Eduard Čech

# Courbes tracées sur une surface dans l'espace affine

Spisy Přírod. Fak. Univ. Brno 28 (1923), 47 pp.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500876

| SPISY VYDÁVANÉ PŘÍRODOVĚDECKOU FAKULTOU MASARYKOVY UNIVERSITY REDAKTOR | PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ MASARYK RÉDIGÉES PAR |
|---|---|

BOHUSLAV HOSTINSKÝ

ROK 1923 ČÍS. 28


# COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE DANS L'ESPACE AFFINE

PAR


EDOUARD ČECH



VLASTNÍM NÁKLADEM VYDÁVÁ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
BRNO, KOUNICOVA 59

NA SKLADĚ MÁ | EN VENTE CHEZ

KNIHKUPECTVÍ A. PÍŠA, BRNO, ČESKÁ 28

# COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE DANS L'ESPACE AFFINE.

1. La *géométrie infinitésimale affine* qui a pour objet de rechercher des propriétés des courbes et des surfaces invariables par les transformations du groupe continu à 11 paramètres des *affinités unimodulaires* n'a pas été étudiée qu'à partir du 1916 où plusieurs géomètres allemands y ont consacré une série de mémoires portant le titre commun „*Über affine Geometrie*"; ces mémoires ont paru dans les *Leipziger Berichte, Math. Zeitschrift* et *Hamburger Abhandlungen*[1]. Une part considérable de ces mémoires s'occupe de la théorie de surfaces convexes et de divers problèmes particuliers du calcul des variations. Négligeant ces questions spéciales, ce qui d'ailleurs ne veut point diminuer leur grand intérêt, on peut dire que le résultat plus essentiel des études mentionnées est le suivant[2]: Pour déterminer intrinsèquement une surface non développable immergée dans l'espace affine, il faut connaître deux formes différentielles dont la première est quadratique et s'annule pour les courbes asymptotiques, l'autre est cubique et s'annule pour les courbes de Darboux. Pour que la surface correspondante existe, quatre relations entre les coefficients doivent êtres vérifiées; deux de ces relations seulement contiennent les dérivées des coefficients. Cependant, ces résultats peuvent s'obtenir aussi par une spécialisation de formules plus générales de la géométrie projective, développées dans les mêmes années par M. Fubini. C'est M. Sannia qui a le premier faite cette remarque.

2. La plus essentielle question de la géométrie infinitésimale de surfaces, quel que soit le groupe fondamental de transformations, est sans doute la suivante: Une surface étant définie par des expressions intrinsèques (formes différentielles) qui la définissent à une transformation du groupe fondamental près, on se propose de trouver tous les invariants d'une courbe tracée sur la surface, donnée par une relation arbitraire entre les coordonnées curvilignes $u$ et $v$. Les mémoires cités plus haut ne donnent aucune solution de ce problème pour la géométrie affine quoique les mémoires: *G. Pick*, Affine Geometrie XV et *Salkowski*, A. G. XVIII (Leipziger Berichte 1918)[3] contiennent la géométrie infinité-

[1] V. le rapport de MM. *W. Blaschke* et *K. Reidemeister*, Jahresber. d. deutschen Math. Ver., 1922, p. 63—82 et le deuxième volume du livre de M. Blaschke sur la géométrie infinitésimale qui doit paraître bientôt.

[2] *V. G. Pick, Affine Geometrie IV, W. Blaschke*, A. G. V (Leipziger Berichte 1917) et A. G. XII, J. Radon A. G. XVI (L. B. 1918).

[3] Voir aussi le troisième chap. du 2. vol. du livre cité de M. Blaschke dont le contenu m'a été fait accessible par la bienveillance de M. Berwald.

simale affine de courbes gauches. Voici ce qui paraît être la raison probable de cette lacune frappante: une courbe gauche est définie à affinités unimodulaires près si l'on donne les deux invariants fondamentaux en fonction d'un paramètre intrinsèque, qu'on appelle l'arc affine. Or la différentielle de l'arc affine est du troisième ordre et les deux invariants sont du cinquième ordre dans les coordonnées des points de la courbe. Les équations fondamentales expriment les dérivées secondes de ces coordonnées par rapport à $u$ et $v$; on doit les dériver *trois fois* pour obtenir les expressions cherchées des invariants de la courbe. Cette circonstance, on le voit, fait prévoir que les formules doivent être fort compliquées.

3. Or l'objet de ce mémoire est précisément de modifier convenablement la question posée pour la rendre capable d'une solution commode. Il sera utile se rendre compte de ce que, dans la géométrie ordinaire, on fait une modification analogue. En fait, dans la géométrie métrique, on n'exprime pas directement la courbure $\frac{1}{\varrho}$ et la torsion $\frac{1}{T}$ d'une courbe tracée sur une surface au moyen des deux formes différentielles de Gauss, mais plutôt les expressions

$$\frac{1}{\varrho_g}=\frac{\sin\alpha}{\varrho},\ \frac{1}{\varrho_n}=\frac{\cos\alpha}{\varrho},\ \frac{1}{T_g}=\frac{1}{T}-\frac{d\alpha}{ds},\tag{1}$$

où $\alpha$ est l'angle (convenablement orienté) de la normale principale de la courbe avec la normale de la surface. Une fois connues les expressions précédentes, on en peut déduire tout de suite les valeurs de $\frac{1}{\varrho}$ et $\frac{1}{T}$; mais on sait que ce sont les expressions (1) elles mêmes, et non pas $\frac{1}{\varrho}$ et $\frac{1}{T}$, qui jouent un rôle principal. Or les expressions (1) ne sont pas déterminées par la courbe seule, mais seulement par la *bande d'éléments de contact du premier ordre* de la surface le long de la courbe considérée.

