Eduard Čech

Une démonstration du théorème de Cauchy et de la formule de Gauss

Rendiconti Accad. d. L. Roma (6) 11 (1930), 884-887

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500982

RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.
Estratto dal vol. XI, serie 6ª, 1° sem., fasc. 10. – Roma, maggio 1930-VIII.

Matematica. — *Une démonstration du théorème de Cauchy et de la formule de Gauss.* Nota di E. Čech, presentata [1] dal Corrispondente G. Fubini.

Soit Γ l'intérieur d'une courbe C plane simple fermée de longueur s finie; posons $\Delta = \Gamma + C$. Je démontrerai le théorème de Cauchy sous la forme: *Soit $f(z)$ une fonction de la variable complexe z continue dans Δ et dérivable dans Γ; alors* $\int\limits_C f(z)\,dz = 0$ [2]. La même méthode suffira à établir la formule de Gauss sous la forme: *Soient u, v deux fonctions de deux variables réelles x, y continues dans Δ et telles que la formule*

$$\int\limits_r u\,dx + v\,dy = \iint\limits_\rho \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{1}$$

soit valable pour chaque rectangle ρ de périmètre r, ρ et r faisant partie de Δ; alors (1) *subsiste pour $\rho = \Gamma$, $r = C$ pourvu que l'intégrale double converge dans Γ.*

Commençons par le théorème de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$; je démontrerai $\left|\int\limits_C f(z)\,dz\right| < 25\,s\varepsilon$. Il existe un nombre $\delta > 0$, tel que, pour z_1, z_2 dans Δ, $|z_1 - z_2| < \delta$ entraîne $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$. Il existe un nombre $\eta > 0$ tel que, z_1, z_2 étant sur C tels que $|z_1 - z_2| < \eta$, un arc de C aux extrémités z_1, z_2 soit plus court que δ. Divisons C (pos. orientée) en des petits arcs moyennant les points $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n = a_0$; la longueur σ_i de l'arc $a_i a_{i+1} = \alpha_i$ soit $< \frac{1}{4}\eta$. Soit $K_i\,(0 \leq i \leq n-1)$ le perimètre d'un carré parallèle aux axes de centre a_i et de côté $p_i < \frac{1}{2}\eta$; $2\sigma_i < p_i < 3\sigma_i$. η soit si petit qu'il existe un arc de C extérieur à K_i de longueur $\frac{1}{2}s$. Je démontrerai plus loin le *lemme* qu'il existe un arc k_i de K_i contenu dans Γ dont les extrémités c'_i, c''_i sont sur C, le plus petit arc γ_i de C aux extrémités c'_i, c''_i contenant a_i $\left(\text{et donc } \alpha_i, \text{ car } \sigma_i < \frac{1}{2}p_i\right)$.

(1) Nella seduta del 18 maggio 1930.

(2) (2–7–1930). Je donnerai une autre démonstration de cet énoncé dans une Note ultérieure.

On peut supposer que les $2n$ points c'_i, c''_i soient tous distincts. L'intérieur de la courbe simple fermée $k_i + \gamma_i$ fait partie de Γ; les lignes brisées k_j $(0 \leqq j \leqq n-1\ ;\ j \neq i)$ le partagent en un nombre fini de domaines $\Gamma_{i\nu}$; leurs frontières $c_{i\nu}$ sont composées d'un nombre fini d'arcs de C et d'arcs de carrés $K_0, K_1, \cdots, K_{n-1}$. Le domaine $\Gamma^* = \Gamma - \sum \Gamma_{i\nu}$ peut être divisé en un nombre fini de rectangles ρ_μ; les ρ_μ et leurs frontières r_μ font partie de Γ (1). Évidemment,

$$\int_C f(z)\, dz = \sum_{i\nu} \int_{c_{i\nu}} f(z)\, dz + \sum_{\mu} \int_{r_\mu} f(z)\, dz,$$

tous les contours étant positivement orientés. D'après la démonstration classique de Goursat, $\int_{r_\mu} f(z)\, dz = 0$, d'où, en remarquant que $\int_{c_{i\nu}} dz = 0$,

$$(2) \qquad \left| \int_C f(z)\, dz \right| \leqq \sum_{i\nu} \left| \int_{c_{i\nu}} [f(z) - f(a_i)]\, dz \right|.$$

