Eduard Čech

Courbes tracées sur une surface dans l'espace projectif. I

Spisy Přírod. Fak. Univ. Brno 46 (1924), 35 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500893

SPISY
VYDÁVANÉ
PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU
MASARYKOVY UNIVERSITY
REDAKTOR

PUBLICATIONS
DE LA
FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ MASARYK
RÉDIGÉES PAR

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

ROK 1924 — ČÍS. 46

COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE DANS L'ESPACE PROJECTIF I.

PAR

EDOUARD ČECH

VYCHÁZÍ S PODPOROU MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A OSVĚTY

VLASTNÍM NÁKLADEM VYDÁVÁ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 63

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ
KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

TISKEM POLYGRAFIE V BRNĚ.

Dans le Mémoire «*Courbes tracées sur une surface dans l'espace affine*» (ces Publications, 1923, N° 28) j'ai étudié la géométrie affine d'une *bande d'élements de contact de second ordre.* En particulier, j'ai donné les expressions des invariants affines de la bande moyennant les deux formes différentielles qui définissent à affinités unimodulaires près la surface contenant la bande. Dans le présent Mémoire, je m'occupe du problème analogue de la géométrie projective. Dans cette première partie, j'exclus le cas d'une surface *réglée.* Au Chap. I, je rappelle les définitions et théorèmes connus de la géométrie projective des surfaces non réglées. Au Chap. II, j'étudie les propriétés projectives d'une bande d'éléments de contact de troisième ordre et je montre qu'on en peut passer très simplement aux bandes d'éléments de contact du quatrième ordre. Je donne les expressions des invariants projectifs de la bande moyennant les formes différentielles qui définissent à une homographie près la surface contenant la bande. La théorie développée aux pages qui suivent est susceptible de nombreuses applications géométriques; je n'en donne ici que très peu, au dernier paragraphe de cette partie. Dans la seconde partie, je m'occuperai des bandes d'éléments de contact de second ordre et des surfaces réglées.

CHAPITRE I.

Rappel de quelques théorèmes fondamentaux de la théorie projective des surfaces.

Avant de passer au contenu essentiel de ce Mémoire, il est nécessaire de rappeler plusieurs formules et notions de la théorie projective des surfaces. J'ometrai presque toutes les démonstrations, en renvoyant le lecteur au livre de *G. Fubini* et *E. Čech* «*Lezioni di geometria proiettivo-differenziale*» actuellement sous presse (Bologna, Zanichelli).

§ 1. Notation.

Je commence par exposer quelques symboles dont je ferai un usage continuel. I'indique le groupe de quatre coordonnées homogènes d'un point ou un plan par une lettre unique, p. ex. x, x_1, y, z, X, A_0, A_1, A_2, A_3 pour des points, ξ, ξ_1, η, ζ, Ξ, α_0, α_1, α_2, α_3 pour des plans; aussi, je parlerai du point x, ou du plan ξ, etc. Seulement, pour définir les symboles employés, il faut avoir une notation explicite pour les coordonnées; soient donc $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$ les coordonnées du point x, $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, $\xi^{(3)}$, $\xi^{(4)}$ celles du plan ξ, etc.

Une équation telle que $x = \lambda y + \mu z$, ou $\xi = \lambda\eta + \mu\zeta$, tient le lieu de quatre équations

$$x^{(i)} = \lambda y^{(i)} + \mu z^{(i)}, \text{ ou } \xi^{(i)} = \lambda\eta^{(i)} + \mu\zeta^{(i)} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Pareillement, $\frac{\partial x}{\partial u}$ p. ex. indique le point de coordonnées $\frac{\partial x^{(i)}}{\partial u}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ etc.

Je pose

$$Sx\xi = S\xi x = x^{(1)}\xi^{(1)} + x^{(2)}\xi^{(2)} + x^{(3)}\xi^{(3)} + x^{(4)}\xi^{(4)}.$$

L'équation $Sx\xi = 0$ signifie donc que le point x est situé dans le plan ξ.

Je pose

$$(x_1 x_2 x_3 x_4) = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & x_1^{(3)} & x_1^{(4)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & x_2^{(3)} & x_2^{(4)} \\ x_3^{(1)} & x_3^{(2)} & x_3^{(3)} & x_3^{(4)} \\ x_4^{(1)} & x_4^{(2)} & x_4^{(3)} & x_4^{(4)} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Condition pour que les points x_1, x_2, x_3, x_4 soient situés dans un même plan est donc $(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$. Corrélativement, on définit le symbole $(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4)$.

J'indique par $(x_1 x_2 x_3)$ les coordonnées du plan qui joint les trois points x_1, x_2, x_3; plus précisement, les quatre nombres symbolisés par $(x_1 x_2 x_3)$ se déterminent de manière qu'on ait, quelque soit le point x_4,

$$S(x_1 x_2 x_3)\ x_4 = (x_1 x_2 x_3 x_4).$$

Corrélativement, on définit le symbole $(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$.

J'indique par $(x_1 x_2)$ les coordonnées de la droite qui joint les deux points x_1 et x_2, c'est-à-dire les déterminants tirés de la matrice formée des deux premières lignes à droite de (1). Pareillement, j'indique par $(\xi_1 \xi_2)$ les coordonnées de la droite d'intersection des plans ξ_1, ξ_2, c'est-à-dire les déterminants tirés de la matrice

$$\begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} & \xi_1^{(2)} & \xi_1^{(3)} & \xi_1^{(4)} \\ \xi_2^{(1)} & \xi_2^{(2)} & \xi_2^{(3)} & \xi_2^{(4)} \end{pmatrix}.$$

Une équation telle que

$$(x_1 x_2) = (\xi_1 \xi_2)$$

tient le lieu des six équations

$$x_1^{(i)} x_2^{(j)} - x_1^{(j)} x_2^{(i)} = \xi_1^{(k)} \xi_2^{(l)} - \xi_1^{(l)} \xi_2^{(k)},$$

$$i, j, k, l = 1, 2, 3, 4;\ 1, 3, 4, 2;\ 1, 4, 2, 3;\ 3, 4, 1, 2;\ 4, 2, 1, 3;\ 2, 3, 1, 4.$$

Enfin si, d'après la définition qui précède,

$$(\xi_1 \xi_2) = (x_3 x_4),$$

je pose

$$S(x_1 x_2)(\xi_1 \xi_2) = (x_1 x_2 x_3 x_4).$$

On en déduit faisant usage de l'identité de Lagrange

$$S(x_1 x_2)(\xi_1 \xi_2) = \begin{vmatrix} Sx_1 \xi_1 & Sx_1 \xi_2 \\ Sx_2 \xi_1 & Sx_2 \xi_2 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

§ 2. *Association intrinsèque des facteurs arbitraires des coordonnées du point et du plan tangent mobiles d'une surface non développable.*

Une surface réelle S soit déterminée en exprimant les coordonnées de son point mobile x en fonctions de deux paramètres réels u_1, u_2. Pour que l'on ait une véritable surface, on sait qu'il est nécessaire qu'on ne puisse pas exprimer tous les rapports

$$x^{(1)} : x^{(2)} : x^{(3)} : x^{(4)}$$

en fonctions d'un seul d'entre eux. On s'assure aisément que cette circonstance à rejeter se présente alors et alors seulement si les quatre quantités symbolisées par $\left(x \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_2}\right)$ s'évanouissent simultanément. Manifestement, les quantités $\left(x \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_2}\right)$ sont les coordonnées du plan tangent à S au point x.

Plus généralement, ξ étant le plan tangent à S en x, on peut poser

$$\xi = \lambda \left(x \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_2}\right).$$

Il s'agit de fixer intrinsèquement le facteur arbitraire λ. A cet effet observons qu'on a aussi

$$x = \mu \left(\xi \frac{\partial \xi}{\partial u_1} \frac{\partial \xi}{\partial u_2}\right)$$

le facteur μ dépendant de λ. Si S est développable, et alors seulement, $\mu = 0$; nous excluons ce cas qui n'a pas d'intérêt pour nous. Manifestement, en remplaçant λ par $\lambda' = \varrho\lambda$, μ se trouve remplacé par $\mu' = \frac{\mu}{\varrho^3}$. On en voit qu'on peut déterminer rationnellement λ^4 en posant la condition $\lambda = \pm \mu$. Pour fixer univoquement λ, je poserai encore la condition $\lambda > 0$. En effectuant le calcul on voit qu'on reste dans le champ réel en posant $\lambda = \varepsilon\mu$, où $\varepsilon = +1$ si les asymptotiques de S sont réelles, $\varepsilon = -1$ si elles sont imaginaires. *Dans ce qui suit, nous supposons toujours les facteurs de x et de ξ associés de la manière que nous venons d'expliquer.*

On reconnait aisément que, si l'on remplace u_1, u_2 par des autres paramètres v_1, v_2, en ne changeant point le facteur arbitraire de x, les coordonnées ξ restent inalterées si

$$\frac{\partial v_1}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_2}-\frac{\partial v_1}{\partial u_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}>0,$$

et changent de signe si

$$\frac{\partial v_1}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_2}-\frac{\partial v_1}{\partial u_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_1}<0.$$

Aussi, en remplaçant x par ϱx, ϱ étant une fonction arbitraire de u_1, u_2, ξ se trouve remplacé par $\varrho\xi$.

On peut définir notre association des facteurs arbitraires de x et ξ d'une autre manière intéressante. En effet, j'ai démontré que les droites

$$(x\,dx) \pm \sqrt{\varepsilon}\,(\xi\,d\xi), \tag{1}$$

c'est-à-dire à coordonnées

$$(x^{(1)}\,dx^{(2)} - x^{(2)}\,dx^{(1)}) \pm \sqrt{\varepsilon}\,(\xi^{(3)}\,d\xi^{(4)} - \xi^{(4)}\,d\xi^{(3)}) \text{ etc.}$$

sont les tangentes asymptotiques à S au point x, de quelle manière que l'on choisisse les différentielles, du_1, du_2.

Remarquons enfin que les expressions effectives des coordonnées ξ déterminées comme nous avons dit contiennent les dérivées secondes des coordonnées x.

§ 3. Les formes différentielles F_2, F_3.

Maintenant, on peut définir les *formes différentielles intrinsèques F_2, F_3 de M. Fubini* en posant

$$F_2 = a_{11}\,du_1^2 + 2a_{12}\,du_1\,du_2 + a_{22}\,du_2^2 = \Sigma a_{rs}\,du_r\,du_s = -\,S dx\,d\xi, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} F_3 = a_{111}\,du_1^3 + 3a_{112}\,du_1^2\,du_2 + 3a_{122}\,du_1\,du_2^2 + a_{222}\,du_2^3 = \\ = \Sigma a_{rst}\,du_r\,du_s\,du_t = \tfrac{1}{2} S\,(dx\,d^2\xi - d^2x\,d\xi). \end{aligned} \tag{2}$$

Les différentielles secondes d^2u_1, d^2u_2 qui entrent en apparence dans la forme F_3 se détruisent en réalité, comme on voit en tenant compte des identités évidentes

$$Sx\xi = S\frac{\partial x}{\partial u_i}\xi = Sx\frac{\partial \xi}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, 2$$

qui permettent aussi de poser

$$F_2 = S\xi\,d^2x = Sx\,d^2\xi. \tag{3}$$

Posons encore

$$A = a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2,$$

ainsi que

$$-\,\varepsilon = \frac{A}{|A|} = \operatorname{sgn} A.$$

Si l'on effectue le calcul mentionné plus haut on démontre que

$$\xi = \sqrt{|A|}\left(x \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_2}\right), \tag{4}$$

$$x = \varepsilon\sqrt{|A|}\left(\xi \frac{\partial \xi}{\partial u_1} \frac{\partial \xi}{\partial u_2}\right). \tag{5}$$

La forme F_3 est *apolaire* à F_2, c'est-à-dire

$$a_{22}\,a_{11i} - 2a_{12}\,a_{12i} + a_{11}\,a_{22i} = 0. \quad i = 1,2. \tag{6}$$

Si S est une quadrique, et alors seulement, la forme F_3 est identiquement nulle.

Si l'on introduit au lieu de u_1, u_2 des nouveaux paramètres v_1, v_2, les formes F_2, F_3 restent inaltérées si

$$\frac{\partial v_1}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_2} - \frac{\partial v_1}{\partial u_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_1} > 0$$

et changent de signe si

$$\frac{\partial v_1}{\partial u_1}\frac{\partial v_2}{\partial u_2} - \frac{\partial v_1}{\partial u_2}\frac{\partial v_2}{\partial u_1} < 0.$$

En remplaçant les x par ϱx, et donc les ξ par $\varrho\xi$, les formes F_2, F_3 se trouvent remplacées par $\varrho^2 F_2$, $\varrho^2 F_3$.

§ 4. *Les formes normales φ_2, φ_3 et les coordonnées normales.*

L'expression

$$J = \frac{1}{A^2}\begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{122} \\ a_{112} & a_{122} & a_{222} \\ a_{11} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1}$$

est un invariant absolu des formes F_2, F_3. Si la surface S est réglée, et alors seulement, $J = 0$. Supposons dorénavant que la surface S ne soit pas réglée, donc $J \neq 0$.

Posons

$$\varphi_2 = -\frac{1}{J}F_2, \quad \varphi_3 = -\frac{1}{J}F_3. \tag{2}$$

Les formes φ_2 et φ_3 s'appellent les *formes normales.* Elles sont indépendantes du choix des paramètres u_1, u_2 et du facteur arbitraire des coordonnées x.

En changeant les paramètres u_1, u_2, l'expression J se comporte comme les formes F_2, F_3 mêmes; c'est-à-dire elle change de signe si le jacobien de la transformation est négatif. Nous n'emploierons que les paramètres u_1, u_2 pour lesquelles $J < 0$.

En remplaçant les coordonnées x par ϱx, l'expression J se trouve remplacée par $\varrho^{-2}J$. On peut donc choisir le facteur des x de manière que $J = -1$. C'est ce que nous ferons dorénavant. Les coordonnées homogènes x ainsi déterminées, et aussi les coordonnées ξ correspondantes, s'appellent les *coordonnées normales*. Dans les cas des coordonnées normales, on a évidemment

$$\varphi_2 = F_2, \ \varphi_3 = F_3.$$

Les coordonnées normales x est ξ ne sont déterminées qu'au signe près ; mais si l'on change le signe des x, on doit changer celui des ξ aussi.

