Eduard Čech

Sur les surfaces qui admettent ∞^1 déformations projectives en elles mêmes

Spisy Přírod. Fak. Univ. Brno 40 (1924), 47 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500894

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

ROK 1924 | ČÍS. 40

SUR LES SURFACES QUI ADMETTENT ∞^1 DÉFORMATIONS PROJECTIVES EN ELLES MÊMES

PAR

DR. EDOUARD ČECH

VYCHÁZÍ S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A OSVĚTY

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDÁVÁ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 63

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

SUR LES SURFACES QUI ADMETTENT ∞^1 DÉFORMATIONS PROJECTIVES EN ELLES MÊMES.

M. Fubini a introduit, dans le Mémoire „*Applicabilità proiettiva di due superficie*"* la notion intéressante de *déformation projective* d'une surface. Depuis, plusieurs articles ont été écrits sur ce sujet; citons seulement le Mémoire „*Sur la déformation projective des surfaces*" de M. E. Cartan** qui est sans doute le plus important. Cependant, il y a encore plusieurs lacunes essentielles dans ce qu'on sait maintenant sur cet argument. Dans le présent Mémoire, nous voulons étudier le problème de la *déformation projective d'une surface en elle même*. Rappelons brièvement les résultats connus en excluant d'ailleurs les surfaces réglées***.

Si une surface S non réglée admet un groupe continu G de déformations projectives en elle même, le groupe G a deux paramètres au plus. On connait déjà toutes les surfaces pour lesquelles G a deux paramètres. Ces résultats sont dus a M. Fubini †. Les surfaces correspondantes ont été retrouvées par M. Cartan dans son Mémoire cité plus haut (pp. 311—314).

Dans ce qui suit je déterminerai toutes les *surfaces non réglées qui admettent un groupe continu G à un seul paramètre de déformations projectives en elles mêmes*. Il est nécessaire de rappeler quelques faits connus de la théorie projective de surfaces ††. Une surface S non réglée, sur laquelle on a choisi un système de coordonnées curvilignes u et v telles que les courbes $u =$ const. et $v =$ const. soient des courbes asymptotiques de S, est déterminée à homographies près si l'on connait en fonction de u et v quatre expressions qu'on indique resp. par

$$\beta,\ \gamma,\ L,\ M. \tag{1}$$

En changeant les paramètres u et v, les formes différentielles

$$\varphi_2 = 2\beta\gamma\, du\, dv,\ \ \varphi_3 = \beta\gamma\,(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3) \tag{2}$$

* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 41, 1916, pp. 135—162.

** Annales de l'Ecole Normale Supérieure, t., 37 (3), 1920, pp. 259—356.

*** Une surface réglée admet un groupe continu de déformations projectives en elle même alors et alors seulement si elle est projectivement applicable en une surface (nécessairement réglée) qui admet un groupe continu de transformations homographiques en elle même.

† *Fondamenti di geometria proiettivo differenziale*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 43, 1919, § 8.

†† G. Fubini, *Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale di una superficie*, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, t. 27 (5), 1918, pp. 12—17, 44—47. V. aussi le Mémoire cité sous †.

restent inaltérées. Pour que les quantités (1) définissent effectivement une surface, il est nécessaire et suffisant que les trois *conditions d'intégrabilite*

$$L_v = -2\beta\gamma_u - \gamma\beta_u, \quad M_u = -2\gamma\beta_v - \beta\gamma_v,$$
$$\beta M_v + 2\beta_v M + \beta_{vvv} = \gamma L_u + 2\gamma_u L + \gamma_{uuu} \qquad (3($$

soient vérifiées. $\overline{S}$ étant une autre surface non réglée sur laquelle aussi u et v sont les paramètres des asymptotiques, et $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, $\overline{L}$, $\overline{M}$ les quantités correspondantes aux quantités (1), la correspondance entre S et $\overline{S}$ obtenue en faisant correspondre les points des deux surfaces qui appartiement aux mêmes valeurs de u et v, est une déformation projective alors et alors seulement si $\overline{\beta} = \beta$, $\overline{\gamma} = \gamma$. Si de plus $\overline{L} = L$, $\overline{M} = M$, la déformation projective se réduit à une homographie.

Cela posé, on reconnait que le problème que nous nous sommes proposé peut s'énoncer analytiquement comme il suit*: On doit déterminer, de la manière la plus générale possible, quatre fonctions (1) de deux variables u et v, vérifiant les équations aux dérivées partielles (3), et telles que le couple (2) de formes différentielles (2) admette un groupe continu à un paramètre de transformations en lui même. Cependant, le choix des paramètres u et v des courbes asymptotiques est arbitraire; on peut s'en servir en réduisant les formes (2) à des formes simples.

Les calculs qui suivent sont un peu longs; mais cela ne peut surprendre si l'on remarque que le tableau final de toutes les surfaces qui satisfont à notres conditions en donne bien trente types distincts! La plupart de ces calculs ont étés effectués par M. O. Borůvka; je lui exprime les plus sincères remerciments.

I. Résolution d'une équation auxiliaire.

1. Nous nous proposons de résoudre l'équation

$$\varphi_1(u-v)\,U_1(u) + \varphi_2(u-v)\,V_1(v) = \psi(u+v) \qquad (E)$$

à cinq fonctions inconnues φ_1, φ_2, U_1, V_1, φ, *en nous bornant aux cas où* $\varphi_1\varphi_2 \neq 0$. Pour la comodité du lecteur, nous commençons par un tableau de toutes les solutions:

$$\varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \text{ arbitraires}, \quad U_1 = V_1 = \psi = 0; \qquad (E_0)$$

$$\varphi_1 \text{ arbitraire}, \quad \varphi_2 = ae^{A(u-v)}, \quad U_1 = 0, \quad V_1 = be^{2Av}, \quad \psi = abe^{A(u+v)}; \qquad (E_1)$$

$$\varphi_1 = ae^{-A(u-v)}, \quad \varphi_2 \text{ arbitraire}, \quad U_1 = be^{2Au}, \quad V_1 = 0, \quad \psi = abe^{A(u+v)}; \qquad (E'_1)$$

$$\varphi_1 \text{ arbitraire}, \quad \varphi_2 = ae^{2A(u-v)}.\,\varphi_1 + be^{A(u-v)}, \quad a \neq 0, \quad U_1 = -ace^{2Au}, \quad V_1 = ce^{2Av}, \quad \psi = bce^{A(u+v)}; \qquad (E_2)$$

---

* V. le Mémoire cité sous *, § 8.

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{b_1 c_2 e^{-A(u-v)} - b_2 c_1 e^{-B(u-v)}}{a_2 b_1 e^{-(A-B)(u-v)} - a_1 b_2 e^{(A-B)(u-v)}}, \qquad A \mp B \\
\varphi_2 &= \frac{-a_1 c_2 e^{A(u-v)} + a_2 c_1 e^{B(u-v)}}{a_2 b_1 e^{-(A-B)(u-v)} - a_1 b_2 e^{(A-B)(u-v)}}, \\
U_1 &= a_1 e^{2Au} + a_2 e^{2Bu}, \quad V_1 = b_1 e^{2Av} + b_2 e^{2Bv}, \\
\psi &= c_1 e^{A(u+v)} + c_2 e^{B(u+v)};
\end{aligned}\right\} \tag{E$_3$}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= e^{-A(u-v)} \frac{b_1 c_1 (u-v) + b_1 c_2 - 2 b_2 c_1}{a_1 b_1 (u-v) - a_1 b_2 + a_2 b_1}, \\
\varphi_2 &= e^{A(u-v)} \frac{a_1 c_1 (u-v) - a_1 c_2 + 2 a_2 c_1}{a_1 b_1 (u-v) - a_1 b_2 + a_2 b_1}, \\
U_1 &= (a_1 u + a_2) e^{2Au}, \quad V_1 = (b_1 v + b_2) e^{2Av}, \\
\psi &= [c_1 (u+v) + c_2]\, e^{A(u+v)};
\end{aligned}\right\} \tag{E$_4$}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{1}{c a_1 e^{A(u-v)} + c a_2 e^{B(u-v)}}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{a_2 e^{-A(u-v)} + a_1 e^{-B(u-v)}}, \\
U_1 &= c\,(a_1 b_1 e^{2Au} + a_2 b_2 e^{2Bu} + h e^{(A+B)u}), \\
V_1 &= a_2 b_1 e^{2Av} + a_1 b_2 e^{2Bv} - h e^{(A+B)v}, \\
\psi &= b_1 e^{A(u+v)} + b_2 e^{B(u+v)}, \quad A \mp B;
\end{aligned}\right\} \tag{E$_5$}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{c e^{-A(u-v)}}{a_1 (u-v) + a_2}, \quad \varphi_2 = \frac{e^{A(u-v)}}{a_1 (u-v) + a_2}, \\
U_1 &= \left[a_1 b_1 u^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) u + \frac{a_2 b_2}{2} + h\right] e^{2Au}, \\
V_1 &= -c \left[a_1 b_1 v^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) v - \frac{a_2 b_2}{2} + h\right] e^{2Av}, \\
\psi &= c\,[b_1 (u+v) + b_2]\, e^{A(u+v)}.
\end{aligned}\right\} \tag{E$_6$}
$$

2. Moyennant les opérations

$$
\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial^2}{\partial u^2}, \frac{\partial^2}{\partial v^2}, \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^3}{\partial u^2 \partial v} - \frac{\partial^3}{\partial u \partial v^2}
$$

on déduit de (E) *

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_1 U'_1 + \varphi'_1 U_1 + \varphi'_2 V_1 &= \psi', \\
\varphi_2 V'_1 - \varphi'_1 U_1 - \varphi'_2 V_1 &= \psi', \\
\varphi_1 U''_1 + 2\varphi'_1 U'_1 + \varphi''_1 U_1 + \varphi''_2 V_1 &= \psi'', \\
\varphi_2 V''_1 - 2\varphi'_2 V'_1 + \varphi''_1 U_1 + \varphi''_2 V_1 &= \psi'', \\
\varphi'_1 U'_1 - \varphi'_2 V'_1 + \varphi''_1 U_1 + \varphi''_2 V_1 &= -\psi'', \\
\varphi'_1 U''_1 + \varphi'_2 V''_1 + 3\varphi''_1 U'_1 - 3\varphi''_2 V'_1 + 2\varphi'''_1 U_1 + 2\varphi'''_2 V_1 &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{1}
$$

On peut éliminer U_1, V_1, U'_1, V'_1, U''_1, V''_1 des équations (E) e (1). Le résultat de l'élimination est

---

* Pour abréger, je pose $\varphi'_1 = \frac{d\varphi_1}{d(u-v)}$, $U'_1 = \frac{dU_1}{du}$ etc.

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & \psi' \\ -\varphi'_1 & -\varphi'_2 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \psi' \\ \varphi''_1 & \varphi''_2 & 2\varphi'_1 & 0 & \varphi_1 & 0 & \psi'' \\ \varphi''_1 & \varphi''_2 & 0 & -2\varphi'_2 & 0 & \varphi_2 & \psi'' \\ \varphi''_1 & \varphi''_2 & \varphi'_1 & -\varphi'_2 & 0 & 0 & -\psi'' \\ 2\varphi'''_1 & 2\varphi'''_2 & 3\varphi''_1 & -3\varphi''_2 & \varphi'_1 & \varphi'_2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

ce qu'on peut écrire

$$\tau_2 \psi'' + \tau_1 \psi' + \tau_0 \psi = 0 \qquad (2_{\text{bis}})$$

τ_2, τ_1, τ_0 étant fonctions de $u - v$ seulement. Nous supposerons d'abord qu'il ne soit pas identiquement $\tau_0 = \tau_1 = \tau_2 = 0$. Nous montrerons plus tard (p. 10) que l'hypothèse $\tau_0 = \tau_1 = \tau_2 = 0$ ne donnera plus aucune solution nouvelle de notre problème. Cela posé, nous pouvons conclure de (2_{bis}), en donnant à $u - v$ une valeur particulière, qu'il existe au moins un système de constantes a et b telles qu'on ait identiquement

$$4\psi'' + 2a\psi' + b\psi = 0. \qquad (3)$$

Or, par les opérations $\dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\partial}{\partial v}$ et $\left(\dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\partial}{\partial v}\right)^2$ on déduit de (E) les relations

$$\begin{aligned} \varphi_1 U'_1 + \varphi_2 V'_1 &= 2\psi' \\ \varphi_1 U''_1 + \varphi_2 V''_1 &= 4\psi''. \end{aligned} \qquad (4)$$

En multipliant (E) par b et les deux équations (4) respectivement par a et 1 et en ajoutant les résultats on obtient en vertu de (3)

$$\varphi_1 (U''_1 + aU'_1 + bU_1) + \varphi_2 (V''_1 + aV'_1 + bV_1) = 0. \qquad (5)$$

Première manière de vérifier les équations (5).

3. Les équations (5) sont vérifiées en particulier si l'on a

$$\begin{aligned} U''_1 + aU'_1 + bU_1 &= 0, \\ V''_1 + aV'_1 + bV_1 &= 0. \end{aligned} \qquad (6)$$

Nous nous proposons donc de déterminer d'abord les solutions de (E) pour lesquelles les équations (6) soient satisfaites. Si les deux racines $x = 2A$ et $x = 2B$ de l'équation

$$x^2 + ax + b = 0$$

sont distinctes, on déduit de (3) et (6)

$$\begin{aligned} U_1 &= a_1 e^{2Au} + a_2 e^{2Bu}, \\ V_1 &= b_1 e^{2Av} + b_2 e^{2Bv}, \quad A \neq B \\ \psi &= c_1 e^{A(u+v)} + c_2 e^{B(u+v)}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Il faut encore chercher les fonctions φ_1 et φ_2. On peut se proposer de les calculer des équations (E) e (4). Or cela suppose $U_1 V'_1 - U'_1 V_1 \neq 0$.

D'autre part, des équations (7) on déduit

$$U_1 V'_1 - U'_1 V_1 = 2(A-B)\,[a_2 b_1\, e^{2(Bu+Av)} - a_1 b_2\, e^{2(Au+Bv)}].$$

Si donc $U_1 V'_1 - U'_1 V_1 = 0$, on a nécessairement

$$a_1 b_2 = a_2 b_1 = 0.$$

Mais il suffit de supposer plus particulièrement que $a_2 = b_2 = 0$. En effet, l'hypothèse $a_1 = b_1 = 0$ n'en diffère pas essentiellement (car on peut échanger A avec B). D'autre part, s'il on a p. ex. $b_1 = b_2 = 0$ l'équation (E) devient

$$\varphi_1 (a_1 e^{2Au} + a_2 e^{2Bu}) = c_1 e^{A(u+v)} + c_2 e^{B(u+v)}.$$

En divisant par U_1 et puis effectuant l'opération $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$ on trouve que

$$(A-B)\;[a_1 c_2\, e^{(2A+B)u} - a_2 c_1\, e^{(A+2B)u+Av}] = 0$$

d'où $b_1 = b_2 = a_1 c_2 = a_2 c_1 = 0$. Si l'on ne veut supposer ni $a_1 = b_1 = 0$ ni $a_2 = b_2 = 0$ il ne reste que supposer $c_1 = c_2 = 0$. Mais alors l'équation (E) donne $\varphi_1 = 0$, et nous ne cherchons que les solutions de (E) pour lesquelles $\varphi_1 \varphi_2 \neq 0$.

Nous avons donc prouvé que si $U_1 V'_1 - U'_1 V_1 = 0$, nous pouvons supposer $a_2 = b_2 = 0$. Si $a_2 = b_2 = 0$, l'équation (E) devient, en la divisant par $e^{A(u+v)}$,

$$\varphi_1 a_1 e^{A(u-v)} + \varphi_2 b_1 e^{-A(u-v)} = c_1 + c_2 e^{(B-A)(u+v)}.$$

Le premier membre ne dépend que de $u-v$, le second membre ne dépend que de $u+v$; donc

$$c_2 = 0$$
$$\varphi_1 a_1 e^{A(u-v)} + \varphi_2 b_1 e^{-A(u-v)} = c_1.$$

En supposant successivement $a_1 = b_1 = 0$; $a_1 = 0$, $b_1 \neq 0$; $b_1 = 0$, $a_1 \neq 0$; $a_1 b_1 \neq 0$, et en tenant compte de $a_2 = b_2 = 0$ et des (7), on obtient les solutions (E_0), (E_1), (E'_1), (E_2) du tableau donné plus haut.

En continuant de supposer les (6) et $A \neq B$, pour trouver des autres solutions de (E) on doit supposer que $U_1 V'_1 - U'_1 V_1 \neq 0$. Les équations (E) et (4) donnent alors

$$\varphi_1 = \frac{\psi V'_1 - 2\psi' V_1}{U_1 V'_1 - U'_1 V_1},\quad \varphi_2 = -\frac{\psi U'_1 - 2\psi' U_1}{U_1 V'_1 - U'_1 V_1}. \tag{8}$$

En y substituant les valeurs (7), on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{b_1 c_2\, e^{-A(u-v)} - b_2 c_1\, e^{-B(u-v)}}{a_2 b_1\, e^{(B-A)(u-v)} - a_1 b_2\, e^{(A-B)(u-v)}}, \\ \varphi_2 &= \frac{-a_1 c_2 e^{A(u-v)} + a_2 c_1 e^{B(u-v)}}{a_2 b_1 e^{(B-A)(u-v)} - a_1 b_2 e^{(A-B)(u-v)}}. \end{aligned} \tag{8_{bis}}$$

Les seconds membres des (8_{bis}) ne dépendant que de $u-v$, les équations (7) e (8_{bis}) donnent bien une solution de (E); c'est la solution (E_3) du tableau.

4. Dans ce qui précède nous avons supposé que les deux racines de $x^2 + ax + b = 0$ soient distinctes. Si cette équation a une racine double $x = 2A$, on déduit de (3) e (6)

$$\begin{gathered} U_1 = (a_1 u + a_2) e^{2Au}, \quad V_1 = (b_1 v + b_2) e^{2Av}, \\ \psi = [c_1 (u + v) + c_2] e^{A(u+v)}. \end{gathered} \tag{9}$$

Comme dans le cas précédent, nous commençons par calculer $U_1 V'_1 - U'_1 V_1$. On obtient

$$U_1 V'_1 - U'_1 V_1 = [a_1 b_1 (u - v) - a_1 b_2 + a_2 b_1] e^{2A(u+v)}.$$

On s'assure aisément qu'ici l'hypothèse $U_1 V'_1 - U'_1 V_1 = 0$ ne conduit a aucune solution nouvelle. En effet, on aurait alors

$$a_1 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

et donc ou 1° $b_1 = b_2 = 0$, ou bien 2° $a_1 = a_2 = 0$, ou enfin 3° $a_1 = b_1 = 0$. Si $b_1 = b_2 = 0$, l'équation (E) devient en la multipliant par $e^{-A(u+v)}$

$$\varphi_1 e^{A(u-v)} (a_1 u + a_2) = c_1 (u + v) + c_2$$

d'où $a_1 = 0$, ainsi que l'on retrouve les solutions (E_0) et (E'_1) déjà données. Pareillement si $a_1 = a_2 = 0$. Si $a_1 = b_1 = 0$, l'équation (E) devient

$$a_2 \varphi_1 e^{2Au} + b_2 \varphi_2 e^{2Av} = c_1 (u + v) e^{A(u+v)},$$

d'où $c_1 = 0$ et on retrouve la solution (E_2).

Il en résulte que, pour les solutions nouvelles de (E), $U_1 V'_1 - U'_1 V_1 \neq 0$, ainsi qu'on peut employer les (8). En y substituant les valeurs (9), on trouve

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= e^{-A(u-v)} \frac{b_1 c_1 (u - v) + b_1 c_2 - 2 b_2 c_1}{a_1 b_1 (u - v) - a_1 b_2 + a_2 b_1}, \\ \varphi_2 &= e^{A(u-v)} \frac{a_1 c_1 (u - v) - a_1 c_2 + 2 a_2 c_1}{a_1 b_1 (u - v) - a_1 b_2 + a_2 b_1}. \end{aligned} \tag{9_{bis}}$$

Les seconds membres ne dépendant que de $u - v$, les équations (9) et (9_{bis}) donnent une solution de (E); c'est la solution (E_4) du tableau.