Or sur k_i on a $|z - a_i| < p_i < \frac{1}{2}\eta$; en particulier $|c'_i - a_i|, |c''_i - a_i| < \frac{1}{2}\eta$; $|c'_i - c''_i| < \eta$, de manière que la longueur de γ_i est $< \delta$. Il en résulte (a_i appartenant à γ_i) que $|z - a_i| < \delta$ sur γ_i; cet inégalité subsistant sur k_i, elle vaut sur $k_i + \gamma_i$ et donc aussi à l'intérieur de $k_i + \gamma_i$. En particulier, sur $c_{i\nu}$ on aura $|z - a_i| < \delta$ et par suite $|f(z) - f(a_i)| < \varepsilon$. Le second membre de (2) est donc $\leqq \varepsilon$ multiplié par la somme des longueurs des $c_{i\nu}$. Or on voit sans difficulté que cette somme ne dépasse par s augmenté de la double longueur totale des carrés K_i; et cette longueur est $4\sum p_i < 12 \sum \sigma_i = 12 s$. Donc le (second et par suite le) premier membre de (2) est $\leqq 25 s \varepsilon$.

La démonstration de la formule de Gauss est presque la même. Si l'on ne suppose pas la convergence du second membre, cette formule

$$\int_C u\, dx + v\, dy = \iint_\Gamma \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\, dy$$

reste valable pourvu qu'on définisse

$$\iint_\Gamma = \lim \iint_{\Gamma^*},$$

les Γ^* parcourant une suite *convenablement choisie* de domaines complètement intérieurs à Γ et tels que chaque point de Γ appartienne à tous les Γ^* à

(1) Il faut remarquer que l'arc α_i fait partie de l'intérieur de l'arc γ_i.

partir d'un certain rang. $\varepsilon > 0$ étant donné, je fixe $\delta > 0$ de manière que, pour $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ dans Δ, $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$ entraîne $|u(x_1, y_1) - u(x_2, y_2)| < \varepsilon$, $|v(x_1, y_1) - v(x_2, y_2)| < \varepsilon$. Les symboles $\eta, a_i, \alpha_i, K_i, p_i, k_i, c_i', c_i'', \gamma_i, \Gamma_{i\nu}, c_{i\nu}, \Gamma^*, \rho_\mu, r_\mu$ gardant leurs significations, il suffit de prouver que

$$(3) \qquad \left| \int\limits_{C} u\,dx + v\,dy - \iint\limits_{\Gamma^*} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\,dy \right| \leqq 50\, s\, \varepsilon .$$

Or d'après (1)

$$\iint\limits_{\Gamma^*} = \sum_{\mu} \iint\limits_{\varrho_\mu} = \sum_{\mu} \int\limits_{r_\mu} , \quad \int\limits_{C} = \sum_{i\nu} \int\limits_{c_{i\nu}} + \sum_{\mu} \int\limits_{r_\mu} ,$$

de manière que l'inégalité à démontrer devient

$$\left| \sum_{i\nu} \int\limits_{c_{i\nu}} u\,dx + v\,dy \right| \leqq 34\, \varepsilon .$$

Or chaque point de $c_{i\nu}$ étant à une distance $< \delta$ de a_i, on à sur $c_{i\nu}$: $|u - \alpha| < \varepsilon$, $|v - \beta| < \varepsilon$, où α, β sont les valeurs de u, v au point a_i. Donc

$$\int\limits_{c_{i\nu}} u\,dx + v\,dy = \int\limits_{c_{i\nu}} (u - \alpha)\,dx + (v - \beta)\,dy$$

ne dépasse pas en module 2ε multiplié par la somme des longueurs des $c_{i\nu}$, et donc $2\varepsilon \cdot 25\, s = 50\, s\, \varepsilon$.

