Eduard Čech

Trois théorèmes sur l'homologie

Spisy Přírod. Fak. Univ. Brno 144 (1931), 21 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500994

SPISY VYDÁVANÉ PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU MASARYKOVY UNIVERSITY REDAKTOR	PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ MASARYK RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

ROK 1931 ČÍS. 144

TROIS THÉORÈMES SUR L'HOMOLOGIE

PAR

EDUARD ČECH

VYCHÁZÍ S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDÁVÁ

PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BRNO, KOUNICOVA 63

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_N$ des sousensembles fermés d'un espace topologique R. Soient p, q deux points de R situés en dehors de $\sum_{i=1}^{N} A_i$. Supposons qu'il existe, pour $1 \leqq i \leqq N$, un arc $\widehat{pq}$ dans R qui ne rencontre aucun des $N-1$ ensembles A_j $(j \neq i)$. Un cas particulier du *théorème* A_n indique des conditions suffisantes pour qu'il existe dans R un arc $\widehat{pq}$ ne rencontrant aucun des N ensembles A_i. Le *théorème* B_n est en quelque sorte inverse au théorème A_n. Le *théorème* C_n résulte d'une synthèse des deux théorèmes A_n et B_n.

Dans le paragraphe 1 je donne un résumé rapide de quelques notions fondamentales de la topologie combinatoire dont je me sers dans ce qui suit. Dans le paragraphe 2 j'introduis certaines notations qui permettent d'énoncer simplement les trois théorèmes. Les paragraphes 3, 4 et 5 donnent respectivement l'énoncé et la démonstration des théorèmes A_n, B_n, C_n. Dans le paragraphe 6 je considère des cas particuliers en me bornant du reste au cas du plan; je retrouve quelques théorèmes connus de Janiszewski et de MM. Straszewicz et Kuratowski et j'y ajoute des théorèmes semblables qui semblent être nouveaux.

Je ne considère dans ce Mémoire que les homologies modulo 2 ce qui abrège un peu certaines considérations; mais tous les théorèmes se transportent aisément au cas où on tient compte aussi de l'orientation.

§ 1. Quelques notions de la topologie combinatoire.

1. Un *n-simplex* $(n \geqq 0)$ est un ensemble constitué par tous les points

$$A = \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_n A_n$$

où

$$A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_n \tag{1}$$

sont des points donnés linéairement indépendants d'un espace euclidien et les λ parcourent toutes les valeurs réelles telles que

$$\lambda_0 \geqq 0,\ \lambda_1 \geqq 0,\ \ldots,\ \lambda_n \geqq 0,\ \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_n.$$

Les points (1) sont les *sommets* du n-simplex. Chaque i-simplex $(0 \leqq i \leqq n)$ dont tous les sommets sont contenus dons la suite (1) est une *i-face* du n-simplex.

2. Un *n-complexe* $(n \geqq 0)$ K_n est un ensemble constitué par un nombre fini de n-simplices d'un espace euclidien, l'ensemble

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_N \tag{2}$$

de tous les sommets de ces n-simplices étant linéairement indépendant. Ces n-simplices sont les *n-faces* du n-complexe K_n, leurs i-faces $(0 \leqq i \leqq n)$ sont les *i-faces* de K_n. Un i-complexe L_i $(0 \leqq i \leqq n)$ est *contenu* dans K_n si chaque i-face de L_i est une i-face de K_n. L_i et M_i étant deux i-complexes $(0 \leqq i \leqq n)$, leur *somme* $L_i + M_i$ est l'ensemble de toutes les i-faces de K_n qui appartiennent à L_i ou à M_i, mais non à L_i et à M_i simultanément. Cette addition est commutative et associative.

3. La *frontière* d'un 0-complexe K_0 est le nombre 0 si le nombre des 0-faces de K_0 est pair et le nombre 1 dans le cas contraire. La *frontière* d'un n-simplex $(n \geqq 1)$ S_n est le $(n-1)$-complexe constitué par les $(n-1)$-faces de S_n. La *frontière* d'un n-complexe $(n \geqq 1)$ K_n est la somme des frontières de toutes les n-faces de K_n. Pour indiquer que L_{n-1} est la frontière de K_n, on écrira $L_{n-1} = FK_n$ ou bien $K_n \rightarrow L_{n-1}$. La frontière d'une somme est la somme des frontières.

4. Un n-complexe K_n sera appelé un *n-cycle* si sa frontière est vide $(K_n \rightarrow 0)$. En particulier un 0-cycle n'est qu'un ensemble constituté par un nombre fini et pair de points (lin. indépendants). La frontière d'un n-complexe $(n \geqq 1)$ est toujours un $(n-1)$-cycle.

5. Un i-cycle C_i contenu dans un n-complexe K_n est dit homologue à zéro dans K_n, ce qui s'écrit $C_i \sim 0$ dans K_n, si K_n contient un $(i+1)$-complexe L_{i+1} tel que $FL_{i+1} = C_i$ (pour $i = n$, si $C_i = 0$). On écrit $C_i \sim D_i$ au lieu de $C_i + D_i \sim 0$.

6. Le nombre maximum P_i de i-cycles $C_i^1, C_i^2, \ldots, C_i^{P_i}$ $(0 \leqq i \leqq n)$ contenus dans un n-complexe donné K_n et tel qu'une somme d'un nombre quelconque de ces i-cycles ne soit jamais homologue à zéro dans K_n s'appellera le $i^{\text{ème}}$ *nombre de Betti* du complexe K_n; on le désignera par $P_i(K_n)$.

7. Soit, pour $i = 0, 1, \ldots, n$,

$$E_i^1, \; E_i^2, \; \ldots, \; E_i^{\alpha_i}$$

l'ensemble de toutes les i-faces d'un n-complexe K_n donné. On a alors, pour $i = 1, 2 \ldots n$,

$$E_i^r \rightarrow \sum_{s=1}^{\alpha_{i-1}} \eta^i_{rs} E^s_{i-1},$$

les η ne prenant que les valeurs 0 et 1. Le rang modulo 2 de la matrice (η^i_{rs}) où $i = 1, 2 \ldots n$ est fixe, soit désigné par ϱ_i. Posons encore $\varrho_0 = 1$, $\varrho_{n+1} = 0$. Alors

$$P_i(K_n) = \alpha_i - \varrho_i - \varrho_{i+1}. \quad (0 \leqq i \leqq n)$$

8. Un n-complexe K_n sera appelé *connexe au sens large* si $P_0(K_n) = 0$. Un n-complexe K_n sera appelé *connexe au sens étroit* si à chaque couple E_n, E'_n de ces n-faces on peut associer une suite finie

$$E_n^0, \; E_n^1, \; \ldots, \; E_n^u$$

de n-faces de K_n telle que 1° $E_n = E_n^0$, $E_n^u = E'_n$, 2° E_n^i et E_n^{i-1} aient une $(n-1)$-face commune pour $1 \leq i \leq u$. Un n-complexe connexe au sens étroit est toujours connexe au sens large.

9. Soit E_i $(0 \leq i \leq n)$ une i-face donnée d'un n-complexe K_n donné. L'ensemble de toutes les n-faces de K_n dont E_i est une i-face constitue un n-complexe appelé *l'étoile* de E_i dans K_n.

10. Un n-complexe K'_n est une *subdivision* du n-complexe K_n si: 1° chaque n-face de K'_n est contenue entièrement dans une n-face de K_n; 2° chaque n-face de K'_n est la réunion d'un certain nombre de n faces de K_n. A chaque i-complexe L_i contenu dans K_n correspond alors un i-complexe bien déterminé L'_i contenu dans K'_n qui forme une subdivision de K'_n; L'_i constitue une subdivision de L_i.

11. Un ensemble R d'objets de nature quelconque (appelés *points* de R) sera appelé un *espace* si l'on y a distingué une famille Φ de sousensembles telle que: 1° l'ensemble vide et les ensembles constitués par un seul point appartiennent à Φ; 2° si A et B appartiennent à Φ, leur *réunion* $A+B$ et leur *partie commune* AB y appartiennent aussi. Les ensembles de la famille Φ sont appelés les *sousensembles fermés de R*; leurs complémentaires s'appellent les *sousensembles ouverts de R*. Un exemple important d'espace forment les espaces euclidiens avec la définition habituelle de sousensembles fermés. Si R_1 est un sousensemble quelconque d'un espace R donné, on considère R_1 comme un espace en y définissant les sousensembles fermés comme les intersections de R_1 avec les sousensembles fermés de R. En particulier, chaque partie d'un espace euclidien constitue un espace.

12. Soient R_1 et R_2 deux espaces donnés. A chaque point P_1 de R_1 faisons correspondre un point $P_2 = f(P_1)$ bien déterminé de R_2 (*image* de P_1) de manière que *chaque* point P_2 de R_2 soit image d'un point (au moins) de R_1. On dit alors que R_2 est une *image* de R_1. En particulier, on dit que R_2 est une *image continue* de R_1 si on a la propriété suivante: A_2 étant un sousensemble ouvert* quelconque de R_2, l'ensemble A_1 de tous les points P_1 de R_1 dont l'image $f(P_1)$ appartient à A_2 est un sousensemble ouvert* de R_1.