Si les coordonnées x ne sont pas normales, on obtient les coordonnées normales en multipliant les x par une expression qui contient les dérivées troisièmes de x ; de même les coordonnées normales du plan tangent contiennent les dérivées troisièmes de x.

Si l'on soumet la surface S à une transformation homographique, les coordonnées normales x subissent une substitution linéaire *unimodulaire*, à coefficients numériques ; les coordonnées ξ subissent la substitution contragrédiente.

§ 5. *Le calcul absolu.*

Nous emploierons les formules du calcul absolu de M. Ricci, en prenant la forme φ_2 comme forme fondamentale. Nous indiquerons par $f_r, f_{rs}, f_{rst} \ldots$ les dérivées covariantes successifs d'une fonction f, et p. ex. par $c_{rs,i}, c_{rs,ik}, \ldots$ les derivées covariantes du système covariant c_{rs}. Nous emploierons aussi l'élèvement et l'abaissement des indices au sens habituel, posant

$$a^{11} = \frac{a_{22}}{A}, \ a^{12} = -\frac{a_{12}}{A}, \ a^{22} = \frac{a_{11}}{A},$$
$$a_{rs}^{\ \ i} = \Sigma\, a^{it}\, a_{rst}, \ a_r^{\ ik} = \Sigma\, a^{is} a^{kt}\, a_{rst} \text{ etc.}$$

Les dérivées covariantes du système a_{rs} sont identiquement nulles. La même propriété appartient au système ϑ_{rs}, où

$$\vartheta_{11} = 0, \ \vartheta_{12} = \sqrt{|A|}, \ \vartheta_{21} = -\sqrt{|A|}, \ \vartheta_{22} = 0.$$

Nous ferons usage aussi des différentielles contravariantes $\delta^2 u_i$, $\delta^3 u_i$ définies par les identités (où f est une fonction de u_1, u_2)

$$d^2 f = \Sigma f_i\, \delta^2 u_i + \Sigma f_{rs}\, du_r\, du_s,$$
$$d^3 f = \Sigma f_i\, \delta^3 u_i + 3\, \Sigma f_{rs}\, \delta^2 u_r\, du_s + \Sigma f_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t.$$

Je rappelerai ici quelques notations et formules que j'ai données dans mon Mémoire «*Étude analytique de l'élément linéaire projectif d'une surface*». (Ces Publications, n° 36) *

Je définis les *differentielles conjuguées* Du_i moyennant l'équation

$$Du_i = \Sigma\, a^{ir}\, \vartheta_{rs}\, du_s = \Sigma\, \vartheta^{ir}\, a_{rs}\, du_s. \tag{1}$$

Le système covariant

$$b_{rst} = \Sigma\, \vartheta_{it}\, a_{rs}^{\ \ i} \tag{2}$$

---

* Je citerai ce Mémoire par les lettres E. L. P.

est symmétrique; je pose
$$\varphi'_3 = \Sigma b_{rst} du_r du_s du_t.$$
On a l'identité
$$\varphi^2_3 - \varepsilon \varphi'^2_3 - \tfrac{1}{2}\varphi^3_2 = 0. \tag{3}$$

Des relations d'apolarité § 3 (6) on déduit facilement qu'il existe un système covariant à un indice ψ_i tel que

$$a_{rst,\,i} = \varepsilon \Sigma \vartheta_{ik} \psi^k . b_{rst}, \tag{4}$$
$$b_{rst,\,i} = \Sigma \vartheta_{ik} \psi^k . a_{rst}. \tag{5}$$

Rappelons aussi les identités

$$\varphi_2 d\varphi_3 - \tfrac{3}{2} d\varphi_2 . \varphi_3 + \varepsilon \varphi'_3 (\varphi_2 \Sigma \psi_i Du_i - 3 \Sigma \vartheta_{rs} du_r \delta^2 u_s) = 0, \tag{6}$$
$$\varphi_2 d\varphi'_3 - \tfrac{3}{2} d\varphi_2 . \varphi'_3 + \varphi_3 (\varphi_2 \Sigma \psi_i Du_i - 3 \Sigma \vartheta_{rs} du_r \delta^2 u_s) = 0. \tag{7}$$

Au § 3 de E. L. P. j'ai introduit les invariants

$$\Phi = \Sigma a^{ik} \psi_i \psi_k, \quad \Psi = \Sigma a^{ikl} \psi_i \psi_k \psi_l, \quad \Psi' = \Sigma b^{ikl} \psi_i \psi_k \psi_l, \tag{8}$$
liés par l'identité
$$\Psi^2 - \varepsilon \Psi'^2 = \tfrac{1}{2} \Phi^3. \tag{9}$$

Je veux encore déduire quelques identités qui ont pu trouver place déjà dans E. L. P. Des équations

$$\psi_1 du_1 + \psi_2 du_2 = \Sigma \psi_i du_i, \quad \psi_1 Du_1 + \psi_2 Du_2 = \Sigma \psi_i Du_i$$

on calcule

$$\psi_1 = \frac{Du_2 \Sigma \psi_i du_i - du_2 \Sigma \psi_i Du_i}{du_1 Du_2 - du_2 Du_1}, \quad \psi_2 = \frac{-Du_1 \Sigma \psi_i du_i + du_1 \Sigma \psi_i Du_i}{du_1 Du_2 - du_2 Du_1}.$$

Or

$$\Sigma \vartheta_{1r} du_r = \sqrt{|A|}\, du_2, \quad \Sigma \vartheta_{2r} du_r = -\sqrt{|A|}\, du_1,$$
$$\Sigma a_{1r} du_r = \varepsilon \sqrt{|A|}\, Du_2, \quad \Sigma a_{2r} du_r = -\varepsilon \sqrt{|A|}\, Du_1,$$
$$\varphi_2 = \varepsilon \sqrt{|A|}\, (du_1 Du_2 - du_2 Du_1),$$

ainsi que

$$\psi_i = \frac{\Sigma a_{ir} du_r . \Sigma \psi_i du_i - \varepsilon \Sigma \vartheta_{ir} du_r . \Sigma \psi_i Du_i}{\varphi_2}. \tag{10}$$

En substituant ces valeurs dans les expressions (8), on trouve après quelques réductions

$$\Phi = \frac{(\Sigma \psi_i du_i)^2 - \varepsilon (\Sigma \psi_i Du_i)^2}{\varphi_2}, \tag{11}$$

$$\Psi = -\frac{\varphi_3 (\Sigma \psi_i du_i)^3 - 3\varepsilon \varphi'_3 (\Sigma \psi_i du_i)^2 \Sigma \psi_i Du_i + 3\varepsilon \varphi_3 \Sigma \psi_i du_i (\Sigma \psi_i Du_i)^2 - \varphi'_3 (\Sigma \psi_i Du_i)^3}{\varphi^3_2}, \tag{12}$$

$$\Psi' = -\frac{\varphi'_3 (\Sigma \psi_i du_i)^3 - 3\varphi_3 (\Sigma \psi_i du_i)^2 \Sigma \psi_i Du_i + 3\varepsilon \varphi'_3 \Sigma \psi_i du_i (\Sigma \psi_i Du_i)^2 - \varepsilon \varphi_3 (\Sigma \psi_i Du_i)^3}{\varphi^3_2}. \tag{13}$$

Remarquons enfin qu'on déduit aisément de (10) les identités

$$\Sigma a_{rst} \psi^t du_r du_s = \frac{\varphi_3 \Sigma \psi_i du_i - \varepsilon \varphi'_3 \Sigma \psi_i Du_i}{\varphi_2}, \tag{14}$$

$$\Sigma b_{rst}\psi^t du_r\, du_s = \frac{\varphi'_3 \Sigma \psi_i du_i - \varphi_3 \Sigma \psi_i Du_i}{\varphi_2}, \tag{15}$$

qui nous seront utiles plus tard.

§ 6. *Les équations fondamentales.*

Soit

$$\Delta_2 f = \Sigma a^{rs} f_{rs}$$

le second paramètre différentiel. Posons

$$X = \tfrac{1}{2}\Delta x, \quad \Xi = \tfrac{1}{2}\Delta_2 \xi.$$

Alors on a les formules

$$\begin{aligned}
&Sx\xi = 0,\ Sx_1\xi = 0,\ Sx_2\xi = 0,\ SX\xi = 1,\\
&Sx\xi_1 = 0,\ Sx_1\xi_1 = -a_{11},\ Sx_2\xi_1 = -a_{12},\ SX\xi_1 = 0,\\
&Sx\xi_2 = 0,\ Sx_1\xi_2 = -a_{12},\ Sx_2\xi_2 = -a_{22},\ SX\xi_2 = 0,\\
&Sx\Xi = 1,\ Sx_1\Xi = 0,\ Sx_2\Xi = 0,\ SX\Xi = 1 - K;
\end{aligned} \tag{1}$$

$$(xx_1x_2X = \sqrt{|A|},\ (\xi\xi_1\xi_2\Xi) = \varepsilon\sqrt{|A|}. \tag{2}$$

Ici, comme dans tout ce qui suit, K indique la courbure de la forme φ_2.

Outre les formes φ_2, φ_3, on doit encore considérer une troisième forme différentielle que l'on peut choisir en plusieurs manières. Nous considérerons la forme linéaire $\Sigma\tau_i du_i$. Les trois formes φ_2, φ_3, $\Sigma\tau_i du_i$ étant données, on obtient à substitutions unimodulaires près les coordonnées normales x et ξ en intégrant les soi-disants *équations fondamentales* et tenant compte des relations (2). Les équations fondamentales sont

$$\begin{aligned}
x_{rs} &= \Sigma a^i_{rs} x_i + \tfrac{1}{2}\Sigma a^i_{rs}(\tau_i - \psi_i)x + a_{rs}X,\\
\xi_{rs} &= -\Sigma a^i_{rs}\xi_i + \tfrac{1}{2}\Sigma a^i_{rs}(\tau_i + \psi_i)\xi + a_{rs}\Xi,\\
X_i &= \tfrac{1}{2}[\tau_i - K_i - \Sigma a^{rs}_i(\psi_{r,s} + \psi_r\psi_s)]x + (1-K)x_i +\\
&\quad + \tfrac{1}{2}\Sigma a^{rs}_i(\tau_s + \psi_s)x_r,\\
\Xi_i &= -\tfrac{1}{2}[\tau_i + K_i - \Sigma a^{rs}_i(\psi_{r,s} + \psi_r\psi_s)]\xi + (1-K)\xi_i +\\
&\quad + \tfrac{1}{2}\Sigma a^{rs}_i(\tau_s - \psi_s)\xi_r.
\end{aligned}$$

Les coefficients des formes différentielles vérifient, outre les relations d'apolarité et l'équation $J = -1$ déjà rappelées et qu'on peut écrire

$$\begin{aligned}
\Sigma a^{rs} a_{rsi} &= 0,\\
\Sigma a^{rst} a_{rst} &= 2,
\end{aligned}$$

trois autres relations qu'on calcule comme les conditions d'integrabilité des équations fondamentales; elles sont

$$\begin{aligned}
&\Sigma a^{rs}_i(\tau_{r,s} + \psi_s\tau_r) + K_i - \psi_i = 0,\\
&\Sigma \vartheta^{rs}(\tau_{r,s} + \psi_s\tau_r) = \Sigma b^{rst}(\psi_{r,st} + 3\psi_{r,s}\psi_t + \psi_r\psi_s\psi_t).
\end{aligned}$$

§ 7. *Les quadriques de Moutard, la correspondance de Moutard et la correspondance de Segre.*

Soit $x = x\ (u_1, u_2)$ un point fixe de la surface S, ξ le plan tangent à S en x,

$$z = \mu x + \Sigma\lambda^i x_i \tag{1}$$

un point du plan ξ, tel que la droite (xz) ne soit pas une tangente asymptotique à S ($\Sigma a_{rs}\lambda^r\lambda^s \neq 0$). Considérons les sections de S moyennant tous les plans du faisceau de l'axe (xz), et les coniques osculatrices (à contact de quatrième ordre) en x de ses sections planes. Ces coniques engendrent une quadrique que j'appelle la *quadrique de Moutard* appartenant à la tangente (xz) de la surface S. L'équation de la quadrique de Moutard est compliquée est nous n'écrirons pas ici. Remarquons seulement, pour l'usage que nous en ferons plus tard, que le point

$$X+\left[\frac{1}{2}K-\frac{8}{9}\frac{(\Sigma a_{rst}\lambda^r\lambda^s\lambda^t)^2}{(\Sigma a_{rs}\lambda^r\lambda^s)^3}+\frac{\varepsilon}{3}\frac{\Sigma b_{rst}\lambda^r\lambda^s\lambda^t \,.\, \Sigma \vartheta^{ik}\psi_i\lambda_k}{(\Sigma a_{rs}\lambda^r\lambda^s)^2}\right]x \tag{2}$$

est situé sur la quadrique de Moutard appartenant à (xz).

Associons au point z son plan polaire ζ_1 par rapport à la quadrique de Moutard appartenant à la tangente (xz). On a

$$\zeta_1=(\mu\Sigma a_{rs}\lambda^r\lambda^s+\tfrac{2}{3}\Sigma a_{rst}\lambda^r\lambda^s\lambda^t)\,\xi+\Sigma a_{rs}\lambda^r\lambda^s\Sigma\lambda^i\xi_i. \tag{3}$$

Si le point z engendre le plan ξ, on obtient une correspondance birationnelle entre les points du plan ξ et les plans qui passent en x qui s'appelle le *correspondance de Moutard.*

Associons au point z son plan polaire ζ_2 par rapport à la quadrique de Moutard appartenant à la tangente conjuguée à (xz). On a

$$\zeta_2=(\mu\Sigma a_{rs}\lambda^r\lambda^s-2\Sigma a_{rst}\lambda^r\lambda^s\lambda^t)\,\xi+\Sigma a_{rs}\lambda^r\lambda^s\Sigma\lambda^i\xi_i.$$

La correspondance ainsi définie entre les points du plan ξ et les plans qui passent en x s'appelle la *correspondance de Segre.*

On voit aisément que condition nécessaire et suffisante pour que deux surfaces S et S' aient contact de troisième ordre au point x est que la correspondance de Moutard relative à S au point x soit identique à celle relative à S'. Dans ce théorème on peut remplacer la correspondance de Moutard par la correspondance de Segre.

On voit aussi aisément que, si deux surfaces S et S' se touchent au point x, condition nécessaire et suffisante pour que le contact soit du quatrième ordre est qu'à chaque tangente (non asymptotique) en x appartienne la même quadrique de Moutard relativement à S et relativement à S'.