Seconde manière de vérifier les équations (5).

5. Remarquons que si l'une des équations (6) est valable, l'autre l'est aussi; autrement la (5) donnerait $\varphi_1 \varphi_2 = 0$. Donc, si les équations (6) ne sont pas vérifiées, on obtient de (5)

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = -\frac{V''_1 + a V'_1 + b V_1}{U''_1 + a U'_1 + b U_1}. \tag{10}$$

Le premier membre est fonction de $u - v$ seulement; le second membre est le quotient d'une fonction de v par une fonction de u; on en conclut aisément que

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = c e^{\alpha (u-v)} * \tag{10_{bis}}$$

* Il est important d'observer que, dans la suite, nous faisons usage *seulement* de (10_{bis}).

L'équation (E) peut alors s'écrire, en la divisant par $e^{-\alpha v}\varphi_2$,

$$c e^{\alpha u} U_1 + e^{\alpha v} V_1 = \frac{\psi}{\varphi_2} e^{\alpha v}, \tag{11}$$

d'où on déduit tout de suite que

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(\frac{\psi}{\varphi_2} e^{\alpha v}\right) = 0$$

ou bien

$$(\psi'' + \alpha\psi')\frac{1}{\varphi_2} - \left[\left(\frac{1}{\varphi_2}\right)'' - \alpha\frac{1}{\varphi_2}\right]\psi = 0.$$

Si $\psi = 0$, on déduit aisément de (11) qu'on n'obtient qu'un cas particulier de la solution (E_2) déjà trouvée; donc on peut écrire

$$\frac{\psi'' + \alpha\psi'}{\psi} = \varphi_2\left[\left(\frac{1}{\varphi_2}\right)'' - \alpha\frac{1}{\varphi_2}\right] = -\beta,$$

β étant évidemment une constante, ainsi que

$$\begin{gathered} \psi'' + \alpha\psi' + \beta\psi = 0, \\ \left(\frac{1}{\varphi_2}\right)'' - \alpha\left(\frac{1}{\varphi_2}\right)' + \beta\frac{1}{\varphi_2} = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

6. En premier lieu, supposons que les deux racines $x = A$ et $x = B$ de l'équation $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ soient distinctes. Alors on déduit de (12)

$$\begin{gathered} \psi = c_1 e^{A(u+v)} + c_2 e^{B(u+v)}, \\ \frac{1}{\varphi_2} = b_1 e^{-A(u-v)} + b_2 e^{-B(u-v)}; \end{gathered} \tag{13}$$

de plus, $\alpha = -(A+B)$, ainsi que (10_{bis}) donne

$$\frac{1}{\varphi_1} = \frac{b_1}{c} e^{B(u-v)} + \frac{b_2}{c} e^{A(u-v)}. \tag{13$_{\text{bis}}$}$$

En substituant les valeurs (13) et (13_{bis}) dans l'équation (E), on trouve

$$\begin{gathered} c e^{-(A+B)u} U_1 + e^{-(A+B)v} V_1 = \\ = b_2 c_1 e^{(A-B)u} + c_2 b_1 e^{-(A-B)u} + b_1 c_1 e^{(A-B)v} + b_2 c_2 e^{-(A-B)v} \end{gathered}$$

ainsi que (h étant une constante)

$$\begin{gathered} U_1 = \frac{b_2 c_1}{c} e^{2Au} + \frac{b_1 c_2}{c} e^{2Bu} + h e^{(A+B)u} \\ V_1 = b_1 c_1 e^{2Av} + b_2 c_2 e^{2Bv} - hc e^{(A+B)v}. \end{gathered} \tag{13$_{\text{ter}}$}$$

Les équations (13), (13_{bis}) et (13_{ter}) donnent la solution (E_5) de notre tableau.

7. Il nous reste à supposer que l'équation $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ ait une racine double $x = A$. Les équations (12) donnent alors

$$\begin{gathered} \psi = [b_1(u+v) + b_2]\, e^{A(u+v)}, \\ \frac{1}{\varphi_2} = [a_1(u-v) + a_2]\, e^{-A(u-v)}; \end{gathered} \tag{14}$$

de plus $\alpha = -2A$ ainsi qu'on déduit de (10_{bis})

$$\frac{1}{\varphi_1} = \frac{1}{c}\left[a_1(u-v) + a_2\right] e^{A(u-v)}. \tag{14_{bis}}$$

En substituant les valeurs (14) et (14_{bis}) dans l'équation (E) on obtient

$$ce^{-2Au}U_1 + c^{-2Av}V_1 = a_1b_1(u^2 - v^2) + (a_1b_2 + a_2b_1)u + \\ + (a_2b_1 - a_1b_2)v + a_2b_2$$

d'où l'on déduit facilement

$$\begin{aligned} U_1 &= \left(\frac{a_1b_1}{c}u^2 + \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{c}u + \frac{a_2b_2}{2c} + h\right)e^{2Au}, \\ V_1 &= -\left[a_1b_1v^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)v - \frac{a_2b_2}{2} + ch\right]e^{2Av}. \end{aligned} \tag{14_{ter}}$$

Les équations (14), (14_{bis}) et (14_{ter}) donnent la solution (E_6) du tableau.

Démonstration que (E) *ne possède pas d'autres solutions.*

8. Il nous reste encore à montrer (v. p. 6) qu'on n'obtient aucune solution nouvelle de (E) en supposant que $\tau_0 = \tau_1 = \tau_2 = 0$. Or on déduit de (2)*

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 2\varphi_1\varphi_2(\varphi_1\varphi'_2 - \varphi_2\varphi'_1)(\varphi_2\varphi'''_1 - \varphi_1\varphi'''_2) + \\ &+ 3\varphi_1\varphi_2(\varphi_1\varphi''_2 - \varphi_2\varphi''_1)^2 - 6\varphi_1\varphi_2(\varphi_1\varphi'_2 - \varphi_2\varphi'_1)(\varphi'_1\varphi''_2 - \varphi'_2\varphi''_1) - \\ &- (\varphi_1^2\varphi'^2_2 - \varphi_2^2\varphi'^2_1)(\varphi_1\varphi''_2 - \varphi_2\varphi''_1) + 4\varphi'_1\varphi'_2(\varphi_1\varphi'_2 - \varphi_2\varphi'_1)^2, \\ \tau_2 &= 2\varphi_1^2\varphi_2^2(\varphi_1\varphi'''_2 - \varphi_2\varphi'''_1) - 3\varphi_1\varphi_2(\varphi_1\varphi'_2 - \varphi_2\varphi'_1) \times \\ &\times (\varphi_1\varphi''_2 + \varphi_2\varphi''_1) + 2\varphi_1\varphi_2(\varphi_1\varphi'_2 + \varphi_2\varphi'_1)(\varphi_2\varphi''_1 - \varphi_1\varphi''_2) + \\ &+ (3\varphi_1^2\varphi'^2_1 + 2\varphi_1\varphi_2\varphi'_1\varphi'_2 + 3\varphi_2^2\varphi'^2_1)(\varphi_1\varphi'_2 - \varphi_2\varphi'_1). \end{aligned}$$

En posant, pour abréger,

$$\frac{\varphi'_1}{\varphi_1} = f_1, \quad \frac{\varphi'_2}{\varphi_2} = f_2,$$

on a donc

$$\begin{aligned} \tau_1 : \varphi_1^2\varphi_2^3 &= (f_2 - f_1)\left[2(f''_1 - f''_2) + (f_1 + f_2)(f'_1 - f'_2) + 3(f'_1 - f'_2)^2\right], \\ \tau_2 : \varphi_1^3\varphi_2^3 &= -2(f''_1 - f''_2) - (f_1 + f_2)(f'_1 - f'_2), \\ [\tau_1 + (f_2 - f_1)\tau_2] : \varphi_1^3\varphi_2^3 &= 3(f'_1 - f'_2)^2. \end{aligned}$$

On voit que les équations $\tau_1 = \tau_2 = 0$ sont équivalentes à l'équation unique

$$f'_1 - f'_2 = 0. \tag{15}$$

Il suffit donc de prouver que l'hypothèse (15) ne conduit à aucune solution nouvelle. Or on déduit de (15)

$$\frac{\varphi'_1}{\varphi_1} - \frac{\varphi'_2}{\varphi_2} = \alpha,$$

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = ce^{\alpha(u-v)}. \tag{16}$$

---

* Nous n'avons pas besoin de τ_0.

Mais l'équation (16) est identique a (10_{bis}). Or nous avons déjà remarqué* que le raisonnement précédent fournit *toutes* les solutions de (E) pour lesquelles l'équations (10_{bis}) a lieu.

II. Les différents espèces de surfaces qui admettent ∞^1 déformations projectives en elles mêmes. Surfaces de l'espèce A.

1. Nous dirons qu'une surface non réglée S qui admet un groupe continu G à un paramètre de déformations projectives en elle même appartient à l'espèce A si les trajectoires du groupe G forment une famille des courbes asymptotiques de S. Il est facile de déterminer toutes ces surfaces. Supposons les coordonnées des points d'une surface S de l'espèce A exprimées en fonction de deux paramètres u et v, les courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ étant les asymptotiques; les trajectoires du groupe G soient les courbes $v = \text{const.}$ On voit facilement qu'on peut choisir le paramètre u de manière que les équations de G soient

$$\bar{u} = u + t, \quad \bar{v} = v.$$

Les formes différentielles $\varphi_2 = 2\beta\gamma\, du\, dv$, $\varphi_3 = \beta\gamma\,(\beta du^3 + \gamma dv^3)$ étant invariantes pour G, on voit que β et γ sont fonctions du paramètre v seul. En choisissant v aussi convenablement, on peut supposer

$$\beta = 1, \quad \gamma = \gamma(v). \tag{1}$$

Remarquons tout de suite que les paramètres u et v ne sont pas complètement déterminés, car on peut évidemment les remplacer par $\bar{u}$ et $\bar{v}$ où

$$\bar{u} = \alpha u + \beta, \; \bar{v} = \alpha^2 v + \gamma \tag{2}$$

sans changer la forme (1) de β et γ. Pour déterminer effectivement les surfaces cherchées, il faut calculer L et M d'après les équations

$$L_v = -2\beta\gamma_u - \gamma\beta_u, \; M_u = -2\gamma\beta_v - \beta\gamma_v,$$
$$\beta M_v + 2\beta_v M + \beta_{vvv} = \gamma L_u + 2\gamma_u L + \gamma_{uuu}.$$

En y substituant les valeurs (1) on obtient

$$L_v = 0, \quad M_u = -\gamma', \quad M_v = \gamma L_u. \tag{3}$$

2. *Il y a*** *trois types de surfaces de l'espèce A dépendant respectivement de* 2, 3, 2 *constantes arbitraires.* Pour démontrer ce résultat, nous devons résoudre les trois équations (3).

Les deux premières donnent

$$L = U, \quad M = -\gamma' u + V, \quad U = U(u), \quad V = V(v).$$

En substituant dans la troisième on obtient

$$-\gamma'' u + V' = \gamma U'.$$

---

* Note au bas de la page 8.

** dans le champ complexe.

En donnant ici à v une valeur constante on déduit*

$$U = au^2 + bu + c$$

ainsi que

$$-\gamma'' u + V' = \gamma(2au + b)$$

d'où

$$\gamma'' = -2a\gamma, \quad V' = b\gamma. \tag{4}$$

En premier lieu, supposons que $a = 0$. On aura

$$\gamma = ev + f, \quad V = \frac{eb}{2} v^2 + fbv + g,$$

$$L = bu + c, \quad M = -eu + \frac{eb}{2} v^2 + fbv + g.$$

En simplifiant moyennant les équations (2) on obtient le premier type**

$$\begin{gathered} \beta = 1, \quad \gamma = v, \\ L = 2au, \quad M = -u + av^2 + b. \end{gathered} \tag{5}$$

En second lieu supposons que dans les équations (4) $a \neq 0$. Alors, posant $2a = -A^2$,

$$\gamma = e_1 e^{Av} + e_2 e^{-Av}, \quad A \neq 0,$$

$$V = \frac{be_1}{A} e^{Av} - \frac{be_2}{A} e^{-Av} + f,$$

$$L = -\frac{A^2}{2} u^2 + bu + c,$$

$$M = -Au(e_1 e^{Av} - e_2 e^{-Av}) + V.$$

Si l'on fait usage d'une transformation (2) convenable, on peut supposer ou $e_1 = e_2 = 1$, $b = 0$, ou bien $A = e_1 = 1$, $e_2 = b = 0$. En changeant un peu les notations, on obtient les deux autres types des surfaces de l'espèce A:

$$\begin{gathered} \beta = 1, \quad \gamma = e^{Av} + e^{-Av}, \\ L = -\frac{A^2}{2} u^2 + a, \quad M = -Au(e^{Av} - e^{-Av}) + b, \end{gathered} \tag{6}$$

$$\beta = 1, \quad \gamma = e^v, \quad L = -\frac{u^2}{2} + a, \quad M = -ue^v + b. \tag{7}$$

3. La détermination des surfaces S pour lesquelles les trajectoires du groupe G ne sont pas des asymptotiques est beaucoup plus compliquée. Nous allons voir qu'elle se réduit partiellement à l'étude de l'équation (E) étudiée plus haut. Soient, ici encore, u et v les paramètres des asymptotiques de S, et

$$\xi(u, v)\frac{\partial}{\partial u} + \eta(u, v)\frac{\partial}{\partial v}$$

* $\gamma \neq 0$.

** Si $\gamma = \text{const.}$ on voit facilement que S admettrait ∞^2 déformations projectives en elle même.

le symbole de la transformation infinitésimale de G. Les équations différentielles $du=0$ et $dv=0$ des asymptotiques de S sont évidemment invariantes pour S. On en déduit aisément que $\xi_v=\eta_u=0$. De plus, $\xi\eta\neq 0$, car autrement les trajectoires de G seraient des asymptotiques. En choisissant convenablement les paramètres u et v on peut donc supposer $\xi=\eta=$ const. Les équations de G sont alors

$$\bar{u}=u+t, \quad \bar{v}=v+t.$$

Les formes $2\beta\gamma\,du\,dv$ et $\beta\gamma\,(\beta\,du^3+\gamma\,dv^3)$ étant invariantes pour G, on voit que

$$\beta=\beta\,(u-v), \quad \gamma=\gamma\,(u-v). \tag{8}$$

Il est important de remarquer que nous n'avons fixé les paramètres u et v qu'à certaines substitutions près qui sont

$$\bar{u}=\alpha u+\beta, \quad \bar{v}=\alpha v+\gamma \tag{9}$$

et

$$\bar{u}=\alpha v+\gamma, \quad \bar{v}=\alpha u+\beta. \tag{9$_{\text{bis}}$}$$

Pour déterminer effectivement les surfaces S cherchées il faut trouver L et M des conditions d'intégrabilité. En tenant compte de ce que β et γ sont fonctions de la seule variable $u-v$, les conditions d'intégrabilité peuvent s'écrire

$$\begin{gathered} L_v=-2\beta\gamma'-\gamma\beta', \quad M_u=2\gamma\beta'+\beta\gamma', \\ \beta M_v-2\beta' M-\beta'''=\gamma L_u+2\gamma' L+\gamma'''. \end{gathered} \tag{10}$$

4. Pour étudier le système (10), nous introduisons deux fonctions nouvelles F_1 et F_2 de $u-v$ que nous choisissons de façon que

$$F'_1=2\beta\gamma'+\gamma\beta', \quad F'_2=2\gamma\beta'+\beta\gamma'. \tag{11}$$

Les deux premières équations (10) donnent alors

$$L=F_1+U, \quad M=F_2+V, \tag{12}$$

$U\,(V)$ étant fonction de la seule variable $u\,(v)$. En substituant les valeurs (12) dans la dernière équation (10), celle-ci devient

$$\begin{aligned} &\beta V'-2\beta' V-\beta F'_2-2\beta' F_2-\beta'''= \\ &=\gamma U'+2\gamma' U+\gamma F'_1+2\gamma' F_1+\gamma'''. \end{aligned} \tag{13}$$

Ayant égard à ce que β, γ, F_1 et F_2 ne dépendent que de $u-v$, on déduit de (13), en y opérant par $\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}$,

$$\beta V''-2\beta' V=\gamma U''+2\gamma' U$$

ce qui peut s'écrire

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}\right)(\gamma U'+\beta V')=0$$

ou bien

$$\gamma U'+\beta V'=\psi, \tag{14}$$

ou ψ est fonction de $u+v$. Or l'équation (14) n'est rien autre que l'équation (E) déjà étudiée si l'on y pose

$$\varphi_1 = \gamma, \quad \varphi_2 = \beta, \quad U_1 = U', \quad V_1 = V'. \tag{15}$$

Il en résulte que, pour résoudre le système (10) il faut: 1° remplacer β, γ, U et V par les valeurs déterminées de (15) en employant une solution (E_i) de (E); 2° donner aux constantes (ou fonctions de $u-v$) qui restent encore arbitraires des valeurs telles que l'équation (13) soit vérifiée. De la manière dont nous avons déduit l'équation (14) il résulte que l'équation qu'on obtient de (13) en procédant comme nous avons dit ne peut contenir que la seule variable $u-v$.

Il faut donc examiner les diverses solutions de (E). Nous pouvons omettre la solution (E_0) qui donnerait $U' = V' = 0$ ainsi qu'on voit des équations (5) que L et M seraient fonctions de la seule variable $u-v$ d'où on peut conclure aisément que les transformations de G seraient des *homographies* de S en elle même; or le détermination de toutes les surfaces qui admettent ∞^1 homographies en elles mêmes est une question banale. Aussi, nous pouvons omettre la solution (E'_1) parce qu'elle nous donne évidemment les mêmes surfaces comme (E_1).

Nous dirons que S *appartient à l'espèce* B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 resp. si l'on emploie la solution (E_1), (E_2), (E_3), (E_4), (E_5), (E_6) de (E). Le tableau de toutes les surfaces se trouve à la fin du Mémoire.

III. Les espèces B_1 et B_2.

1. *Il y a deux types de surfaces de l'espèce B_1, dépendant respectivement de 5 et 4 constantes arbitraires.*

Supposons en premier lieu que $A \neq 0$ dans la solution (E_1) de (E). Les équations II (15) donnent

$$\beta = a e^{A(u-v)}, \quad U = d_1, \quad V = b e^{2Av} + d_2.$$

Faisant usage des équations II (9) on peut supposer $a = A = 1$, $b = 1$ *, ou bien

$$\beta = e^{u-v}, \quad U = d_1, \quad V = e^{2v} + d_2. \tag{1}$$

Des équations II (11) on déduit maintenant

$$F'_1 = e^{u-v}(2\gamma' + \gamma), \quad F'_2 = e^{u-v}(\gamma' + 2\gamma)$$

ainsi qu'on peut prendre

$$F_1 + F_2 = 3 e^{u-v} \gamma;$$

* Si $b = 0$, les transformations de G seraient des homographies.

En éliminant γ on trouve encore

$$F'_1 - 2F'_2 + F_1 + F_2 = 0.$$

On en déduit tout de suite qu'on peut exprimer F_1, F_2 et γ moyennant une seule fonction F de $u - v$ et précisément

$$\gamma = e^{v-u} F', \; F_1 = 2F' - F, \; F_2 = F' + F. \tag{2}$$

Enfin, substituant les valeurs (1) et (2) dans l'équation II (13) on voit que F doit satisfaire à l'équation différentielle du quatrième ordre*

$$\begin{aligned} e^{2(u-v)}(F''' + 3F'' + 2F + 1) + 2(F'' - F')(2F' - F + d_1) + \\ + F'(2F''' - F'') + F'''' - 3F''' + 3F'' - F' = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

En définitive, F étant une solution de (3), on a

$$\begin{gathered} \beta = e^{u-v}, \; \gamma = e^{v-u} F', \\ L = 2F' - F + d_1, \; M = F' + F + e^{2v}. \end{gathered}$$

2. Dans ce qui précède, nous avons supposé que $A \neq 0$ dans (E_1). Si $A = 0$, on obtient pareillement

$$\beta = a, \; U = d_1, \; V = bv + d_2, \; ab \neq 0.$$

Des équations II (11) on déduit qu'on peut prendre

$$F_1 = 2a\gamma, \; F_2 = a\gamma.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation II (13) on obtient

$$\gamma''' + 6a\gamma\gamma' + (2d_1 + a^2)\,\gamma' - ab = 0$$

d'où

$$\gamma'' + 3a\gamma^2 + (2d_1 + a^2)\,\gamma - ab\,(u - v) = c.$$

En employant la transformation II (9) on voit qu'on peut supposer $a = 1$, $d_2 = 0$, $c = 0$. Alors γ satisfait à l'équation differentielle du second ordre

$$\gamma'' + 3\gamma^2 + (1 + 2d_1)\,\gamma = b\,(u - v), \; b \neq 0 \tag{4}$$

et

$$\beta = 1, \; L = 2\gamma + d_1, \; M = \gamma + bv. \tag{5}$$

3. *Il y a trois types de surfaces de l'espèce B_2 dépendant respectivement de* 6, 5, 2 *constantes arbitraires.*

Supposons en premier lieu $A \neq 0$ dans la solution (E_2) de (E). Les équations II (15) donnent**

---

* Nous avons posé $d_2 = 0$. On reconnait aisément que cela ne restreint pas la généralité.