13. Les complexes et cycles précédemment définis soient appelés *ordinaires*. Soit R un espace donné. Une image continue K_n d'un n-complexe ordinaire $\widetilde{K}_n$, K_n faisant partie de R, s'appelle un *n-complexe dans R*. On transporte d'une manière évidente les notions de *somme, frontière, cycle, homologie, subdivision*. P. ex. si C_n est un n-cycle dans R, image continue d'un n-cycle ordinaire $\widetilde{C}_n$, l'homologie $C_n \sim 0$ dans R signifie qu'il existe un $(n+1)$-complexe ordinaire $\widetilde{K}_{n+1}$ tel que $F\widetilde{K}_{n+1} = \widetilde{C}_n$ et une image continue K_{n+1} de $\widetilde{K}_{n+1}$, K_{n+1} faisant partie de R, de ma-

* Le mot »ouvert« peut être remplacé ici par le mot »fermé«.

nière que la correspondance ponctuelle entre $\widetilde{K}_{n+1}$ et K_{n+1} contienne comme partie la correspondance ponctuelle donnée entre $\widetilde{C}_n$ et C_n.

14. Soit R un espace. Soit C_n un n-cycle dans R. Soit C'_n une subdivision de C_n. Alors $C'_n \sim C_n$ dans R.

15. Soit R un espace. Soit $i \geqq 0$ un entier. Si l'on considère comme égaux deux i-cycles C_i, D_i dans R tels que $C_i \sim D_i$ dans R, l'ensemble de tous les i-cycles dans R constitue par rapport à l'addition un groupe appelé le $i^{\text{ième}}$ *groupe d'homologie de R.*

§ 2. Notations.

16. Nous allons expliquer quelques notations dont nous ferons constamment usage.

Soit Q_n un n-complexe (ordinaire) donné ($n \geqq 0$). Les sommets (0-simplices) de Q_n seront désignés par (1), (2), ..., (N). Une h-face ($0 \leqq h \leqq n$) de Q_n aux sommets (ν_0), (ν_1), .., (ν_h) sera désignée par $(\nu_0 \nu_1 .. \nu_h)$.

Soit R un espace donné. Soit A_1, A_2, ..., A_N des sousensembles fermés donnés de R (leur nombre coïncide donc avec celui des sommets de Q_n). Pour chaque combinaison ν_0, ν_1, ..., ν_h des indices 1, 2 ..., N soit 1° $\{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h\} = R - \prod_{i=0}^{h} A_{\nu_i}$; 2° $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h] = R - \Sigma^* A_i$, l'indice i dans Σ^* parcourant ceux des valeurs 1, 2, ..., N qui ne coïncident avec aucun des nombres ν_0, ν_1, ..., ν_h. Posons encore $T = R - \sum_{i=1}^{N} A_i$, $U = \sum_{(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)} [\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n]$. Le symbole $\sum_{(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h)}$ indique une sommation se rapportant à toutes les h-faces de Q_n ($0 \leqq h \leqq n$).

La lettre p (s) indique un entier $\geqq 0$ ($\geqq 1$) donné.

§ 3. Théorème A_n.

17. **Prémisse:** *Q_n est un n-cycle. Pour $1 \leqq h \leqq n$* et pour chaque h-face $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h)$ de Q_n, chaque $(p+h)$-cycle dans $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h]$ est homologue à zéro dans $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h]$. ${}^1C_{p+n+1}$, ${}^2C_{p+n+1}$, ..., ${}^sC_{p+n+1}$ étant s $(p+n+1)$-cycles arbitraires dans U, on peut trouver s nombres $r_1, r_2, \ldots, r_s$, égaux à zéro ou à un, mais non tous égaux à zéro, et l'on peut attacher à chaque n-face $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)$ de Q_n un $(p+n+1)$-cycle $C^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1}$ dans $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)$ de manière que l'on ait $\sum_{i=1}^{s} r_i\, {}^iC_{p+n+1} \sim \sum_{(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)} C^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1}$ dans U. ${}^1C_p$, ${}^2C_p$, ..., ${}^sC_p$ sont s p-cycles donnés dans T tels que l'on ait ${}^iC_p \sim 0$ dans $[\nu]$ pour $1 \leqq i \leqq s$, $1 \leqq \nu \leqq N$.*

---

* Cette condition n'exige rien pour $n = 0$.

Thèse: *Il existe s nombres* $r_1, r_2, \ldots, r_s$, *égaux à zéro ou à un, mais non tous égaux à zéro, tels que l'on a* $\sum_{i=1}^{s} r_i\, {}^iC_p \sim 0$ *dans* T.

18. Partons d'un p-cycle C_p dans T tel que $C_p \sim 0$ dans $[\nu]$ pour $1 \leqq \nu \leqq N$. Nous allons en déduire un certain $(p+n+1)$-cycle $C_{p+n+1} = \varphi(C_p)$ dans U.

19. Si, pour une certaine valeur de h $(0 \leqq h \leqq n)$, on a attaché à chaque h-face $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h)$ de Q_n un $(p+h+1)$-complexe dans R: $K^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$, on attachera à chaque h-complexe $l_h = \sum_{(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h)} r^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h} (\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h)$ contenu dans Q_n, où les nombres r sont égaux à zéro ou à un, le $(p+h+1)$-complexe dans R $\sum_{(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h)} r_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h} K^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$ et on le désignera par $K_{p+h+1}(l_h)$.

20. D'après $C_p \sim 0$ dans $[\nu]$ on peut attacher a chaque sommet (ν) de Q_n un $(p+1)$-complexe K^{ν}_{p+1} dans $[\nu]$ tel que $K^{\nu}_{p+1} \rightarrow C_p$. Nous allons attacher à chaque h-face $(1 \leqq h \leqq n)$ $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h)$ de Q_n un $(p+h+1)$-complexe $K^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$ dans $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h]$ de manière que pour $1 \leqq h \leqq n$ soit vérifiée la condition π_h: Si l_h est un h-complexe arbitraire contenu dans Q_n et si $l_h \rightarrow c_{h-1}$, on a $K_{p+h+1}(l_h) \rightarrow K_{p+h}(c_{h-1})$. A ce but, nous procéderons par récurrence.

21. Soit $(\nu_0 \nu_1)$ une 1-face donnée de Q_n. Comme $K^{\nu_0}_{p+1} \rightarrow C_p$, $K^{\nu_1}_{p+1} \rightarrow C_p$, et comme $K^{\nu_0}_{p+1}$ $(K^{\nu_1}_{p+1})$ est situé dans $[\nu_0]$ (dans $[\nu_1]$), on voit que $K^{\nu_0}_{p+1} + K^{\nu_1}_{p+1}$ est un $(p+1)$-cycle dans $[\nu_0 \nu_1]$. D'après nos suppositions, on a $K^{\nu_0}_{p+1} + K^{\nu_1}_{p+1} \sim 0$ dans $[\nu_0 \nu_1]$ de manière qu'il existe un $(p+2)$-complexe $K^{\nu_0 \nu_1}_{p+2}$ dans $[\nu_0 \nu_1]$ tel que $K^{\nu_0 \nu_1}_{p+2} \rightarrow K^{\nu_0}_{p+1} + K^{\nu_1}_{p+1} = K_{p+1}(F(\nu_0 \nu_1))$. Or ceci signifie que la condition π_1 est réalisée.

22. Supposons que, pour une certaine valeur de h $(1 \leqq h \leqq n-1)$, on ait déjà défini les $(p+h+1)$-complexes $K^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$ dans $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h]$ attachés aux h-faces $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h)$ de sorte que la condition π_h soit vérifiée. Alors, si $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_{h-1})$ est une $(h+1)$-face de Q_n, on a $F(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_{h+1}) \rightarrow 0$; d'après la condition π_h, il s'ensuit que $K_{p+h+1}(F(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_{h+1}))$ est un $(p+h+1)$-cycle qui est évidemment situé dans $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_{h+1}]$. Or nous avons supposé que chaque tel cycle est homologue à zéro dans $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_{h+1}]$; on en conclut qu'il existe un $(p+h+2)$-complexe $K^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_{h+1}}_{p+h+2}$ dans $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_{h+1}]$ tel que $K^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_{h+1}}_{p+h+2} \rightarrow K_{p+h+1}(F(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_{h+1}))$. Or cette relation signifie que la condition π_{h+1} est réalisée.

23. Finalement, nous arrivons à attacher à chaque n-face $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)$ de Q_n un $(p+n+1)$-complexe $K^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1}$ dans $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n]$ de manière que

la condition π_n est satisfaite. Or $Q_n = \sum_{(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)} (\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)$ est un n-cycle de manière que l'on conclut de π_n que $C_{p+n+1} = \sum_{(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)} K^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1}$ est un $(p+n+1)$-cycle, situé évidemment dans U. C'est ce $(p+n+1)$-cycle que nous désignerons par $\varphi(C_p)$.

24. Soit ${}^iC_{p+n+1} = \varphi({}^iC_p)$ pour $1 \leq i \leq s$. D'après nos suppositions, il existe des nombres r_i ($=0$ ou $=1$) dont un au moins $\neq 0$ et des $(p+n+1)$-cycles $C^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1}$ dans $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n]$ de manière que $C_{p+n+1} \sim \sum_{(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)} C^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1}$ dans U, où nous avons posé $C_{p+n+1} = \sum_{i=1}^{s} r_i \, {}^iC_{p+n+1}$. On voit sans peine que $C_{p+n+1} = \varphi(C_p)$, où $C_p = \sum_{i=1}^{s} r_i \, {}^iC_p$. On doit encore prouver que $C_p \sim 0$ dans T. On peut supposer que les notations des N^os 18—23 se rapportent aux deux cycles C_p, $C_{p+n+1} = \varphi(C_p)$ que l'on vient de définir.