§ 8. La quadrique de Lie et les courbes de Darboux et de Segre.

Soit $x=x\ (u_1, u_2)$ un point fixe de la surface S. Si l'on associe au point

$$z=\mu x+\Sigma\lambda^i x_i+\nu X \tag{1}$$

le plan

$$\zeta=\mu\xi+\Sigma\lambda^i\xi_i+\nu\Xi,$$

on obtient la polarité par rapport à une quadrique qu'on appelle la *quadrique de Lie* relative au point x de la surface S. Geométriquement, on obtient la quadrique de Lie en prenant l'une ou l'autre des deux courbes asymptotiques de S passant en x, soit C, en considérant la surface réglée R formées par les tangentes asymptotiques de S de l'autre système, et en construisant l'hyperboloïde osculateur à R le long de la génératrice qui passe en x.

La quadrique de Lie possède au point x un contact du second ordre avec la surface S; la courbe de contact de S et de la quadrique de Lie possède donc en x un point triple dont les tangentes sont données par l'équation cubique $\varphi_3 = 0$. Ces tangentes sont nommées les *tangentes de Darboux* de la surface S au point x. Les courbes de la surface S définies par l'équation différentielle $\varphi_3 = 0$ s'appellent les *courbes de Darboux* de S. Il en passent trois par chaque point de S; elles sont toutes réelles si $\varepsilon = -1$, et une seule famille est réelle si $\varepsilon = 1$.

Évidemment, si les x ne sont pas les coordonnées normales, les courbes de Darboux sont toujours données par l'équation différentielle $F_3 = 0$. Il en résulte, d'après la remarque finale de § 2, que si deux surfaces S et S' ont contact du second ordre le long d'une courbe C, et que C soit courbe de Darboux de S, C est aussi courbe de Darboux de S'. Dans la Note *„Sur la géométrie d'une surface et sur le facteur arbitraire des coordonnées homogènes"* (Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, vol. 31, ser. 5a, 2° sem. 1922) j'ai démontré un théorème plus général: Si la courbe de contact C de deux surfaces S et S' est une courbe de Darboux sur S, pour qu'elle soit aussi une courbe de Darboux sur S', il faut et il suffit que le rapport anharmonique des tangentes asymptotiques des deux surfaces soit constant le long de C. Ce théorème présente une analogie frappante avec le théorème bien connu sur deux surfaces se croisant le long d'une ligne qui est ligne de courbe pour toutes les deux surfaces. Dans la Note citée, j'ai donné aussi une définition géomètrique remarquable des courbes de Darboux: Si une courbe C tracée sur la surface S est une courbe de Darboux sur S, C est une courbe flecnodale de la surface engendrée par les tangentes asymptotiques (d'un système ou de l'autre) de S le long de C, et réciproquement.

Les courbes tracées sur S et conjuguées aux courbes de Darboux se nomment les *courbes de Segre*, leurs tangentes se nomment les *tangentes de Segre*. Analytiquement, les courbes de Segre sont définies par l'équation différentielle $\varphi'_3 = 0$. Dans la Note *„Systèmes trilinéares des lignes sur une surface et déformation projective des surfaces"* (Bulletin international de l'Académie de Sciences de Bohême, 1921) j'ai montré que les trois plans osculateurs en x aux courbes de Segre y passant appartiennent à un faisceau; l'axe de ce faisceau s'appelle le *premier axe* de la surface S au point x. J'en donnerai l'expression analytique au § suivant.

§ 9. *Les droites canoniques.*

Soit $x = x\ (u_1, u_2)$ un point fixe de la surface S; soit λ un nombre fixe. La droite

$$(\xi_1 - \lambda\psi_1\xi,\ \xi_2 - \lambda\psi_2\xi) \tag{1}$$

s'appelle la *droite canonique de première espèce* et de paramètre λ. En variant λ, on obtient un faisceau de droites au centre x dont le plan $\Sigma\vartheta^{rs}\psi_s\xi_r$ s'appelle le *plan canonique.* Les courbes tracées sur S et définies par l'équation différentielle $\Sigma\psi_i Du_i = 0$ s'appellent les *courbes canoniques de première espèce.* En chaque point de S, le plan canonique contient la tangente à la courbe canonique de première espèce.

La droite

$$(x_1 - \lambda\psi_1 x,\ x_2 - \lambda\psi_2 x) \tag{2}$$

s'appelle la *droite canonique de seconde espèce* et de paramètre λ. Elle est la polaire réciproque par rapport à la quadrique de Lie de la droite canonique de première espèce et du même paramètre. En variant λ, on obtient dans le plan ξ un faisceau de droites dont le centre $\Sigma\vartheta^{rs}\psi_s\xi_r$ s'appelle le *point canonique.* Les courbes tracées sur S et définies par l'équation différentielle $\Sigma\psi_i du_i = 0$ s'appellent les *courbes canoniques de seconde espèce;* elles sont conjuguées aux courbes canoniques de première espèce. En chaque point de S, la tangente à la courbe canonique de seconde espèce contient le point canonique.

Il y a des surfaces — c'est la surface cubique $x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)} = [x^{(4)}]^3$ et celles qui s'en dérivent moyennant la déformation projective — pour lesquelles $\psi_1 = \psi_2 = 0$. Pour ces surfaces toutes les droites canoniques de première (seconde) espèce coïncident en une seule; le plan canonique, le point canonique, et les courbes canoniques de première et de seconde espèce deviennent indeterminées.

La droite canonique de première (seconde) espèce et de paramètre 0 s'appelle la *première (seconde) normale projective* de la surface S au point x. Elle a été définie à peu près simultanément par M. Fubini et G. Green. La congruence de premières (et aussi des secondes) normales projectives de S possède la propriété remarquable qu'à leurs développables correspond un réseau conjugué sur S. M. Sannia a démontré que cette propriété, jointe aux autres de 1° passer en x, 2° être définie d'une manière invariable par des homographies, 3° ne changer pas si l'on remplace S par un autre surface ayant en x contact du quatrième ordre, caractérise la première normale projective — au moins si l'on néglige certaines surfaces exceptionnelles. J'ai trouvé une autre démonstration beaucoup plus simple (v. les „*Lezioni*" déjà citées).

La première normale projective de S en x coupe la quadrique de Lie en deux points, précisément en x et au point

$$y = X + \tfrac{1}{2}(K - 1)\,x. \tag{3}$$

Le plan tangent à la quadrique de Lie en y est

$$\eta = \Xi + \tfrac{1}{2}(K - 1)\,\xi. \tag{4}$$

Pour le but que nous poursuivons ici, il est avantageux de remplacer X et Ξ dans les équations fondamentales (§ 6) par y et η. La raison en est que les points y et η (ainsi que leurs coordonnées homogènes définies par les équations (3) et (4)) ne changent pas si l'on remplace la surface S par une autre surface S' ayant en x contact du quatrième ordre avec S, tandisque pour X et Ξ cela n'a pas lieu que si le contact de S et S' est du cinquième ordre. Les équations fondamentales ainsi transformées sont évidemment

$$x_{rs} = \Sigma a^i_{rs} x_i + \tfrac{1}{2}[(1-K)a_{rs} + \Sigma a^i_{rs}(\tau_i - \psi_i)]\,x + a_{rs} y, \tag{5}$$

$$\xi_{rs} = -\Sigma a^i_{rs}\xi_i + \tfrac{1}{2}[(1-K)a_{rs} + \Sigma a^i_{rs}(\tau_i + \psi_i)]\,\xi + a_{rs}\eta, \tag{6}$$

$$y_i = \tfrac{1}{2}[\tau_i - \Sigma a^{rs}_i(\psi_{r,s} + \psi_r\psi_s)]\,x + \tfrac{1}{2}(1-K)\,x_i + \tfrac{1}{2}\Sigma a^{rs}_i(\tau_s + \psi_s)\,x_r, \tag{7}$$

$$\eta_i = -\tfrac{1}{2}[\tau_i - \Sigma a^{rs}_i(\psi_{r,s} + \psi_r\psi_s)]\,\xi + \tfrac{1}{2}(1-K)\,\xi_i + \tfrac{1}{2}\Sigma a^{rs}_i(\tau_s - \psi_s)\,\xi_r. \tag{8}$$

La droite canonique de première (seconde) espèce et de paramètre $\frac{1}{3}$ s'appelle le *prcmier* (*second*) *axe* de la surface S au point x. La définition géométrique du premier axe a été donnée à la fin du § 8.

La droite canonique de première (seconde) espèce et de paramètre $\frac{1}{2}$ s'appelle la *première* (*seconde*) *directrice* de la surface S au point x. Les deux directrices ont été introduites par M. Wilczynski comme les directrices de la congruence linéaire intersection des complexes linéaires osculateurs en x au deux courbes asymptotiques de S y passant. On peut les définir d'une autre manière, due à M. Tzitzéica: Le long des deux courbes asymptotiques de S qui passent en x, on construit les surfaces réglées (R_1, R_2) formées par les tangentes asymptotiques de l'autres système; soit z_i ($i = 1, 2$) le conjugué armonique de x relativement au couple des points flecnodaux de R_i (v. Chap. III) sur la génératrice de R_i passant en x; la droite $(z_1 z_2)$ est la seconde directrice.

La droite canonique de première (seconde) espèce et de paramètre $\frac{1}{4}$ s'appelle la *première* (*seconde*) *arête* de la surface S au point x. Elle a été introduite par G. Green. Voici sa définition un peu modifiée. Soit C_i ($i = 1, 2$) les deux courbes asymptotiques de S qui passent en x, t_i leurs tangentes en x. Soit $\mathfrak{C}_i$ la conique osculatrice en x de la section de la dévéloppable des tangentes de C_i moyennant le plan ξ. Soit z_i le pôle de t_j ($i \neq j = 1, 2$) par rapport à la conique $\mathfrak{C}_i$. La droite $(z_1 z_2)$ est la seconde arête de S au point x.

CHAPITRE II.

Bandes d'élément de contact de troisième et de quatrième ordre.

§ 1. L'arc projectif d'une bande B_3 d'éléments de contact de troisième ordre.

Soit C une courbe tracée sur une surface S non réglée; supposons que S ne soit pas une courbe asymptotique de S. Soit B_3 la bande d'éléments de contact du troisième ordre de la surface S le long de la courbe C. Nous savons du Chap. I, § 4 que les coordonnées normales x des points et ξ des plans tangents à S aux points de C sont déterminées (au signe près) par la bande B_3.

On a identiquement le long de C

$$Sx\xi = Sx\,d\xi = S\xi\,dx = 0. \tag{1}$$

Soit

$$e = -\operatorname{sgn} S\,dx\,d\xi.$$

Si l'on eût $e = 0$, la courbe S serait une asymptotique de S ce que nous avons exclu. Remarquons que si $\varepsilon = -1$, on a $e = +1$. En effet, si $\varepsilon = -1$, $A < 0$ et la forme φ_2 est définite. Or si $\varepsilon = -1$, l'identité (3) du Chap. I, § 5 donne

$$\tfrac{1}{2}\varphi_2{}^3 = \varphi_3{}^2 + \varphi'_3{}^2 > 0.$$

La forme φ_2 est par suite définite positive, et $e = +1$. Au contraire, si $\varepsilon = 1$ on peut avoir $e = +1$ et $e = -1$. Soient t_1, t_2 les tangentes asymptotiques au point x, t la tangente à C en ce point, et τ la tangente en x à la courbe de Segre réelle (unique puisque $\varepsilon = 1$); alors e est le signe du rapport anharmonique $(t_1 t_2 \tau t)$. C'est ce qu'on reconnaît aisément de l'identité citée.

Posons

$$e\,ds^2 = S\xi\,d^2x = -S\,dx\,d\xi = Sx\,d^2\xi. \tag{2}$$

Supposons la courbe C orientée et soit $ds > 0$ si l'on parcourt C en sens positif. La variable s est alors déterminée à une constante additive près. Nous l'appelons l'*arc projectif de la bande* B_3.

§ 2. *Les invariants fondamentaux de la bande* B_3.

Définissons les expressions P_1, Q, R_1, R_2, N moyennant les équations

$$eP_1\,ds^3 = \tfrac{1}{2}S\,(dx\,d^2\xi - d^2x\,d\xi), \tag{1}$$

$$Q\,ds^6 = S\,(dx\,d^2x)\,(d\xi\,d^2\xi), \tag{2}$$

$$R_1\,ds^6 = (x\,dx\,d^2x\,d^3x),\quad R_2\,d\lambda^6 = (\xi\,d\xi\,d^2\xi\,d^3\xi), \tag{3}$$

$$(N - P_1Q)\,ds^7 = \tfrac{1}{2}S\,[(dx\,d^2x)\,(d\xi\,d^3\xi) - (dx\,d^3x)\,(d\xi\,d^2\xi)]. \tag{4}$$

On reconnaît aisément qu'on obtient les mêmes valeurs de quelle manière qu'on choisisse la variable indépendante. De plus, de la remarque finale du Chap. I, § 4 on déduit tout de suite que les expressions P_1, Q, R_1, R_2, N ne changent point si l'on soumet la bande B_3 à une homographie. Ce sont donc des invariants projectifs de la bande.

Évidemment

$$P_1 = \frac{e\varphi_3}{\sqrt{|\varphi_2|^3}}; \tag{5}$$

posons encore

$$P_2 = \frac{e\varphi'_3}{\sqrt{|\varphi_2|^3}}. \tag{6}$$

On voit tout de suite que P_2 aussi est un invariant de B_3; son carré s'exprime rationnellement moyennant P_1 d'après l'identité (v. Chap. I, § 5 (3)

$$P_1^2 - \varepsilon P_2^2 = \tfrac{1}{2} e = \pm \tfrac{1}{2}. \tag{7}$$

Cependant le signe de P_2 ne peut s'exprimer moyennant les x et les ξ. De là il résulte que la connaissance du signe ε et des coordonnées normales x et ξ le long de C ne suffit pas à déterminer la bande, excepté le cas où $P_2 = 0$, c'est-à-dire le cas où C est une courbe de Segre de S. Au contraire, nous verrons plus tard (au § 8) que si l'on connaît en outre le signe de P_2, la bande B_3 est complètement déterminée.