** Nous avons remplacé c et b respectivement par $2Ac$ et $2b$. Si $a = 0$ on retomberait à (E_1). Si $c = 0$, les transformations de G seraient des homographies.

$$\beta = a\gamma e^{2A(u-v)} + 2b e^{A(u-v)},$$
$$U = -ace^{2Au} + d_1, \quad V = ce^{2Av} + d_2, \; ac \neq 0.$$

En employant les II (9) on voit qu'on peut se borner à supposer $a = A = 1$, $c = 1$, ou bien

$$\begin{aligned} \beta &= e^{2(u-v)}\gamma + 2b e^{u-v}, \\ U &= -e^{2u} + d_1, \quad V = e^{2v} + d_2. \end{aligned} \tag{6}$$

L'équation (6) montre qu'on peut introduire une fonction F de $u-v$ telle que

$$\beta = e^{u-v}(\sqrt{F'} + b), \quad \gamma = e^{v-u}(\sqrt{F'} - b).$$

En substituant ces valeurs dans les équations II (11) on trouve qu'on peut prendre

$$\begin{aligned} F_1 &= \tfrac{3}{2}F' + b\sqrt{F'} - F + b^2(u-v), \\ F_2 &= \tfrac{3}{2}F' - b\sqrt{F'} + F - b^2(u-v). \end{aligned}$$

Enfin substituant toutes les valeurs trouvées dans l'équation II (13) on obtient que F vérifie l'équation différentielle du quatrième ordre*

$$\begin{aligned} &(e^{u-v} + e^{v-u})\left[\tfrac{1}{2}F'''' - \tfrac{3}{4}F'^{-1}F''F''' + \tfrac{3}{8}F'^{-2}F''^{3} + \right. \\ &\quad + 3F'F'' + 4F'^{2} + 2bF'^{\frac{3}{2}} - \frac{b^2}{2}F'' + 2(F - b^2(u-v))F' + \\ &+ b(1-b^2)F'^{\frac{1}{2}} + d_1(F'' + 2bF'^{\frac{1}{2}})\Big] + (e^{u-v} - e^{v-u})\left[\tfrac{3}{2}F''' - \tfrac{3}{4}F'^{-1}F''^{2} + \right. \\ &+ (F - b^2(u-v) + \tfrac{3}{2})F'' + (1 - 3b^2 + 2d_1)F' + 2bFF'^{\frac{1}{2}} - 2b^3(u-v)F'^{\frac{1}{2}}\Big] = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

F étant une solution quelconque de (7), on a

$$\begin{aligned} \beta &= e^{u-v}(\sqrt{F'} + b), \quad \gamma = e^{v-u}(\sqrt{F'} - b), \\ L &= \tfrac{3}{2}F' + b\sqrt{F'} - F + b^2(u-v) - e^{2u} + d_1, \\ M &= \tfrac{3}{2}F' - b\sqrt{F'} + F - b^2(u-v) + e^{2v} + d_1. \end{aligned} \tag{8}$$

4. Supposons maintenant que $A = 0$ dans la solution (E_2) de (E). Les équations II (15) donnent

$$\beta = a\gamma + b, \quad U = -acu + d_1, \quad V = cv + d_2, \quad ac \neq 0^{**}$$

Des équations II (11) on déduit

$$F'_1 = 3a\gamma\gamma' + 2b\gamma', \quad F'_2 = 3a\gamma\gamma' + b\gamma',$$

ainsi qu'on peut prendre

$$F_1 = \tfrac{3}{2}a\gamma^2 + 2b\gamma, \quad F_2 = \tfrac{3}{2}a\gamma^2 + b\gamma.$$

---

* Nous posons $d_1 = d_2$ ce qui ne restreint pas la généralité.

** Si $a = 0$, on retombe à (E_1). Si $c = 0$, les transformations de G sont des homographies.

En substituant ces valeurs dans l'équation II (13) on obtient que γ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$\begin{aligned}(1+a)(\gamma'''+6a\gamma^2\gamma'+6b\gamma\gamma')-2ac(u-v)\gamma'+\\+(2ad_2+2d_1+b^2)\gamma'-2ac\gamma-bc=0.\end{aligned} \tag{9}$$

Les équations II (9) montrent qu'il suffit de supposer $d_2=0, d_1=-\frac{b^2}{2}, c=1.$

Mais la forme de l'équation (9) montre que le cas $a=-1$ doit être traité séparément*. Si $a=-1$ les équations précédentes deviennent (en posant $d_2=0,\ d_1=-\frac{b^2}{2},\ c=1$)

$$\begin{gathered}\beta=-\gamma+b,\ U=u-\frac{b^2}{2},\ V=v,\\ F_1=-\tfrac{3}{2}\gamma^2+2b\gamma,\ F_2=-\tfrac{3}{2}\gamma^2+b\gamma,\\ 2(u-v)\gamma'+2\gamma-b=0.\end{gathered}$$

On en déduit

$$(u-v)(2\gamma-b)=2h=\text{const.},$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\beta&=-\frac{h}{u-v}+\frac{b}{2},\ \gamma=\frac{h}{u-v}+\frac{b}{2},\\ L&=u-\frac{3}{2}\frac{h^2}{(u-v)^2}+\frac{1}{2}\frac{bh}{u-v}+\frac{1}{8}b^2,\\ M&=v-\frac{3}{2}\frac{h^2}{(u-v)^2}-\frac{1}{2}\frac{bh}{u-v}+\frac{1}{8}b^2.\end{aligned} \tag{10}$$

On doit supposer $bh \neq 0$ car autrement la surface admettrait ∞^2 déformations projectives en elle même.

IV. L'espèce B_3.

1. *Il y a quinze type distincts de surfaces de l'espèce B_3. Six de ces types dépendent de deux constantes arbitraires chacun, les autres dépendent de trois constantes arbitraires chacun.* Les calculs à effectuer sont fort longs.

Les équations II (15) donnent

$$\begin{aligned}\beta&=\frac{-a_1c_2e^{A(u-v)}+a_2c_1e^{B(u-v)}}{a_2b_1e^{-(A-B)(u-v)}-a_1b_2e^{(A-B)(u-v)}},\\ \gamma&=\frac{b_1c_2e^{-A(u-v)}-b_2c_1e^{-B(u-v)}}{a_2b_1e^{-(A-B)(u-v)}-a_1b_2e^{(A-B)(u-v)}},\end{aligned} \tag{1}$$

* Pour mettre en évidence cette circonstance nous remplaçons $1+a$ par $\frac{1}{a}$ dans le tableau à la fin du Mémoire.

$$U = \frac{a_1}{2A} e^{2Au} + \frac{a_2}{2B} e^{2Bu} + d_1,$$
$$V = \frac{b_1}{2A} e^{2Av} + \frac{b_2}{2B} e^{2Bv} + d_2, \tag{2}$$

en convenant de remplacer $\frac{1}{2B} e^{2Bu}$ *et* $\frac{1}{2B} e^{2Bv}$ *respectivement par* u *et* v *si* $B=0$ *et pareillement si* $A=0$. Les équations II (11) peuvent s'écrire

$$F_1 + F_2 = 3\beta\gamma, \quad F'_1 - F'_2 = \beta\gamma' - \gamma\beta'.$$

Pour abréger, posons

$$z = e^{(A-B)(u-v)}. \tag{3}$$

Des équations (1) on déduit aisément

$$\beta\gamma' - \gamma\beta' = \frac{-(A+B)c_1c_2(a_1b_2z + a_2b_1z^{-1}) + 2Aa_1b_1c_2^2 + 2Ba_2b_2c_1^2}{(a_1b_2z - a_2b_1z^{-1})^2},$$

$$F_1 - F_2 =$$
$$= \frac{1}{A-B}\int \frac{-(A+B)c_1c_2(a_1b_2z^2 + a_2b_1) + 2(Aa_1b_1c_2^2 + Ba_2b_2c_1^2)}{(a_1b_2z^2 - a_2b_1)^2}\, dz.$$

Remarquons qu'*on peut supposer* $a_1b_2 \neq 0$. En effet, on ne peut avoir $a_1b_2 = a_2b_1 = 0$; d'autre part, le cas $a_1b_2 = 0$, $a_2b_1 \neq 0$ se réduit à $a_1b_2 \neq 0$ en échangeant les lettres A et B, ce qui est évidemment permis. Soit donc $a_1b_2 \neq 0$. Alors on déduit facilement de l'équation précédente

$$F_1 - F_2 = \frac{1}{A-B} \frac{(A+B)c_1c_2z - \left(A\frac{b_1}{b_2}c_2^2 + B\frac{a_2}{a_1}c_1^2\right)}{a_1b_2z^2 - a_2b_1},$$

tandisque

$$F_1 + F_2 = 3\beta\gamma = 3\frac{c_1c_2(a_1b_2z^2 + a_2b_1) - z(a_1b_1c_2^2 + a_2b_2c_1^2)}{(a_1b_2z^2 - a_2b_1)^2}z.$$

Donc

$$\begin{aligned} F_1 = {} & \frac{1}{2(A-B)}(a_1b_2z^2 - a_2b_1)^{-2}[2(2A-B)a_1b_2c_1c_2z^3 + \\ & + \{(-4A+3B)a_1b_1c_2^2 + (-3A+2B)a_2b_2c_1^2\}z^2 + \\ & + 2(A-2B)a_2b_1c_1c_2z + \frac{a_2b_1}{a_1b_2}(Aa_1b_1c_2^2 + Ba_2b_2c_1^2], \\ F_2 = {} & \frac{1}{2(A-B)}(a_1b_2z^2 - a_2b_1)^{-2}[2(A-2B)a_1b_2c_1c_2z^3 + \\ & + \{(-2A+3B)a_1b_1c_2^2 + (-3A+4B)a_2b_2c_1^2\}z^2 + \\ & + 2(2A-B)a_2b_1c_1c_2z - \frac{a_2b_1}{a_1b_2}(Aa_1b_1c_2^2 + Ba_2b_2c_1^2)]. \end{aligned} \tag{4}$$

Il nous reste a substituer les valeurs (1), (2) et (4) dans l'équation II (13); un calcul élémentaire mais assez long donne*

* Nous avons multiplié l'équation citée par $(A-B)e^{B(u-v)}(a_1b_2z^2 - a_2b_1)^4$.

$$
\begin{aligned}
&\eta + z^{\frac{A+B}{A-B}}\Big\{-B(A-B)(B^2+2d_2)\,a_1^4 b_2^3 c_2 z^7 + \\
&+ a_1^3 b_2^2 c_1 (A-2B)\,[c_2^2(A-3B) - a_2 b_2 (A-B)\,[(A-2B)^2+2d_2]]\,z^6 + \\
&+ a_1^2 b_2 c_2\,[(a_1 b_1 c_2^2 + 3a_2 b_2 c_1^2)(2A-3B)(-A+2B) + \\
&+ a_1 a_2 b_1 b_2 (A-B)(8A^3 - 36A^2B + 54AB^2 - 23B^3 + 2d_2(2A+B))]\,z^5 + \\
&+ a_1 a_2 b_2 c_1\,[a_1 b_1 c_2^2 (17A^2 - 44AB + 24B^2) + a_2 b_2 c_1^2 (2A-3B)(3A-4B) + \\
&+ a_1 a_2 b_1 b_2 (A-B)(-23A^3 + 84A^2B - 96AB^2 + 32B^3 + 2d_2(A-4B))]\,z^4 + \\
&+ a_1 a_2 b_1 c_2\,[-2(a_1 b_1 c_2^2 + 3a_2 b_2 c_1^2)(2A-B)(2A-3B) + \\
&+ a_1 a_2 b_1 b_2 (A-B)(32A^3 - 96A^2B + 84AB^2 - 23B^3 + 2d_2(-4A+B))]\,z^3 + \\
&+ a_2^2 b_1 c_1\,[a_1 b_1 c_2^2 (17A^2 - 23AB + 6B^2) + 2a_2 b_2 c_1^2 A(3A-4B) + \\
&+ a_1 a_2 b_1 b_2 (A-B)(-23A^3 + 54A^2B - 36AB^2 + 8B^3) + 2d_2(A+2B))]\,z^2 + \\
&+ \frac{a_2^2 b_1^2 c_2}{b_2}(-2A+B)\,[(a_1 b_1 c_2^2 + 3a_2 b_2 c_1^2)A - a_1 a_2 b_1 b_2 (A-B)((2A-B)^2+2d_2)]\,z + \\
&+ \frac{a_2^3 b_1^2 c_1}{a_1 b_2} A\,[a_1 b_1 c_2^2 A + a_2 b_2 c_1^2 B - a_1 a_2 b_1 b_2 (A-B)(A^2+2d_2)]\Big\} = \\
&= -A(A-B)(A^2+2d_1)\,a_1^3 b_2^4 c_1 z^7 + \\
&+ a_1^2 b_2^3 c_2 (2A-B)\,[-c_1^2(3A-B) + a_1 b_1 (A-B)((2A-B)^2+2d_1)]\,z^6 + \\
&+ a_1 b_2^2 c_1\,[(3a_1 b_1 c_2^2 + a_2 b_2 c_1^2)(3A-2B)(2A-B) - \\
&- a_1 a_2 b_1 b_2 (A-B)(23A^3 - 54A^2B + 36AB^2 - 8B^3 - 2d_1(A+2B))]\,z^5 + \\
&+ a_1 b_1 b_2 c_2\,[-a_1 b_1 c_2^2 (4A-3B)(3A-2B) - a_2 b_2 c_1^2 (24A^2 - 44AB + 17B^2) + \\
&+ a_1 a_2 b_1 b_2 (A-B)(32A^3 - 96A^2B + 84AB^2 - 23B^3 - 2d_1(4A-B))]\,z^4 + \\
&+ a_2 b_1 b_2 c_1\,[2(3a_1 b_1 c_2^2 + a_2 b_2 c_1^2)(A-2B)(3A-2B) - \\
&- a_1 a_2 b_1 b_2 (A-B)(23A^3 - 84A^2B + 96AB^2 - 32B^3 - 2d_1(A-4B))]\,z^3 + \\
&+ a_2 b_1^2 c_2\,[2a_1 b_1 c_2^2 B(4A-3B) - a_2 b_2 c_1^2 (6A^2 - 23AB + 17B^2) + \\
&+ a_1 a_2 b_1 b_2 (A-B)(8A^3 - 36A^2B + 54AB^2 - 23B^3 + 2d_1(2A+B))]\,z^2 + \\
&+ \frac{a_2^2 b_1^2 c_1}{a_1}(-A+2B)\,[(3a_1 b_1 c_2^2 + a_2 b_2 c_1^2)B + a_1 a_2 b_1 b_2 (A-B)((-A+2B)^2+2d_1)]\,z + \\
&+ \frac{a_2^2 b_1^3 c_2}{a_1 b_2} B\,[-a_1 b_1 c_2^2 A - a_2 b_2 c_1^2 B - a_1 a_2 b_1 b_2 (A-B)(B^2+2d_1)].
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Dans cette équation, $\eta = 0$ si $AB \neq 0$; si $B=0$, $A \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\eta = A(a_1 b_2 z^2 - a_2 b_1)^2\,[&a_1^2 b_2^2 c_2 z^4 - 2a_1 a_2 b_2^2 c_1 z^3 + 2a_2^2 b_1 b_2 c_1 z - \\
&- a_2^2 b_1^2 c_2 + 2a_2 b_2 A(u-v)\,z\,(a_1 b_2 c_1 z^2 - 2a_1 b_1 c_2 z + a_2 b_1 c_1)];
\end{aligned}
$$

si $A=0$, $B \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
\eta = Bz^{-1}(a_1 b_2 z^2 - a_2 b_1)^2\,[&a_1^2 b_2^2 c_1 z^4 - 2a_1^2 b_1 b_2 c_2 z^3 + 2a_1 a_2 b_1^2 c_2 z - \\
&- a_2^2 b_1^2 c_1 - 2a_1 b_1 B(u-v)\,z\,(a_1 b_2 c_2 z^2 - 2a_2 b_2 c_1 z + a_2 b_1 c_2)].
\end{aligned}
$$

Il est facile de voir que l'hypothèse $AB=0$ ne donne aucune solution de notre problème. Soit p. ex. $B=0$. Le coefficient de $u-v$ dans expression η doit évidemment s'évanouir, donc* ou $c_1 = b_1 c_2 = 0$, ou bien $a_2 = 0$. Mais l'hypohtèse $c_1 = b_1 c_2 = 0$ est inadmissible, car alors $\gamma = 0$. Et si $a_2 = 0$, $\eta = a_1^4 b_2^4 c_2 z^8 \neq 0$ (car si $a_2 = c_2 = 0$, $\beta = 0$);

---

* On ne doit pas oublier que nous supposons toujours $a_1 b_2 0 \neq$ (v. p. 18).

d'autre part le coefficient de z^8 dans le reste de l'équation (5) est zéro. Pareillement on voit qu'on ne peut pas avoir $A = 0$.

2. Au contraire, l'hypothèse $AB \neq 0$ (et donc $\eta = 0$) conduit à plusieurs solutions. Pour abréger, écrivons l'équation (5) comme il suit

$$\begin{aligned} z^{\frac{A+B}{A-B}}[\psi_7 z^7 + \psi_6 z^6 + \dots + \psi_1 z + \psi_0] = \\ = \chi_7 z^7 + \chi_6 z^6 + \dots + \chi_1 z + \chi_0. \end{aligned} \tag{5_{bis}}$$

Il s'agit de trouver des relations entre a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, A, B en vertu desquelles l'équation (5) soit vérifiée identiquement en z.

Nous supposons d'ailleurs $a_1 b_2 AB(A-B) \neq 0$ et nous excluons encore les solutions pour lesquelles $c_1 = c_2 = 0$, ou $a_2 = c_2 = 0$ ou enfin $b_1 = c_1 = 0$ parce que nous devons avoir $\beta\gamma \neq 0$. Remarquons aussi que si nous connaîtrons un choix de constantes a_1, $b_2 \dots$ pour lequel l'équation (5) est vérifiée nous en pouvons déduire un autre (qui peut d'ailleurs coïncider avec le primitif) moyennant la substitution

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & b_1, & b_2, & c_1, & c_2, & A, & B, & d_1, & d_2 \\ -b_2, & -b_1, & -a_2, & -a_1, & -c_2, & -c_1, & -B, & -A, & d_2, & d_1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Or deux telles solutions ne diffèrent pas essentiellement et, lorsqu'elles sont distinctes, *nous n'en écrirons qu'une seule;* en effet, la substitution (6) équivaut à l'échange de u et v.