25. D'après $\sum_{(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)} K^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1} = C_{p+n+1} \sim \sum_{(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)} C^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1}$ dans U, il existe un $(p+n+2)$-complexe dans U: K_{p+n+2} tel que $K_{p+n+2} \rightarrow \sum_{(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)} (K^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1} + C^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1})$. Le $(p+n+2)$-complexe K_{p+n+2} est une image continue d'un $(p+n+2)$-complexe ordinaire $\widetilde{K}_{p+n+2}$. Or K_{p+n+2} fait partie de $U = \sum_{(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)} [\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n]$; c'est donc la réunion de ses intersections avec les ensembles $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n]$ qui sont évidemment des sousensembles ouverts de R; par suite les dites intersections sont des sousensembles ouverts de K_{p+n+2}. Par définition même d'une image continue, on en conclut que $\widetilde{K}_{p+n+2}$ est la réunion de certains sousensembles ouverts $\tau_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}$ (donc chacun correspond à une n-face de Q_n) tels que l'image dans K_{p+n+2} de chaque point de $\tau_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}$ appartienne à $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n]$. Il en résulte qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ jouissant de la propriété suivante: Si P et Q sont deux points de $\widetilde{K}_{p+n+2}$ dont la distance $d(P, Q)$ est inférieur à ε, il existe une n-face $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)$ de Q_n telle que les points P et Q appartiennent tous les deux a $\tau_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}$*. Soit $'\widetilde{K}_{p+n+2}$ une subdivision de $\widetilde{K}_{p+n+2}$ telle que le diamètre de chaque face de $'\widetilde{K}_{p+n+2}$ soit inférieur à ε. Désignons par $'K_{p+n+2}$, $'K^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1}$, $'C^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1}$ les subdivisions correspondantes de K_{p+n+2}, $K^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1}$, $C^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1}$. D'après les

---

* Dans le cas contraire, il existerait deux suites infinies (P_i) et (Q_i) de points de K_{p+n+2} telles que 1° $d(P_i, Q_i) < \frac{1}{i}$, 2° pour aucune valeur de $i = 1, 2 \ldots$ il n'existe aucune n-face $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)$ de Q_n telle que les points P_i et Q_i appartiennent tous les deux à $\tau_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}$. Or $\widetilde{K}_{p+n+2}$ est un ensemble fermé et borné d'un espace euclidien; il en résulte qu'on peut extraire de la suite (P_i) une suite (P'_i) tendant

propriètés du nombre ε et des ensembles $\tau_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}$, chaque face de $'K_{p+n+2}$ est entièrement contenue dans un des ensembles $[\nu_0\nu_1\ldots\nu_n]$; il en résulte que si δ est une face de $'K_{p+n+2}$ rencontrant $\prod_{i=0}^{n} A_{\nu_i}$ où $(\nu_0\nu_1\ldots\nu_n)$ est une n-face de Q_n, δ ne peut rencontrer A_i si l'indice i est différent de $\nu_0\nu_1\ldots\nu_n$.

26. Choisissons une n-face $(\nu_0^0\nu_1^0\ldots\nu_n^0)$ déterminée de Q_n et partageons les $(p+n+2)$-faces de $'K_{p+n+2}$ en deux classes, en rangeant dans la première classe précisément les $(p+n+2)$-faces qui rencontrent $\prod_{i=0}^{n} A_{\nu_i^0}$. Désignons par $^1K_{p+n+2}$ $(^2K_{p+n+2})$ le $(p+n+2)$-complexe dans U dont les $(p+n+2)$-faces sont les $(p+n+2)$-faces de la première (seconde) classe de $'K_{p+n+2}$. On a alors $'K_{p+n+2}=$ $={}^1K_{p+n+2}+{}^2K_{p+n+2}$. Or soit δ une $(p+n+1)$-face de $'K_{p+n+2}$ rencontrant $\prod_{i=0}^{n} A_{\nu_i^0}$; évidemment δ ne peut appartenir à $F\,{}^2K_{p+n+2}=$ $=F'K_{p+n+2}+F\,{}^1K_{p+n+2}$. Or $F'K_{p+n+2}=\sum_{(\nu_0\nu_1\ldots\nu_n)}('K^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}_{p+n+1}+'C^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}_{p+n+1})$. Si la n-face $(\nu_0\nu_1\ldots\nu_n)$ de Q_n est différente de $(\nu_0^0\nu_1^0\ldots\nu_n^0)$, il existe une valeur de i $(0\leqq i\leqq n)$ telle que indice ν_i^0 ne fait pas partie des indices $\nu_0,\nu_1\ldots\nu_n$. La face δ rencontrant ν_i^0 ne peut donc appartenir à $'K^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}_{p+n+1}+'C^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}_{p+n+1}$, car ce complexe fait partie de $[\nu_0\nu_1\ldots\nu_n]$. Il en résulte que δ appartient à $F'K_{p+n+2}$ si et seulement si elle appartient à $'K^{\nu_0^0\nu_1^0\ldots\nu_n^0}_{p+n+1}+'C^{\nu_0^0\nu_1^0\ldots\nu_n^0}_{p+n+1}$; donc δ n'appartient pas au $(p+n+1)$-complexe $L^{\nu_0^0\nu_1^0\ldots\nu_n^0}_{p+n+1}='K^{\nu_0^0\nu_1^0\ldots\nu_n^0}_{p+n+1}+'C^{\nu_0^0\nu_1^0\ldots\nu_n^0}_{p+n+1}+F\,{}^1K_{p+n+2}$. On voit donc que $L^{\nu_0^0\nu_1^0\ldots\nu_n^0}_{p+n+1}$ est un $(p+n+1)$-complexe dans $\{\nu_0^0\nu_1^0\ldots\nu_n^0\}\times$ $\times[\nu_0^0\nu_1^0\ldots\nu_n^0]$. Or $F L^{\nu_0^0\nu_1^0\ldots\nu_n^0}_{p+n+1}=F'K^{\nu_0^0\nu_1^0\ldots\nu_n^0}_{p+n+1}$.

27. Nous venons de trouver que pour $h=n$ l'énoncé suivant (désignerons le par Θ_h) est vrai: Si $(\nu_0\nu_1\ldots\nu_h)$ est une h-face arbitraire de Q_n, on a* $FK^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}_{p+h+1}\sim 0$ dans $\{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h\}\cdot[\nu_0\nu_1\ldots\nu_h]$. Supposons que pour une certaine valeur de h $(1\leqq h\leqq n)$ l'énoncé Θ_h soit déjà prouvé; nous en déduirons que l'énoncé Θ_{h-1} est aussi vrai. Soit donc $(\nu_1\ldots\nu_h)$

---

vers un point P'_ω de $\widetilde{K}_{p+n+2}$; la suite correspondante (Q'_i) extraite de (Q_i) tend alors aussi vers P'_ω. Or $\widetilde{K}_{p+n+2}=\sum_{(\nu_0\nu_1\ldots\nu_n)}\tau_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}$; par suite il existe une n-face $(\nu_0\nu_1\ldots\nu_n)$ telle que le point P'_ω appartienne à $\tau_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}$. L'ensemble $\tau_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}$ étant ouvert dans $\widetilde{K}_{p+n+2}$, des relations $\lim P'_i=\lim Q'_i=P'_\omega$ on conclut que pour i suffisamment grand les deux points P'_i et Q'_i appartiennent simultanément à $\tau_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}$, ce qui est une contradiction.

* D'après N° 14, $FK^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}_{p+h+1}\sim F'K^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h}_{p+h+1}$.

une $(h-1)$-face de Q_n. Il existe un indice ν_0 tel que $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h)$ est une h-face de Q_n. D'après Θ_h il existe un $(p+h+1)$-complexe $L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$ dans $\{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h\} \cdot [\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h]$ tel que $FL^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1} = FK^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$. D'après la définition de $\{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h\}$ et puisque $L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$ fait partie de $\{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h\}$ aucun point de $L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$ ne peut appartenir simultanément aux deux ensembles A_{ν_0} et $\prod\limits_{i=1}^{h} A_{\nu_i}$. Donc l'ensemble $L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$ peut être partagé en deux parties (pouvant d'ailleurs avoir des points communs) qui sont ses intersections avec $R - A_{\nu_0}$, $R - \prod\limits_{i=1}^{h} A_{\nu_i}$. Or ces deux intersections sont des sousensembles ouverts de $L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$. On en conclut comme au N° 25 qu'il existe une subdivision $'L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$ de $L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$ telle qu'aucune face de $'L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$ ne rencontre pas simultanément A_{ν_0} et $\prod\limits_{i=1}^{h} A_{\nu_i}$. Désignons par ${}^1L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$ le $(p+h+1)$-complexe constitué par les $(p+h+1)$-faces de $'L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$ rencontrant $\prod\limits_{i=1}^{h} A_{\nu_i}$ et par ${}^2L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$ le $(p+h+1)$-complexe constitué par les autres $(p+h+1)$-faces de $'L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$; donc $'L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1} = {}^1L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1} + {}^2L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$ et aucune face de ${}^1L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$ ne rencontre A_{ν_0}. Soit δ une $(p+h)$-face de $'L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$ rencontrant $\prod\limits_{i=1}^{h} A_{\nu_i}$; δ ne peut appartenir à $F\,{}^2L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1} = F\,'L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1} + F\,{}^1L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$. Or $F\,'L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$ est une subdivision de $F\,L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1} = F\,K^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1} = \sum\limits_{i=0}^{h} K^{\nu_0 \ldots \nu_{i-1} \nu_{i+1} \ldots \nu_h}_{p+h}$ (d'après la condition π_h du N° 20). On en conclut que $F\,'L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1} = \sum\limits_{i=0}^{h} {}'K^{\nu_0 \ldots \nu_{i-1} \nu_{i+1} \ldots \nu_h}_{p+h}$, où $'K^{\nu_0 \ldots \nu_{i-1} \nu_{i+1} \ldots \nu_h}_{p+h}$ est une certaine subdivision de $K^{\nu_0 \ldots \nu_{i-1} \nu_{i+1} \ldots \nu_h}_{p+h}$. Pour $i \geqq 1$, le complexe $'K^{\nu_0 \ldots \nu_{i-1} \nu_{i+1} \ldots \nu_h}_{p+h}$ est contenu dans $[\nu_0 \ldots \nu_{i-1} \nu_{i+1} \ldots \nu_h]$ et ne contient donc aucun point de A_{ν_0} de manière que la face δ ne peut appartenir à ce complexe. On voit donc que δ appartient à $F\,'L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$ si et seulement si elle appartient à $'K^{\nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h}$. Nous arrivons donc à la conclusion que δ n'appartient pas à $M^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h} = {}'K^{\nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h} + F\,{}^1L^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1}$; or ceci signifie que ce $(p+h)$-complexe est contenu dans $\{\nu_1 \ldots \nu_h\}$; le même complexe est evidemment contenu dans $[\nu_1 \ldots \nu_h]$. Or $FM^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h} = F\,'K^{\nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h}$, d'où $F\,'K^{\nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h} \sim 0$ dans $\{\nu_1 \ldots \nu_h\} \cdot [\nu_1 \ldots \nu_h]$. D'après N° 14, cette homologie est vraie aussi pour $FK^{\nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h}$. L'énonce Θ_{h-1} est ainsi déduit de Θ_h.