Dorénavant prenons l'arc projectif de B_3 comme variable indépendante et indiquons les derivées par des accents. Les équations § 1 (1) et (2) donnent

$$\begin{gathered} Sx\xi = 0,\ Sx'\xi = 0,\ Sx\xi' = 0, \\ Sx''\xi = e,\ Sx'\xi' = -e,\ Sx\xi'' = e. \end{gathered} \tag{8}$$

En dérivant les équations $Sx'\xi' = -e$, $Sx''\xi = e$, on déduit de (1)

$$Sx'\xi'' = eP_1,\ Sx''\xi' = -eP_1,\ Sx'''\xi = eP_1. \tag{9}$$

L'équation (2) donne

$$Q = S(x'x'')(\xi'\xi'').$$

Si l'on applique l'identité (2) de Chap. I on obtient, tenant compte de (8) et de (9),

$$Sx''\xi'' = e(P_1^2 - Q). \tag{10}$$

En dérivant les équations (9) et tenant compte de (10) on obtient

$$Sx'\xi''' = e(P'_1 - P_1^2 + Q),\ Sx'''\xi' = -e(P'_1 + P_1^2 - Q). \tag{11}$$

En appliquant à l'équation (4) l'identité que nous venons de citer, on obtient

$$2(N - P_1 Q) = \begin{vmatrix} Sx'\xi' & Sx'\xi''' \\ Sx''\xi' & Sx''\xi''' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} Sx'\xi' & Sx'\xi'' \\ Sx'''\xi' & Sx'''\xi'' \end{vmatrix}.$$

On en déduit faisant usage de (8), (9) et (11)

$$S(x'''\xi'' - x''\xi''') = 2e(N + P_1^3 - 2P_1 Q); \tag{12}$$

en dérivant (10) et tenant compte de (12), on obtient

$$Sx'''\xi'' = e(N + P_1^3 - 2P_1 Q + P_1 P'_1 - \tfrac{1}{2} Q'). \tag{13}$$

§ 3. *Le tétraèdre mobile $\varDelta$ attaché à la bande B_3.*

Nous nous proposons d'attacher à chaque point de la courbe C un tétraèdre $\varDelta$ aux sommets A_0, A_1, A_2, A_3 en demandant que, si l'on soumet la bande B_3 à une homographie, le tétraèdre se transforme par la même homographie, précisément par une substitution unimodulaire. Comme première condition nous posons

$$(A_0 A_1 A_2 A_3) = 1. \tag{1}$$

Soit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les faces du tétraèdre $\varDelta$, respectivement opposées aux sommets A_0, A_1, A_2, A_3. Alors

$$SA_i\alpha_k = 0. \quad i, k = 0, 1, 2, 3; \quad i \neq k. \tag{2}$$

Définissons les facteurs des coordonnées α_i moyennant les équations

$$SA_i\alpha_i = 1. \qquad i = 0, 1, 2, 3. \tag{3}$$

Alors

$$(\alpha_0\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3) = 1. \tag{4}$$

Posons maintenant

$$A_0 = x, \quad A_1 = x', \quad e\alpha_3 = \xi, \quad -e\alpha_1 = \xi'.$$

Cela est possible, parce que

$$Sx\xi = Sx\xi' = Sx'\xi = 0, \quad Sx'\xi' = -e.$$

Nous posons

$$A_3 = x'' + r_1x' + r_0x, \quad e\alpha_0 = \xi'' + \bar{r}_1\xi' + \bar{r}_0\xi.$$

Pour que ce choix soit permissible, il faut et il suffit qu'on prenne $r_1, r_0, \bar{r}_1, \bar{r}_0$ de manière que soit $SA_1\alpha_0 = SA_3\alpha_0 = SA_3\alpha_1 = 0$. Or d'après les équations (8) et (9) du § 2,

$$SA_1\alpha_0 = P_1 - \bar{r}_1, \quad SA_3\alpha_1 = P_1 + r_1,$$

ainsi qu'on doit prendre

$$r_1 = -P_1, \quad \bar{r}_1 = P_1.$$

De plus, d'après les équations citées

$$SA_3\alpha_0 = eSx''\xi'' - \bar{r}_1P_1 + r_1P_1 - r_1\bar{r}_1 + r_0 + \bar{r}_0 =$$
$$= eSx''\xi'' - P_1^2 + r_0 + \bar{r}_0,$$

et donc d'après l'équation (10) du § 2,

$$r_0 + \bar{r}_0 = Q.$$

Nous choisissons comme condition ultérieure $r_0 = \bar{r}_0$, ainsi que

$$A_3 = x'' - P_1x' + \tfrac{1}{2}Qx, \quad e\alpha_0 = \xi'' + P_1\xi' + \tfrac{1}{2}Q\xi.$$

Maintenant, le tétraèdre $\varDelta$ est complètement déterminé, car on voit facilement que

$$A_2 = -(\alpha_0\alpha_1\alpha_3), \quad \alpha_2 = -(A_0A_1A_3).$$

En définitive, *nous avons attaché à un point arbitraire x de la courbe C le tétraèdre $\varDelta$ dont les sommets et les faces sont*

$$A_0 = x, \; A_1 = x', \; eA_2 = -(\xi\xi'\xi''), \; A_3 = x'' - P_1x' + \tfrac{1}{2}Qx; \tag{5}$$
$$e\alpha_0 = \xi'' + P_1\xi' + \tfrac{1}{2}Q\xi, \; e\alpha_1 = -\xi', \; \alpha_2 = -(xx'x''), \; e\alpha_3 = \xi. \tag{6}$$

Il est facile de donner la définition géométrique du tétraèdre $\varDelta$: A_0 est simplement le point x de la courbe C. Les droites (A_0A_1), (A_0A_2) sont respectivement la tangente à la courbe C au point x et la tangente conjuguée de S. A_2 est le point de rebroussement, appartenant à x, de la développable enveloppée par les plans tangents à S le long de C. Le plan $(A_0A_1A_3)$ est le plan osculateur à la courbe C au point x. Le plan $(A_0A_2A_3)$ contient la première normale projective de S au point x. Le point A_1 est situé sur la seconde normale projective de S au point x. Enfin, la droite qui joint deux positions successives de A_1 et la droite intersection de deux positions successives de $(A_0A_2A_3)$ coupent la droite (A_0A_3) en deux points divisés armoniquement par A_0 et A_3.

§ 4. *Les équations fondamentales de la théorie projective de la bande B_3.*

Évidemment, on a des équations de la forme

$$A_i' = \sum_k a_{ik} A_k, \quad \alpha_i' = -\sum_k a_{ki}\,\alpha_k. \quad i, k = 0, 1, 2, 3.$$

Il s'agit de calculer les coefficients a_{ik}.

Des expressions de A_0, A_1, α_1, α_3 on déduit tout de suite

$$a_{00} = a_{02} = a_{03} = 0, \quad a_{01} = 1,$$
$$a_{03} = a_{23} = a_{33} = 0, \quad a_{13} = 1.$$

Tenant compte des valeurs de A_3 et α_0, on obtient de même tout de suite

$$a_{10} = -\tfrac{1}{2}Q, \quad a_{11} = P_1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = 1,$$
$$a_{01} = 1, \quad a_{11} = P_1, \quad a_{21} = 0, \quad a_{31} = -\tfrac{1}{2}Q.$$

Il reste à calculer a_{20}, a_{22}, a_{30}, a_{32}. Or des équations (2) et (3) du § 3 on tire

$$a_{ik} = SA'_i\alpha_k = -SA_i\alpha'_k.$$

On a donc

$$a_{20} = SA'_2\alpha_0 = -eS(\xi\xi'\xi''')\,\alpha_0 = -e(\xi\xi'\xi'''\alpha_0) =$$
$$= -(\xi, \xi', \xi''', \xi'' + P\xi' + \tfrac{1}{2}Q\xi) = (\xi\xi'\xi''\xi'''),$$

$$a_{32} = -SA_3\alpha'_2 = SA_3(xx'x''') = (xx'x'''x'') = -(xx'x''x''').$$

Par suite, les équations (3) du § 2 donnent

$$a_{30} = R_2, \quad a_{32} = -R_1,$$

De plus, d'après (5) et (6) du § 3,

$$a_{30} = SA'_3\alpha_0 = eS[x''' - P_1x'' + (\tfrac{1}{2}Q - P'_1)x' + \tfrac{1}{2}Q'x](\xi'' + P_1\xi' + \tfrac{1}{2}Q\xi)$$

et donc, d'après (8), (9), (10), (11) du § 2,

$$a_{30} = eSx'''\xi'' - P_1^3 + P_1Q + \tfrac{1}{2}P_1Q - P_1P_1' +$$
$$+ \tfrac{1}{2}Q' - P_1P_1' - P_1^3 + P_1Q + P_1^3 - \tfrac{1}{2}P_1Q + P_1P_1' +$$
$$+ \tfrac{1}{2}P_1Q - \tfrac{1}{2}P_1Q = eSx'''\xi'' - P_1^3 + 2P_1Q - P_1P_1' + \tfrac{1}{2}Q';$$

par suite, l'équation (13) du § 2 donne

$$a_{30} = N.$$

Il reste à calculer a_{22}. Or en dérivant l'identité (1) du § 3 on obtient

$$a_{00} + a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0,$$

ainsi que

$$a_{22} = -P_1.$$

En définitive, nous avons démontré les deux groupes *d'équations fondamentales de la théorie projective des bandes d'élements de contact de troisième ordre*:

$$\begin{aligned} A'_0 &= A_1, \\ A'_1 &= -\tfrac{1}{2}QA_0 + P_1A_1 + A_3, \\ A'_2 &= R_2A_0 - P_1A_2, \\ A'_3 &= NA_0 - \tfrac{1}{2}QA_1 - R_1A_2; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \alpha'_0 &= \tfrac{1}{2}Q\alpha_1 - R_2\alpha_2 - N\alpha_3, \\ \alpha'_1 &= -\alpha_0 - P_1\alpha_1 + \tfrac{1}{2}Q\alpha_3, \\ \alpha'_2 &= P_1\alpha_2 + R_1\alpha_3, \\ \alpha'_3 &= -\alpha_1. \end{aligned} \tag{2}$$

§ 5. Quelques applications des équations fondamentales.

On peut facilement donner la signification de l'évanouissement d'un invariant fondamental. Les équations § 2 (5) et (6) montrent tout de suite: Si $P_1 = 0$, la courbe C est une courbe de Darboux sur la surface S; si $P_2 = 0$, la courbe C est une courbe de Segre sur la surface S. Les équations § 2 (3) montrent: Si $R_1 = 0$, la courbe C est plane; si $R_2 = 0$, les plans tangents à la surface S le long de C passent par un point fixe. Cela se peut déduire aussi des équations fondamentales; en effet si $R_1 = 0$, $\alpha'_2 = P_1\alpha_2$ et le plan α_2 es fixe; et si $R_2 = 0$, $A'_2 = -P_1A_2$ et le point A_2 est fixe. Si $Q = 0$, la tangente à la courbe engendrée par le point A_1 rencontre la génératrice de l'enveloppe du plan α_1. Cela résulte de la manière dont nous avons déterminé le point A_3; mais on peut vérifier ce résultat des équations fondamentales; en effet

$$S\,(A_1A'_1)\,(\alpha_1\alpha'_1) = \begin{vmatrix} SA_1\alpha_1 & SA_1\alpha'_1 \\ SA'_1\alpha_1 & SA'_1\alpha'_1 \end{vmatrix} = Q.$$

L'équation $N = 0$ est la condition pour que la courbe engendrée par le point A_3 touche en A_3 le plan α_0; en effet

$$SA_3\alpha_0 = 0, \; SA'_3\alpha_0 = N.$$

Les arêtes (A_0A_1) et (A_0A_2) du tetraèdre $\varDelta$ engendrent évidemment toujours des surfaces développables; l'arête (A_0A_3) engendre une développable seulement si $R_1 = 0$; pareillement, l'arête (A_1A_2) engendre une développable si $R_2 = 0$. Enfin (A_1A_3) engendre une développable si $Q = 0$ ou $R_1 = 0$, et (A_2A_3) engendre une développable si $Q = 0$ ou $R_2 = 0$. En effet on tire des équations fondamentales, tenant compte de l'identité § 3 (1)

$$
\begin{aligned}
(A_0 A_3 A'_0 A'_3) &= -R_1, \\
(A_1 A_2 A'_1 A'_2) &= -R_2, \\
(A_1 A_3 A'_1 A'_3) &= -\tfrac{1}{2} Q R_1, \\
(A_2 A_3 A'_2 A'_3) &= -\tfrac{1}{2} Q R_2.
\end{aligned}
$$

Dans la théorie des courbes gauches, on associe au facteur arbitraire des coordonnées homogènes x d'une courbe gauche $\mathfrak{C}$ le facteur des coordonnées homogènes ξ des plans osculateurs à $\mathfrak{C}$ de manière que

$$(x\,dx) = \pm (\xi\, d\xi).$$

Alors on a p. ex. le théorème que la congruence linéaire osculatrice à la courbe $\mathfrak{C}$ au point x est engendrée par les faisceaux de droites, dont les centres et les plans sont respectivement

$$x + \lambda\, dx, \quad \xi + \lambda\, d\xi.$$

Si l'on applique cela à la courbe C, on voit facilement qu'on doit associer aux coordonnées A_0 des points de C les coordonnées

$$\frac{1}{\sqrt{|R_1|}} \alpha_2.$$

Par suite la congruence linéaire osculatrice à la courbe C au point x est engendrée par les faisceaux des droites dont les centres et les plans sont respectivement

$$A_0 + \lambda A_1, \quad R_1 \alpha_2 + \lambda [(P_1 R_1 - \tfrac{1}{2} R'_1)\, \alpha_2 + R_1^2\, \alpha_3].$$

Il serait facile de donner des autres exemples; mais ce qui précède suffit bien à montrer l'importance des équations fondamentales.