3. L'équation (5) est vérifiée en particulier si

$$\psi_7 = \psi_6 = \dots = \psi_0 = \chi_7 = \chi_6 = \dots = \chi_0 = 0. \tag{7}$$

Commençons par supposer qu'il en soit ainsi. Je dis qu'il y a deux manières distinctes de satisfaire à ces équations:

$$\begin{aligned} c_2 = 0,\ c_1^2 = 4a_1 b_1 (A-B)^2, \\ 2d_1 = -A^2,\ 2d_2 = -(A-2B)^2; \end{aligned} \tag{α_1}$$

$$\begin{aligned} c_1^2 = a_1 b_1 (A-B)^2,\ c_2^2 = a_2 b_2 (A-B)^2, \\ 2d_1 = -A^2,\ 2d_2 = -B^2. \end{aligned} \tag{α_2}$$

Soit l'abord $c_2 = 0$ et donc $a_2 c_1 \neq 0$. L'équation $\chi_7 = 0$ donne $2d_1 = -A^2$; l'équation $\chi_5 = 0$ donne ensuite

$$(3A-2B)(2A-B)[c_1^2 - 4a_1 b_1 (A-B)^2] = 0.$$

Or nous examinerons plus tard les solutions pour lesquelles $3A - 2B = 0$ ou $2A - B = 0$; nous pouvons donc supposer que

$$c_1^2 = 4a_1 b_1 (A-B)^2.$$

Enfin, l'équation $\psi_6 = 0$ donne

$$(A-2B)[2d_2 + (A-2B)^2] = 0$$

d'où $2d_2 = -(A-2B)^2$, car le cas $A - 2B = 0$ sera traité plus tard. Je laisse au lecteur le soin que les autres équations (7) sont aussi des conséquences de (α_1). Le cas $c_1 = 0$ se réduisant au précédent moyennant

(6), nous allons supposer $c_1 c_2 \neq 0$. Les équations $\psi_7 = 0$ et $\chi_7 = 0$ donnent

$$2\,d_1 = -A^2, \ 2\,d_2 = -B^2.$$

Les équations $\psi_6 = 0$ et $\chi_6 = 0$ donnent ensuite

$$(A - 2\,B)\,(A - 3\,B)\,[c_2^2 - a_2 b_2\,(A - B)^2] = 0,$$
$$(2\,A - B)\,(3\,A - B)\,[c_1^2 - a_1 b_1\,(A - B)^2] = 0.$$

En excluant provisoirement les équations $A - 2\,B = 0$, $2\,A - B = 0$, $A - 3\,B = 0$, $3\,A - B = 0$, nous arrivons bien aux équations (7_2). Le lecteur vérifiera que toutes les équations (7) sont des conséquences des (α_2).

4. Si l'équation (5) est vérifiée identiquement de façon que les équations (7) ne soient pas toutes satisfaites, alors $\dfrac{A+B}{A-B}$ ne peut avoir qu'une des valeurs

$$0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \pm 4, \ \pm 5, \ \pm 6, \ \pm 7.$$

Or les valeurs ± 1 sont à rejeter car on aurait alors $AB = 0$; d'autre part, on peut supposer $\dfrac{A+B}{A-B} \geqq 0$, car, dans le cas contraire, il suffit d'employer la substitution (6). Nous devons donc examiner successivement les cas où les valeurs de $\dfrac{A+B}{A-B}$ sont 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Commençons par l'hypothèse $\dfrac{A+B}{A-B} = 0$ ou bien $B = -A$. Alors, nous devons évidemment vérifier les équations

$$\psi_7 = \chi_7, \ \psi_6 = \chi_6 \ldots, \ \psi_0 = \chi_0. \tag{8}$$

Voici les cas nouveaux auxquels nous sommes ainsi conduits.

$$\begin{aligned} &B = -A, \ c_1^2 = 4\,a_1 b_1 A^2, \ c_2^2 = 4\,a_2 b_2 A^2, \\ &2\,d_1 = -A^2 + h a_1 c_2, \ 2\,d_2 = -A^2 - h b_2 c_1. \end{aligned} \tag{β_1}$$

$$B = -A, \ b_1 = \mu a_1, \ a_2 = \mu\,b_2, \ c_1 = \nu\,a_1, \ c_2 = -\nu\,b_2, \ d_1 = d_2, \ \nu \neq 0; \tag{β_2}$$

$$\begin{aligned} &B = -A, \ a_2 = \frac{(a_1 c_2 + c_1 b_2)^2}{16\,A^2 a_1^2 b_2}, \ b_1 = \frac{(a_1 c_2 + c_1 b_2)^2}{16\,A^2 a_1 b_2^2}, \\ &2\,d_1 = -A^2 + 8\,a_1 c_2 \frac{b_2 c_1 - a_1 c_2}{(a_1 c_2 + b_2 c_1)^2}\,A^2, \\ &2\,d_2 = -A^2 - 8\,b_2 c_1 \frac{b_2 c_1 - a_1 c_2}{(a_1 c_2 + b_2 c_1)^2}\,A^2. \end{aligned} \tag{β_3}$$

Écrivons d'abord l'équation $\psi_7 = \chi_7$

$$(A^2 + 2\,d_2)\,a_1 c_2 = -(A^2 + 2\,d_1)\,b_2 c_1. \tag{9}$$

Supposons d'abord $c_2 = 0$ ainsi que $a_2 c_1 \neq 0$. L'équation (9) donne

$$c_2 = 0, \ 2\,d_1 = -A^2.$$

L'équation $\psi_6 = \chi_6$ donne ensuite $2\,d_2 = -9\,A^2$. Finalement, l'équation $\psi_5 = \chi_5$ donne $c_1^2 = 16\,a_1 b_1 A^2$. Or ces équations sont déjà un cas particulier de (α_1). Nous pouvons donc supposer $c_2 \neq 0$ et, en vertu de (6), aussi $c_1 \neq 0$. L'équation (9) donne alors

$$\begin{aligned} 2\,d_1 &= -A^2 + h\,a_1 c_2, \\ 2\,d_2 &= -A^2 - h\,b_2 c_1. \end{aligned} \tag{9_{bis}}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation $\psi_0 = \chi_0$ on obtient

$$\begin{aligned} & a_2^3 b_1^2 c_1 (a_1 b_1 c_2^2 - a_2 b_2 c_1^2 + 2\,h a_1 a_2 b_1 b_2^2 c_1) = \\ & = a_2^2 b_1^3 c_2 (a_1 b_1 c_2^2 - a_2 b_2 c_1^2 + 2\,h a_1^2 a_2 b_1 b_2 c_2) \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$a_2^2 b_1^2 (a_1 b_1 c_2^2 - a_2 b_2 c_1^2)(a_2 c_1 - b_1 c_2 - 2\,h a_1 a_2 b_1 b_2) = 0. \tag{10}$$

Soit d'abord $b_1 = 0$. Alors l'équation $\psi_4 = \chi_4$ montre tout de suite que $a_2 = 0$ *. Soit donc $a_2 = b_1 = 0$. L'équation $\psi_6 = \chi_6$ donne

$$a_1 c_2 + b_2 c_1 = 0.$$

Les autres équations (8) sont identiquement vérifiées. On arrive à un cas particulier (celui où $\mu = 0$) de (β_2).

Supposons donc $a_2 b_1 \neq 0$. L'équation (10) montre que deux cas sont possibles. Soit d'abord

$$a_1 b_1 c_2^2 - a_2 b_2 c_1^2 = 0. \tag{10_{bis}}$$

L'équation $\psi_3 = \chi_3$ donne

$$\begin{aligned} & a_1 c_2 (-3\,a_2 b_2 c_1^2 - a_1 b_1 c_2^2 + 16\,A^2 a_1 a_2 b_1 b_2) = \\ & = c_1 b_2 (3\,a_1 b_1 c_2^2 + a_2 b_2 c_1^2 - 16\,A^2 a_1 a_2 b_1 b_2). \end{aligned}$$

En vertu de (10_{bis}), cela peut s'écrire

$$a_1 c_2 (-4\,a_2 b_2 c_1^2 + 16\,A^2 a_1 a_2 b_1 b_2) = c_1 b_2 (4\,a_2 b_2 c_1^2 - 16\,A^2 a_1 a_2 b_1 b_2)$$

d'où

$$(c_1^2 - 4\,a_1 b_1 A^2)\ (a_1 c_2 + b_2 c_1) = 0. \tag{10_{ter}}$$

Soit d'abord

$$c_1^2 - 4\,a_1 b_1 A^2 = 0;$$

l'équation (10_{bis}) donne

$$c_2^2 - 4\,a_2 b_2 A^2 = 0.$$

Nous arrivons à la solution (β_1). Le lecteur vérifiera que toutes les équations (8) sont satisfaites. L'équation (10_{ter}) est satisfaite aussi quand

$$a_1 c_2 + b_2 c_1 = 0$$

d'où

$$c_1 = \nu a_1,\ \ c_2 = -\nu b_2.$$

L'équation (10_{bis}) donne alors $a_1 a_2 = b_1 b_2$ et l'équation (9_{bis}) donne $d_1 = d_2$. Nous arrivons à (β_2). Le lecteur vérifiera que c'est effectivement une solution de (8).

---

* Pareillement on voit que si $a_2 = 0$, on a aussi $b_1 = 0$.

Il reste à examiner le cas où l'équation (10) se réduit à

$$a_2 c_1 - b_1 c_2 - 2h a_1 a_2 b_1 b_2 = 0. \tag{11}$$

L'équation $\psi_4 = \chi_4$ donne en employant (9_{bis})

$$a_2 c_1 (17 a_1 b_1 c_2^2 + 7 a_2 b_2 c_1^2 - 96 a_1 a_2 b_1 b_2 A^2 - 2h a_1 a_2 b_1 b_2 \,.\, b_2 c_1) +$$
$$+ b_1 c_2 (7 a_1 b_1 c_2^2 + 17 a_2 b_2 c_1^2 - 96 a_1 a_2 b_1 b_2 A^2 - 2h a_1 a_2 b_1 b_2 \,.\, a_1 c_2).$$

En éliminant h moyennant (11) on obtient

$$\begin{aligned} a_2 c_1 (3 a_1 b_1 c_2^2 + a_2 b_2 c_1^2 - 16 a_1 a_2 b_1 b_2 A^2) + \\ + b_1 c_2 (a_1 b_1 c_2^2 + 3 a_2 b_2 c_1^2 - 16 a_1 a_2 b_1 b_2 A^2) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Pareillement on déduit de l'équation $\psi_3 = \chi_3$

$$\begin{aligned} b_2 c_1 (3 a_1 b_1 c_2^2 + a_2 b_2 c_1^2 - 16 a_1 a_2 b_1 b_2 A^2) + \\ + a_1 c_2 (a_1 b_1 c_2^2 + 3 a_2 b_2 c_1^2 - 16 a_1 a_2 b_1 b_2 A^2) = 0. \end{aligned} \tag{12_{bis}}$$

Les équations (12) et (12_{bis}) sont vérifiées si l'on a

$$\begin{aligned} 3 a_1 b_1 c_2^3 + a_2 b_2 c_1^2 - 16 a_1 a_2 b_1 b_2 A^2 = 0, \\ a_1 b_1 c_2^2 + 3 a_2 b_2 c_1^2 - 16 a_1 a_2 b_1 b_2 A^2 = 0. \end{aligned} \tag{12_{ter}}$$

Mais alors

$$c_1^2 = 4 a_1 b_1 A^2, \quad c_2^2 = 4 a_2 b_2 A^2$$

et on retrouve la solution (β_1). Si (12_{ter}) n'est pas satisfaite, on déduit de (12) et (12_{bis})

$$\begin{vmatrix} a_2 c_1 & b_2 c_1 \\ b_1 c_2 & a_1 c_2 \end{vmatrix} = 0$$

d'où

$$a_2 = g b_2, \quad b_1 = g a_1. \tag{13}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (12) on obtient

$$b_2 c_1 (3 a_1^2 c_2^2 + b_2^2 c_1^2 - 16 g a_1^2 b_2^2 A^2) +$$
$$+ a_1 c_2 (a_1^2 c_2^2 + 3 b_2^2 c_1^2 - 16 g a_1^2 b_2^2 A^2) = 0.$$

Or cela peut s'écrire

$$(a_1 c_2 + b_2 c_1) \left[(a_1 c_2 + b_2 c_1)^2 - 16 g a_1^2 b_2^2 A^2 \right] = 0. \tag{14}$$

On voit facilement que l'hypothèse $a_1 c_2 + b_2 c_1 = 0$ ne donne que la solution (β_2) déjà trouvée. On peut donc conclure de (13) et (14) que

$$a_2 = \frac{(a_1 c_2 + b_2 c_1)^2}{16 a_1^2 b_2}, \quad b_1 = \frac{(a_1 c_2 + b_2 c_1)^2}{16 a_1 b_2^2}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (11) on trouve encore

$$h = 8 \frac{b_2 c_1 - a_1 c_2}{(a_1 c_2 + b_2 c_1)^2} A^2.$$

Nous arrivons à la solution (β_3). On peut vérifier par un calcul un peu long que toutes les équations (8) sont des conséquences de (β_3).

5. Nous allons étudier les cas où $\dfrac{A+B}{A-B} = 2$ ou bien $A = 3B$.

Pour satisfaire identiquement à l'équation (5), on doit ici résoudre les équations

$$\begin{gathered}\psi_7=0,\ \psi_6=0,\ \psi_5=\chi_7,\ \psi_4=\chi_6,\ \psi_3=\chi_5,\ \psi_2=\chi_4,\ \psi_1=\chi_3,\\ \psi_0=\chi_2,\ \chi_1=0,\ \chi_0=0.\end{gathered}\tag{15}$$

Nous montrerons qu'on obtient deux solutions nouvelles

$$\begin{gathered}A=3B,\ b_1=h^3a_1,\ a_2=\frac{b_2}{h},\ c_1=hka_1,\ c_2=-\frac{k}{h}b_2,\\ 2d_1=-B^2-\frac{2k^2}{h},\ 2d_2=-B^2,\ hk\neq 0;\end{gathered}\tag{γ_1}$$

$$\begin{gathered}A=3B,\ b_1=\lambda^6a_1,\ b_2=\lambda^3a_2,\ B=\frac{\lambda^2a_1c_2+a_2c_1}{4\lambda^3a_1a_2},\\ 2d_1=-B^2-\frac{3\lambda^4a_1^2c_2^2+a_2^2c_1^2}{2\lambda^6a_1^2a_2^2},\ 2d_2=-B^2,\ \lambda\neq 0.\end{gathered}\tag{γ_2}$$

Soit d'abord $c_2=0$ et donc $a_2c_1\neq 0$. L'équation $\psi_6=0$ donne $2d_2=-B^2$, l'équation $\psi_5=\chi_7$ donne $2d_1=-9B^2$; enfin, l'équation $\psi_4=\chi_6$ donne $c_1^2=16a_1b_1B^2$. L'hypothèse $c_2=0$ ne donne donc qu'un cas particulier de la solution (α_1). En second lieu, supposons que $c_1=0$ et donc $b_1c_2\neq 0$. L'équation $\psi_7=0$ donne $2d_2=-B^2$. L'équation $\psi_2=\chi_4$ montre que $a_2\neq 0$. L'équation $\psi_4=\chi_6$ donne $2d_1=-25B^2$. Si l'on substitue cette valeur de d_1 dans l'équation $\chi_0=0$ on obtient $c_2^2=16a_2b_2B^2$. On arrive donc à un cas particulier de la solution (α_1) transformée moyennant la substitution (6).

On voit que nous devons supposer $c_1c_2\neq 0$ si nous voulous obtenir une solution nouvelle. L'équation $\psi_7=0$ donne

$$2d_2=-B^2.\tag{16}$$

L'équation $\chi_0=0$ donne

$$\varrho_1\equiv 3a_1b_1c_2^2+a_2b_2c_1^2+2a_1a_2b_1b_2(B^2+2d_1)=0.\tag{17}$$

Les équations $\psi_5=\chi_7$ et $\psi_4=\chi_6$ donnent respectivement, ayant égard à (16)

$$\varrho_2\equiv c_2(a_1b_1c_2^2+3a_2b_2c_1^2-16a_1a_2b_1b_2B^2)-2a_1b_2^3c_1(9B^2+2d_1)=0$$

$$\begin{gathered}\varrho_3\equiv 3a_2c_1(3a_1b_1c_2^2+a_2b_2c_1^2-16a_1a_2b_1b_2B^2)+\\ +a_1b_2^2c_2[8c_1^2-2a_1b_1(25B^2+2d_1)]=0.\end{gathered}$$

Un calcul facile donne

$$\begin{gathered}a_2b_1\varrho_2+b_2^2c_1\varrho_1\equiv a_2b_1c_2(a_1b_1c_2^2+3a_2b_2c_1^2-16a_1a_2b_1b_2B^2)+\\ +b_2^2c_1(3a_1b_1c_2^2+a_2b_2c_1^2-16a_1a_2b_1b_2B^2)=0,\end{gathered}\tag{18}$$

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{3}(a_2\varrho_3+a_1b_2c_2\varrho_1)\equiv a_1b_2c_2(a_1b_1c_2^2+3a_2b_2c_1^2-16a_1a_2b_1b_2B^2)+\\ +a_2^2c_1(3a_1b_1c_2^2+a_2b_2c_1^2-16a_1a_2b_1b_2B^2).\end{gathered}\tag{18bis}$$

On voit facilement qu'on peut supposer que

$$\begin{vmatrix} a_2b_1c_2 & a_1b_2c_2\\ b_2^2c_1 & a_2^2c_1\end{vmatrix}=0$$

ou bien

$$a_2^3 b_1 - a_1 b_2^3 = 0. \tag{19}$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, les équations (18) et (18_{bis}) donneraient

$$c_1^2 = 4a_1 b_1 B^2, \quad c_2^2 = 4a_2 b_2 B^2$$

et les équations (16) et (17) donneraient ensuite

$$2d_1 = -9B^2, \quad 2d_2 = -B^2.$$

On n'obtiendrait donc qu'un cas particulier de la solution (α_2).

De l'équation (19) on déduit

$$b_2 = ha_2, \quad b_1 = h^3 a_1. \tag{19_{bis}}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (18) on obtient après un calcul facile

$$(ha_1 c_2 + a_2 c_1)\left[(ha_1 c_2 + a_2 c_1)^2 - 16h^3 a_1^2 a_2^2 B^2\right] = 0. \tag{20}$$

Soit d'abord $ha_1 c_2 + a_2 c_1 = 0$ d'où

$$c_1 = hka_1, \quad c_2 = -ka_2.$$

L'équation (17) donne alors $2d_1 = -B^2 - \dfrac{2k^2}{h}$. On obtient la solution (γ_1). Il est facile de voir que toutes les équations (15) sont des conséquences de (γ_1). Si $ha_1 c_2 + a_2 c_1 \neq 0$ l'équation (20) donne

$$B = \frac{ha_1 c_2 + a_2 c_1}{4h\sqrt{h}\, a_1 a_2}.$$

L'équation (17) donne dans ce cas

$$B^2 + 2d_1 = -\frac{3h^2 a_1^2 c_2^2 + a_2^2 c_1^2}{2h^3 a_1^2 a_2^2}.$$

Nous arrivons à la solution (γ_2). Par un calcul un peu long on peut montrer que toutes les équations (15) sont des conséquences de (γ_2).