28. Nous avons prouvé par induction que l'énoncé Θ_0 est vrai. Donc on a $FK^1{}_{p+1} \sim 0$ dans $\{1\}.[1]$. Or $FK^1{}_{p+1} = C_p$ et $\{1\}.[1] = T$. Donc $C_p \sim 0$ dans T, ce qui prouve le théorème A_n.

§ 4. Théorème B_n.

29. **Prémisse:** *Q_n est un n-cycle connexe au sens étroit*; $P_i(Q_n) = 0$ pour $1 \leqq i \leqq n-1$**. Si** E_i $(0 \leqq i \leqq n-2)$ est une i-face arbitraire de Q_n et si H_n est l'étoile de E_i dans Q_n, H_n est un n-complexe connexe au sens étroit et tel que $P_j(H_n) = 0$ pour $i+1 \leqq j \leqq n-1$. Pour $0 \leqq h \leqq n-1$*** et pour chaque h-face $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h)$ de Q_n, chaque $(p+h+1)$-cycle dans $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h]$ est homologue à zéro dans $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h]$. ${}^1C_{p+n+1}$, ${}^2C_{p+n+1}$, $\ldots$, ${}^sC_{p+n+1}$ sont s $(p+n+1)$-cycles dans U tels que, si r_1, r_2, $\ldots$, r_s sont des nombres égaux à zéro ou à un, et si l'on a attaché à chaque n-face $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)$ de Q_n un $(p+n+1)$-cycle $C^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1}$ arbitraire dans $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n]$, on ne peut avoir $\sum_{i=1}^{s} r_i\, {}^iC_{p+n+1} \sim \sum_{(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)} C^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1}$ dans U que si $r_1 = r_2 = \ldots = r_s = 0$.*

Thèse: *Il existe s p-cycles ${}^1C_p$, ${}^2C_p$, $\ldots$, ${}^sC_p$ dans T tels que ${}^iC_p \sim 0$ dans $[\nu]$ pour $1 \leqq i \leqq s$, $1 \leqq \nu \leqq N$, tandis que, si r_1, r_2, $\ldots$, r_s sont des nombres égaux à zéro ou à un, l'homologie $\sum_{i=1}^{s} r_i\, {}^iC_p \sim 0$ dans T ne peut être vérifiée que si $r_1 = r_2 = \ldots = r_s = 0$. Chaque p-cycle ${}^iC_p$ $(1 \leqq i \leqq s)$ est contenu dans ${}^iC_{p+n+1}$.*

30. Partons d'un $(p+n+1)$-cycle arbitraire C_{p+n+1} dans U. Nous allons en déduire un certain p-cycle $C_p = \psi(C_{p+n+1})$ dans T tel que $C_p \sim 0$ dans $[\nu]$ pour $1 \leqq \nu \leqq N$.

31. Faisons de nouveau la convention du N° 19.

32. Comme au N° 25, on voit qu'il existe une subdivision C'_{p+n+1} de C_{p+n+1} de la forme $\sum_{(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)} K^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1}$, où $K^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1}$ est un $(p+n+1)$-complexe dans $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n]$†. Soit S_{p+n} une $(p+n)$-face de quelqu'un des $(p+n)$-cycles $FK^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1}$. Si S_{p+n} ne rencontre aucun des N ensembles A_i, posons $u = -1$; dans le cas contraire, soient A_{μ_0}, A_{μ_1}, $\ldots$, A_{μ_u} tous les ensembles A_i rencontrés par S_{p+n}. Si S_{p+n} est une face de $FK^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1}$, S_{p+n} doit être contenue dans $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n]$; il en résulte que $(\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_u)$ est une face de $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)$, d'où $u \leqq n$. Plus précisément, on a $u \leqq n-1$, car, en vertu de $0 = F'C_{p+n+1} =$

---

* Pour $n = 0$: *Q_0 est constitué par deux points.*

** Cette condition n'exige rien pour $n \leqq 1$.

*** Cette condition n'exige rien pour $n = 0$.

† Dorénavant (jusqu'au N° 37) soit $n \geqq 1$.

$= \sum\limits_{(\nu_0\nu_1\ldots\nu_n)} FK^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}_{p+n+1}$, S_{p+n} est une face de deux au moins parmi les cycles $FK^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}_{p+n+1}$. Dans le cas $u = -1$, posons $H_n = Q_n$; pour $u \geqq 0$, soit H_n l'étoile de $(\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_u)$ dans Q_n. Soient $E_n^1, E_n^2, \ldots, E_n^l$ toutes les n-faces $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)$ de Q_n telles que S_{p+n} est une $(p+n)$-face de $FK^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}_{p+n+1}$; d'après une remarque antérieure, $E_n^1, E_n^2, \ldots, E_n^l$ sont des n-faces de H_n. En vertu de $\sum\limits_{(\nu_0\nu_1\ldots\nu_n)} FK^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}_{p+n+1} = 0$, le nombre $l = 2k$ est pair. Si l'on tient compte de ce que pour $-1 \leqq u \leqq n-2$ le n-complexe H_n est connexe au sens étroit, on voit que l'on peut poser

$$E_n^{2i-1} + E_n^{2i} = \sum_{j=1}^{2r_i} e_n^{ij}, \qquad (1 \leqq i \leqq k)$$

les e_n^{ij} étant des n-faces de H_n telles que pour $1 \leqq i \leqq k$, $1 \leqq j \leqq r_i$, les n-faces $e_n^{i,2j-1}$ et $e_n^{i,2j}$ aient une $(n-1)$-face E^{ij}_{n-1} commune, E^{ij}_{n-1} étant une $(n-1)$-face de H_n. Posons $\sigma(S_{p+n}, E_{n-1}) = 1$ pour chaque $(n-1)$-face de H_n qui apparait un nombre impair de fois parmi les E^{ij}_{n-1} $(1 \leqq i \leqq k,\ 1 \leqq j \leqq r_i)$ et $\sigma(S_{p+n}, E_{n-1}) = 0$ pour toutes les autres $(n-1)$-faces de Q_n. Pour chaque $(n-1)$-face $E_{n-1} = (\nu_1 \ldots \nu_n)$ de Q_n, posons

$$K^{\nu_1\ldots\nu_n}_{p+n} = \sum_{S_{p+n}} \sigma(S_{p+n}, E_{n-1}) \cdot S_{p+n},$$

la somme se rapportant à toutes les $(p+n)$-faces S_{p+n} de tous les complexes $FK^{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_n}_{p+n+1}$ où $(\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_n)$ parcourt *toutes* les n-faces de Q_n.