§ 6. *Transformation des équations fondamentales de la théorie projective des surfaces.*

Posons (v. Chap. I, § 5, (1))

$$Dx = \Sigma x_i Du_i, \quad D\xi = \Sigma \xi_i Du_i.$$

Nous voulons démontrer qu'on peut donner aux équations Chap. I, § 9, (5), (6), (7), (8) la forme suivante

$$
\begin{aligned}
d^2 x = {} & \frac{\frac{1}{2} d\varphi_2 + \varphi_3}{\varphi_2}\, dx + \varepsilon \frac{\Sigma \vartheta_{rs} du_r \delta^2 u_s - \varphi'_3}{\varphi_2}\, Dx + \\
& + \tfrac{1}{2} [(1-K)\, \varphi_2 + \Sigma a^i_{rs} \tau_i - \psi_i)\, du_r du_s)]\, x + \varphi_2 y,
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
d^2 \xi = {} & \frac{\frac{1}{2} d\varphi_2 - \varphi_3}{\varphi_2}\, d\xi + \varepsilon \frac{\Sigma \vartheta_{rs} du_r \delta^2 u_s + \varphi'_3}{\varphi_2}\, D\xi + \\
& + \tfrac{1}{2} [(1-K)\, \varphi_2 + \Sigma a^i_{rs} (\tau_i + \psi_i)\, du_r du_s]\, \xi + \varphi_2 \eta,
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{d} Dx = {} & \frac{\Sigma \vartheta_{rs} du_r \delta^2 u_s + \varphi'_3}{\varphi_2}\, dx + \frac{\frac{1}{2} d\varphi_2 - \varphi_3}{\varphi_2}\, Dx + \\
& + \tfrac{1}{2} \Sigma b^i_{rs} (\tau_i - \psi_i)\, du_r du_s \,.\, x,
\end{aligned} \tag{3}
$$

$$dD\xi = \frac{\Sigma\,\vartheta_{rs}du_r\delta^2u_s - \varphi'_3}{\varphi_2}\,d\xi + \frac{\frac{1}{2}\,d\varphi_2 + \varphi_3}{\varphi_2}\,D\xi + \\ + \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,b^i_{rs}(\tau_i + \psi_i)\,du_r du_s\,.\,\xi. \tag{4}$$

$$2\,dy = \left[1 - K - \frac{\Sigma a^i_{rs}(\tau_i + \psi_i)\,du_r du_s}{\varphi_2}\right]dx + \\ + \varepsilon\frac{\Sigma b^i_{rs}(\tau_i + \psi_i)\,du_r du_s}{\varphi_2}\,Dx + [\Sigma\tau_i du_i - \Sigma a^{rs}_i(\psi_{r,s} + \psi_r\psi_s)\,du_i]\,x, \tag{5}$$

$$2\,d\eta = \left[1 - K - \frac{\Sigma a^i_{rs}(\tau_i - \psi_i)\,du_r du_s}{\varphi_2}\right]d\xi + \\ + \varepsilon\frac{\Sigma b^i_{rs}(\tau_i - \psi_i)\,du_r du_s}{\varphi_2}\,D\xi - [\Sigma\tau_i du_i - \Sigma a^{rs}_i(\psi_{r,s} + \psi_r\psi_s)\,du_i]\,\xi. \tag{6}$$

Nous pouvons nous borner à prouver les équations (1), (3) et (5); car on sait qu'en passant à la surface correlative, φ_2, φ_3, φ'_3, $\Sigma\psi_i du_i$, $\Sigma\tau_i du_i$ changent respectivement en φ_2, $-\varphi_3$, $-\varphi'_3$, $\Sigma\psi_i du_i$, $-\Sigma\tau_i du_i$

Du Mémoire cité au Chap. I, § 5, rappelons les formules

$$\Sigma\,\vartheta^{ik}\vartheta_{il} = \begin{matrix} -\varepsilon \text{ si } k = l \\ 0 \text{ si } k \neq l \end{matrix} \quad (\text{E. L. P, § 1, (5)}), \tag{5}$$

$$\Sigma\,a_{rs}du_r Du_s = 0 \quad (\text{voir E. L. P. § 1, } (6_{\text{bis}})), \tag{6}$$

$$\Sigma\,a_{rst}du_r du_s Du_t = \varphi'_3 \quad (\text{E. L. P. § 2, (1)}), \tag{7}$$

$$\Sigma\,b_{rst}du_r du_s Du_t = \varepsilon\varphi_3. \tag{8}$$

$$\Sigma a^i_{rs}\,du_r Du_s = \Sigma b^i_{rs}du_r du_s; \tag{9}$$

les équations (8) et (9) se déduisent aisément de E. L. P. § 1 (6) et § 2 (2).

Remarquons aussi les formules

$$x_i = \frac{\Sigma\,a_{ik}du_k\,.\,dx - \varepsilon\Sigma\,\vartheta_{ik}du_k\,.\,Dx}{\varphi_2}, \tag{10}$$

qu'on déduit précisément de la même manière comme les équations Chap. I, § 5, (10).

Des équations (10) on tire

$$\Sigma x_i\,\delta^2u_i = \frac{\Sigma\,a_{ir}\delta^2u_i du_r\,.\,dx - \varepsilon\,\Sigma\,\vartheta_{ir}\delta^2u_i du_r\,.\,Dx}{\varphi_2};$$

or en différentiant l'identité

$$\varphi_2 = \Sigma\,a_{rs}du_r du_s$$

et tenant compte de ce que les dérivées covariantes de a_{rs} sont nulles, on obtient

$$d\varphi_2 = 2\,\Sigma\,a_{rs}du_r\delta^2u_s;$$

donc

$$\Sigma x_i\delta^2u_i = \frac{1}{2}\,\frac{d\varphi_2}{\varphi_2}\,dx + \varepsilon\,\frac{\Sigma\,\vartheta_{rs}du_r\delta^2u_s}{\varphi_2}\,Dx. \tag{11}$$

Encore, on tire de (10),

$$\Sigma a^i_{rs} x_i = \frac{dx}{\varphi_2} \Sigma a_{ik} a^i_{rs} du_k - \varepsilon \frac{Dx}{\varphi_2} \Sigma \vartheta_{ik} a^i_{rs} du_k,$$

$$\Sigma a^{rs}_i x_r = \frac{dx}{\varphi_2} \Sigma a_{rk} a^{rs}_i du_k - \varepsilon \frac{Dx}{\varphi_2} \Sigma \vartheta_{rk} a^{rs}_i du_k.$$

Or

$$\Sigma a_{ik} a^i_{rs} = a_{rsk}, \quad \Sigma a_{rk} a^{rs}_i = a^s_{ik},$$

$$\Sigma \vartheta_{ik} a^i_{rs} = b_{rsk}, \quad \Sigma \vartheta_{rk} a^{rs}_i = b^s_{ik} \text{ (v. Chap. I, § 5, (2))}$$

ainsi que

$$\Sigma a^i_{rs} x_i = \frac{dx}{\varphi_2} \Sigma a_{rsi} du_i - \varepsilon \frac{Dx}{\varphi_2} \Sigma b_{rsi} du_i, \tag{12}$$

$$\Sigma a^{rs}_i x_r = \frac{dx}{\varphi_2} \Sigma a^s_{ik} du_k - \varepsilon \frac{Dx}{\varphi_2} \Sigma b^s_{ik} du_k. \tag{13}$$

Des équations (12) et Chap. I, § 9, (5) on déduit

$$\begin{aligned} \Sigma x_{rs} du_r du_s = \frac{\varphi_3}{\varphi_2} dx - \varepsilon \frac{\varphi'_3}{\varphi_2} Dx + \\ + \tfrac{1}{2} [(1-K)\varphi_2 + \Sigma a^i_{rs} (\tau_i - \psi_i) du_r du_s] x + \varphi_2 y. \end{aligned} \tag{14}$$

Or

$$d^2 x = \Sigma x_i \delta^2 u_i + \Sigma x_{rs} du_r du_s.$$

Des équations (11) et (14) on tire (1).

Pareillement, des équations (13) et Chap. I, § 9, (7) on tire (5).

Il reste à démontrer l'équation (3). Or, les dérivées covariantes des ϑ^{ir} et des a_{rs} étant nulles,

$$\begin{aligned} dDx = d\Sigma \vartheta^{ir} a_{rs} du_s x_i = \Sigma \vartheta^{ir} a_{rs} \delta^2 u_s \,.\, x_i + \Sigma \vartheta^{ir} a_{rs} du_s x_{it} du_t = \\ = \Sigma \vartheta^{ir} a_{rs} \delta^2 u_s \,.\, x_i + \Sigma x_{rs} du_r Du_s. \end{aligned} \tag{15}$$

Des équations (10) on déduit, en tenant compte de (5)

$$\Sigma \vartheta^{ir} x_i = \frac{dx}{\varphi_2} \Sigma \vartheta^{ir} a_{ik} du_k - \varepsilon \frac{Dx}{\varphi_2} \Sigma \vartheta^{ir} \vartheta_{ik} du_k = -\frac{Du_r}{\varphi_2} dx + \frac{du_r}{\varphi_2} Dx,$$

ainsi que

$$\Sigma \vartheta^{ir} a_{rs} \delta^2 u \,.\, x_i = -\frac{dx}{\varphi_2} \Sigma a_{rs} Du_r \delta^2 u_s + \frac{Dx}{\varphi_2} \Sigma a_{rs} du_r \delta^2 u_s.$$

Or (v. Chap. I, § 5, (1))

$$\Sigma a_{rs} Du_r \delta^2 u_s = \Sigma a_{rs} a^{ri} \vartheta_{ik} du_k \delta^2 u_s = \Sigma \vartheta_{sk} du_k \delta^2 u_s = -\Sigma \vartheta_{rs} du_r \delta^2 u_s,$$

ainsi que

$$\Sigma \vartheta^{ir} a_{rs} \delta^2 u_s \,.\, x_i = \frac{dx}{\varphi_2} \Sigma \vartheta_{rs} du_r \delta^2 u_s + \frac{1}{2} \frac{d\varphi_2}{\varphi_2} Dx. \tag{16}$$

Des équations (6), (7), (8), (9) et Chap. I, § 9, (5) on déduit

$$\Sigma x_{rs} du_r Du_s = \frac{\varphi'_3}{\varphi_2} dx - \frac{\varphi_3}{\varphi_2} Dx + \tfrac{1}{2} \Sigma b^{\,i}_{rs} (\tau_i - \psi_i) du_r du_s \,.\, x. \tag{17}$$

Des équations (15) (16) et (17) on tire (3).

§ 7. Le tétraèdre $\varDelta$ relatif à une bande B_3 située sur une surface donnée.

Soit B_3 la bande d'éléments de contact de troisième ordre d'une surface S non réglée le long d'une courbe C non asymptotique. Posons

$$g = e\frac{\Sigma \vartheta_{rs} du_r \delta^2 u_s}{\sqrt{|\varphi_2|^3}}, \tag{1}$$

où, comme dans tout ce qui suit, les différentielles ce rapportent au passage le long de la courbe C.

L'équation (2) du § 1 donne pour l'arc projectif s de la bande B_3 la formule

$$s = \int \sqrt{|\varphi_2|}. \tag{2}$$

Soit A_0, A_1, A_2, A_3 les sommets et $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les faces du tétraèdre $\varDelta$ (v. § 3). Je démontrerai les formules

$$x = A_0, \ \frac{dx}{ds} = A_1, \ \frac{Dx}{ds} = (g + P_2) A_0 + \varepsilon A_1, \tag{3}$$

$$ey = \tfrac{1}{2}\left[e\frac{\Sigma a^i_{rs} \psi_i du_r du_s}{\varphi_2} - \varepsilon (g^2 - P^2{}_2)\right] A_0 - (g - P_2) A_2 + A_3, \tag{4}$$

$$e\xi = \alpha_3, \ -e\frac{d\xi}{ds} = \alpha_1, \ e\frac{D\xi}{ds} = (g - P_2)\alpha_3 + \alpha_2, \tag{5}$$

$$\eta = -\tfrac{1}{2}\left[e\frac{\Sigma \alpha^i_{rs} \psi_i du_r du_s}{\varphi_2} + \varepsilon (g^2 - P^2{}_2)\right]\alpha_3 - \varepsilon (g + P_2)\alpha_2 + \alpha_0. \tag{6}$$

Remarquons d'abord les identités

$$\begin{array}{llll} Sx\xi = 0, & Sdx \,.\, \xi = 0, & SDx \,.\, \xi = 0, & Sy \,.\, \xi = 1, \\ Sx \,.\, d\xi = 0, & Sdx D\xi = -\varphi_2, & SDx\, d\xi = 0, & Sy\, d\xi = 0, \\ Sx D\xi = 0, & Sdx D\xi = 0, & SDx D\xi = \varepsilon\varphi_2, & Sy D\xi = 0, \\ Sx\eta = 1, & Sdx \,.\, \eta = 0, & SDx \,.\, \eta = 0, & Sy\,\eta = 0, \end{array} \tag{7}$$

qui se déduisent facilement du Chap. I, § 6, (1) et § 9, (3), (4).

Des équations Chap. I, § 6, (2) et § 9, (3) et (4) on tire

$$(x, dx, Dx, y) = \varepsilon\varphi_2, \ \ (\xi, d\xi, D\xi, \eta) = \varphi_2. \tag{8}$$

Des équations (7) et (8) on obtient facilement

$$\begin{array}{ll} (x, dx, Dx) = \varepsilon\varphi_2 \,.\, \xi, & (x, dx, y) = -D\xi, \\ (\xi, d\xi, D\xi) = \varphi_2 \,.\, x, & (\xi, d\xi, \eta) = -\varepsilon Dx. \end{array} \tag{9}$$

Les deux premières équations (3) et (5) sont évidentes. Des équations § 3, (6) et § (6), 2 on obtient

$$-\alpha_2 d\lambda^3 = (xdxd^2x) = \varepsilon\frac{\Sigma \vartheta_{rs} du_r \delta^2 u_s - \varphi'_3}{\varphi_2}(x, dx, Dx) + \varphi_2 (x, dx, y).$$

Tenant compte de (1), (2) et (9) on en déduit aisément la troisième formule (5). Le calcul corrélatif donne la troisième formule (3).