6. Pour aller plus loin, nous supposons $\dfrac{A+B}{A-B} = 3$ ou bien $A = 2B$. Les équations à vérifier sont

$$\begin{gathered} \psi_7 = 0,\ \psi_6 = 0,\ \psi_5 = 0,\ \psi_4 = \chi_7,\ \psi_3 = \chi_6,\ \psi_2 = \chi_5, \\ \psi_1 = \chi_4,\ \psi_0 = \chi_3,\ \chi_2 = 0,\ \chi_1 = 0,\ \chi_0 = 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Nous allons prouver qu'on obtient trois solutions nouvelles

$$\begin{gathered} A = 2B,\ c_2 = 0,\ b_1 = h^2 a_1,\ b_2 = ha_2, \\ c_1^2 = 2h^2 a_1^2 (d_2 - d_1),\ h \neq 0; \end{gathered} \tag{δ_1}$$

$$A = 2B,\ c_2 = 0,\ c_1^2 = 4a_1 b_1 B^2,\ d_2 = \frac{a_1 b_2^2}{a_2^2 b_1}(2B^2 + d_1); \tag{δ_2}$$

$$\begin{gathered} A = 2B,\ b_1 = h^2 a_1,\ b_2 = ha_2, \\ 2a_1 = -B^2 - \frac{2c_2^2}{ha_2^2} - \frac{c_1^2}{h^2 a_1^2},\ 2d_2 = -B^2. \end{gathered} \tag{δ_3}$$

Commençons par supposer $c_2=0$ et donc $a_2c_1 \neq 0$. Les équations $\psi_4=\chi_7$ et $\psi_2=\chi_5$ donnent alors

$$\begin{aligned}\varrho_1 &\equiv a_2^2\,[c_1^2 - a_1b_1(4B^2+2d_2)] + a_1^2 b_2^2(4B^2+2d_1)=0,\\ \varrho_2 &\equiv a_2^2 b_1[2c_1^2 - a_1b_1(8B^2-2d_2)] - a_1b_2^2[3c_1^2 - a_1b_1(8B^2-2d_1)]=0.\end{aligned} \tag{22}$$

On en déduit aisément

$$\tfrac{1}{3}(b_1\varrho_1+\varrho_2)\equiv(a_2^2b_1-a_1b_2^2)(c_1^2-4a_1b_1B^2)=0. \tag{23}$$

Nous avons donc deux cas à considérer; soit d'abord $a_2^2b_1-a_1b_2^2=0$ ou bien

$$b_1=h^2a_1,\quad b_2=ha_2.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (22) on obtient facilement

$$c_1^2=2h^2a_1^2(d_2-d_1).$$

Nous arrivons aux équations (δ_1); il est aisé de voir que toutes les équations (21) en sont des conséquences. Si $a_2^2b_1-a_1b_2^2 \neq 0$, l'équation (23) donne

$$c_1^2=4a_1b_1B^2.$$

L'équation (22) donne ensuite

$$d_2=\frac{a_1b_2^2}{b_1a_2^2}(2B^2+d_1).$$

On obtient la solution (δ_2); il est facile de voir que toutes les équations (21) sont alors vérifiées.

Pour trouver les autres solutions de (21), il faut supposer $c_2 \neq 0$. L'équation $\psi_7=0$ donne alors

$$2d_2=-B^2. \tag{24}$$

L'équation $\chi_2=0$ donne

$$\sigma_1\equiv 2a_1b_1c_2^2+a_2b_2c_1^2+a_1a_2b_1b_2(B^2+2d_1)=0. \tag{25}$$

L'équation $\psi_4=\chi_7$ donne, tenant compte de (24),

$$\sigma_2\equiv c_1\{a_2[2a_1b_1c_2^2+a_2b_2c_1^2-3a_1a_2b_1b_2B^2]+a_1^2b_2^3(4B^2+2d_1)\}=0.$$

L'équation $\psi_2=\chi_5$ donne

$$\begin{aligned}\sigma_3\equiv c_1\{&a_2^2b_1(7a_1b_1c_2^2+2a_2b_2c_1^2-9a_1a_2b_1b_2B^2)-\\ &-a_1b_2^2[3(3a_1b_1c_2^2+a_2b_2c_1^2)-a_1a_2b_1b_2(8B^2-2d_1)]\}=0.\end{aligned}$$

Finalement, on obtient de l'équation $\psi_1=\chi_4$

$$\begin{aligned}\sigma_4\equiv b_1\{&6a_2^2b_1(a_1b_1c_2^2+3a_2b_2c_1^2-4a_1a_2b_1b_2B^2)-\\ &-a_1b_2^2[20a_1b_1c_2^2+25a_2b_2c_1^2-a_1a_2b_1b_2(17B^2-14d_1)]\}=0.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{1}{a_1b_2}(a_2c_1\sigma_1-\sigma_2)\equiv c_1(a_2^2b_1-a_1b_2^2)(4B^2+2d_1)=0, \tag{26}$$

$$\begin{aligned}&a_1b_2^2c_1\sigma_1+\sigma_3\equiv\\ &\equiv c_1(a_2^2b_1-a_1b_2^2)[7a_1b_1c_2^2+2a_2b_2c_1^2-9a_1a_2b_1b_2B^2]=0,\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} &7a_1b_1b_2^2\sigma_1+\sigma_4\equiv \\ &\equiv 6b_1(a_2^2b_1-a_1b_2^2)[a_1b_1c_2^2+3a_2b_2c_1^2-4a_1a_2b_1b_2B^2]=0. \end{aligned} \tag{28}$$

Remarquons qu'on peut supposer $b_1 \neq 0$; en effet, si $b_1=0$, l'équation $\psi_3=\chi_6$ donnerait $c_1=0$ ce qui ferait $\gamma=0$ (v. (1)). Soit d'abord $c_1=0$, $a_2^2b_1-a_1b_2^2 \neq 0$. L'équation (28) donne

$$c_2^2=4a_2b_2B^2.$$

Ensuite on obtient de (25)

$$2d_1=-9B^2.$$

On arrive ainsi à un cas particulier de la solution qui s'obtient de (α_1) moyennant la substitution (6). En second lieu, soit $c_1(a_2^2b_1-a_1b_2^2)\neq 0$. L'équation (26) donne $2d_1=-4B^2$. Des équations (27) et (28) on déduit

$$c_1^2=a_1b_1B^2,\quad c_2^2=a_2b_2B^2.$$

On arrive ainsi à un cas particulier de la solution (α_2).

Il en résulte que, pour obtenir une solution nouvelle, il faut supposer $a_2^2b_1-a_1b_2^2=0$ d'où

$$b_1=h^2a_1,\quad b_2=ha_2.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (25), on obtient

$$2d_1=-B^2-\frac{2c_2^2}{ha_2^2}-\frac{c_1^2}{h^2a_1^2}.$$

On arrive à la solution (δ_3). Il n'est pas difficile de vérifier que les équations (21) sont des conséquences de (δ_3).

7. Les hypothèses $\dfrac{A+B}{A-B}=4$ et $\dfrac{A+B}{A-B}=6$ ne conduisent à aucune solution nouvelle. Pour brièveté, je me borne à énoncer ce résultat négatif. Supposons plutôt que $\dfrac{A+B}{A-B}=5$ ou bien

$$A=3\alpha,\quad B=2\alpha.$$

Les équations à vérifier sont

$$\begin{aligned} &\psi_7=0,\ \psi_6=0,\ \psi_5=0,\ \psi_4=0,\ \psi_3=0,\ \psi_2=\chi_7,\ \psi_1=\chi_6, \\ &\psi_0=\chi_5,\ \chi_4=0,\ \chi_3=0,\ \chi_2=0,\ \chi_1=0,\ \chi_0=0. \end{aligned} \tag{29}$$

Nous montrerons qu'elles donnent trois solutions nouvelles

$$\begin{aligned} &A=3\alpha,\ B=2\alpha,\ a_2^3b_1^2=a_1^2b_2^3; \\ &c_2=0,\ 2c_1^2=-a_1b_1(\alpha^2+2d_1),\ 2d_2=-\alpha^2; \end{aligned} \tag{ε_1}$$

$$\begin{aligned} &A=3\alpha,\ B=2\alpha,\ a_2^3b_1^2=a_1^2b_2^3, \\ &c_1=0,\ 3c_2^2=-a_2b_2(4\alpha^2+2d_1),\ 2d_2=-4\alpha^2; \end{aligned} \tag{ε_2}$$

$$\begin{aligned} &A=3\alpha,\ B=2\alpha,\ a_2^3b_1^2=a_1^2b_2^3, \\ &c_2^2=a_2b_2\alpha^2,\ 2c_1^2=-a_1b_1(7\alpha^2+2d_1),\ 2d_2=-4\alpha^2. \end{aligned} \tag{ε_3}$$

Supposons d'abord $c_2 = 0$, et donc $a_2 c_1 \neq 0$. L'équation $\psi_6 = 0$ donne

$$2 d_2 = -\alpha^2. \tag{30}$$

De l'équation $\chi_3 = 0$ on déduit

$$b_1 [2 c_1^2 + a_1 b_1 (\alpha^2 + 2 d_1)] = 0.$$

Or $b_1 \neq 0$ car autrement l'équation $\psi_0 = \chi_5$ donnerait $a_2 c_1 = 0$; donc

$$2 c_1^2 + a_1 b_1 (\alpha^2 + 2 d_1) = 0. \tag{31}$$

Écrivons encore l'équation $\psi_0 = \chi_5$

$$3 \frac{a_2^3 b_1^2 c_1}{a_1 b_2} [2 a_2 b_2 c_1^2 - a_1 a_2 b_1 b_2 (9\alpha^2 + 2 d_2)] =$$
$$= a_1 b_2^2 c_1 [20 a_2 b_2 c_1^2 - a_1 a_2 b_1 b_2 (17 \alpha^2 - 14 d_1)].$$

En employant (30) et (31) et en simplifiant, on obtient

$$(9\alpha^2 + 2 d_1)(a_2^3 b_1^2 - a_1^2 b_2^3) = 0.$$

Si $a_2^3 b_1^2 - a_1^2 b_2^3 = 0$, on obtient la solution (ε_1); il n'est pas difficile de voir que toutes les équations (29) sont vérifiées. Au contraire, l'hypothèse

$$2 d_1 = -9\alpha^2$$

ne conduit à aucune solution nouvelle. En combinant la précédente avec (31) on obtient

$$c_1^2 = 4 a_1 b_1 \alpha^2.$$

Or cela ne donne qu'un cas particulier de la solution (α_1).

En second lieu, supposons $c_1 = 0$ et donc $b_1 c_2 \neq 0$. L'équation $\psi_7 = 0$ donne

$$2 d_2 = -4\alpha^2. \tag{32}$$

L'équation $\chi_4 = 0$ donne

$$3 c_2^2 + a_2 b_2 (4\alpha^2 + 2 d_1) = 0. \tag{33}$$

Enfin, l'équation $\psi_1 = \chi_6$ donne

$$-a_2^2 b_1^2 [3 c_2^2 - a_2 b_2 (16\alpha^2 + 2 d_2)] = a_1^2 b_2^4 (16\alpha^2 + 2 d_1).$$

En réduisant moyennant (32) et (33) on obtient

$$(a_2^3 b_1^2 - a_1^2 b_2^3)(16\alpha^2 + 2 d_1) = 0.$$

Si $a_2^3 b_1^2 - a_1^2 b_2^3 = 0$ on obtient la solution (ε_2); on peut montrer que toutes les équations (29) sont des conséquences de (ε_2). Si

$$2 d_1 = -16\alpha^2,$$

l'équation (33) donne

$$c_2^2 = 4 a_2 b_2 \alpha^2$$

et l'on obtient un cas particulier de la solution qui se déduit de (α_1) moyennant la substitution (6).

Supposons enfin $c_1 c_2 \neq 0$. L'équation $\psi_7 = 0$ donne

$$2 d_2 = -4\alpha^2. \tag{34}$$

Ensuite, l'équation $\psi_6 = 0$ donne

$$c_2^2 = a_2 b_2 \alpha^2. \tag{35}$$

L'équation $\chi_0 = 0$, simplifiée moyennant (35) donne

$$a_2 b_1 [2 c_1^2 + a_1 b_1 (7\alpha^2 + 2 d_1)] = 0.$$

Or $a_2 b_1 \neq 0$, car si $a_2 = 0$, l'équation (35) donne $c_2 = 0$, et si $b_1 = 0$, l'équation $\psi_1 = \chi_6$ donne $c_1 c_2 = 0$, tandisque nous supposons maintenant $c_1 c_2 \neq 0$. Donc

$$2 c_1^2 = - a_1 b_1 (7\alpha^2 + 2 d_1). \tag{36}$$

Enfin, on déduit de $\psi_1 = \chi_6$

$$\begin{aligned} - a_2^2 b_1^2 [3 (a_1 b_1 c_2^2 + 3 a_2 b_2 c_1^2) - a_1 a_2 b_1 b_2 (16\alpha^2 + 2 d_2)] = \\ = a_1^2 b_2^4 [- 7 c_1^2 + a_1 b_1 (16\alpha^2 + 2 d_1)]. \end{aligned}$$

En y substituant les valeurs (34), (35) et (36) on trouve

$$(a_2^3 b_1^2 - a_1^2 b_2^3)(9\alpha^2 + 2 d_1) = 0.$$

Si $a_2^3 b_1^2 - a_1^2 b_2^3 = 0$, on trouve la solution (ε_3). Un calcul un peu long montre que toutes les équations (29) sont alors vérifiées. L'hypothèse $9\alpha^2 + 2 d_1 = 0$ ne donne rien de nouveau. De l'équation (36) on déduit alors $c_1^2 = a_1 b_1 \alpha^2$ et l'on obtient un cas particulier de la solution (α_2).

8. Il nous reste à étudier le cas $\dfrac{A+B}{A-B} = 7$ ou bien

$$A = 4\alpha, \; B = 3\alpha.$$

Les équations à vérifier sont

$$\begin{aligned} \psi_7 = 0,\; \psi_6 = 0,\; \psi_5 = 0,\; \psi_4 = 0,\; \psi_3 = 0,\; \psi_2 = 0,\; \psi_1 = 0, \\ \psi_0 = \chi_7,\; \chi_6 = 0,\; \chi_5 = 0,\; \chi_4 = 0,\; \chi_3 = 0,\; \chi_2 = 0,\; \chi_1 = 0,\; \chi_0 = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

On obtient ici une seule solution nouvelle

$$\begin{aligned} A = 4\alpha,\; B = 3\alpha,\; c_2 = 0,\; 3 c_1^2 = - a_1 b_1 (4\alpha^2 + 2 d_1), \\ a_1^3 b_2^4 - a_2^4 b_1^3 = 0,\; 2 d_2 = - 4\alpha^2. \end{aligned} \tag{ζ}$$

J'omets de montrer que les hypothèses $c_1 = 0$ et $c_1 c_2 \neq 0$ ne conduisent à aucune solution nouvelle et je me borne à supposer $c_2 = 0$, et donc $a_2 c_1 \neq 0$. L'équation $\psi_6 = 0$ donne

$$2 d_2 = - 4\alpha^2. \tag{38}$$

L'équation $\chi_5 = 0$ donne

$$3 c_1^2 = - a_1 b_1 (4\alpha^2 + 2 d_1). \tag{39}$$

L'équation $\psi_0 = \chi_7$ donne

$$a_2^4 b_1^2 [3 c_1^2 - a_1 b_1 (16\alpha^2 + 2 d_2)] = - a_1^4 b_2^4 (16\alpha^2 + 2 d_1).$$

En simplifiant moyennant (38) et (39) on obtient

$$(a_1^3 b_2^4 - a_2^4 b_1^3)(16\alpha^2 + 2 d_1) = 0.$$

Si $a_1^3 b_2^4 - a_2^4 b_1^3 = 0$ on obtient la solution (ζ); il n'est pas difficile de voir que toutes les équations (37) sont des conséquences de (ζ). Si $16\alpha^2+2d_1=0$, l'équation (39) donne $c_1{}^2=4a_1b_1\alpha^2$. On obtient donc un cas particulier de la solution (α_1).

9. Calculons maintenant dans les divers cas trouvés les valeurs de β, γ, L et M des équations (1), (2), (4) et II (12), en simplifiant toujours moyennant la substitution II (9).

Dans le cas (α_1), on peut supposer $A=\alpha+1$, $B=\alpha-1$, $(\alpha^2 \mp 1)$. $a_1=a_2$, $b_1=b_2$. On obtient

$$\beta=4\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\frac{e^{(\alpha+1)(u-v)}}{1-e^{4(u-v)}},\quad \gamma=4\sqrt{\frac{b_1}{a_1}}\frac{e^{-(\alpha+1)(u-v)}}{1-e^{-4(u-v)}},$$

$$L=\frac{a_1}{2(\alpha+1)}e^{2(\alpha+1)u}+\frac{a_1}{2(\alpha-1)}e^{2(\alpha-1)u}-$$
$$-\frac{(\alpha+1)^2}{2}+\frac{4[-(\alpha+5)e^{4(u-v)}+\alpha-1]}{(e^{4(u-v)}-1)^2},$$

$$M=\frac{b_1}{2(\alpha+1)}e^{2(\alpha+1)v}+\frac{b_1}{2(\alpha-1)}e^{2(\alpha-1)v}-$$
$$-\frac{(\alpha-3)^2}{2}+\frac{4[(\alpha-7)e^{4(u-v)}-\alpha+1]}{(e^{4(u-v)}-1)^2}.$$

Dans le cas (α_2), on peut supposer de même $A=\alpha+1$, $B=\alpha-1$, $\alpha^2 \mp 1$, $a_1=a_2$, $b_1=b_2$. On obtient ($\varepsilon=\pm 1$)

$$\beta=2\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\frac{e^{(\alpha+1)(u-v)}-\varepsilon e^{(\alpha+3)(u-v)}}{1-e^{4(u-v)}},$$

$$\gamma=-2\sqrt{\frac{b_1}{a_1}}\frac{e^{-(\alpha-3)(u-v)}-\varepsilon e^{-(\alpha-1)(u-v)}}{1-e^{4(u-v)}},$$

$$L=\frac{a_1}{2(\alpha+1)}e^{2(\alpha+1)u}+\frac{a_1}{2(\alpha-1)}e^{2(\alpha-1)u}-$$
$$-\frac{(\alpha+1)^2}{2}+\frac{2[\varepsilon(\alpha+3)e^{6(u-v)}-(\alpha+6)e^{4(u-v)}-\varepsilon(\alpha-3)e^{2(u-v)}+1]}{[1-e^{4(u-v)}]^2},$$

$$M=\frac{b_1}{2(\alpha+1)}e^{2(\alpha+1)v}+\frac{b_1}{2(\alpha-1)}e^{2(\alpha-1)v}-$$
$$-\frac{(\alpha-1)^2}{2}+\frac{2[\varepsilon(-\alpha+3)e^{6(u-v)}+(\alpha-6)e^{4(u-v)}+\varepsilon(\alpha+3)e^{2(u-v)}-1]}{[1-e^{4(u-v)}]^2}.$$

Ces formules supposent que l'on a choisi les deux radicaux $\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}$ et $\sqrt{\frac{b_1}{a_1}}$ de façon que leur produit soit égal à $+1$. Les deux cas $\varepsilon=1$ et $\varepsilon=-1$ sont essentiellement distincts.

Dans le cas (β_1), on peut supposer $A=1$, $a_1=a_2$, $b_1=b_2$. On obtient ($\varepsilon=\pm 1$)

$$\beta=2\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\frac{e^{u-v}}{1+\varepsilon e^{2(u-v)}},\quad \gamma=2\varepsilon\sqrt{\frac{b_1}{a_1}}\frac{e^{u-v}}{1+\varepsilon e^{2(u-v)}},$$

$$L=\frac{a_1}{2}e^{2u}-\frac{a_1}{2}e^{-2u}-\frac{1}{2}+\varepsilon h a_1^2\sqrt{\frac{b_1}{a_1}}+\frac{6\varepsilon e^{2(u-v)}}{(1+\varepsilon e^{2(u-v)})^2},$$
$$M=\frac{b_1}{2}e^{2v}-\frac{b_1}{2}e^{-2v}-\frac{1}{2}-h b_1^2\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}+\frac{6\varepsilon e^{2(u-v)}}{(1+\varepsilon e^{2(u-v)})^2}.$$

Ici encore, $\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\cdot\sqrt{\frac{b_1}{a_1}}=1$ et les deux cas $\varepsilon=1$ et $\varepsilon=-1$ sont essentiellement distincts.

Dans le cas (β_2), on peut supposer $A=1$, $a_1=b_2$, $\mu=1$, ou bien $A=1$, $a_1=b_2=1$, $\mu=0$. Sous la première supposition, on obtient

$$\beta=\frac{\nu}{e^{v-u}-e^{u-v}},\quad \gamma=\frac{\nu}{e^{u-v}-e^{v-u}},$$
$$L=\frac{a_1}{2}e^{2u}-\frac{a_1}{2}e^{-2u}+d_1-\frac{3\nu^2}{2}\frac{1}{(e^{u-v}-e^{v-u})^2},$$
$$M=\frac{a_1}{2}e^{2v}-\frac{a_1}{2}e^{-2v}+d_1-\frac{3\nu^2}{2}\frac{1}{(e^{u-v}-e^{v-u})^2}.$$

La seconde supposition, au contraire, conduit à une surface qui admet ∞^2 déformations projectives en elle même. C'est ce qui le lecteur vérifiera aisément.