33. Lorsque $\sigma(S_{p+n}, E_{n-1}) = 1$, $E_{n-1} = (\nu_1 \ldots \nu_n)$ est une $(n-1)$-face de H_n, donc (pour $u \geqq 0$) $(\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_u)$ est une u-face de $(\nu_1 \ldots \nu_n)$ de manière que S_{p+n} est contenu dans $[\nu_1 \ldots \nu_n]$. Il en résulte que $K^{\nu_1\ldots\nu_n}_{p+n}$ est un $(p+n)$-complexe dans $[\nu_1 \ldots \nu_n]$. Or soit $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)$ une n-face de Q_n; posons $(\nu_0 \ldots \nu_{t-1} \nu_{t+1} \ldots \nu_n) = \varepsilon^t_{n-1}$ $(0 \leqq t \leqq n)$. Alors

$$K_{p+n}(F(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)) = \sum_{S_{p+n}} S_{p+n} \cdot \sum_{t=0}^{n} \sigma(S_{p+n}, \varepsilon^t_{n+1}),$$

le coefficient de S_{p+n} devant être réduit modulo 2. Pour chaque valeur de S_{p+n}, on reconnait sans peine que le nombre $\sum\limits_{t=0}^{n} \sigma(S_{p+n}, \varepsilon^t_{n-1})$ est congru modulo 2 au nombre $\tau(S_{p+n})$ indiquant combien de fois (dans les notations du N° 32) E^{ij}_{n-1} $(1 \leqq i \leqq k,\ 1 \leqq j \leqq r_i)$ est une $(n-1)$-face de $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)$. Or Q_n est un n-cycle, ce qui signifie que chaque $(n-1)$-face de Q_n est une face d'un nombre pair de n-faces de Q_n; on conclut donc sans difficulté que le nombre $\tau(S_{p+n})$ est impair si et seulement si $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)$ coïncide avec une des n-faces $E^1_n, E^2_n \ldots E^l_n$ ce qui signifie que S_{p+n} est une $(p+n)$-face de $FK^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}_{p+n+1}$. Par suite

$$K_{p+n}(F(\nu_0\nu_1 \dots \nu_n)) = F K^{\nu_0\nu_1\dots\nu_n}_{p+n+1}.$$

34. Nous attacherons à chaque face $(\nu_0\nu_1 \dots \nu_h)$ $(0 \leqq h \leqq n)$ de Q_n un $(p+h+1)$-complexe $K^{\nu_0\nu_0\dots\nu_h}_{p+h+1}$ dans $[\nu_0\nu_1 \dots \nu_h]$ de manière que pour $1 \leqq h \leqq n$ soit vérifiée la condition π_h énoncée dans le N° 20. Au N° 32, nous avons introduit les $(p+n+1)$-complexes $K^{\nu_0\nu_1\dots\nu_n}_{p+n+1}$ et nous y avons construit les $K^{\nu_1\dots\nu_n}_{p+n}$. Au N° 33, nous avons vu que chaque $K^{\nu_1\dots\nu_n}_{p+n}$ est un $(p+n)$-complexe dans $[\nu_1 \dots \nu_n]$ et que la condition π_n est vérifiée. Le cas $n=1$ est donc épuisé. Pour $n \geqq 2$ nos procéderons par récurrence.

35. Supposons que, pour une certaine valeur de h $(1 \leqq h \leqq n-1)$ on soit déjà arrivé à construire les $(p+h+1)$-complexes $K^{\nu_0\nu_1\dots\nu_h}_{p+n+1}$ dans $[\nu_0\nu_1 \dots \nu_h]$ de manière que la condition π_{h+1} soit vérifiée. Il s'agit d'attacher à chaque $(h-1)$-face $(\nu_1 \dots \nu_h)$ de Q_n un $(p+h)$-complexe $K^{\nu_1\dots\nu_h}_{p+h}$ dans $[\nu_1 \dots \nu_h]$ de sorte à vérifier la condition π_h. Soit S_{p+h} une $(p+h)$-face de quelqu'un parmi les $(p+h)$-cycles $F K^{\nu_0\nu_1\dots\nu_h}_{p+h+1}$ où $(\nu_0\nu_1 \dots \nu_h)$ parcourt toutes les h-faces de Q_n. Si S_{p+h} ne rencontre aucun des N ensembles A_i, posons $u=-1$; dans le cas contraire soient $A_{\mu_0}, A_{\mu_1}, \dots A_{\mu_u}$ tous les ensembles A_i rencontrés par S_{p+h}. Si S_{p+h} est une h-face de $F K^{\nu_0\nu_1\dots\nu_h}_{p+h+1}$, S_{p+h} est contenu dans $[\nu_0\nu_1 \dots \nu_h]$ et par suite $(\mu_0\mu_1 \dots \mu_h)$ est une face de $(\nu_0\nu_1 \dots \nu_h)$ d'où $u \leqq h$. Plus précisément, on a toujours $u \leqq h-1$*. Dans le cas $u=-1$, posons $H_n = Q_n$; pour $u \geqq 0$, soit H_n l'étoile de $(\mu_0\mu_1 \dots \mu_u)$ dans Q_n. Dans tous les cas, en vertu de $u \leqq h-1 \leqq n-2$, le $h^{\text{ème}}$ nombre de Betti de H_n égale zéro. Les symboles $E^i{}_{h+1}$, $E^j{}_h$, $E^k{}_{h-1}$ parcourt respectivement tous les $(h+1)$-faces, h-faces, $(h-1)$-faces de H_n. Soit

$$E^i{}_{h+1} \to \sum_j \eta_{ij} E^j{}_h, \qquad E^j{}_h \to \sum_k \zeta_{jk} E^k{}_{h-1},$$

les nombres η et ζ étant égaux à 0 où à 1. On a

$$\sum_j \eta_{ij}\zeta_{jk} \equiv 0 \pmod 2 \tag{1}$$

car $F E^i{}_{h+1} \to 0$. Soit α le nombre des h-faces $E^j{}_h$. Soient ϱ et σ les

---

* Puisque $h \leqq n-1$, il existe un indice ν_{h+1} tel que $(\nu_0\nu_1 \dots \nu_{h+1})$ est une $(h+1)$-face de Q_n. D'après la condition π_{h+1}, on a

$$K^{\nu_0\nu_1\dots\nu_{h+1}}_{p+h+2} \to \sum_{i=0}^{h+1} K^{\nu_0\dots\nu_{i-1}\,\nu_{i+1}\dots\nu_h}_{p+h+1} \to 0.$$

S_{p+h} étant une $(p+h)$-face de $F K^{\nu_0\nu_1\dots\nu_h}_{p+h+1}$, il existe par suite un indice i tel que S_{p+h} soit une $(p+h)$-face de $F K^{\nu_0\dots\nu_{i-1}\,\nu_{i+1}\dots\nu_h}_{p+h+1}$; donc $(\mu_0\mu_1 \dots \mu_u)$ est une face commune de $(\nu_0\nu_1 \dots \nu_h)$ et de $(\nu_0 \dots \nu_{i-1}\,\nu_{i+1} \dots \nu_h)$, d'où $u \leqq h-1$.

rangs modulo 2 des matrices (η_{ij}) et (ζ_{ij}). D'après $P_h(H_n)=0$, on a (v. N° 7)

$$\alpha=\varrho+\sigma. \tag{2}$$

Considérons les congruences

$$\sum_j \eta_{ij}\, a_j \equiv 0 \pmod 2. \tag{3}$$

D'après (2), le système (3) possède σ solutions linéairement indépendantes mod 2. Or d'après (1), les positions $a_j=\zeta_{jk}$ donnent des solutions de (3) dont σ sont linéairement indépendantes mod 2. Il en résulte que chaque solution de (3) a la forme

$$a_j \equiv \sum_k b_k \zeta_{jk} \pmod 2. \tag{4}$$

Pour chaque h-face $(\nu_0\nu_1\ldots\nu_h)$ de Q_n posons $c_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h}=1$ si S_{p+h} est une $(p+h)$-face de $FK^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h}_{p+h+1}$, ce qui exige, nous l'avons vu, que $(\nu_0\nu_1\ldots\nu_h)$ soit une h-face de H_n; pour toutes les autres h-faces $(\nu_0\nu_1\ldots\nu_h)$ de Q_n posons $c_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h}=0$. Si $(\nu_0\nu_1\ldots\nu_h)=E^j{}_h$ est une h-face de H_n, posons $c_{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h}=a_j$. Considérons maintenant une $(h-1)$-face arbitraire $(\nu_0\nu_1\ldots\nu_{h+1})=E^i{}_{h+1}$ de H_n. D'après la propriété π_{h-1}, on à $\sum_{\iota=0}^{h+1} FC^{\nu_0\ldots\nu_{\iota-1}\nu_{\iota+1}\ldots\nu_{h+1}}=0$, d'où l'on déduit les congruences (3). Par suite, on peut attacher à chaque $(h+1)$-face de H_n un nombre b_k égal à zéro ou à un de manière que l'on ait les congruences (4). Pour une $(h-1)$-face $E^k{}_{h-1}$ de H_n posons $\sigma(S_{p+h}, E^k{}_{h-1})=b_k$; pour une $(h-1)$-face E_{h-1} de Q_n ne faisant pas partie de H_n posons $\sigma(S_{p+h}, E_{h-1})=0$. Pour chaque $(h-1)$-face $E_{h-1}=(\nu_1\ldots\nu_h)$ de Q_n posons

$$K^{\nu_1\ldots\nu_h}_{p+h}=\sum_{S_{p+h}}\sigma(S_{p+h}, E_{h-1}).\ S_{p+h},$$

la somme se rapportant à toutes les $(p+h)$-faces S_{p+h} de tous les complexes $FK^{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_h}_{p+h+1}$ où $(\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_h)$ parcourt toutes les h-faces de Q_n.