Les équations (1) et (2) du § 6 donnent, s étant la variable indépendante (ainsi que $d\varphi_2 = ed\,(ds^2) = 0$)

$$x'' = P_1 x' + \varepsilon(g - P_2)\frac{Dx}{ds} + \frac{e}{2}\left[1 - K + \frac{\Sigma a^i_{rs}(\tau_i - \psi_i)\,du_r du_s}{\varphi_2}\right]x + ey, \quad (10)$$

$$\xi'' = -P_1\xi' + \varepsilon(g + P_2)\frac{D\xi}{ds} + \frac{e}{2}\left[1 - K + \frac{\Sigma a^i_{rs}(\tau_i + \psi_r)\,du_r du_s}{\varphi_2}\right]\xi + e\eta. \quad (11)$$

Ces équations peuvent s'écrire, d'après (3) et (5)

$$A'_1 = \left[\varepsilon(g^2 - P_2^2) + \frac{e}{2}(1 - K) + \frac{e}{2}\frac{\Sigma a^i_{rs}(\tau_i - \psi_i)\,du_r du_s}{\varphi_2}\right]A_0 + \\ + P_1 A_1 + (g - P_2)A_2 + ey,$$

$$-\alpha'_1 = \left[\varepsilon(g^2 - P_2^2) + \frac{e}{2}(1 - K) + \frac{e}{2}\frac{\Sigma a^i_{rs}(\tau_i + \psi_i)\,du_r du_s}{\varphi_2}\right]\alpha_3 + \\ + P_1\alpha_1 + \varepsilon(g + P_2)\alpha_2 + \eta.$$

On en déduit, faisant usage des formules § 4, (1) et (2)

$$ey = -\left[\varepsilon(g^2 - P_2^2) + \tfrac{1}{2}Q + \frac{e}{2}(1 - K) + \frac{e}{2}\frac{\Sigma a^i_{rs}(\tau_i - \psi_i)\,du_r du_s}{\varphi_2}\right]A_0 - \\ - (g - P_2)A_2 + A_3,$$

$$\eta = -\left[\varepsilon(g^2 - P_2^2) + \tfrac{1}{2}Q + \frac{e}{2}(1 - K) + \frac{e}{2}\frac{\Sigma a^i_{rs}(\tau_i + \psi_i)\,du_r du_s}{\varphi}\right]\alpha_3 - \\ - \varepsilon(g + P_2)\alpha_2 + \alpha_0.$$

Pour en déduire les formules cherchées (4) et (6), il suffit de faire usage de la formule (3) du § 10.

§ 8. Le théorème fondamental de la théorie de la bande B_3.

Nous avons déjà énoncé, au § 2, que *la bande B_3 est complètement déterminée, si l'on connaît le long de la courbe C les coordonnées normales x et ξ, le signe ε et le signe de l'invariant P_2.* Le moment est venu à prouver ce théorème fondamental. Ce théorème une fois démontré, les équations fondamentales (§ 4) montrent que la bande B_3 est déterminée, à homographies près, si l'on donne en fonctions de l'arc projectif s les invariants

$$P_1,\ P_2,\ Q,\ R_1,\ R_2,\ N$$

liés par l'identité § 2, (7).

Pour voir que la bande B_3 est complètement déterminée, c'est-à-dire qu'on connaît, en chaque point de C, l'élément du troisième ordre de la surface S, il suffit de montrer qu'on peut indiquer, en chaque point de C, la correspondance de Moutard (Chap. I, § 7). Or je dis que, *dans la correspondance de Moutard, au point*

$$z = \nu_0 A_0 + \nu_1 A_1 + \nu_2 A_2 \quad (1)$$

est associé le plan

$$\begin{aligned}\zeta_1 = [\nu_0(\nu_1^2 - \varepsilon\nu_2^2) + \tfrac{2}{3}P_1\nu_1^3 + 2\varepsilon P_1\nu_1\nu_2^2 - \tfrac{8}{3}P_2\nu_2^3]\,\alpha_3 - \\ -(\nu_1^2 - \varepsilon\nu_2^2)(\nu_1\alpha_1 - \nu_2\alpha_2).\end{aligned} \tag{2}$$

Au Chap. I, § 7 nous avons rappelé que, dans la correspondance de Moutard, au point

$$z_0 = \mu x + \Sigma\lambda^i x_i$$

est associé le plan

$$\zeta_0 = (\mu\Sigma a_{rs}\lambda^r\lambda^s + \tfrac{2}{3}\Sigma a_{rst}\lambda^r\lambda^s\lambda^t)\,\xi + \Sigma a_{rs}\lambda^r\lambda^s\,.\,\Sigma\lambda^i\xi_i.$$

En y substituant les expressions de x_i tirées des équations (10) du § 6 et les expressions analogues de ξ_i, et tenant compte des identités

$$\Sigma\lambda^i a_{ir}du_r = \Sigma\lambda_i du_i,$$
$$\Sigma\lambda^i\vartheta_{ir}du_r = \Sigma\lambda_i Du_i,$$

on trouve

$$z_0 = \mu x + \frac{\Sigma\lambda_i du_i}{\varphi_2}dx - \varepsilon\frac{\Sigma\lambda_i Du_i}{\varphi_2}Dx, \tag{3}$$

$$\zeta_0 = (\mu\Sigma a_{rs}\lambda^r\lambda^s + \tfrac{2}{3}\Sigma a_{rst}\lambda^r\lambda^s\lambda^t)\,\xi + \Sigma a_{rs}\lambda^r\lambda^s\left(\frac{\Sigma\lambda_i du_i}{\varphi_2}d\xi - \varepsilon\frac{\Sigma\lambda_i Du_i}{\varphi_2}D\xi\right). \tag{4}$$

Or il est facile de voir (cfr. Chap. I, § 5, (10) que

$$\lambda^r = \frac{du_r\Sigma\lambda_i du_i - \varepsilon Du_r\Sigma\lambda_i Du_i}{\varphi_2}. \tag{5}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\Sigma a_{rs}\lambda^r\lambda^s = \frac{1}{\varphi_2^2}[\Sigma a_{rs}du_r du_s(\Sigma\lambda_i du_i)^2 - 2\varepsilon\Sigma a_{rs}du_r Du_s\Sigma\lambda_i du_i\Sigma\lambda_i Du_i + \\ + \Sigma a_{rs}Du_r Du_s(\Sigma\lambda_i Du_i)^2] = \frac{(\Sigma\lambda_i du_i)^2 - \varepsilon(\Sigma\lambda_i Du_i)^2}{\varphi}\end{aligned} \tag{6}$$

où j'ai fait usage des formules § 6, (6) et E. L. P. § 1, (7). Des équations (5) on déduit de plus

$$\begin{aligned}\Sigma a_{rst}\lambda^r\lambda^s\lambda^t = \frac{1}{\varphi_2^3}[\Sigma a_{rst}du_r du_s du_t(\Sigma\lambda_i du_i)^3 - 3\varepsilon\Sigma a_{rst}du_r du_s Du_t(\Sigma\lambda_i du_i)^2\Sigma\lambda_i Du_i + \\ + 3\Sigma a_{rst}du_r Du_s Du_t\Sigma\lambda_i du_i(\Sigma\lambda_i Du_i)^2 - \varepsilon\Sigma a_{rst}Du_r Du_s Du_t(\Sigma\lambda_i Du_i)^3] = \\ = \frac{1}{\varphi_2^3}[\varphi_3(\Sigma\lambda_i du_i)^3 - 3\varepsilon\varphi'_3(\Sigma\lambda_i du_i)^2\Sigma\lambda_i Du_i + \\ + 3\varepsilon\varphi_3\Sigma\lambda_i du_i(\Sigma\lambda_i Du_i)^2 - \varphi'_3(\Sigma\lambda_i Du_i)^3]\end{aligned} \tag{7}$$

où j'ai fait usage des formules E. L. P., § 2, (1), (1_{bis}), (1_{ter}). En substituant ces valeurs dans l'équation (4), on obtient

$$\begin{aligned}\zeta_0 = \Big[\mu\frac{(\Sigma\lambda_i du_i)^2 - \varepsilon(\Sigma\lambda_i Du_i)^2}{\varphi_2} + \frac{2}{3}\frac{\varphi_3}{\varphi_2^3}(\Sigma\lambda_i du_i)^3 - 2\varepsilon\frac{\varphi'_3}{\varphi_2^3}(\Sigma\lambda_i du_i)^2\Sigma\lambda_i Du_i + \\ + 2\varepsilon\frac{\varphi_3}{\varphi_2^3}\Sigma\lambda_i du_i(\Sigma\lambda_i Du_i)^2 - \frac{2}{3}\frac{\varphi'_3}{\varphi_2^3}(\Sigma\lambda_i Du_i)^3\Big]x + \\ + \frac{(\Sigma\lambda_i du_i)^2 - \varepsilon(\Sigma\lambda_i Du_i)^2}{\varphi_2}\left(\frac{\Sigma\lambda_i du_i}{\varphi_2}d\xi - \varepsilon\frac{\Sigma\lambda_i Du_i}{\varphi_2}D\xi\right).\end{aligned} \tag{8}$$

Faisant usage de l'équation $ds^2 = e\varphi_2$ et des équations § 2, (5) et (6) et § 7, (3) et (5), on tire de (4) et de (8)

$$z_0 = \left(\mu - e\varepsilon g \frac{\Sigma \lambda_i D u_i}{ds} - e\varepsilon P_2 \frac{\Sigma \lambda_i D u_i}{ds}\right) A_0 + e \frac{\Sigma \lambda_i d u_i}{ds} A_1 - e \frac{\Sigma \lambda_i D u_i}{ds} A_2;$$

$$e\zeta_0 = \left[e \left(\mu - e\varepsilon g \frac{\Sigma \lambda_i D u_i}{ds}\right) \left\{ \left(\frac{\Sigma \lambda_i d u_i}{ds}\right)^2 - \varepsilon \left(\frac{\Sigma \lambda_i D u_i}{Ds}\right)^2 \right\} + \frac{2}{3} P_1 \left(\frac{\Sigma \lambda_i d u_i}{ds}\right)^3 + \right.$$
$$+ \varepsilon P_2 \left(\frac{\Sigma \lambda_i d u_i}{ds}\right)^2 \frac{\Sigma \lambda_i D u_i}{ds} + 2\varepsilon P_1 \frac{\Sigma \lambda_i d u_i}{ds} \left(\frac{\Sigma \lambda_i D u_i}{ds}\right)^2 + \left. \frac{5}{3} P_2 \left(\frac{\Sigma \lambda_i D u_i}{ds}\right)^3 \right] \alpha_3 -$$
$$- \left[\left(\frac{\Sigma \lambda_i d u_i}{ds}\right)^2 - \varepsilon \left(\frac{\Sigma \lambda_i D u_i}{ds}\right)^2 \right] \left[\frac{\Sigma \lambda_i D u_i}{ds} \alpha_1 + \frac{\Sigma \lambda_i D u_i}{ds} \alpha_2 \right].$$

Or si l'on pose

$$\nu_0 = \mu - e\varepsilon g \frac{\Sigma \lambda_i D u_i}{ds} - e\varepsilon P_2 \frac{\Sigma \lambda_i D u_i}{ds},$$
$$\nu_1 = e \frac{\Sigma \lambda_i d u_i}{ds}, \quad \nu_2 = - e \frac{\Sigma \lambda_i D u_i}{ds},$$

on voit tout de suite que $z_0 = z$, $\zeta_0 = \zeta_1$, z et ζ_1 étant définies respectivement par (1) et (2).

Un calcul tout analogue à celui que nous venons de faire montre que, *dans la correspondance de Segre, au point* (1) *est associé le plan*

$$\zeta_2 = [\nu_0(\nu_1^2 - \varepsilon\nu_2^2) - P_1\nu_1^3 - 3\,\varepsilon P_2 \nu_1^2 \nu_2 - 3\,\varepsilon P_1 \nu_1 \nu_2^2 - P_2 \nu_2^3]\,\alpha_3 - \\ - (\nu_1^2 - \varepsilon\nu_2^2)(\nu_1\alpha_1 - \nu_2\alpha_2). \tag{7}$$

§ 9. *Les invariants projectifs d'une bande B_4 d'éléments de contact de quatrième ordre.*

Considérons maintenant une bande B_4 d'éléments de contact de quatrième ordre qui contient la bande B_3 d'éléments de troisième ordre étudiée jusqu'ici. On s'assure aisément que les expressions

$$H_1 = \frac{\Sigma \psi_i d u_i}{ds}, \quad H_2 = \frac{\Sigma \psi_i D u_i}{ds} \tag{1}$$

sont des invariants projectifs de B_4. Ils ne sont pas d'ailleurs indépendants, mais liés par l'identité

$$3\, P_2 H_1 - P_1 H_2 = 3\,(R_1 - \varepsilon R_2) - 8\, \frac{dP_2}{ds} \tag{2}$$

comme nous prouverons au § suivant.

Ici, je veux montrer que *la bande de quatrième ordre B_4 est complètement déterminée si l'on connaît la bande de troisième ordre B_3 et, en chaque point de la courbe C, les valeurs des invariants H_1 et H_2.* Avant de prouver ce résultat, je veux montrer par quelques exemples comme un invariant quelconque de B_4 peut s'exprimer moyennant les H_1, H_2 et les invariants de B_3.

Je commence par l'identité

$$g = \frac{1}{3} H_2 + \frac{1}{3} \frac{P'_2}{P_1} = \frac{1}{3} H_2 + \frac{\varepsilon}{3} \frac{P'_1}{P_2}, \tag{3}$$

g étant défini par l'équation (1) du § 7. L'expression $\frac{P'_2}{P_1}$ n'a pas de sens si $P_1 = 0$; pareillement $\frac{P'_1}{P_2}$ si $P_2 = 0$; ces deux cas exclus, les deux valeurs données pour g sont bien égales, en vertu de l'identité

$$P_1 P'_1 - \varepsilon P_2 P'_2 = 0, \tag{4}$$

qu'on obtient en différentiant la formule (7) du § 2 par rapport à s. On voit sans peine que les équations (3) sont des conséquences des équations § 2, (5), (6) et Chap. I, § 5, (6), (7).

Des autres exemples fournissent les formules

$$e \frac{\Sigma a_{rst} \psi^t du_r du_s}{\varphi_2} = P_1 H_1 - \varepsilon P_2 H_2, \tag{5}$$

$$e \frac{\Sigma b_{rst} \psi^t du_r du_s}{\varphi_2} = P_2 H_1 - P_1 H_2, \tag{6}$$

qu'on déduit tout de suite des identités Chap. I, § 5, (14), (15).

Comme dernier exemple, considérons les invariants Φ, Ψ, Ψ' définis au Chap. I, § 5, (8). On a

$$\Phi = e (H_1^2 - \varepsilon H_2^2), \tag{7}$$

$$\Psi = - P_1 H_1^3 + 3 \varepsilon P_2 H_1^2 H_2 - 3 \varepsilon P_1 H_1 H_2^2 + P_2 H_2^3, \tag{8}$$

$$\Psi' = - P_2 H_1^3 + 3 P_1 H_1^2 H_2 - 3 \varepsilon P_2 H_1 H_2^2 + \varepsilon P_1 H_2^3, \tag{9}$$

ce qu'on vérifie facilement à l'aide des formules Chap. I, § 5, (11), (12), (13).