Dans le cas (β_3), on peut supposer $A=1$, $a_1c_2+c_1b_2=4a_1b_2$, $c_1=c_2$. On obtient

$$\beta=\frac{4}{a_1+b_2}\frac{b_2e^{v-u}-a_1e^{u-v}}{e^{2(v-u)}-e^{2(u-v)}},\quad \gamma=\frac{4}{a_1+b_2}\frac{a_1e^{v-u}-b_2e^{u-v}}{e^{2(v-u)}-e^{2(u-v)}},$$
$$L=\frac{a_1}{2}e^{2u}-\frac{b_2}{2}e^{-2u}-\frac{1}{2}-\frac{4a_1(a_1-b_2)}{(a_1+b_2)^2}+$$
$$+\frac{4}{(a_1+b_2)^2}\frac{[6a_1b_2e^{6(u-v)}-(7a_1^2+5b_2^2)e^{4(u-v)}+6a_1b_2e^{2(u-v)}+a_1^2-b_2^2]}{(e^{4(u-v)}-1)^2},$$
$$M=\frac{a_1}{2}e^{2v}-\frac{b_2}{2}e^{-2v}-\frac{1}{2}+\frac{4b_2(a_1-b_2)}{(a_1+b_2)^2}+$$
$$+\frac{4}{(a_1+b_2)^2}\frac{[6a_1b_2e^{6(u-v)}-(5a_1^2+7b_2^2)e^{4(u-v)}+6a_1b_2e^{2(u-v)}-a_1^2+b_2^2]}{(e^{4(u-v)}-1)^2}.$$

Dans le cas (γ_1), on peut supposer $B=1$, $h=1$, $c_2=-1$. On obtient

$$\beta=\frac{1}{b_2}\frac{e^{3(u-v)}}{1-e^{2(u-v)}},\quad \gamma=-\frac{1}{b_2}\frac{e^{v-u}}{1-e^{2(u-v)}},$$
$$L=\frac{a_1}{6}e^{6u}+\frac{b_2}{2}e^{2u}-\frac{1}{2}-\frac{1}{b_2^2}-\frac{1}{2b_2^2}\frac{5e^{2(u-v)}-2}{(e^{2(u-v)}-1)^2},$$
$$M=\frac{a_1}{6}e^{6v}+\frac{b_2}{2}e^{2v}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2b_2^2}\frac{e^{2(u-v)}+2}{(e^{2(u-v)}-1)^2}.$$

Dans le cas (γ_2), on peut supposer $B=1$, $\lambda=1$, $a_1=b_2$. On obtient, en posant $c_1-c_2=4c$,

$$\beta=2e^{3(u-v)}\left(\frac{1}{1+e^{2(u-v)}}+\frac{c}{a_1}\frac{1}{1-e^{2(u-v)}}\right),$$

$$\gamma = 2\,e^{v-u}\left(\frac{1}{1+e^{2(u-v)}} - \frac{c}{a_1}\,\frac{1}{1-e^{2(u-v)}}\right),$$

$$L = \frac{a_1}{6}\,e^{6u} + \frac{a_1}{2}\,e^{2u} - \frac{1}{2} - 4\,\frac{a_1^2 - a_1 c + c^2}{a_1^2} +$$

$$+\frac{2}{a_1^2}\,\frac{5(a_1^2-c^2)\,e^{6(u-v)} - 2\,(4\,a_1^2 - a_1 c + 4\,c^2)\,e^{4(u-v)} + (a_1^2-c^2)\,e^{2(u-v)} + 2\,(a_1^2 - a_1 c + c^2)}{[1-e^{4(u-v)}]^2},$$

$$M = \frac{a_1}{6}\,e^{6v} + \frac{a_1}{2}\,e^{2v} - \frac{1}{2} +$$

$$+\frac{2}{a_1^2}\,\frac{(a_1^2-c^2)\,e^{6(u-v)} - 2\,(2\,a_1^2 + a_1 c + 2\,c^2)\,e^{4(u-v)} + 5\,(a_1^2-c^2)\,e^{2(u-v)} - 2\,(a_1^2 - a_1 c + c^2)}{[1-e^{4(u-v)}]^2}.$$

Dans le cas (δ_1), on peut supposer $B=1$, $h=1$, $a_1=b_2$. On obtient

$$\beta = \frac{\sqrt{2\,(d_2-d_1)}}{e^{2(v-u)}-1}, \qquad \gamma = \frac{\sqrt{2\,(d_2-d_1)}}{e^{2(u-v)}-1},$$

$$L = \frac{a_1}{4}\,e^{4u} + \frac{a_1}{2}\,e^{2u} + d_1 - (d_2-d_1)\,\frac{4\,e^{2(u-v)}-1}{(e^{2(u-v)}-1)^2},$$

$$M = \frac{a_1}{4}\,e^{4v} + \frac{a_1}{2}\,e^{2v} + d_2 - (d_2-d_1)\,\frac{2\,e^{2(u-v)}+1}{(e^{2(u-v)}-1)^2}.$$

Dans le cas (δ_2) on peut supposer $B=1$, $a_1 b_2 = a_2 b_1$, $c_1=2$. On obtient

$$\beta = 2\,a_1\,\frac{1}{e^{2(v-u)}-1}, \quad \gamma = \frac{2}{a_1}\,\frac{1}{e^{2(u-v)}-1},$$

$$L = \frac{a_1}{4}\,e^{4u} + \frac{a_1^2 b_2}{2}\,e^{2u} + d_1 - 2\,\frac{4\,e^{2(u-v)}-1}{(e^{2(u-v)}-1)^2},$$

$$M = \frac{1}{4\,a_1}\,e^{4v} + \frac{b_2}{2}\,e^{2v} + \frac{d_1+2}{a_1^2} - 2\,\frac{2e^{2(u-v)}+1}{(e^{2(u-v)}-1)^2}.$$

Dans le cas (δ_3), on peut supposer $B=1$, $h=1$, $a_1=a_2$. On obtient

$$\beta = \frac{1}{a_1}\,\frac{e^{2(u-v)}\,(c_1 - c_2\,e^{u-v})}{1-e^{2(u-v)}}, \qquad \gamma = \frac{1}{a_1}\,\frac{e^{2(v-u)}\,(c_1 - c_2\,e^{v-u})}{1-e^{2(v-u)}},$$

$$L = \frac{a_1}{4}\,e^{4u} + \frac{a_1}{2}\,e^{2u} - \frac{1}{2} - \frac{c_1^2}{2\,a_1^2} - \frac{c_2^2}{a_1^2} +$$

$$\frac{1}{2\,a_1^2}\,\frac{6\,c_1 c_2\,e^{3(u-v)} - (4\,c_1^2 + 5\,c_2^2)\,e^{2(u-v)} + c_1^2 + 2\,c_2^2}{(e^{2(u-v)}-1)^2},$$

$$M = \frac{a_1}{4}\,e^{4v} + \frac{a_1}{2}\,e^{2v} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\,a_1^2}\,\frac{(2\,c_1^2 + c_2^2)\,e^{2(u-v)} - 6\,c_1 c_2\,e^{u-v} + c_1^2 + 2\,c_2^2}{(e^{2(u-v)}-1)^2}.$$

Dans le cas (ε_1), on peut supposer $\alpha=1$, $a_1=a_2=b_1=b_2$. On obtient

$$\beta = \frac{c_1}{a_1}\,\frac{e^{3(u-v)}}{1-e^{2(u-v)}}, \qquad \gamma = \frac{c_1}{a_1}\,\frac{e^{3(v-u)}}{1-e^{2(v-u)}},$$

$$L = \frac{a_1}{6}\,e^{6u} + \frac{a_1}{4}\,e^{4u} - \frac{1}{2} - \frac{c_1^2}{a_1^2} - \frac{c_1^2}{2\,a_1^2}\,\frac{5\,e^{2(u-v)}-2}{(e^{2(u-v)}-1)^2},$$

$$M=\frac{a_1}{6}e^{6v}+\frac{a_1}{4}e^{4v}-\frac{1}{2}-\frac{c_1^2}{2a_1^2}\frac{e^{2(u-v)}+2}{(e^{2(u-v)}-1)^2}.$$

Dans le cas (ε_2), on peut supposer $\alpha=1$, $a_1=a_2=b_1=b_2$. Mais on voit aisément que la surface correspondante admet ∞^2 déformations projectives en elle même.

Dans le cas (ε_3), on peut supposer $\alpha=1$, $a_1=a_2=b_1=b_2$. On obtient en posant $\varepsilon=\pm 1$

$$\beta=\frac{e^{3(u-v)}\left(\frac{c_1}{a_1}-\varepsilon e^{u-v}\right)}{1-e^{2(u-v)}},\qquad \gamma=\frac{e^{3(v-u)}\left(\frac{c_1}{a_1}-\varepsilon e^{v-u}\right)}{1-e^{2(v-u)}},$$

$$L=\frac{a_1}{6}e^{6u}+\frac{a_1}{4}e^{4u}-\frac{7}{2}-\frac{c_1^2}{a_1^2}+$$

$$+\frac{1}{2a_1^2}\frac{8\varepsilon a_1c_1e^{3(u-v)}-(6a_1^2+5c_1^2)e^{2(u-v)}-2\varepsilon a_1c_1e^{u-v}+3a_1^2+2c_1^2}{(1-e^{2(u-v)})^2},$$

$$M=\frac{a_1}{6}e^{6v}+\frac{a_1}{4}e^{4v}-2-$$

$$-\frac{1}{2a_1^2}\frac{2\varepsilon a_1c_1e^{3(u-v)}-2c_1^2e^{2(u-v)}-8\varepsilon a_1c_1e^{u-v}+3a_1^2+2c_1^2}{(1-e^{2(u-v)})^2}.$$

Le deux cas $\varepsilon=1$ et $\varepsilon=-1$ sont essentiellement distincts.

Dans le cas (ζ), on peut supposer $\alpha=1$, $a_1=a_2=b_1=b_2$. Mais ici encore, la surface correspondante admet ∞^2 déformations projectives en elle même.

V. L'espèce B_4.

1. Il y a deux types de surfaces de l'espèce B_4 dépendant chacun de deux constantes arbitraires.

Supposons d'abord $a_1b_1\neq 0$. Pour abréger, posons

$$\begin{aligned} z&=a_1b_1(u-v)-a_1b_2+a_2b_1,\\ m&=a_1b_2c_1+a_2b_1c_1-a_1b_1c_2. \end{aligned}\tag{1}$$

Les équations (E_3) et II (15) donnent

$$\beta=e^{A(u-v)}\frac{c_1z+m}{b_1z},\quad \gamma=e^{-A(u-v)}\frac{c_1z-m}{a_1z},\tag{2}$$

$$\begin{aligned} U&=\frac{1}{2A}e^{2Au}\left(a_1u+a_2-\frac{a_1}{2A}\right)+d_1,\\ V&=\frac{1}{2A}e^{2Av}\left(b_1v+b_2-\frac{b_1}{2A}\right)+d_2\text{ si } A\neq 0, \end{aligned}\tag{3}$$

$$U=\frac{a_1}{2}u^2+a_2u+d_1,\quad V=\frac{b_1}{2}v^2+b_2v+d_2,\text{ si } A=0.\tag{3bis}$$

Les équations II (11) donnent

$$F_1+F_2=3\beta\gamma=3\frac{c_1^2z^2-m^2}{a_1b_1z^2},\quad F'_1-F'_2=\beta\gamma'-\gamma\beta'.$$

Or on déduit de (2)

$$\beta\gamma' - \beta'\gamma = -\frac{2Ac_1^2}{a_1 b_1} + \frac{2c_1 m}{z^2} + \frac{2Am^2}{a_1 b_1 z^2},$$

ainsi qu'on peut prendre

$$F_1 - F_2 = -\frac{2Ac_1^2 z}{a_1^2 b_1^2} - \frac{2c_1 m}{a_1 b_1 z} - \frac{2Am^2}{a_1^2 b_1^2 z}.$$

Il en résulte

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= -\frac{A}{a_1^2 b_1^2}\left(c_1^2 z + \frac{m^2}{z}\right) + \frac{1}{2a_1 b_1}\left(3c_1^2 - \frac{2c_1 m}{z} - \frac{3m^2}{z^2}\right), \\ F_2 &= \frac{A}{a_1^2 b_1^2}\left(c_1^2 z + \frac{m^2}{z}\right) + \frac{1}{2a_1 b_1}\left(3c_1^2 + \frac{2c_1 m}{z} - \frac{3m^2}{z^2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Nous devons maintenant substituer les valeurs trouvées dans l'équation II (13). Cela exige un calcul facile, mais un peu long. Si $A \neq 0$ on obtient

$$\begin{aligned} & e^{A(u-v)}\Big[-\frac{A^3}{b_1}\left(c_1 + \frac{m}{z}\right) - \frac{2A^2}{a_1^2 b_1^3}\left(c_1^3 z + c_1^2 m + \frac{c_1 m^2}{z} + \frac{m^3}{z^2}\right) + \\ & + \frac{3A^2 a_1 m}{z^2} - \frac{2A}{a_1 b_1^2}\left(2c_1^3 + \frac{2c_1^2 m}{z} - \frac{c_1 m^2}{z^2} - \frac{3m^3}{z^3}\right) - \frac{6Aa_1^2 b_1 m}{z^3} + \\ & + \frac{2m}{b_1}\left(\frac{2c_1^2}{z^2} - \frac{3m^2}{z^4}\right) + \frac{6a_1^3 b_1^2 m}{z^4} - 2d_2\left(\frac{Ac_1}{b_1} + \frac{Am}{b_1 z} - \frac{a_1 m}{z^2}\right)\Big] = \\ & = e^{-A(u-v)}\Big[-\frac{A^3}{a_1}\left(c_1 - \frac{m}{z}\right) + \frac{2A^2}{a_1^3 b_1^2}\left(c_1^3 z - c_1^2 m + \frac{c_1 m^2}{z} - \frac{m^3}{z^2}\right) + \\ & + \frac{3A^2 b_1 m}{z^2} + \frac{2A}{a_1^2 b_1}\left(-2c_1^3 + \frac{2c_1^2 m}{z} + \frac{c_1 m^2}{z^2} - \frac{3m^3}{z^3}\right) + \frac{6Aa_1 b_1^2 m}{z^3} + \\ & + \frac{2m}{a_1}\left(\frac{2c_1^2}{z^2} - \frac{3m^2}{z^4}\right) + \frac{6a_1^2 b_1^3 m}{z^4} - 2d_1\left(\frac{Ac_1}{a_1} - \frac{Am}{a_1 z} - \frac{b_1 m}{z^2}\right)\Big]. \end{aligned} \quad (5)$$

Si $A = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} & 6m^3\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1}\right)\frac{1}{z^4} + 6a_1^2 b_1^2 (a_1 - b_1) m \frac{1}{z^4} - 4c_1^2 m\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1}\right)\frac{1}{z^2} + \\ & + 2m(a_1 d_2 - b_1 d_1)\frac{1}{z^2} + \frac{(a_2^2 b_1^2 - a_1^2 b_2^2) m}{a_1 b_1}\frac{1}{z_2} - \frac{c_1 z}{a_1 b_1} = 0. \end{aligned} \quad (5_{\text{bis}})$$

2. Considérons d'abord le cas $A \neq 0$. L'équation (5) a la forme

$$e^{A(u-v)} P = e^{-A(u-v)} Q,$$

P et Q étant des fonctions rationelles de $u - v$. On doit donc avoir séparément $P = Q = 0$. En annullant les coefficients des diverses puissances de z dans P et Q on obtient sans peine comme unique solution de (5) pour laquelle $\beta\gamma \neq 0$

$$c_1 = 0, \quad c_2^2 = a_1 b_1, \quad 2d_1 = 2d_2 = -A^2. \quad (\alpha)$$

Considérons maintenant l'équation (5_{bis}). On voit tout de suite qu'il y a deux manières de la vérifier sans faire $\beta\gamma = 0$

$$A=0,\quad c_1=0,\quad b_1=a_1,\quad 2a_1(d_1-d_2)=a_2^2-b_2^2, \tag{β_1}$$
$$A=0,\ c_1=0,\ c_2^2=a_1b_1,\ 2a_1b_1(a_1d_2-b_1d_1)+a_2^2b_1^2-a_1^2b_2^2=0. \tag{β_2}$$

Dans le cas (α), on peut supposer $A=1$, $a_2=b_2=0$. On obtient la surface*

$$\beta=\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\,e^{u-v}\frac{1}{u-v},\quad \gamma=\sqrt{\frac{b_1}{a_1}}\,e^{v-u}\frac{1}{v-u},$$
$$L=\frac{a_1}{2}ue^{2u}-\frac{1}{2}-\frac{1}{u-v}-\frac{3}{2}\frac{1}{(u-v)^2},$$
$$M=\frac{b_1}{2}ve^{2v}-\frac{1}{2}+\frac{1}{u-v}-\frac{3}{2}\frac{1}{(u-v)^2}.$$

Dans les cas (β_1) et (β_2), on voit facilement que la surface admet ∞^2 déformations projectives en elle même.

3. Dans ce qui précède, nous avons supposé que $a_1b_1\neq0$. On ne peut pas avoir simultanément $a_1=b_1=0$; et le cas $a_1=0$ se réduit au cas $b_1=0$ en échangeant u et v. Il est facile de voir que si $A\neq0$, l'hypothèse $b_1=0$ ne donne aucune solution. Pour abréger, j'omets ce calcul et je suppose $A=b_1=0$. Ona alors en supposant que $-a_1c_2+2a_2c_1=0$ ce qui est évidemment permis

$$\beta=-\frac{c_1}{b_2}(u-v),\ \gamma=\frac{2c_1}{a_1},$$
$$U=\frac{a_1}{2}u^2+a_2u+d_1,\ V=b_2v+d_2.$$

Les équations II (11) donnent

$$F_1=-\frac{2c_1^2}{a_1b_2}(u-v),\ F_2=-\frac{4c_1^2}{a_1b_2}(u-v).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation II (13) on trouve

$$-c_1(u-v)-2c_1v-\frac{2c_1d_2}{b_2}-\frac{12c_1^3}{a_1b_2^2}(u-v)=2c_1u+\frac{2c_1a_2}{a_1}-\frac{4c_1^3}{a_1^2b_1}.$$

En comparant les coefficients des deux membres, on obtient

$$4c_1^2=-a_1b_2^2,\ d_2=-\frac{(2a_2+b_2)b_2}{2a_1}.$$

On peut supposer $2c_1=a_1$, $a_2=0$. On obtient la surface

$$\beta=\frac{b_2}{2}(u-v),\ \gamma=1,$$
$$L=-\frac{b_2^2}{2}u^2+\frac{b_2}{2}(u-v)+d_1,\ M=b_2u+\frac{1}{2}.$$

* Les radicaux sont choisis de manière que $\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\cdot\sqrt{\frac{b_1}{a_1}}=1$.

VI. Les espèces B_5 et B_6.

1. *Il y a quatre types de surfaces de l'espèce B_5, dépendant respectivement de 4, 3, 3, 3 constantes arbitraires.*

Les surfaces de l'espèce B_6 forment un type dépendant de trois constantes arbitraires.