36. Lorsque $\sigma(S_{p+h}, E_{h-1})=1$, $E_{h-1}=(\nu_1\ldots\nu_h)$ est une $h-1$)-face de H_n, donc (pour $u\geqq 0$) $(\mu_0\mu_1\ldots\mu_u)$ est une u-face de $(\nu_1\ldots\nu_h)$ de manière que S_{p+h} est contenu dans $[\nu_1\ldots\nu_h]$. Il en résulte que $K^{\nu_1\ldots\nu_h}_{p+h}$ est un $(p+h)$-complexe dans $[\nu_1\ldots\nu_h]$. Or soit $(\nu_0\nu_1\ldots\nu_h)$ une h-face de Q_n; posons $(\nu_0\ldots\nu_{t-1}\nu_{t+1}\ldots\nu_h)=\varepsilon^t{}_{h-1}$ $(0\leqq t\leqq h)$. Alors

$$K_{p+h}(F(\nu_0\nu_1\ldots\nu_h))=\sum_{S_{p+h}} S_{p+h}\ .\sum_{t=0}^{h}\sigma(S_{p+h}, \varepsilon^t{}_{h-1}),$$

le coefficient de S_{p+h} devant être réduit mod 2. Pour chaque valeur de S_{p+h}, on reconnait sans peine que le nombre $\sum_{t=0}^{h}\sigma(S_{p+h}, \varepsilon^t{}_{h-1})$ est congru mod 2 au nombre $\tau(S_{p+h})$ des $(h-1)$-faces $E^k{}_{h-1}$ de H_n telles que $b_k=1$ qui sont aussi des $(h-1)$-faces de $(\nu_0\nu_1\ldots\nu_h)$. Donc

$\tau(S_{p+h}) = 0$ si $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h)$ ne fait pas partie de H_n; et, lorsque $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h) = E^j_h$ est une h-face de H_n, on a $\tau(S_{p+h}) = \sum_k b_k \zeta_{jk}$, donc, en vertu de N° 35 (4), $\tau(S_{p+h}) \equiv a_j \bmod 2$. Ceci signifie qu'on a dans tous les cas $\tau(S_{p+h}) \equiv c_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h} \bmod 2$, d'où

$$K_{p+h}(F(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h)) = \sum_{S_{p+h}} c_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h} S_{p+h}.$$

D'après la définition des nombres c il en résulte que

$$K_{p+h}(F(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h)) = F K^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h}_{p+h+1},$$

ce qui donne que la condition π_h est réalisée.

37. Finalement, nous arrivons à attacher à chaque sommet ν de Q_n un $(p+1)$-complexe $K^\nu{}_{p+1}$ dans $[\nu]$ de manière que la condition π_1 est vérifiée. Or cette condition signifie que, si $(\nu_0 \nu_1)$ est une 1-face de Q_n, on a $K^{\nu_0}_{p+1} + K^{\nu_1}_{p+1} = F K^{\nu_0 \nu_1}_{p+2}$ et par suite $F K^{\nu_0}_{p+1} = F K^{\nu_1}_{p+1}$. Or pour $n \geqq 1$ le n-complexe Q_n est connexe (au sens étroit et donc aussi) au sens large, de manière que nous concluons que le p-cycle $C_p = F K^\nu{}_{p+1}$ est indépendant du choix de ν $(1 \leqq \nu \leqq N)$. Le cycle C_p étant contenu dans $[\nu]$ pour $1 \leqq \nu \leqq N$, il est contenu dans T. De plus, on a $C_p \sim 0$ dans $[\nu]$ pour $1 \leqq \nu \leqq N$. C'est ce p-cycle C_p que nous désignerons par $\psi(C_{p+n+1})$. Dans le cas $n=0$ qui était exclu au N^{os} précédents, les $(p+1)$-complexes $K^\nu{}_{p+1}$ ont été déterminés déjà au commencement du N° 32. On a dans ce cas $N=2$, donc $K^1{}_{p+1} + K^2{}_{p+1} = {}'C_{p+1} \rightarrow 0$, d'où $F K^1{}_{p+1} = F K^2{}_{p+1} = C_p = \psi(C_{p+1})$ est, ici encore, un p-cycle dans T homologue à zéro dans $[\nu]$ pour $1 \leqq \nu \leqq N$.

38. Soit ${}^iC_p = \psi({}^iC_{p+n+1})$ pour $1 \leqq i \leqq s$. Soient $r_1, r_2, \ldots, r_s$ des nombres égaux à 0 ou à 1, mais non tous égaux à 0. Posons $C_{p+n+1} = \sum_{i=1}^{s} r_i\, {}^iC_{p+n+1}$, $C_p = \sum_{i=1}^{s} r_i\, {}^iC_p$. On reconnait sans peine que $C_p = \psi(C_{p+n+1})$. D'après nos suppositions, si l'on attache à chaque n-face $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)$ de Q_n un $(p+n+1)$-cycle $C^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1}$ arbitraire dans $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n]$, on ne peut avoir $C_{p+n+1} \sim \sum_{(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)} C^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1}$ dans U. On doit encore prouver que l'homologie $C_p \sim 0$ dans T est impossible. On peut supposer que les notations des N^{os} 28—35 se rapportent aux deux cycles C_{p+n+1}, $C_p = \psi(C_{p+n+1})$ que l'on vient de définir.

39. Soit donc $C_p \sim 0$ dans T; nous devons arriver à une contradiction. Il existe un $(p+1)$-complexe L_{p+1} dans T tel que $L_{p+1} \rightarrow C_p$. Pour $1 \leqq \nu \leqq N$, $K^\nu{}_{p+1} + L_{p+1}$ est par suite un $(p+1)$-cycle dans $[\nu]$ *;

---

* Si $n=0$, on a $C_{p+1} \sim C'_{p+1} = \sum_{\nu=1}^{2} K^\nu{}_{p+1} = \sum_{\nu=1}^{2} (K^\nu{}_{p+1} + L_{p+1})$, ce qui donne déjà la contradiction demandée. Soit donc $n \geqq 1$.

d'après nos suppositions, ce cycle est homologue à zéro dans $[\nu]$. Il existe donc un $(p+2)$-complexe $L^{\nu}{}_{p+2}$ dans $[\nu]$ tel que

$$L^{\nu}{}_{p+2} \rightarrow K^{\nu}{}_{p+1} + L_{p+1}. \qquad (0 \leqq h \leqq n-1)$$

40. Nous attacherons à chaque face $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h)$ un $(p+h+2)$-complexe $L^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h}_{p+h+2}$ dans $[\nu_0\nu_1\ldots\nu_h]$ et nous ferons pour ces complexes une convention analogue à celle du N° 19. Pour $n=1$, ces complexes sont tous déjà construits. Pour $n \geqq 2$, la construction n'est effectué que pour $h=0$. Nous procéderons par induction de telle sorte que pour $1 \leqq h \leqq n-1$ soit vérifiée la condition ϑ_h: Pour chaque h-complexe l_h contenu dans Q_n la relation $l_h \rightarrow c_{h-1}$ entraîne $L_{p+h+2}(l_h) \rightarrow K_{p+h+1}(l_h) + L_{p+h+1}(c_{h-1})$.

41. Supposons que, pour certaine valeur de h $(1 \leqq h \leqq n-1)$ on soit déjà arrivé à construire les $(p+h+1)$-complexes $L^{\nu_1\ldots\nu_h}_{p+h+1}$ dans $[\nu_1\ldots\nu_h]$ satisfaisant à la condition ϑ_{h-1} (si $h-1 \geqq 1$). Il s'agit d'attacher à chaque h-face $(\nu_0\nu_1\ldots\nu_h)$ de Q_n un $(p+h+2)$-complexe $L^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h}_{p+h+2}$ dans $[\nu_1\nu_1\ldots\nu_h]$ de manière à vérifier la condition ϑ_h. Si $h \geqq 2$, la condition ϑ_{h-1} donne $L_{p+h+1}(F(\nu_0\nu_1\ldots\nu_h)) \rightarrow K_{p+h}(F(\nu_0\nu_1\ldots\nu_h))$ d'où, d'après la condition π_h des N^os 20 et 34,

$$L_{p+h+1}\,(F(\nu_0\nu_1\ldots\nu_h)) \rightarrow FK^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h}_{p+h+1}. \qquad (*)$$

Dans le cas $h=1$ la condition (*) est aussi vérifiée d'après N° 39 et la condition π_1. Il en résulte que $K^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h}_{p+h+1} + L_{p+h+1}(F(\nu_0\nu_1\ldots\nu_h))$ est un $(p+h+1)$-cycle qui est évidemment situé dans $[\nu_0\nu_1\ldots\nu_h]$. Or nous avons supposé que chaque tel cycle est homologue à zéro dans $[\nu_0\nu_1\ldots\nu_h]$. Donc il existe un $(p+h+2)$-complexe $L^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h}_{p+h+2}$ tel que $L^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h}_{p+h+2} \rightarrow K^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_h}_{p+h+1} + L_{p+h+1}(F(\nu_0\nu_1\ldots\nu_h))$ ce qui signifie que la condition ϑ_h est réalisée.

42. Finalement nous arrivons à attacher à chaque $(n-1)$-face $(\nu_1\ldots\nu_n)$ de Q_n un $(p+n+1)$-complexe $L^{\nu_1\ldots\nu_n}_{p+n+1}$ dans $[\nu_1\ldots\nu_n]$ de manière à vérifier la condition ϑ_{n-1}. Or soit $(\nu_0\nu_1\ldots\nu_n)$ une n-face de Q_n. D'après ϑ_{n-1} et π_n, $L_{p+n+1}(F(\nu_0\nu_1\ldots\nu_n)) \rightarrow FK^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}_{p+n+2}$. Donc $C^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}_{p+n+1} = K^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}_{p+n+1} + L_{p+n+1}(F(\nu_0\nu_1\ldots\nu_n))$ est un $(p+n+1)$-cycle évidemment contenu dans $[\nu_0\nu_1\ldots\nu_n]$. Q_n étant un n-cycle, on a d'après N° 32 $\sum\limits_{(\nu_0\nu_1\ldots\nu_n)} C^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}_{p+n+1} = \sum\limits_{(\nu_0\nu_1\ldots\nu_n)} K^{\nu_0\nu_1\ldots\nu_n}_{p+n+1} = C'_{p+n+1} \sim C_{p+n+1}$ dans U ce qui est la contradiction demandée.

§ 5. Théorème C_n.