Venons à la démonstration du théorème énoncé plus haut. D'après la remarque finale du Chap. I, § 7, il faut seulement prouver que si l'on connaît B_3, H_1 et H_2, on peut déterminer, en chaque point x de C, la quadrique de Moutard M appartenant à une tangente quelconque

$$t = (x, \Sigma \lambda^i x_i) \tag{10}$$

à S en x. Or soit t' la tangente conjuguée *à* t. Le plan polaire, par rapport à M, d'un point situé sur t correspond à ce point dans la correspodance de Moutard; le plan polaire, par rapport à M, d'un point située sur t' correspond à ce point dans la correspondance de Segre. On en déduit aisément que, la bande B_3 étant donnée, la quadrique M est située nécessairement dans un certain faisceau connu; pour achever la détermination de M, il suffit d'en connaître un point situé en dehors de ξ, p. ex. l'intersection x_M (différente de x) de M avec la première normale projective (v. Chap. I, § 9) de la surface S au point x. Il résulte des formules Chap. I, § 7, (2) et § 9, (3) que

$$x_M = y + \left[\frac{1}{2} - \frac{8}{9} \frac{(\Sigma a_{rst} \lambda^r \lambda^s \lambda^t)^2}{(\Sigma a_{rs} \lambda^r \lambda^s)^3} + \frac{\varepsilon}{3} \frac{\Sigma b_{rst} \lambda^r \lambda^s \lambda^t \,.\, \Sigma \vartheta^{ik} \psi_i \lambda_k}{(\Sigma a_{rs} \lambda^r \lambda^s)^2} \right] x. \tag{11}$$

Or je montrerai que si

$$t=(A_0, \nu_1 A_1+\nu_2 A_2), \tag{12}$$

on a

$$x_M=\left\{\frac{e}{2}\frac{\Sigma a_{rst}\psi^t du_r du_s}{\varphi_2}-\frac{\varepsilon}{2}(g^2-P_2^2)-\right.$$
$$-e\frac{8}{9}\frac{(P_1\nu_1^3+3P_2\nu_1^2\nu_2+3\varepsilon P_1\nu_1\nu_2^2+\varepsilon P_2\nu_2^3)^2}{(\nu_1^2-\varepsilon\nu_2^2)^3}+ \tag{13}$$
$$\left.+\frac{e\varepsilon}{3}\frac{(H_2\nu_1+\varepsilon H_1\nu_2)(P_2\nu_1^3+3\varepsilon P_1\nu_1^2\nu_2+3\varepsilon P_2\nu_1\nu_2^2+P_1\nu_2^3)}{(\nu_1^2-\varepsilon\nu_2^2)^2}\right\}A_0-$$
$$-(g-P_2)A_2+A_3,$$

ainsi que les formules (3) et (5) montrent bien que le point x_M est connu.

Commençons par montrer que

$$t=(x, \Sigma\lambda^i x_i)=e\left(A_0, \frac{\Sigma\lambda_i du_i}{ds}A_1-\varepsilon\frac{\Sigma\lambda_i Du_i}{ds}A_2\right). \tag{14}$$

De l'équation § 8 (5) on déduit

$$\Sigma\lambda^i x_i=\frac{dx\,\Sigma\lambda_i du_i-\varepsilon Dx\,\Sigma\lambda_i Du_i}{\varphi_2}.$$

D'après § 7, (3) on a donc

$$\Sigma\lambda^i x_i=e\frac{\Sigma\lambda_i du_i}{ds}A_1-e\varepsilon\frac{\Sigma\lambda_i Du_i}{ds}[(g+P_2)A_0+\varepsilon A_2],$$

d'où la formule (14) s'obtient immédiatement.

De l'équation citée § 8, (5) on déduit encore

$$\Sigma\vartheta^{ik}\lambda_i\psi_k=\Sigma\vartheta_{ik}\lambda^i\psi^k=\frac{\Sigma\vartheta_{ik}\psi^i du_k.\Sigma\lambda_i du_i-\varepsilon\Sigma\vartheta_{ik}\psi^i Du_k.\Sigma\lambda_i Du_i}{\varphi_2}.$$

Or d'après Chap. I, § 5, (1) et Chap. II, § 6, (5)

$$\Sigma\vartheta_{ik}\psi^i du_k=\Sigma a^{ri}\vartheta_{ik}du_k\psi_r=\Sigma\psi_r Du_r,$$
$$\Sigma\vartheta_{ik}\psi^i Du_k=\Sigma\psi^i\vartheta_{ik}\vartheta^{ks}a_{sr}du_r=\varepsilon\Sigma\psi^i a_{ir}du_r=\varepsilon\Sigma\psi_r du_r,$$

ainsi que

$$\Sigma\vartheta^{ik}\lambda_i\psi_k=\frac{\Sigma\psi_i Du_i\,\Sigma\lambda_i du_i-\Sigma\psi_i du_i\,\Sigma\lambda_i Du_i}{\varphi_2}=$$
$$=e\left(H_2\frac{\Sigma\lambda_i du_i}{ds}-H_1\frac{\Sigma\lambda_i Du_i}{ds}\right). \tag{15}$$

Remarquons aussi la formule

$$\Sigma b_{rst}\lambda^r\lambda^s\lambda^t=\frac{1}{\varphi_2^3}[\varphi'_3(\Sigma\lambda_i du_i)^3-3\varphi_3(\Sigma\lambda_i du_i)^2\Sigma\lambda_i Du_i+$$
$$+3\varepsilon\varphi'_3\Sigma\lambda_i du_i(\Sigma\lambda_i Du_i)^2-\varepsilon\varphi_3(\Sigma\lambda_i Du_i)^3],$$

qu'on obtient précisément comme la formule § 8, (7). Des équations (13), (15), (16); § 2, (5), (6); § 8, (6), (7) on déduit

$$
\begin{aligned}
ex_M = ey &+ \\
+ \Bigg\{ \frac{e}{2} - \frac{8}{9} & \frac{\left[P_1\left(\frac{\Sigma\lambda_i du_i}{ds}\right)^3 - 3\varepsilon P_2\left(\frac{\Sigma\lambda_i du_i}{ds}\right)^2 \frac{\Sigma\lambda_i Du_i}{ds} + 3\varepsilon P_1 \frac{\Sigma\lambda_i du_i}{ds}\left(\frac{\Sigma\lambda_i Du_i}{ds}\right)^2 - P_2\left(\frac{\Sigma\lambda_i Du_i}{ds}\right)^3\right]^2}{\left[\left(\frac{\Sigma\lambda_i du_i}{ds}\right)^2 - \varepsilon\left(\frac{\Sigma\lambda_i Du_i}{ds}\right)^2\right]^3} + \\
+ \frac{\varepsilon}{3} & \frac{\left(H_2 \frac{\Sigma\lambda_i du_i}{ds} - H_1 \frac{\Sigma\lambda_i Du_i}{ds}\right)\left[P_2\left(\frac{\Sigma\lambda_i du_i}{ds}\right)^3 - 3P_1\left(\frac{\Sigma\lambda_i du_i}{ds}\right)^2 \frac{\Sigma\lambda_i Du_i}{ds} + \right.}{\left[\left(\frac{\Sigma\lambda_i du_i}{ds}\right)^2 - \varepsilon\left(\frac{\Sigma\lambda_i Du_i}{ds}\right)^2\right]^2} \qquad (17) \\
& \frac{\left. + 3\varepsilon P_2 \frac{\Sigma\lambda_i du_i}{ds}\left(\frac{\Sigma\lambda_i Du_i}{ds}\right)^2 - \varepsilon P_1\left(\frac{\Sigma\lambda_i Du_i}{ds}\right)^3\right]}{\left[\left(\frac{\Sigma\lambda_i du_i}{ds}\right)^2 - \varepsilon\left(\frac{\Sigma\lambda_i Du_i}{ds}\right)^2\right]^2} \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

En posant

$$\nu_1 = e\frac{\Sigma\lambda_i du_i}{ds}, \quad \nu_2 = -\varepsilon e\frac{\Sigma\lambda_i Du_i}{ds},$$

et tenant compte de § 7 (4), on obtient de (14) et (17) les formules cherchées (12) et (13).

§ 10. Les invariants d'une bande B_3 appartenant à une surface donnée.

Si φ_2, φ_3, $\Sigma\tau_i du_i$ sont les formes différentielles qui déterminent à substitutions unimodulaires près (v. Chap. I, § 6) la surface S à qui appartient la bande B_3, les invariants projectifs de B_3 sont donnés par les formules

$$P_1 = e\frac{\varphi_3}{\sqrt{|\varphi_2^3|}}, \tag{1}$$

$$P_2 = e\frac{\varphi'_3}{\sqrt{|\varphi_2^3|}}, \tag{2}$$

$$Q = \varepsilon(P_2^2 - g^2) + e(K-1) - e\frac{\Sigma a_{rsi}\tau^i du_r du_s}{\varphi_2}, \tag{3}$$

$$R_1 - \varepsilon R_2 = 2\left(\frac{dP_2}{ds} + P_1 g\right) + e\frac{\Sigma b_{rsi}\psi^i du_r du_s}{\varphi_2}, \tag{4}$$

$$R_1 + \varepsilon R_2 = -2\left(\frac{dg}{ds} + P_1 P_2\right) + e\frac{\Sigma b_{rsi}\tau^i du_r du_s}{\varphi_2}, \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
2N = -g(\varepsilon R_1 - R_2) - P_2(\varepsilon R_1 + R_2) - e\frac{d}{ds}\left(\frac{\Sigma a_{rsi}\psi^i du_r du_s}{\varphi_2}\right) + \\
+ e\frac{\Sigma\tau_i du_i - \Sigma a_i^{rs}(\psi_{rs} + \psi_r\psi_s)du_i}{ds} + e\varepsilon g\frac{\Sigma b_{rsi}\psi^i du_r du_s}{\varphi_2} + \\
+ e\varepsilon P_2\frac{\Sigma b_{rsi}\tau^i du_r du_s}{\varphi_2}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Ici, les différentielles se rapportent au passage sur la courbe C qui détermine la bande B_3, $e = sgn\,\varphi_2$, $ds = \sqrt{|\varphi_2|}$, $g = e\dfrac{\Sigma\,\vartheta_{rs}\,du_r\,\delta^2 u_s}{\sqrt{|\varphi_2|^3}}$, $K =$ courbure de φ_2.

Les formules (1) et (2) nous étant déjà connues (v. § 2), passons à la démonstration de la formule (3). Supposons que sur C, on a pris s comme variable indépendante. Alors

$$d\,\varphi_2 = e\,d\,(ds^2) = 0$$

et les équations § 6, (1), (2) donnent

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = P_1\frac{dx}{ds} + \varepsilon(g - P_2)\frac{Dx}{ds} + \frac{e}{2}\left[1 - K + \frac{\Sigma\,a^i_{rs}(\tau_i - \psi_i)\,du_r\,du_s}{\varphi_2}\right]x + ey,$$

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} = -P_1\frac{d\xi}{ds} + \varepsilon(g + P_2)\frac{D\xi}{ds} + \frac{e}{2}\left[1 - K + \frac{\Sigma\,a^i_{rs}(\tau_i + \psi_i)\,du_r\,du_r}{\varphi_2}\right]\xi + e\eta.$$

Or des équations Chap. I, § 6, (1) on déduit

$$\begin{aligned}
&Sx\,\xi = 0, && S\frac{dx}{ds}\xi = 0, && S\frac{Dx}{ds}\xi = 0, && Sy\,\xi = 1,\\
&Sx\frac{d\xi}{ds} = 0, && S\frac{dx}{ds}\frac{d\xi}{ds} = -e, && S\frac{Dx}{ds}\frac{d\xi}{ds} = 0, && Sy\frac{d\xi}{ds} = 0,\\
&Sx\frac{D\xi}{ds} = 0, && S\frac{dx}{ds}\frac{D\xi}{ds} = 0, && S\frac{Dx}{ds}\frac{D\xi}{ds} = e\varepsilon, && Sy\frac{D\xi}{ds} = 0,\\
&Sx\eta = 1, && S\frac{dx}{ds}\eta = 0, && S\frac{Dx}{ds}\eta = 0, && Sy\,\eta = 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

ainsi que

$$S\frac{d^2x}{ds}\frac{d^2\xi}{ds^2} = e\,(P_1^2 - \varepsilon P_2^2) + e\,\varepsilon\,g^2 + 1 - K + \frac{\Sigma\,a^i_{rs}\,\tau_i\,du_r du_s}{\varphi_2}.$$

En confrontant avec la formule (§ 2, (10))

$$S\frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^2\xi}{ds^2} = e\,(P_1^2 - Q),$$

on obtient bien l'équation (3).

Passons aux formules (4) et (5). En prenant dans les formules § 6, (3) et (4) s pour variable indépendante, on obtient

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{Dx}{ds}\right) = \frac{e}{2}\frac{\Sigma\,b_{rsi}\,(\tau^i - \psi^i)\,du_r\,du_s}{\varphi_2}x + (g + P_2)\frac{dx}{ds} - P_1\frac{Dx}{ds},$$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{D\xi}{ds}\right) = \frac{e}{2}\frac{\Sigma\,b_{rsi}\,(\tau^i + \psi^i)\,du_r\,du_s}{\varphi_2}\xi + (g - P_2)\frac{d\xi}{ds} + P_1\frac{D\xi}{ds}.$$

On en déduit, faisant usage des formules § 7, (3) et (5)

$$\frac{d}{ds}\left[(g + P_2)\,A_0 + \varepsilon A_2\right] = \left[\frac{e}{2}\frac{\Sigma\,b_{rsi}\,(\tau^i - \psi^i)\,du_r\,du_s}{\varphi_2} - P_1\,(g + P_2)\right]A_0 + \\ + (g + P_2)\,A_1 - \varepsilon P_1 A_2,$$

$$\frac{d}{ds}[(g-P_2)\alpha_3+\alpha_2]=\left[\frac{e}{2}\frac{\Sigma b_{rsi}(\tau^i+\psi^i)\,du_r du_s}{\varphi_2}+P_1(g-P_2)\right]\alpha_3-$$
$$-(g-P_2)\alpha_1+P_1\alpha_2.$$

Or des équations § 4, (1) et (2) on obtient

$$\frac{d}{ds}[(g+P_2)A_0+\varepsilon A_2]=\left(\varepsilon R_2+\frac{dg}{ds}+\frac{dP_2}{ds}\right)A_0+(g+P_2)A_1-\varepsilon P_1 A_2,$$

$$\frac{d}{ds}[(g-P_2)\alpha_3+\alpha_2]=\left(R_1+\frac{dg}{ds}-\frac{dP_2}{ds}\right)\alpha_3-(g-P_2)\alpha_1+P_1\alpha_2.$$

En confrontant avec les formules précédentes, on obtient

$$R_1=-\frac{dg}{ds}+\frac{dP_2}{ds}+\frac{e}{2}\frac{\Sigma b_{rsi}(\tau^i+\psi^i)\,du_r du_s}{\varphi_2}+P_1(g-P_2),$$

$$\varepsilon R_2=-\frac{dg}{ds}-\frac{dP_2}{ds}+\frac{e}{2}\frac{\Sigma b_{rsi}(\tau^i-\psi^i)\,du_r du_s}{\varphi_2}-P_1(g+P_2).$$

Ces équations sont équivalentes aux (4) et (5).