Les équations (E_5) et II (15) donnent, en posant $c=\frac{1}{k}$,

$$\beta=\frac{1}{a_2 e^{-A(u-v)}+a_1 e^{-B(u-v)}}, \quad \gamma=\frac{k}{a_1 e^{A(u-v)}+a_2 e^{B(u-v)}}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} U' &= \frac{1}{k}\left(a_1 b_1 e^{2Au}+a_2 b_2 e^{2Bu}+he^{(A+B)u}\right) \\ V' &= a_2 b_1 e^{2Av}+a_1 b_2 e^{2Bv}-he^{(A+B)v}. \end{aligned} \tag{2}$$

Commençons par observer que nous ne restreignons pas la généralité *en supposant* $a_1 \neq 0$; en effet le cas $a_1=0$, $a_2 \neq 0$ se réduit au cas $a_1 \neq 0$, $a_2=0$ en échangeant les lettres A et B et, d'autre part, on ne peut pas avoir $a_1=a_2=0$. Alors, des équations (1) et II (11) on déduit sans difficulté

$$\begin{aligned} 2F_1 &= \frac{k}{a_1 t+a_2}\left[\frac{3t}{a_1 t+a_2}+\frac{1}{a_1}\frac{A+B}{A-B}\right], \\ 2F_2 &= \frac{k}{a_1 t+a_2}\left[\frac{3t}{a_1 t+a_2}-\frac{1}{a_1}\frac{A+B}{A-B}\right], \end{aligned} \tag{3}$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$t=e^{(A-B)(u-v)}. \tag{4}$$

Des équations (2) on déduit, si $AB(A-B) \neq 0$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{k}\left[\frac{a_1 b_1}{2A}e^{2Au}+\frac{a_2 b_2}{2B}e^{2Bu}+\frac{h}{A+B}e^{(A+B)u}\right]+d_1, \\ V &= \frac{a_2 b_1}{2A}e^{2Av}+\frac{a_1 b_2}{2B}e^{2Bv}-\frac{h}{A+B}e^{(A+B)v}+d_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Si $A=-B \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{k}\left[\frac{a_1 b_1}{2A}e^{2Au}-\frac{a_2 b_2}{2A}e^{-2Au}+hu\right]+d_1, \\ V &= \frac{a_2 b_1}{2A}e^{2Av}-\frac{a_1 b_2}{2A}e^{-2Av}-hv+d_2. \end{aligned} \tag{5 bis}$$

Si $B=0$, $A \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{k}\left[\frac{a_1 b_1}{2A}e^{2Au}+\frac{h}{A}e^{Au}+a_2 b_2 u\right]+d_1, \\ V &= \frac{a_2 b_1}{2A}e^{2Av}-\frac{h}{A}e^{Av}+a_1 b_2 v+d_2. \end{aligned} \tag{5 ter}$$

Si $A=0$, $B\neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} U&=\frac{1}{k}\left[\frac{a_2b_2}{2B}e^{2Bu}+\frac{h}{B}e^{Bu}+a_1b_1u\right]+d_1,\\ V&=\frac{a_1b_2}{2B}e^{2Bv}-\frac{h}{B}e^{Bv}+a_2b_1v+d_2. \end{aligned} \tag{5_{quater}}$$

2. Nous allons substituer les valeurs trouvées dans l'équation II (13). En la multipliant par $(a_2+a_1t)^4\,e^{B(u-v)}$ nous trouvous

$$\begin{aligned}
&\eta+t^{\frac{A+B}{A-B}}\Bigg\{-a_1{}^3B\,(B^2+2\,d_2)\,t^3+\\
&+a_1\left[-2\,(A+2B)\,a_1a_2d_2+(A-2B)\,k+\left(\frac{A+B}{A-B}-3\right)Bk-\right.\\
&\qquad\left.-\,a_1a_2\,(A^3-6\,A^2B+12\,AB^2-4\,B^3)\right]t^2+\\
&+a_2\left[-2\,(2\,A+B)\,a_1a_2d_2-(2\,A-B)\,k+\left(\frac{(A+B)^2}{A-B}-3\,A\right)k+\right.\\
&\qquad\left.+\,a_1a_2\,(4\,A^3-12\,A^2B+6\,AB^2-B^3)\right]t+\\
&\qquad+\,a_2{}^2\left[-2\,a_2d_2A+\frac{A}{a_1}\frac{A+B}{A-B}k-a_2A^3\right]\Bigg\}=\\
&\qquad=k\Bigg\{-a_1{}^3A\,(A^2+2\,d_1)\,t^3+\\
&+a_1\left[-2\,(2A+B)\,a_1a_2d_1-(2\,A-B)\,k-\left(\frac{A+B}{A-B}+3\right)Ak+\right.\\
&\qquad\left.+\,a_1a_2\,(4\,A^3-12\,A^2B+6\,AB^2-B^3)\right]t^2+\\
&+a_2\left[-2\,(A+2B)\,a_1a_2d_1+(A-2B)\,k-\left(\frac{(A+B)^2}{A-B}+3B\right)k+\right.\\
&\qquad\left.-\,a_1a_2\,(A^3-6A^2B+12\,AB^2-4B^3)\right]t+\\
&\qquad+\,a_2{}^2\left[-2\,a_2d_1B-\frac{B}{a_1}\frac{A+B}{A-B}k-a_2B^3\right]\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Dans cette équation

si $AB\,(A+B)\neq 0$, $\eta=0$;
si $A+B=0$, $\eta=2h\,(a_2+a_1t)^2\,[A\,(u-v)\,(a_1t-a_2)-(a_2+a_1t)]$;
si $B=0$, $\eta=b_2\,(a_2+a_1t)^2\,[2\,Aa_1a_2\,(u-v)\,t+a_1t-a_2]$;
si $A=0$, $\eta=b_1e^{B(u-v)}\,(a_2+a_1t)^2\,[2\,Ba_1a_2\,(u-v)\,t-a_1t+a_2]$.

Il est facile de voir que les cas $A+B=0$, $B=0$, $A=0$ ne donnent rien de nouveau. A cet effet observons que, si $h=0$, ou $B=b_2=0$, ou enfin $A=b_1=0$, les équations (E_5) sont seulement un cas particulier de (E_3) et ne peuvent donc donner rien de nouveau. Or si $AB\,(A+B)=0$, le coefficient de $u-v$ dans l'expression η doit évidemment être nul, afin que l'équation (6) puisse être satisfaite identiquement. Or ceci donne, en outre des hypothèses $A+B=h=0$, $B=b_2=0$, $A=b_1=0$ déjà refutées, seulement $B=a_2=0$, ou $A=a_2=0$. En substituant dans l'équation (6) on voit qu'il n'est pas possible la vérifier sans faire $\gamma=0$.

3. Il reste donc seulement d'examiner l'équation (6) sous l'hypothèse $AB(A+B)\neq 0$ (et donc $\eta=0$) et $hka_1\neq 0$. L'équation citée a la forme

$$t^{\frac{A+B}{A-B}}(\psi_3 t^3+\psi_2 t^2+\psi_1 t+\psi_0)=\chi_3 t^3+\chi_2 t^2+\chi_1 t+\chi_0. \qquad (6_{\text{bis}})$$

Elle est satisfaite si

$$\psi_3=0,\ \psi_2=0,\ \psi_1=0,\ \psi_0=0,\ \chi_3=0,\ \chi_2=0,\ \chi_1=0,\ \chi_0=0. \qquad (7)$$

Nous allons montrer qu'on peut déduire des équations (7)

$$k=a_1 a_2 (A-B)^2,\ 2d_1=-A^2,\ 2d_2=-B^2. \qquad (\alpha)$$

Les équations $\psi_3=0$ et $\chi_3=0$ donnent en effet $2d_1=-A^2$, $2d_2=-B^2$ et l'équation $\psi_0=0$ donne ensuite $a_2[k-a_1 a_2(A-B)]^2=0$. Or si $a_2=0$, les équations $\psi_2=0$ et $\chi_2=0$ donneraient

$$A-2B+\left(\frac{A+B}{A-B}-3\right)B=0,\ -2A+B-\left(\frac{A+B}{A-B}+3\right)A=0,$$

d'où

$$(A-3B)(A-2B)=0,\ (3A-B)(2A-B)=0$$

et enfin $A=B=0$. On vérifie aisément que toutes les équations (7) sont des conséquences de (α).

Si l'équation (6_{bis}) est vérifiée identiquement sans que l'on ait les (7), on voit que $\frac{A+B}{A-B}$ doit prendre une des valeurs $2, 3, -2, -3$.

Supposons d'abord que $\frac{A+B}{A-B}=2$, d'où $A=3B$. On doit avoir

$$\psi_3=0,\ \psi_2=0,\ \psi_1=\chi_3,\ \psi_0=\chi_2,\ \chi_1=0,\ \chi_0=0. \qquad (8)$$

Nous en déduirons la solution nouvelle

$$A=3B,\ k=-\frac{a_2^3}{a_1^3},\ 2d_1=-\frac{3a_2^2}{a_1^4}-B^2,\ 2d_2=-B^2. \qquad (\beta)$$

Remarquons d'abord que nous pouvons supposer $a_2\neq 0$.* L'équation $\psi_3=0$ donne $2d_2=-B$. Les équations $\psi_1=\chi_3$ et $\chi_3=0$ donnent respectivement

$$\begin{aligned}\varrho_1 &\equiv 2a_2(4a_1 a_2 B^2-k)+ka_1^3(9B^2+2d_1)=0,\\ \varrho_2 &\equiv 2k+a_1 a_2(B^2+2d_1)=0.\end{aligned} \qquad (9)$$

On en déduit

$$a_2\varrho_1-ka_1^2\varrho_2\equiv 2(a_2^2+ka_1^2)(4a_1 a_2 B^2-k)=0.$$

* En effet, si $a_2=0$, l'équation $\psi_0=\chi_2$ donne $B=0$.

Or si $k = 4a_1 a_2 B^2$, l'équation (9) donne $2d_1 = -9B^2$ et nous obtenons un cas particulier de la solution (α) déjà trouvée. Donc

$$k = -\frac{a_2^2}{a_1^2}$$

et, en substituant dans l'équation (9), $2d_1 = \frac{2a_2}{a_1^3} - B^2$. Nous obtenons ainsi les équations (β). Il est facile de voir que toutes les équations (8) en sont des conséquences.

Supposons maintenant que $\frac{A+B}{A-B} = 3$, d'où $A = 2B$. Les équations à vérifier sont

$$\psi_3 = 0,\ \psi_2 = 0,\ \psi_1 = 0,\ \psi_0 = \chi_3,\ \chi_2 = 0,\ \chi_1 = 0,\ \chi_0 = 0. \tag{10}$$

On obtient deux solutions nouvelles

$$A = 2B,\ k = \frac{2a_2^3}{a_1^3},\ 2d_1 = -\frac{6a_2^2}{a_1^4} - B^2,\ 2d_2 = -B^2; \qquad (\gamma_1)$$

$$A = 2B,\ a_2 = 0,\ 2d_1 = -4B^2,\ 2d_2 = -B^2. \qquad (\gamma_2)$$

Soit d'abord $a_2 = 0$. L'équation $\psi_3 = 0$ donne $2d_2 = -B^2$, et l'équation $\psi_0 = \chi_3$ donne $2d_1 = -4B^2$. On obtient les équations (γ_1) et on vérifie aisément que toutes les équations (10) sont alors vérifiées. Soit maintenant $a_2 \neq 0$. L'équation $\psi_3 = 0$ donne $2d_2 = -B^2$. Ensuite, les équations $\psi_0 = \chi_3$ et $\chi_0 = 0$ donnent respectivement

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\equiv 3a_2^2(k - a_1 a_2 B^2) + k a_1^4 (4B^2 + 2d_1) = 0, \\ \sigma_2 &\equiv 3k + a_1 a_2 (B^2 + 2d_1) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

On en déduit

$$a_2\sigma_1 - k a_1^3 \sigma_2 \equiv 3(a_2^3 - k a_1^3)(k - a_1 a_2 B^2) = 0.$$

Si $k = a_1 a_2 B^2$, (11) donne $2d_1 = -4B^2$ et l'on retrouve un cas particulier de la solution (α). Donc

$$k = \frac{a_2^3}{a_1^3};$$

de l'équation (11) on déduit alors

$$2d_1 = -B^2 - \frac{3a_2^2}{a_1^4}.$$

On obtient la solution (γ_2); il est facile de voir que toutes les équations (10) sont verifiées.

4. Maintenant, il n'existe plus de solution essentiellement distincte des précedents. En effet, si $\frac{A+B}{A-B} = -2$ ou -3 et $a_2 \neq 0$, il suffit d'échanger A et B pour retourner aux cas déjà examinées; d'autre part, un calcul aisé montre que les hypothéses $\frac{A+B}{A-B} = -2$ ou -3 et $a_2 = 0$ ne donnent ancune solution.

Il nous reste à calculeur les valeurs de β, γ, L et M.

Dans le cas (α), on peut supposer

$$A=\alpha+1,\ B=\alpha-1\,[\alpha(\alpha^2-1)\neq 0],\ a_1=a_2,\ h=4.$$

On obtient

$$\beta=\frac{1}{a_1}\frac{e^{(\alpha+1)(u-v)}}{1+e^{2(u-v)}},\quad \gamma=4a_1\frac{e^{(\alpha-1)(v-u)}}{1+e^{2(v-u)}},$$

$$L=\frac{b_1}{8a(\alpha+1)}e^{2(\alpha+1)u}+\frac{b_2}{8a_1(\alpha-1)}e^{2(\alpha-1)u}+\frac{1}{2a_1^2\alpha}e^{2\alpha u}-\frac{(\alpha+1)^2}{2}+$$
$$+\frac{6e^{2(u-v)}}{(1+e^{2(u-v)})^2}+\frac{2\alpha}{1+e^{2(u-v)}},$$

$$M=\frac{a_1b_1}{2(\alpha+1)}e^{2(\alpha+1)v}+\frac{a_1b_2}{2(\alpha-1)}e^{2(\alpha-1)v}-\frac{2}{\alpha}e^{2\alpha v}-\frac{(\alpha-1)^2}{2}+$$
$$+\frac{6e^{2(u-v)}}{(1+e^{2(u-v)})^2}-\frac{2\alpha}{1+e^{2(u-v)}}.$$

Dans le cas (β), on peut supposer $B=1$, $a_1=a_2$, $h=4$. On obtient

$$\beta=\frac{1}{a_1}\frac{e^{u-v}}{1+e^{2(v-u)}},\quad \gamma=-\frac{1}{a_1}\frac{e^{v-u}}{1+e^{2(u-v)}},$$

$$L=-\frac{a_1b_1}{6}e^{6u}-\frac{a_1b_2}{2}e^{2u}-e^{4u}-2-\frac{3}{2a_1^2}\frac{e^{2(u-v)}}{(1+e^{2(u-v)})^2}-$$
$$-\frac{1}{a_1^2}\frac{1}{1+e^{2(u-v)}},$$

$$M=\frac{a_1b_1}{6}e^{6v}+\frac{a_1b_2}{2}e^{2v}-e^{4v}-\frac{1}{2}-\frac{3}{2a_1^2}\frac{e^{2(u-v)}}{(1+e^{2(u-v)})^2}+$$
$$+\frac{1}{a_1^2}\frac{1}{1+e^{2(u-v)}}.$$

Dans le cas (γ_1), on peut supposer $B=1$, $a_1=a_2$, $h=3$. On obtient

$$\beta=\frac{1}{a_1}\frac{e^{u-v}}{1+e^{v-u}},\quad \gamma=\frac{2}{a_1}\frac{e^{v-u}}{1+e^{u-v}},$$

$$L=\frac{a_1b_1}{8}e^{4u}+\frac{a_1b_2}{4}e^{2u}+\frac{1}{2}e^{3u}-\frac{3}{a_1^2}-\frac{1}{2}+\frac{3}{a_1^2}\frac{e^{u-v}}{(1+e^{u-v})^2}+$$
$$+\frac{3}{a_1^2}\frac{1}{1+e^{u-v}},$$

$$M=\frac{a_1b_1}{4}e^{4v}+\frac{a_1b_2}{2}e^{2v}-e^{3v}-\frac{1}{2}+\frac{3}{a_1^2}\frac{e^{u-v}}{(1+e^{u-v})^2}-\frac{3}{a_1^2}\frac{1}{1+e^{u-v}}.$$

Dans le cas (γ_2) on peut supposer $B=1$, $a_1=1$, $h=3$. On obtient

$$\beta=e^{u-v},\quad \gamma=ke^{2(v-u)}$$

$$L=\frac{b_1}{4k}e^{4u}+\frac{1}{k}e^{3u}-2+3ke^{v-u},$$

$$M=\frac{b_2}{2}e^{2v}-e^{3v}-\frac{1}{2}.$$

5. Il nous reste à examiner les équations (E_6). Remarquons d'abord qu'on peut supposer $a_1 b_1 \neq 0$; on effet, si $a_1 = 0$ ou $b_1 = 0$, on retrouve un cas particulier de (E_4). Les équations II (15) donnent

$$\beta = \frac{e^{A(u-v)}}{a_1(u-v)+a_2}, \quad \gamma = \frac{ce^{-A(u-v)}}{a_1(u-v)+a_2}, \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{1}{2A} e^{2Au} \left[a_1 b_1 u^2 + \left(a_1 b_2 + a_2 b_1 - \frac{a_1 b_1}{A} \right) u + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_1 b_1}{2A^2} - \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2A} + \frac{a_2 b_2}{2} + h \right] + d_1 \\ V &= -\frac{c}{2A} e^{2Av} \left[a_1 b_1 v^2 + \left(a_1 b_2 - a_2 b_1 - \frac{a_1 b_1}{A} \right) v + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_1 b_1}{2A^2} - \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{2A} - \frac{a_2 b_2}{2} + h \right] + d_2. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Si $A = 0$, les équations (13) sont à remplacer par

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{a_1 b_1}{3} u^3 + \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{2} u^2 + \left(\frac{a_2 b_2}{2} + h \right) u + d_1, \\ V &= -c \left[\frac{a_1 b_1}{3} v^2 + \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{2} v^2 + \left(-\frac{a_2 b_2}{2} + h \right) v \right] + d_2. \end{aligned}\right\} \tag{13bis}$$

Des équations (12) on déduit aisément

$$F_1 = c \left[\frac{A}{a_1} \frac{1}{z} + \frac{3}{2} \frac{1}{z^2} \right], \quad F_2 = c \left[-\frac{A}{a_1} \frac{1}{z} + \frac{3}{2} \frac{1}{z^2} \right],$$

en posant pour abréger

$$z = a_1(u-v) + a_2. \tag{14}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation II (13) on trouve après un calcul un peu long

$$\left.\begin{aligned} &\eta + e^{A(u-v)} \left[\frac{6a_1(a_1^2+c)}{z^4} - \frac{6A(a_1^2+c)}{z^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2cA^2 + a_1^2(3A^2+2d_2)}{a_1 z^2} - \frac{A(A^2+2d_2)}{z} \right] \\ &\quad + e^{-A(u-v)} \left[\frac{6a_1(a_1^2+c)}{z^4} + \frac{6A(a_1^2+c)}{z^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2cA^2 + a_1^2(3A^2+2d_1)}{a_1 z^2} + \frac{A(A^2+2d_1)}{z} \right] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Ici $\eta = 0$ si $A \neq 0$, et si $A = 0$

$$\eta = \frac{cb_1}{a_1} \left(-\frac{1}{3} z + \frac{a_2^2}{z} - \frac{2}{3} \frac{a_2^3}{z^2} - \frac{2a_1 a_2 h}{b_1 z^2} \right).$$

On voit tout de suite que l'hypothèse $A = 0$ ne donne aucune solution nouvelle. En effet, le coefficient de z est $b_1 c$; si $c = 0$, $\gamma = 0$ et nous avons déjà remarqué que nous devons supposer $b_1 \neq 0$. Au contraire si $A \neq 0$ on obtient de (15) immédiatement

$$c = -a_1^2,\quad 2d_1 = -A^2,\quad 2d_2 = -A^2.$$

On peut supposer $A = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = b_2$ et on obtient

$$\beta = \frac{1}{a_1}\frac{e^{u-v}}{u-v},\quad \gamma = a_1\frac{e^{v-u}}{v-u},$$

$$L = \frac{1}{2}e^{2u}(a_1 b_1 u^2 + h) - \frac{1}{2} - \frac{1}{u-v} - \frac{3}{2}\frac{1}{(u-v)^2},$$

$$M = \frac{a_1^2}{2}e^{2v}(a_1 b_1 v^2 + h) - \frac{1}{2} + \frac{1}{u-v} - \frac{3}{2}\frac{1}{(u-v)^2}.$$

Tableau de quantités β, γ, L, M, relatives aux surfaces qui admettent un groupe continu à un paramètre de déformations projectives en elles mêmes.

Les transformations du groupe sont

$$\bar{u} = u + t,\ \bar{v} = v$$

pour l'espèce A, et

$$\bar{u} = u + t,\ \bar{v} = v + t$$

pour l'espèce B.

Espèce A.

1° $\quad \beta = 1,\ \gamma = v,\ L = 2au,\ M = -u + av^2 + b.$

2° $\quad \beta = 1,\ \gamma = e^{Av} + e^{-Av},$

$$L = -\frac{A^2}{2}u^2 + a,\ M = -Au(e^{Av} - e^{-Av}) + b.$$

3° $\quad \beta = 1,\ \gamma = e^v,\ L = -\frac{u^2}{2} + a,\ M = -ue^v + b.$

Espèce B_1.