43. **Prémisse:** *Q_n est un n-cycle connexe au sens étroit*; $P_i(Q_n)=0$ pour $1 \leq i \leq n-1$**. Si E_i $(0 \leq i \leq n-2)$ est une i-face arbitraire de Q_n et si H_n est l'étoile de E_i dans Q_n, H_n est un n-complexe connexe au sens étroit et tel que $P_j(H_n)=0$ pour $i+1 \leq j \leq n-1$. Lorsque $n \leq 1$, pour chaque sommet (ν) de Q_n, chaque $(p+1)$-cycle dans $[\nu]$ est homologue à zéro dans $[\nu]$. Pour $1 \leq h \leq n-1$** et pour chaque h-face de Q_n, chaque $(p+h)$-cycle et chaque $(p+h+1)$-cycle dans $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h]$ est homologue à zéro dans $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_h]$. Lorsque $n \geq 1$, pour chaque n-face $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)$ de Q_n chaque $(p+n)$-cycle dans $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n]$ est homologue à zéro dans $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n]$. Γ_p désigne le sousgroupe du $p^{ème}$ groupe d'homologie de l'espace T constitué par les p-cycles C_p dans T homologues à zéro dans $[\nu]$ pour $1 \leq \nu \leq N$. H_{p+n+1} désigne le sousgroupe du $(p+n+1)^{ème}$ groupe homologie G_{p+n+1} de l'espace U constitué par les $(p+n+1)$-cycles C_{p+n+1} dans U tels que l'on puisse attacher à chaque n-face $(\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n)$ de Q_n un $(p+n+1)$-cycle $C^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1}$ dans $[\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n]$ de manière à avoir $C_{p+n+1} \sim \sum\limits_{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n} C^{\nu_0 \nu_1 \ldots \nu_n}_{p+n+1}$ dans U.*

Thèse: *Le groupe Γ_p est isomorphe au groupe-quotient G_{p+n+1}/H_{p+n+1}.*

44. La prémisse du théorème A_n étant vérifiée, on peut attacher à chaque cycle C_p de la famille Γ_p un cycle $C_{p+n+1}=\varphi(C_p)$ de la famille G_{p+n+1} d'après la manière exposée aux N[os] 18—23. La prémisse du théorème B_n étant aussi vérifiée, on peut attacher à chaque cycle C_{p+n+1} de la famille G_{p+n+1} un cycle $C_p=\psi(C_{p+n+1})$ de la famille Γ_p d'après la manière exposée aux N[os] 30—37. On voit sans peine que les deux relations $C_{p+n+1}=\varphi(C_p)$ et $C_p=\psi(C_{p+n+1})$ s'entraînent mutuellement si l'on convient d'élargir un peu le sens de la relation $C_{p+n+1}=\varphi(C_p)$ de telle sorte qu'on la suppose vérifiée aussi dans le cas où il existe une subdivision C'_{p+n+1} de C_{p+n+1} tello qu'on ait $C'_{p+n+1}=\varphi(C_p)$ dans le sens primitif. Evidemment, les relations $C^1_p=\psi(C^1_{p+n+1})$, $C^2_p= =\psi(C^2_{p+n+1})$ ou, ce qui est la même chose, $C^1_{p+n+1}=\varphi(C^1_p)$, $C^2_{p+n+1}=\varphi(C^2_p)$ entraînent $C^1_p+C^2_p=\psi(C^1_{p+n+1}+C^2_{p+n+1})$, $C^1_{p+n+1}+C^2_{p+n+1}=\varphi(C^1_p+C^2_p)$.

45. D'après la démonstration du théorème A_n, la supposition que C_{p+n+1} appartienne à la famille H_{p+n+1} entraîne l'homologie $\psi(C_{p+n+})_1 \sim 0$ dans T. D'après la démonstration du théorème B_n, la supposition $C_p \sim 0$ dans T entraîne que $\varphi(C_p)$ appartienne à la famille H_{p+n+1}.

46. Les deux opérations φ et ψ ne sont pas univoques; mais de ce qui précède on conclut sans peine qu'elles conduisent à une correspondance biunivoque et isomorphe entre les deux groupes Γ_p et G_{p+n+1}/H_{p+n+1}.

---

* Pour $n=0$: Q_0 *est constitué par deux points.*

** Cette condition n'exige *rien* pour $n \leq 1$.

§ 6. Cas particuliers.

47. Les suppositions faites dans nos théorèmes relativement à Q_n sont satisfaites en particulier lorsque Q_n est une variété (Mannigfaltigkeit, manifold) au sens de M. van Kampen* telle que $P_n(Q_n) = 1$. Le cas le plus important est celui où Q_n est la frontière d'un $(n+1)$-simplex ordinaire; on a ici $N = n + 1$, $U = R - \prod_{i=1}^{n+1} A_i$.

48. Soit S une sphère ordinaire ou un plan euclidien complété par un point à l'infini. Nous allons rappeler quelques théorèmes bien connus: S contient un 2-cycle C_2 non homologue à zéro dans S et tel que pour chaque 2-cycle. D_2 dans S on ait ou $D_2 \sim 0$ ou bien $D_2 \sim C_2$ dans S. Chaque 0-cycle et chaque 1-cycle dans S est homologue à zéro dans S. Soit A un sousensemble fermé non vide de S. Chaque 2-cycle dans $S - A$ est homologue à zéro dans $S - A$. Un 0-cycle dans $S - A$ est homologue à zéro dans $S - A$ si et seulement s'il est entièrement contenu dans une composante de $S - A$. Si A a $s+1$ composantes, il existe $s - 1$ 1-cycles C_i^1 $(1 \leqq i \leqq 1)$ dans $S - A$ tels que'à chaque 1-cycle C_1 dans $S - A$ on puisse attacher des nombres $r_1, r_2, \ldots r_{s-1}$ égaux à zéro ou à un de manière que l'on ait $C_1 \sim \sum_{i=1}^{s-1} r_i C^i_1$ dans $S - A$, tandis que l'homologie $\sum_{i=1}^{s-1} r_i C_1^i \sim 0$ dans S n'a lieu que pour $r_1 = r_2 = \ldots = r_{s-1} = 0$. En particulier, si A est un continu chaque 1-cycle dans $S - A$ est homologue à zéro dans $S - A$. Lorsque le nombre des composantes de A est infini, on peut indiquer un nombre s arbitrairement grand de 1-cycles C^i_1 $(1 \leqq i \leqq s)$ dans $S - A$ tels que l'homologie $\sum_{i=1}^{s} r_i C^i_1 \sim 0$ dans S $(r_i = 0$ ou $= 1)$ n'a lieu que si $r_1 = r_2 = \ldots = r_s = 0$.

49. Pour $R = S$, $p = 0$ le théorème A_0 devient, si l'on suppose les 0-cycles ${}^iC_0$ constitués chacun de deux points dont le premier est indépendant de i: *Soient* $A_1, A_2, \ldots A_{2k}$ $(k \geqq 1)$ *des sousensembles fermés de S en nombre fini et pair. Soit* $T = S - \sum_{i=1}^{2k} A_i$, $U = R - \sum A_i A_j$ $(1 \leqq i < j \leqq 2k)$, $[\nu] = T + A_\nu$ $(1 \leqq \nu \leqq 2k)$. *Soit* $s \geqq 1$ *un nombre entier possédant la propriété suivante:* ${}^1C_1, {}^2C_1, \ldots {}^sC_1$ *étant s 1-cycles arbitraires dans U, on peut trouver s nombres* $r_1, r_2, \ldots, r_s$, *égaux à zéro ou à un, mais non tous égaux à zéro, et l'on peut déterminer, pour* $1 \leqq \nu \leqq 2k$, *un 1-cycle* C^ν_1 *dans* $[\nu]$ *de manière à avoir* $\sum_{i=1}^{s} r_i\, {}^iC_1 \sim \sum_{\nu=1}^{2k} C^\nu_1$ *dans U. Soient* $p_0, p_1, \ldots, p_s$, $(s+1)$ *points de T appartenant, pour* $1 \leqq \nu \leqq 2k$, *à une seule composante*

---

* E. R. van Kampen, Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze, Thèse, Leiden, 1929, chap. I. V. aussi S. Lefschetz, Topology, Colloquium Publications, 1930, chap. III.

de $[\nu]$. *Alors on peut, parmi les points* $p_0, p_1, \ldots, p_s$, *en choisir deux situés dans la même composante de* T. Si l'on remplace l'homologie $\sum_{i=1}^{s} r_i\, {}^iC_1 \sim \sum_{\nu=1}^{2k} C^\nu{}_i$ par l'homologie plus forte $\sum_{i=1}^{s} r_i\, {}^iC_1 \sim 0$, on arrive à l'énoncé suivant: *Soient* $A_1, A_2, \ldots A_{2k}$ *des sousensembles fermés de* S *en nombre fini et pair. Supposons que l'ensemble fermé* $\Sigma A_i A_j$ $(1 \leqq i < j \leqq 2k)$ *ait au plus* $s \geqq 1$ *composantes. Soient* $p_0, p_1, \ldots, p_s$ $s+1$ *points de* S *tels que, pour* $1 \leqq \nu \leqq 2k$, $0 \leqq i < j \leqq s$, *les points* p_i *et* p_j *puissent être joints par un arc ne rencontrant aucun des* $2k-1$ *ensembles* A_μ $(\mu \neq \nu)$. *On peut alors indiquer deux points* p_i *et* p_j $(0 \leqq i < j \leqq s)$ *qui peuvent être joints par un arc ne rencontrant aucun des* $2k$ *ensembles* A_ν. Plus particulièrement encore, pour $k=1$ on a l'énoncé suivant: *Soient* A_1 *et* A_2 *deux sousensembles fermés de* S *tels que la partie commune* $A_1 A_2$ *ait au plus* $s \geqq 1$ *composantes. Soient* $p_0, p_1, \ldots, p_s$ $s+1$ *points de* S *en dehors de* $A_1 + A_2$ *tels que ni* A_1 *ni* A_2 *ne soit une coupure* de* S *entre deux quelconques d'entre eux. On peut indiquer deux points* p_i *et* p_j *tels que* $A_1 + A_2$ *ne soit pas une coupure de* S *entre* p_i *et* p_j**.