Des équations (4) et § 9 (3) et (6) on obtient aisément la formule

$$3P_2H_1-P_1H_2=3(R_1-\varepsilon R_2)-8\frac{dP_2}{ds} \tag{8}$$

déjà mentionnée au § 9; nous en développerons quelques conséquences au paragraphe suivant.

Il reste à démontrer la formule (6). En dérivant les équations § 7, (4) et (6) et tenant compte des équations § 4, (1) et (2) on déduit

$$e\frac{dy}{ds}=\left[N-(g-P_2)R_2+\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left\{e\frac{\Sigma a_{rsi}\psi^i du_r du_s}{\varphi_2}-\varepsilon(g^2-P_2^2)\right\}\right]A_0+$$
$$+c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3,$$

$$\frac{d\eta}{ds}=-\left[N+\varepsilon(g+P_2)R_1+\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left\{e\frac{\Sigma a_{rsi}\psi^i du_r du_s}{\varphi_2}+\varepsilon(g^2-P_2^2)\right\}\right]\alpha_3+$$
$$+\gamma_0\alpha_0+\gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2,$$

où les valeurs de $c_1, c_2, c_3, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ ne nous intéressent pas. Il en résulte que

$$S\left(e\alpha_0\frac{dy}{ds}-A_3\frac{d\eta}{ds}\right)=2N+g(\varepsilon R_1-R_2)+P_2(\varepsilon R_1+R_2)+$$
$$+e\frac{d}{ds}\left(\frac{\Sigma a_{rsi}\psi^i du_r du_s}{\varphi_2}\right). \tag{9}$$

Or des formules § 6, (5), (6); § 7, (3), (5) on déduit

$$2\frac{dy}{ds}=\left[\frac{\Sigma\tau_i du_i-\Sigma a_i^{rs}(\psi_{r,s}+\psi_r\psi_s)du_i}{ds}+\varepsilon(g+P_2)\frac{\Sigma b_{rsi}(\tau^i+\psi^i)du_r du_s}{\varphi_2}\right]A_0+$$
$$+d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3,$$

$$2e\frac{d\eta}{ds}=\left[-\frac{\Sigma\tau_i du_i-\Sigma a_i^{rs}(\psi_{r,s}+\psi_r\psi_s)du_i}{ds}+\varepsilon(g-P_2)\frac{\Sigma b_{rsi}(\tau^i-\psi^i)du_r du_s}{\varphi_2}\right]\alpha_3+$$
$$+\delta_0\alpha_0+\delta_1\alpha_1+\delta_2\alpha_2,$$

ainsi que

$$eS\left(e\alpha_0\frac{dy}{ds}-A_3\frac{d\eta}{ds}\right)=\frac{\Sigma\tau_i\,du_i-\Sigma a_i^{rs}\,(\psi_{r,s}+\psi_r\psi_s)\,du_i}{ds}+$$
$$+\,\varepsilon g\frac{\Sigma b_{rsi}\psi^i\,du_r\,du_s}{\varphi_2}+\varepsilon P_2\frac{\Sigma b_{rsi}\tau^i\,du_r\,du_s}{\varphi_2}.$$

En confrontant avec (9), on obtient la formule cherchée (6).

§ 11. Quelques applications géométriques de la théorie précédente.

La droite canonique de première espèce et de paramètre λ (v. Chap. I, § 9) relative à la surface S au point x de la courbe C est

$$(A_0,\ \lambda H_1 A_1+[g-P_2-\lambda H_2]\,A_2-A_3). \tag{1}$$

En effet, d'après Chap. I, § 9, (1) la droite cherchée est

$$(d\xi-\lambda\Sigma\psi_i du_i\,.\,\xi,\ \ D\xi-\lambda\Sigma\psi_i Du_i\,.\,\xi)$$

ou bien

$$\left(\frac{d\xi}{ds}-\lambda H_1\xi,\ \frac{D\xi}{ds}-\lambda H_2\xi\right)$$

et cela est égal, en vertu de § 7, (5), à

$$(-\alpha_1-\lambda H_1\alpha_3,\ [g-P_2-\lambda H_2]\,\alpha_3+\alpha_2)=$$
$$=(g-P_2-\lambda H_2)\,(\alpha_3\alpha_1)-(\alpha_1\alpha_2)+\lambda H_1\,(\alpha_2\alpha_3).$$

Or des équations § 3, (1)—(4) on déduit

$$(\alpha_3\alpha_1)=(A_0A_2),\ (\alpha_1\alpha_2)=(A_0A_3),\ (\alpha_2\alpha_3)=(A_0A_1)$$

et on obtient bien l'expression (1).

Si deux surfaces ont un contact du troisième ordre le long d'une courbe de Segre C, elles ont en chaque point de C la même première normale projective. En effet, la première normale projective est, d'après (1)

$$(A_0,\ [g-P_2]\,A_2-A_3).$$

Or nous sommes dans l'hypothèse $P_2=0$, ainsi que l'équation § 10, (8) et ensuite, l'équation § 9, (3) donnent

$$H_2=-3\frac{R_1-\varepsilon R_2}{P_1},\ \ g=-\frac{R_1-\varepsilon R_2}{P_1} \tag{2}$$

et la première normale projective devient

$$(A_0,\ [R_1-\varepsilon R_2]\,A_2+P_1A_3),$$

c'est-à-dire, elle ne dépend que de la bande B_3.

Si deux surfaces ont un contact du troisième ordre le long d'une courbe de Segre C, alors, pour chaque point de C, le plan déterminé par la droite canonique de première espèce et de paramètre $\lambda\neq 0$ relative à la première surface et par la droite analogue relative à la seconde surface contient la tangente à la courbe C. En effet, les deux droites canoniques s'obtiennent, en vertu de (1) et de (2), de l'expression

$$\lambda H_1 (A_0 A_1) + \left(A_0,\ (3\lambda - 1) \frac{R_1 - \varepsilon R_2}{P_1} A_2 - A_3\right)$$

en donnant à H_1 respectivement ses deux valeurs. Au faisceau déterminé par les deux droites appartient donc la droite $(A_0 A_1)$, c'est-à-dire la tangente à la courbe C au point A_0.

Si deux surfaces ont un contact du troisième ordre le long d'une courbe de Darboux C, elles ont en chaque point de C, le même premier axe. De l'hypothèse $P_1 = 0$ il résulte d'après § 9, (4) que $\frac{dP_2}{ds} = 0$ ainsi que les équations § 9, (3) et § 10, (8) donnent

$$g = \frac{1}{3} H_2,\ H_1 = \frac{R_1 - \varepsilon R_2}{P_2}.$$

La droite canonique de première espèce et de paramètre λ est donc

$$\left(\frac{1}{3} - \lambda\right) H_2 (A_0 A_2) + \left(A_0,\ \lambda \frac{R_1 - \varepsilon R_2}{P_2} A_1 - P_2 A_2 - A_3\right). \tag{3}$$

Pour le premier axe $\lambda = \frac{1}{3}$ et on obtient

$$\left(A_0,\ \frac{1}{3} \frac{R_1 - \varepsilon R_2}{P_2} A_1 - P_2 A_2 - A_3\right)$$

ce qui ne dépend que de la bande B_3.

Si deux surfaces ont un contact du troisième ordre le long d'une courbe de Darboux C, alors, pour chaque point de C, le plan déterminé par la droite canonique de première espèce et paramètre $\lambda \neq \frac{1}{3}$ relative à la première surface et par la droite analogue relative à la seconde surface contient la tangente conjuguée à celle de la courbe C. En effet, H_2 seul étant différent pour les deux surfaces, l'expression (3) montre que le faisceau déterminé par les deux droites canoniques contient la droite $(A_0 A_2)$.

Au Chap. I, § 9 nous avons défini le point y comme seconde intersection de la quadrique de Lie avec la première normale projective. Or *si C n'est pas une courbe de Segre sur la surface S, pour chaque point x de C le lieu des points y relatives au diverses surfaces qui ont un contact du troisième ordre avec S le long de C est une conique qui touche en x la tangente conjuguée à celle de C.* C'est ce qu'on déduit facilement de la formule § 7 (4). En effet, les équations § 9 (3), (5) et § 10 (8) permettent d'écrire la formule citée

$$y = \left[-\frac{\varepsilon}{18} H_2^2 + \left(\frac{\varepsilon}{6} \frac{P_1^2}{P_2} - \frac{1}{9} \frac{P'_1}{P_2} - \frac{\varepsilon}{2} P_2\right) H_2 - \frac{\varepsilon}{18} \frac{P_1'^2}{P_2^2} - \frac{4\varepsilon}{3} \frac{P'_2}{P_2} + \right.$$
$$\left. + \varepsilon P_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} R_1 - \frac{1}{2} R_2\right] A_0 + \left[-\frac{1}{3} H_2 + \frac{\varepsilon}{3} \frac{P'_1}{P_2} + P_2\right] A_2 + A_3.$$

En variant H_2 on obtient bien une conique qui a la position dite.

Au § 9 nous avons vu que, pour déterminer la bande B_4 passant par une bande B_3 donné, il suffit de connaître le long de C les valeurs des invariants H_1 et H_2 que nous savons liés par l'identité § 10, (8). Je dis qu'il suffit de connaître le seul invariant

$$3 P_1 H_1 - \varepsilon P_2 H_2 . \tag{4}$$

En effet, si l'on connaît la valeur de (4), on peut calculer à l'aide de § 10, (8) les valeurs de H_1 et de H_2 si $P_1^2 - \varepsilon P_2^2 \neq 0$.

Or $P_1^2 - \varepsilon P_2^2 = \pm \frac{1}{2}$, comme nous avons vu au § 2, (7).

Calculons encore l'équation de la quadrique de Lie par rapport au tétraèdre Δ (§ 3). Je dis que *le point*

$$\nu_0 A_0 + \nu_1 A_1 + \nu_2 A_2 + \nu_3 A_3$$

est situé sur la quadrique de Lie, si

$$\begin{gathered} \nu_1^2 - \varepsilon \nu_2^2 + 4 \varepsilon P_2 \nu_2 \nu_3 + \\ + \left[P_1 H_1 - \frac{1}{3} \varepsilon P_2 H_2 + \frac{2}{3} \frac{dP_1}{ds} - 2 \varepsilon P_2^2 \right] \nu_3^2 = 2 \nu_0 \nu_3 . \end{gathered} \tag{5}$$

En effet, le point
$$\mu_0 x + \mu_1 \frac{dx}{ds} + \mu_2 \frac{Dx}{ds} + \mu_3 y$$

est situé sur la quadrique de Lie, si

$$S \left(\mu_0 x + \mu_1 \frac{dx}{ds} + \mu_2 \frac{Dx}{ds} + \mu_3 y \right) \left(\mu_0 \xi + \mu_1 \frac{d\xi}{ds} + \mu_2 \frac{D\xi}{ds} + \mu_3 \eta \right) = 0$$

ou bien, d'après § 10, (7), si

$$2 \mu_0 \mu_3 = e (\nu_1^2 - \nu_2^2) . \tag{6}$$

Or, posons
$$\mu_0 x + \mu_1 \frac{dx}{ds} + \mu_2 \frac{Dx}{ds} + \mu_3 y = \nu_0 A_0 + \nu_1 A_1 + \nu_2 A_2 + \nu_3 A_3 .$$

Des équations § 7, (3) et (4) on obtient

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \nu_0 - \varepsilon (g + P_2) \nu_2 - \frac{1}{2} \left[\varepsilon (g^2 - P_2^2) \nu_3 + e \frac{\Sigma a_{rs}^i \psi_i \, du_r du_s}{\varphi_2} \right] \nu_3 , \\ \mu_1 &= \nu_1 , \\ \mu_2 &= \varepsilon \nu_2 + \varepsilon (g - P_2) \nu_3 , \\ \mu_3 &= e \nu_3 . \end{aligned} \tag{7}$$

Des équations (6) et (7) on obtient pour la quadrique de Lie l'équation

$$\nu_1^2 - \varepsilon \nu_2^2 + 4 \varepsilon P_2 \nu_2 \nu_3 + \left[e \frac{\Sigma a_{rsi} \psi^i \, du_r du_s}{\varphi_2} + 2 \varepsilon g P_2 - 2 \varepsilon P_2^2 \right] \nu_3^2 = 2 \nu_0 \nu_3 .$$

Il suffit d'appliquer les identités § 9, (3) et (5) pour obtenir l'équation (5).

Il résulte de ce que nous avons dit sur l'expression (4) que, *si deux surfaces ont un contact du troisième ordre au moins le long d'une* *courbe non asymptotique C et qu'elles ont à chaque point de C la même quadrique de Lie, le contact est du quatrième ordre au moins.* Que le cas où C soit une courbe asymptotique fait une véritable exception, c'est qu'on voit de la définition géométrique de la quadrique de Lie (Chap. I, § 8). En effet, il en résulte immédiatement que si deux surfaces ont contact du second ordre le long d'une courbe asymptotique C, elles ont en chaque point de C la même quadrique de Lie.

De l'équation (5) on déduit: *Soit $\varDelta$ le tétraèdre mobile* (§ 3) *attaché à la bande B_3 d'éléments de contact de troisième ordre d'une surface S le long d'une courbe de Segre C. En chaque point de C, les sommets A_1, A_2, A_3 du tétraèdre $\varDelta$ forment un triangle polaire par rapport à la quadrique de Lie.*