4° $\quad \beta = e^x,\ \gamma = e^{-x}\frac{dF}{dx},\ L = 2\frac{dF}{dx} - F + a,$

$$M = \frac{dF}{dx} + F + e^{2v};$$

ici $x = u - v$, et F, fonction de x seule, est solution de l'équation différentielle du quatrième ordre

$$\frac{d^4F}{dx^4} - 3\frac{d^3F}{dx^3} + 3\frac{d^2F}{dx^2} - \frac{dF}{dx} + e^{2x}\left(\frac{d^2F}{dx^2} + 3\frac{dF}{dx} + 2F + 1\right) +$$
$$+ 2\left(\frac{d^2F}{dx^2} - \frac{dF}{dx}\right)\left(2\frac{dF}{dx} - F + a\right) + \frac{dF}{dx}\left(2\frac{d^2F}{dx^2} - \frac{dF}{dx}\right) = 0.$$

5° $\quad \beta = 1,\ \gamma = F,\ L = 2F + a,\ M = F + bv;$

F est fonction de $x = u - v$ seule et vérifie l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2F}{dx^2} + 3F^2 + (2a + 1)F = bx.$$

Espèce B_2.

6° $$\beta = e^x\left(\sqrt{\frac{dF}{dx}} + a\right),\quad \gamma = e^{-x}\left(\sqrt{\frac{dF}{dx}} - a\right),$$

$$L = -e^{2u} + b + \frac{3}{2}\frac{dF}{dx} + a\sqrt{\frac{dF}{dx}} - F + a^2 x,$$

$$M = e^{2v} + b + \frac{3}{2}\frac{dF}{dx} - a\sqrt{\frac{dF}{dx}} + F - a^2 x;$$

ici encore, F est fonction de la seule variable $x = u - v$ et satisfait à l'équation différentielle

$$(e^x + e^{-x})\left[\frac{1}{2}\frac{d^4F}{dx^4} - \frac{3}{4}\left(\frac{dF}{dx}\right)^{-1}\frac{d^2F}{dx^2}\frac{d^3F}{dx^3} + \frac{3}{8}\left(\frac{dF}{dx}\right)^{-2}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)^3 +\right.$$
$$+ 3\frac{dF}{dx}\frac{d^2F}{dx^2} + 4\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + 2a\left(\frac{dF}{dx}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{a^2}{2}\frac{d^2F}{dx^2} + 2(F - a^2x)\frac{dF}{dx} +$$
$$\left. + a(1 - a^2)\left(\frac{dF}{dx}\right)^{\frac{1}{2}} + b\frac{d^2F}{dx^2} + 2ab\left(\frac{dF}{dx}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + (e^x - e^{-x})\left[\frac{3}{2}\frac{d^3F}{dx^3} -\right.$$
$$- \frac{3}{4}\left(\frac{dF}{dx}\right)^{-1}\left(\frac{d^2F}{dx}\right)^2 + \left(F - a^2x + \frac{3}{2}\right)\frac{d^2F}{dx^2} + (1 - 3a^2 + 2b)\frac{dF}{dx} +$$
$$\left. + 2aF\left(\frac{dF}{dx}\right)^{\frac{1}{2}} - 2a^3x\left(\frac{dF}{dx}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = 0.$$

7° $$\beta = (1 - a)\,F + b,\quad \gamma = aF,$$

$$L = -au - \frac{b^2}{2} + \tfrac{3}{2}a(1 - a)F^2 + 2abF,$$

$$M = v + \tfrac{3}{2}a(1 - a)F^2 + abF.$$

F est fonction de la seule variable $x = u - v$ et vérifie l'équation différentielle du troisième ordre

$$\frac{d^3F}{dx^3} + 6(1 - a)F^2 + 6abF\frac{dF}{dx} - 2(1 - a)x\frac{dF}{dx} - 2(1 - a)F - b = 0.$$

8° $$\beta = -\frac{a}{u - v} + b,\quad \gamma = \frac{a}{u - v} + b,$$

$$L = u - \frac{3}{2}\frac{a^2}{(u - v)^2} + \frac{ab}{u - v} + \tfrac{1}{2}b^2,$$

$$M = v - \frac{3}{2}\frac{a^2}{(u - v)^2} - \frac{ab}{u - v} + \tfrac{1}{2}b^2.$$

Espèce B_3.

9° $$\beta = 4a\frac{e^{(\alpha+1)(u-v)}}{1 - e^{4(u-v)}},\quad \gamma = \frac{4}{a}\frac{e^{(\alpha+1)(v-u)}}{1 - e^{4(v-u)}},$$

$$L = \frac{ab}{2\alpha + 1}e^{2(\alpha+1)u} + \frac{ab}{2(\alpha - 1)}e^{2(\alpha-1)u} - \frac{(\alpha + 1)^2}{2} +$$
$$+ \frac{4[-(\alpha + 5)e^{4(u-v)} + \alpha - 1]}{(e^{4(u-v)} - 1)^2},$$

$$M=\frac{b}{2a(\alpha+1)}e^{2(\alpha+1)v}+\frac{b}{2a(\alpha-1)}e^{2(\alpha-1)v}-\frac{(\alpha-3)^2}{2}+ \\ +\frac{4[(\alpha-7)e^{4(u-v)}-\alpha+1]}{(e^{4(u-v)}-1)^2}.$$

10°
$$\beta=2a\frac{e^{(\alpha+1)(u-v)}-e^{(\alpha+3)(u-v)}}{1-e^{4(u-v)}},$$

$$\gamma=-\frac{2}{a}\frac{e^{-(\alpha-3)(u-v)}-e^{-(\alpha-1)(u-v)}}{1-e^{4(u-v)}},$$

$$L=\frac{ab}{2(\alpha+1)}e^{2(\alpha+1)u}+\frac{ab}{2(\alpha-1)}e^{2(\alpha-1)u}-\frac{(\alpha+1)^2}{2}+ \\ +\frac{2[(\alpha+3)e^{6(u-v)}-(\alpha+6)e^{4(u-v)}-(\alpha-3)e^{2(u-v)}+1]}{(1-e^{4(u-v)})^2},$$

$$M=\frac{b}{2a(\alpha+1)}e^{2(\alpha+1)v}+\frac{b}{2a(\alpha-1)}e^{2(\alpha-1)v}-\frac{(\alpha-1)^2}{2}+ \\ +\frac{2[(-\alpha+3)e^{6(u-v)}+(\alpha-6)e^{4(u-v)}+(\alpha+3)e^{2(u-v)}-1]}{(1-e^{4(u-v)})^2}.$$

11°
$$\beta=2a\frac{e^{(\alpha+1)(u-v)}+e^{(\alpha+3)(u-v)}}{1-e^{4(u-v)}},$$

$$\gamma=-\frac{2}{a}\frac{e^{-(\alpha-3)(u-v)}+e^{-(\alpha-1)(u-v)}}{1-e^{4(u-v)}},$$

$$L=\frac{ab}{2(\alpha+1)}e^{2(\alpha+1)u}+\frac{ab}{2(\alpha-1)}e^{2(\alpha-1)u}-\frac{(\alpha+1)^2}{2}+ \\ +\frac{2[-(\alpha+3)e^{6(u-v)}-(\alpha+6)e^{4(u-v)}+(\alpha-3)e^{2(u-v)}+1]}{(1-e^{4(u-v)})^2},$$

$$M=\frac{b}{2a(\alpha+1)}e^{2(\alpha+1)v}+\frac{b}{2a(\alpha-1)}e^{2(\alpha-1)v}-\frac{(\alpha-1)^2}{2}+ \\ +\frac{2[(\alpha-3)e^{6(u-v)}+(\alpha-6)e^{4(u-v)}-(\alpha+3)e^{2(u-v)}-1]}{(1-e^{4(u-v)})^2}.$$

12°
$$\beta=2a\frac{e^{u-v}}{1+e^{2(u-v)}},\quad \gamma=\frac{2}{a}\frac{e^{u-v}}{1+e^{2(u-v)}},$$

$$L=\frac{ab}{2}(e^{2u}-e^{-2u})-\frac{1}{2}+ac+\frac{6e^{2(u-v)}}{(1+e^{2(u-v)})^2},$$

$$M=\frac{a}{2b}(e^{2v}-e^{-2v})-\frac{1}{2}-\frac{c}{a}+\frac{6e^{2(u-v)}}{(1+e^{2(u-v)})^2}.$$

13°
$$\beta=2a\frac{e^{u-v}}{1-e^{2(u-v)}},\quad \gamma=-\frac{2}{a}\frac{e^{u-v}}{1-e^{2(u-v)}},$$

$$L=\frac{ab}{2}(e^{2u}-e^{-2u})-\frac{1}{2}-ac-\frac{6e^{2(u-v)}}{(1-e^{2(u-v)})^2},$$

$$M=\frac{a}{2b}(e^{2v}-e^{-2v})-\frac{1}{2}-\frac{c}{a}-\frac{6e^{2(u-v)}}{(1-e^{2(u-v)})^2}.$$

14°
$$\beta = \frac{a}{e^{v-u} - e^{u-v}}, \quad \gamma = \frac{a}{e^{u-v} - e^{v-u}},$$
$$L = b\,(e^{2u} - e^{-2u}) + c - \frac{3a^2}{2}\,\frac{1}{(e^{u-v} - e^{v-u})^2},$$
$$M = b\,(e^{2v} - e^{-2v}) + c - \frac{3a^2}{2}\,\frac{1}{(e^{u-v} - e^{v-u})^2}.$$

15°
$$\beta = \frac{4}{a+b}\,\frac{be^{v-u} - ae^{u-v}}{e^{2(v-u)} - e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = \frac{4}{a+b}\,\frac{ae^{v-u} - be^{u-v}}{e^{2(v-u)} - e^{2(u-v)}},$$
$$L = ae^{2u} - be^{-2u} - \frac{1}{2} - \frac{4a\,(a-b)}{(a+b)^2} +$$
$$+ \frac{4}{(a+b)^2}\,\frac{[6\,abe^{6(u-v)} - (7\,a^2 + 5\,b^2)\,e^{4(u-v)} + 6\,abe^{2(u-v)} + a^2 - b^2]}{(e^{4(u-v)} - 1)^2},$$
$$M = ae^{2v} - be^{-2v} - \frac{1}{2} + \frac{4\,b\,(a-b)}{(a+b)^2} +$$
$$+ \frac{4}{(a+b)^2}\,\frac{[6\,abe^{6(u-v)} - (5\,a^2 + 7\,b^2)\,e^{4(u-v)} + 6\,abe^{2(u-v)} - a^2 + b^2]}{(e^{4(u-v)} - 1)^2}.$$

16°
$$\beta = a\,\frac{e^{3(u-v)}}{1 - e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = -a\,\frac{e^{u-v}}{1 - e^{2(u-v)}},$$
$$L = be^{6u} + \frac{1}{2a}\,e^{2u} - \frac{1}{2} - a^2 - \frac{a^2}{2}\,\frac{5\,e^{2(u-v)} - 2}{(1 - e^{2(u-v)})^2},$$
$$M = be^{6v} + \frac{1}{2a}\,e^{2v} - \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2}\,\frac{e^{2(u-v)} + 2}{(1 - e^{2(u-v)})^2}.$$

17°
$$\beta = 2\,e^{3(u-v)}\left(\frac{1}{1 + e^{2(u-v)}} + a\,\frac{1}{1 - e^{2(u-v)}}\right),$$
$$\gamma = 2\,e^{v-u}\left(\frac{1}{1 + e^{2(u-v)}} - a\,\frac{1}{1 - e^{2(u-v)}}\right),$$
$$L = b\,(e^{6u} + 3\,e^{2u}) - \frac{1}{2} - 4\,(1 - a + a^2) +$$
$$+ 2\,\frac{5\,(1-a^2)\,e^{6(u-v)} - 2\,(4 - a + 4\,a^2)\,e^{4(u-v)} + (1 - a^2)\,e^{2(u-v)} + 2\,(1 - a + a^2)}{(1 - e^{4(u-v)})^2},$$
$$M = b\,(e^{6v} + 3e^{2v}) - \frac{1}{2} +$$
$$+ 2\,\frac{(1-a^2)\,e^{6(u-v)} - 2\,(2 + a + 2a^2)\,e^{4(u-v)} + 5\,(1-a^2)\,e^{2(u-v)} - 2\,(1 - a + a^2)}{(1 - e^{4(u-v)})^2}.$$

18°
$$\beta = \frac{a}{e^{2(v-u)} - 1}, \quad \gamma = \frac{a}{e^{2(u-v)} - 1},$$
$$L = b\,(e^{4u} + 2\,e^{2u}) + c - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\,\frac{4\,e^{2(u-v)} - 1}{(e^{2(u-v)} - 1)^2},$$
$$M = b\,(e^{4v} + 2\,e^{2v}) + c + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\,\frac{2\,e^{2(u-v)} - 1}{(e^{2(u-v)} - 1)^2}.$$

19° $$\beta = 2a\frac{1}{e^{2(v-u)}-1},\quad \gamma = \frac{2}{a}\frac{1}{e^{2(u-v)}-1},$$
$$L = \frac{a}{4}e^{4u} + abe^{2u} + c - 2\frac{4e^{2(u-v)}-1}{(e^{2(u-v)}-1)^2},$$
$$M = \frac{1}{4a}e^{4v} + \frac{b}{a}e^{2v} + \frac{c+2}{a^2} - 2\frac{2e^{2(u-v)}+1}{(e^{2(u-v)}-1)^2}.$$

20° $$\beta = \frac{e^{2(u-v)}(a+be^{u-v})}{1-e^{2(u-v)}},\quad \gamma = \frac{e^{2(v-u)}(a+be^{v-u})}{1-e^{2(v-u)}},$$
$$L = c(e^{4u}+2e^{2u}) - \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2} - b^2 -$$
$$-\frac{1}{2}\frac{6abe^{3(u-v)}+(4a^2+5b^2)e^{2(u-v)}-a^2-2b^2}{(1-e^{2(u-v)})^2},$$
$$M = c(e^{4v}+2e^{2v}) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{(2a^2+b^2)e^{2(u-v)}+6abe^{u-v}+a^2+2b^2}{(1-e^{2(u-v)})^2}.$$

21° $$\beta = a\frac{e^{3(u-v)}}{1-e^{2(u-v)}},\quad \gamma = a\frac{e^{3(v-u)}}{1-e^{2(v-u)}},$$
$$L = b(2e^{6u}+3e^{4u}) - \frac{1}{2} - a^2 - \frac{a^2}{2}\frac{5e^{2(u-v)}-2}{(1-e^{2(u-v)})^2},$$
$$M = b(2e^{6v}+3e^{4v}) - \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2}\frac{e^{2(u-v)}+2}{(1-e^{2(u-v)})^2}.$$

22° $$\beta = \frac{e^{3(u-v)}(a-e^{u-v})}{1-e^{2(u-v)}},\quad \gamma = \frac{e^{3(v-u)}(a-e^{v-u})}{1-e^{2(v-u)}},$$
$$L = b(2e^{6u}+3e^{4u}) - \frac{7}{2} - a^2 +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{8ae^{3(u-v)}-(6+5a^2)e^{2(u-v)}-2ae^{u-v}+3+2a^2}{(1-e^{2(u-v)})^2},$$
$$M = b(2e^{6v}+3e^{4v}) - 2 -$$
$$-\frac{1}{2}\frac{2ae^{3(u-v)}-2a^2e^{2(u-v)}-8ae^{u-v}+3+2a^2}{(1-e^{2(u-v)})^2}.$$

23° $$\beta = \frac{e^{3(u-v)}(a+e^{u-v})}{1-e^{2(u-v)}},\quad \gamma = \frac{e^{3(v-u)}(a+e^{v-u})}{1-e^{2(v-u)}},$$
$$L = b(2e^{6u}+3e^{4u}) - \frac{7}{2} - a^2 +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{-8ae^{3(u-v)}-(6+5a^2)e^{2(u-v)}+2ae^{u-v}+3+2a^2}{(1-e^{2(u-v)})^2},$$
$$M = b(2e^{6v}+3e^{4v}) - 2 +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{2ae^{3(u-v)}+2a^2e^{2(u-v)}-8ae^{u-v}-3-2a^2}{(1-e^{2(u-v)})^2}.$$

Espèce B_4.

24° $$\beta = \frac{a}{u-v}e^{u-v},\quad \gamma = \frac{1}{a(v-u)}e^{v-u},$$

$$L = abue^{2u} - \frac{1}{2} - \frac{1}{u-v} - \frac{3}{2}\frac{1}{(u-v)^2},$$
$$M = \frac{b}{a}ve^{2v} - \frac{1}{2} + \frac{1}{u-v} - \frac{3}{2}\frac{1}{(u-v)^2}.$$

25°
$$\beta = a(u-v), \quad \gamma = 1,$$
$$L = -2a^2u^2 + a(u-v) + b, \quad M = 2au + \frac{1}{2}.$$

Espèce B_5.

26°
$$\beta = \frac{1}{a}\frac{e^{(\alpha+1)(u-v)}}{1+e^{2(u-v)}}, \quad \gamma = 4a\frac{e^{(\alpha+1)(v-u)}}{1+e^{2(v-u)}},$$
$$L = \frac{b}{a(\alpha+1)}e^{2(\alpha+1)u} + \frac{c}{a(\alpha-1)}e^{2(\alpha-1)u} + \frac{1}{2a^2\alpha}e^{2\alpha u} -$$
$$- \frac{(\alpha+1)^2}{2} + \frac{6e^{2(u-v)}}{(1+e^{2(u-v)})^2} + \frac{2\alpha}{1+e^{2(u-v)}},$$
$$M = \frac{4ab}{\alpha+1}e^{2(\alpha+1)v} + \frac{4ac}{\alpha-1}e^{2(\alpha-1)v} - \frac{2}{\alpha}e^{2\alpha v} -$$
$$- \frac{(\alpha-1)^2}{2} + \frac{6e^{2(u-v)}}{(1+e^{2(u-v)})^2} - \frac{2\alpha}{1+e^{2(u-v)}}.$$

27°
$$\beta = a\frac{e^{u-v}}{1+e^{2(v-u)}}, \quad \gamma = -a\frac{e^{v-u}}{1+e^{2(u-v)}},$$
$$L = be^{6u} + ce^{2u} - e^{4u} - 2 - \frac{3a^2}{2}\frac{e^{2(u-v)}}{(1+e^{2(u-v)})^2} - a^2\frac{1}{1+e^{2(u-v)}},$$
$$M = -be^{6v} - ce^{2v} - e^{4v} - \frac{1}{2} - \frac{3a^2}{2}\frac{e^{2(u-v)}}{(1+e^{2(u-v)})^2} + a^2\frac{1}{1+e^{2(u-v)}}.$$

28°
$$\beta = a\frac{e^{u-v}}{1+e^{v-u}}, \quad \gamma = 2a\frac{e^{v-u}}{1+e^{u-v}},$$
$$L = be^{4u} + ce^{2u} + \frac{1}{2}e^{3u} - 3a^2 - \frac{1}{2} + 3a^2\frac{e^{u-v}}{(1+e^{u-v})^2} + 3a^2\frac{1}{1+e^{u-v}},$$
$$M = 2(be^{4v} + ce^{2v}) - e^{3v} - \frac{1}{2} + 3a^2\frac{e^{u-v}}{(1+e^{u-v})^2} - 3a^2\frac{1}{1+e^{u-v}}.$$

29°
$$\beta = e^{u-v}, \quad \gamma = ae^{2(v-u)},$$
$$L = be^{4u} + \frac{1}{a}e^{3u} - 2 + 3ae^{v-u},$$
$$M = ce^{4v} - e^{3v} - \tfrac{1}{2}.$$

Espèce B_6.

30°
$$\beta = \frac{1}{a}\frac{e^{u-v}}{u-v}, \quad \gamma = a\frac{e^{v-u}}{v-u},$$
$$L = (bu^2 + c)e^{2u} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{1}{(u-v)^2} - \frac{1}{u-v},$$
$$M = a^2(bv^2 + c)e^{2v} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{1}{(u-v)^2} + \frac{1}{u-v}.$$