neq 0 \neq K_\lambda K_\mu$ entraînent que $K_\mu K_{\nu_j} = 0$ pour $1 \leqq j \leqq s$. Si $a \in A - D$ posons $a_0 = a$; si $a \in AD$ choisissons le point $a_0 \in \Gamma$, $a_0 \neq a$ si proche de a que l'on ait $K_\lambda \subset U$ pour chaque valeur de λ telle que $a_0 \in K_\lambda$. Déterminons pareillement le point b_0. Soit l'arc $\Gamma_0 \subset \Gamma$ aux extrémités a_0 et b_0. Soit l'ensemble $\mathfrak{K}$ de tous les K_μ tels que $\Gamma_0 K_\mu \neq 0$. L'ensemble $\mathfrak{K}$, étant un recouvrement de l'ensemble connexe Γ_0, contient une suite finie $K_{\mu_0}, K_{\mu_1}, \ldots, K_{\mu_m}$ telle que $a_0 \in K_{\mu_0}$, $b_0 \in K_{\mu_m}$, $K_{\mu_i} \cdot K_{\mu_{i+1}} \neq 0$ pour $0 \leqq i \leqq m - 1$. A cette suite correspond une suite $q_0, q_1, \ldots, q_m$ de points tels que, pour $0 \leqq i \leqq m - 1$, les points q_i et q_{i+1} sont les deux extrémités de l'arc C_{k_i}, l'indice k_i étant déterminé d'après la condition $L_{k_i} = (K_{\mu_i}, K_{\mu_{i+1}})$. L'ensemble $\sum\limits_{i=0}^{m-1} C_{k_i}$, sans point commun avec T, contient un arc de α_ν à β_ν, cet arc étant un sous-ensemble de Q_ν.

D'après le lemme du n° 1, l'ensemble Q_ν contient donc n arcs $\gamma_{\nu 1}, \gamma_{\nu 2}, \ldots, \gamma_{\nu n}$ de α_ν à β_ν, ces arcs étant disjoints deux à deux. Evidemment Q_ν ne peut contenir qu'un nombre *fini* de tels groupes de n arcs; d'ailleurs on voit sans peine que chaque arc $\gamma_{\nu+1, i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ contient un arc partiel $\gamma'_{\nu i} \subset Q_\nu$ de α_ν à β_ν. Il suffit donc de remplacer $\{Q_\nu\}$ par une sous-suite pour qu'on puisse supposer que l'on ait $\gamma_{\nu i} \subset \gamma_{\nu+1, i}$ pour $1 \leqq i \leqq n$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$. Posons $\Gamma_i = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Ouatre cas sont possibles.

Cas I. Γ_i est un arc simple aux extrémités $a_i \in A - D$, $b_i \in B - D$. On pose alors $\Delta_i = \Gamma_i$, $A_i = A_i^* = (a_i)$, $B_i = B_i^* = (b_i)$.

Cas II. $\overline{\Gamma}_i = A_i + \Gamma_i$, $\Gamma_i B = b_i \in B - D$, où A_i est un continu (pouvant se réduire à un point) contenu dans AD. On pose alors $\Delta_i = \Gamma_i + A_i^*$, $B_i = (b_i)$, $A_i^* = A_i$ si A_i se réduit à un point, $A_i^* = 0$ dans le cas contraire.

Cas III. $\overline{\Gamma}_i = B_i + \Gamma_i$, $\Gamma_i A = a_i \in A - D$, où B_i est un continu (ou un point) contenu dans BD. On pose $\Delta_i = \Gamma_i + B_i^*$, $A_i = (a_i)$, $B_i^* = B_i$ si B_i se réduit à un point, $B_i^* = 0$ dans le cas contraire.

Cas IV. $\overline{\Gamma}_i = A_i + \Gamma_i + B_i$, où A_i et B_i sont des continus (dont chacun peut se réduire à un point) tels que $A_i \subset AD$, $B_i \subset BD$. On pose $\Delta_i = A_i^* + \Gamma_i + B_i^*$, où $A_i^* = A_i$ si A_i se réduit à un point, $A_i^* = 0$ dans le cas contraire, et pareillement pour B_i.

Si l'ensemble D ne contient qu'un nombre fini de points, les Δ_1, $\Delta_2, \ldots, \Delta_n$ sont les n arcs cherchés. Or on peut toujours se réduire à ce cas spécial; à ce but, il suffit évidemment d'indiquer un sous-ensemble fini D^* de D tel que R soit n fois connexe de A à B mod D^*. Nous allons voir qu'il suffit de poser $D^* = \sum_{i=1}^{n} (A_i^* + B_i^*)$. En effet, soit un sous-ensemble T de $R - D^*$ contenant $n - 1$ points au plus. On voit sans peine qu'il existe une valeur de $i \, (1 \leq i \leq n)$ telle que $\Delta_i T = 0$. Il existe un point $a'_i \in A_i - T$ et un point $b'_i \in B_i - T$. L'espace R étant localement connexe, il existe un arc δ_1 de a'_i à Δ_i et un arc δ_2 de b'_i à Δ_i tels que $(\delta_1 + \delta_2) T = 0$. L'ensemble $\delta_1 + \Delta_i + \delta_2$, sans point commun avec T, contient un arc de A à B.