50. Pour $R = S$, $p = 0$ le théorème B_0 devient: *Soient* A_1 *et* A_2 *deux sousensembles fermés de* S. Soient ${}^1C_1, {}^2C_1, \ldots, {}^sC_1$ $(s > 1)$ s 1-cycles dans $R - A_1 A_2$ *tels que, si* $r_1, r_2, \ldots, r_3$ *sont des nombres égaux à zéro ou à un, mais non tous égaux à zéro, et si l'on choisit arbitrairement un* 1-*cycle* $C_1{}^1$ *dans* $R - A_2$ *et un* 1-*cycle* $C_1{}^2$ *dans* $R - A_1$, *on n'a jamais* $\sum_{i=1}^{s} r_i\, {}^iC_1 \sim C_1{}^1 + C_1{}^2$ *dans* $R - A_1 A_2$. *Il existe* s 0-*cycles* ${}^1C_0$, ${}^2C_0, \ldots, {}^sC_0$ *dans* $R - (A_1 + A_2)$ *tels que* ${}^iC_p \sim 0$ *dans* $R - A_\nu$ *pour* $1 \leqq i \leqq s$; $\nu = 1, 2$, *mais* $\sum_{i=1}^{s} r_i\, {}^iC_0 \sim 0$ *dans* $R - (A_1 + A_2)$ (*avec* $r_i = 0$ *ou* $= 1$) *seulement pour* $r_1 = r_2 = \ldots = r_s = 0$. En particulier: *Soient* A_1 *et* A_2 *deux souscontinus de* S. *Supposons que l'ensemble* $A_1 A_2$ *ait plus de* s $(\geqq 1)$ *composantes. On peut trouver un nombre fini* $p_1, p_2, \ldots p_{2k}$ *de points de* $R - (A_1 + A_2)$ *de manière que chaque composante de* $R - A_1$, *ainsi que chaque composante de* $R - A_2$ *en contienne un nombre pair, tandis qu'il existe plus de* s *composantes de* $R - (A_1 + A_2)$ *dont chacune en contient un nombre impair.* Corollaire 1: *Soient* A_1 *et* A_2 *deux souscontinus de* S *tels que* $A_1 A_2$ *ait plus de* s $(\geqq 1)$ *composantes. Alors* $R - (A_1 + A_2)$ *a plus de* s *composantes****. Corollaire 2: *Soient* A_1 *et* A_2 *deux souscontinus de* S *tels que* $A_1 A_2$ *ait au moins deux composantes.*

---

* Un sousensemble fermé A de S est une coupure de S entre p et q, lorsque p et q appartiennent à deux composantes différentes de $S - A$.

** Straszewicz. Über die Zerschneidung der Ebene durch abgeschlossene Mengen, Fundamenta Math., t. 7, 1925. Pour $s = 1$, Janiszewski, Sur les coupures du plan faites par des continus, Prace matem.-fizyczne, t. 26, 1913.

*** Straszewicz, l. c; pour $s = 1$, Janiszewski, l. c.

Alors il existe dans S deux points p et q tels que A_1 n'est pas et $A_1 + A_2$ est une coupure de S entre eux.*

51. *Pour* $R = S$, $p = 0$, $N \geqq 4$ *le théorème A_1 donne, si l'on suppose d'abord que $U \neq S$: Soient $A_1, A_2, \ldots A_k$ $(k \geqq 4)$ des sousensembles fermés de S remplissant les deux conditions: α) les k ensembles*

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_{k-2}, A_2 + A_3 + \ldots + A_{k-1}, A_3 + A_4 + \ldots + A_k, \ldots, A_k + A_1 + \ldots + A_{k-3}$$

sont des continus; β) il existe un indice j tel que $3 \leqq j \leqq k-1$, $A_1 A_j \neq 0$. Soient p et q deux points de $R - \sum_{i=1}^{2k} A_i$ tels qu'aucun des $2k$ ensembles $B_\nu = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu}}^{k} A_i$ $(1 \leqq \nu \leqq k)$ ne soit une coupure entre eux. Alors l'ensemble $\sum_{i=1}^{k} A_i$ n'est pas une coupure entre p et q. Si l'on omet la condition β), on peut toujours affirmer ceci: Soient p, q et r trois points de $R - \sum_{i=1}^{k} A_i$ tels qu'aucun des k ensembles B_ν ne soit une coupure de S entre deux quelconques d'eux. Alors de ces trois points on peut en choisir deux de manière que $\sum_{i=1}^{k} A_i$ ne soit une coupure de S entre eux. Pour $R = S$, $p = 0$, $N = 3$ le théorème A_1 donne: *Soient A_1, A_2, A_3 trois souscontinus de S. Si l'on a $A_1 A_2 A_3 \neq 0$ et si p et q sont deux points de $R - (A_1 + A_2 + A_3)$ tels qu'aucun des trois ensembles $A_1 + A_2$, $A_1 + A_3$, $A_2 + A_3$ ne soit une coupure entre eux, alors l'ensemble $A_1 + A_2 + A_3$ n'est pas non plus une coupure entre eux**. Si l'on ne suppose rien sur $A_1 A_2 A_3$, et si p, q et r sont trois points de $R - (A_1 + A_2 + A_3)$ tels qu'aucun des trois ensembles $A_1 + A_2$, $A_1 + A_3$, $A_2 + A_3$ ne soit une coupure de S entre deux quelconques d'eux, l'ensemble $A_1 + A_2 + A_3$ ne peut être une coupure de S entre deux quelconques d'eux***.* Pour $R = S$, $p = 0$, $N \geqq 4$ le théorème A_1 donne: *Soient $A_1, A_2, \ldots, A_k$ $(k \geqq 4)$ des sousensembles fermés non vides de S remplissant les deux conditions: α) les k ensembles*

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_{k-1}, A_2 + A_3 + \ldots + A_k, \ldots, A_k + A_1 + \ldots + A_{k-1}$$

---

* Kuratowski et Straszewicz, Géneralisation d'un théorème de Janiszewski, Fund. Math., t. 12, 1928.

** Kuratowski, Théorème sur trois continus, Monatshefte, t. 36, 1929.

*** Un continu est dit *indécomposable*, s'il n'est pas la somme de deux souscontinus différents de lui. Or soit A une frontière commune de trois régions de S; soient p, q, r trois points de S appartenant chacun à une de ces trois régions. Alors A est une coupure de S entre deux quelconques des points p, q, r, tandis qu'un sousensemble fermé $A' \neq A$ de A n'est une coupure ni entre p et q, ni entre p et r, ni entre q et r Le théorème du texte entraîne donc qu'on ne peut avoir $A = A_1 + A_2 + A_3$; A_1, A_2, A_3 étant trois souscontinus tels que $A_1 + A_2 \neq A$, $A_1 + A_3 \neq A$, $A_2 + A_3 \neq A$. Autrement dit: *Toute frontière commune à trois régions de S est un continu indécomposable ou bien la somme de deux continus indécomposables* (Kuratowski, Sur la structure des frontières communes à deux régions, Fund. Math., t. 12, 1928).

sont des continus; β) les ensembles $A_i A_j$ $(1 \leqq i \leqq j - 2 \leqq k - 2)$ le cas $i = 1, j = k$ *étant excepté) sont vides. Il existe des points* $p_1, p_2, \ldots, p_{2k}$ *dans* $R - \sum_{i=1}^{k} A_i$ *tels que pour* $1 \leqq \nu \leqq k, B_\nu = \sum_{\substack{i=1 \\ i=\nu}}^{k} A_i$ *chaque composante de* $R - B_\nu$ *en contienne un nombre pair, tandis qu'une certaine composante de* $R - \sum_{i=1}^{k} A_i$ *en contienne un nombre impair. Le théorème vaut aussi pour* $k = 3$, *pourvu qu'on remplace la condition β) par la suivante: l'ensemble* $A_1 A_2 A_3$ *est vide.* La thése du théorème qui vient d'être énoncé possè de cette conséquence: *il existe deux points p et q dans* $R - \sum_{i=1}^{k} A_1$ *tels que l'ensemble* $A_1 + A_2 + \ldots + A_{k-1}$ *n'est pas une coupure de S entre eux, tandis que l'ensemble* $A_1 + A_2 + \ldots + A_k$ *est une coupure de S entre eux.*

52. Le théorème A_0 a été donné par M. Alexander en 1922*. Le théorème C_0 ne diffère pas trop d'un théorème de M. W. Mayer**. Que le théorème de M. Mayer peut se transformer dans la forme de notre théorème C_0, a été remarqué par M. Helly***. J'ai généralisé beaucoup le théorème de M. Mayer dans un Mémoire qui paraîtra probablement dans les Fundamenta Mathematicae†. Les théorèmes A_n, B_n et C_n peuvent être facilement généralisés de la même manière.

---

* A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem. Transactions of the Amer. Math. Soc., t. 23 (corollary W^i).

** Abstrakte To ologie, Monatshefte, t. 36, 1929, chap. 4.

*** Über Systeme von abgeschlossenen Mengen mit gemeinschaftlichen Punkten Monatshefte, t. 37, 1930.

† Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque, chap. 4.