Reste à prouver le *lemme*. L'intersection O de K_i avec Γ est une somme d'une infinité dénombrable d'arcs ouverts du carré K_i (*composantes* de O); les extrémités de ces arcs appartiennent à un arc C^* de C de longueur $< \frac{1}{2} s$; C^* contient a_i (et tout l'arc α_i). Une composante de O soit dite *favorable* si ses extrémités sont sur C^* séparées l'une de l'autre par a_i. Il s'agit de l'existence d'une composante favorable. Rangeons les composantes non favorables dans une suite

$$(4) \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots .$$

Moyennant (4) je définirai une certaine courbe simple fermée C' (si les arcs (4) n'existent pas, je pose $C' = C$). Soient p_1', p_1'' les deux extrémités de λ_1 et soit l_1 l'arc ouvert de C^* aux mêmes extrémités. En remplaçant l_1 par λ_1, C se transforme en C_1. L'intérieur Γ_1 de C_1 fait partie de Γ. Aucun des arcs $\lambda_\nu (\nu \geqq 2)$ n'a des points communs ni avec λ_1, ni avec C et donc pas même avec C_1; chaque λ_ν est donc complètement à l'extérieur ou à l'intérieur de C_1. Soit λ_k le premier d'entre eux à l'intérieur de C_1 (si λ_k

n'existe pas, $C' = C_1$). Soient p'_k, p''_k les extrémités de λ_k; ces points ne sont pas sur λ_1, cet arc étant à l'extérieur de C_1; pourtant, ils appartiennent à C; ils se trouvent donc sur C_1. En remplaçant par λ_k cet arc de C_1 aux extrémités p'_k, p''_k qui ne contient pas a_i on obtient de C_1 une nouvelle courbe C_2. L'intérieur Γ_2 de C_2 fait partie de Γ_1, donc de Γ. Moyennant le premier arc (4) situé à l'intérieur de C_2, on forme la courbe C_3, et ainsi de suite. On arrive ainsi ou à une courbe $C_n = C'$ telle que tous les arcs (4) sont à l'extérieur d'elle, ou bien on pourra former C_n pour chaque n. On voit alors sans peine que les courbes C_n ont une position limite C'. L'intérieur Γ' de C' fait partie de l'intérieur Γ_n de chaque courbe C_n et donc de Γ. Tous les arcs (4) sont à l'extérieur de C'. Les arcs α_i et $C - C^*$ de C font partie de C'. Il y a donc un point $\alpha(\beta)$ dans Γ' à l'intérieur (extérieur) de K_i. Joignons α à β par une ligne brisée située dans Γ'; elle rencontre K_i au point q; q appartient à (Γ', donc à) Γ et à K_i, donc à O. La composante μ de O passant par q est favorable, les composantes (4) se trouvant à l'extérieur de C'.

La démonstration qui vient d'être complétée du théorème de Cauchy et de la formule de Gauss s'étend sans peine au cas où la frontière C du domaine bornée Γ se compose d'un nombre fini d'arcs simples rectifiables ayant deux à deux au plus une extrémité commune. Chaque point de C accessible de Γ de plusieurs manières doit alors être considéré comme multiple et la fonction $f(z)$ peut avoir des valeurs différentes dans deux points coïncidants, mais accessibles de différentes manières.

On peut aussi admettre un nombre fini de discontinuités sur le contour. Supposons p. ex., la fonction $f(z)$ continue en $\Delta - a$ et dérivable dans Γ, a étant un point particulier de C. De plus soit, au voisinage de a, $f(z) = o\left(\frac{1}{|z-a|}\right)$. Alors, $\lim \int_{c-\gamma} f(z)\,dz = 0$, ou γ parcourt une suite *convenable* de petits arcs de C entourant a. En effet, d'après le lemme, on peut construire un arc k d'un petit carré au centre a, k faisant partie de Γ et les extrémités c', c'' de k limitant un petit arc γ de C qui entoure a. En appliquant le théorème de Cauchy sous la forme déjà démontrée à l'intérieur de $(C - \gamma) + k$, on obtient $\int_{C-\gamma} f(z)\,dz = \int_k f(z)\,dz$. Or la dernière intégrale tend vers zéro, car $f(z) = o\left(\frac{1}{|z-a|}\right)$ et la longueur de k est de l'ordre de $|z-a|$.

Roma, 1930 — Dott. G. Bardi, Tip. della R. Accad. Naz. dei Lincei.