4. En géométrie affine, il faut aller plus loin. Pour s'en rendre bien compte, considérons encore pour un instant la géométrie classique. $\alpha$ et $\beta$ étant deux vecteurs de composantes $\alpha^{(i)}$ et $\beta^{(i)}$ $(i=1, 2, 3)$, leur produit vectoriel $\alpha\times\beta$, c'est-à-dire le vecteur dont les composantes son

$$\alpha^{(2)}\beta^{(3)}-\alpha^{(3)}\beta^{(2)},\ \alpha^{(3)}\beta^{(1)}-\alpha^{(1)}\beta^{(3)},\ \alpha^{(1)}\beta^{(2)}-\alpha^{(2)}\beta^{(1)}$$

se transforme de la même manière si l'on effectue une substitution orthogonale. Or dans la géométrie affine, où l'on a à employer les substitutions du groupe plus ample des affinités unimodulaires, le vecteur $\alpha\times\beta$ est contragrédient aux vecteurs $\alpha$ et $\beta$. Le produit scalaire $\alpha\,.\,\beta$, c'est-à-dire le nombre

$$\alpha^{(1)}\beta^{(1)}+\alpha^{(2)}\beta^{(2)}+\alpha^{(3)}\beta^{(3)}$$

ne représente plus un invariant. C'est pourquoi, dans le développement présent de la géométrie affine, on n'emploie guère que les expressions de la forme

$$(\alpha\beta\gamma)=\begin{vmatrix}\alpha^{(1)} & \alpha^{(2)} & \alpha^{(3)}\\ \beta^{(1)} & \beta^{(2)} & \beta^{(3)}\\ \gamma^{(1)} & \gamma^{(2)} & \gamma^{(3)}\end{vmatrix}.^{4}$$

Or si l'on veut que les formules de la géométrie affine ne soient plus lourdes de celles de la géométrie métrique, il est nécessaire pouvoir faire usage du produit vectoriel et scalaire. Pour arriver à ce but, il suffit de considérer *systématiquement*, outre *vecteurs de la première classe* $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ dont les composantes sont des différences de coordonnées de points, et qui se transforment par des affinités unimodulaires selon le schème

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}^{(1)}&=a_{11}\,\alpha^{(1)}+a_{12}\,\alpha^{(2)}+a_{13}\,\alpha^{(3)},\\ \bar{\alpha}^{(2)}&=a_{21}\,\alpha^{(1)}+a_{22}\,\alpha^{(2)}+a_{23}\,\alpha^{(3)},\\ \bar{\alpha}^{(3)}&=a_{31}\,\alpha^{(1)}+a_{32}\,\alpha^{(2)}+a_{33}\,\alpha^{(3)},\end{aligned}\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=1,$$

des *vecteurs de la seconde classe* $A, B, C \ldots$, contragrédients aux précédents, c'est-à-dire se transformant selon le schème

$$\begin{aligned}A^{(1)}&=a_{11}\,\bar{A}^{(1)}+a_{21}\,\bar{A}^{(2)}+a_{31}\,\bar{A}^{(3)},\\ A^{(2)}&=a_{12}\,\bar{A}^{(1)}+a_{22}\,\bar{A}^{(2)}+a_{32}\,\bar{A}^{(3)},\\ A^{(3)}&=a_{13}\,\bar{A}^{(1)}+a_{23}\,\bar{A}^{(2)}+a_{33}\,\bar{A}^{(3)}.\end{aligned}$$

On peut considérer alors le produit vectoriel $\alpha\times\beta\,(A\times B)$ de deux vecteurs de la première (seconde) classe qui est un vecteur de la seconde (première) classe, et le produit scalaire $\alpha\,.\,A$ de deux vecteurs de classes différentes; outre cela, on peut employer encore des expressions telles que $(\alpha\beta\gamma)$ ou $(ABC)$ qui avaient joué le rôle principal[5].

5. Tout ceci n'est que banal; mais si l'on veut employer pratiquement les vecteurs de la seconde classe, une difficulté se présente qui consiste en ce que les composantes de vecteurs de la seconde classe entrent dans les calculs comme coefficients de coordonnées ponctuelles dans l'équation d'un plan et, par suite, ne sont données *qu'à un facteur commun près.* Il faut évidemment fixer ce facteur intrinsèquement et interpréter ce choix géométriquement. C'est ce que j'ai fait d'abord dans la théorie des surfaces[6]: $x$ étant le point d'une surface et $\xi$ le vecteur de la seconde classe dont les composantes sont les coefficients de coordonnées ponctuelles dans l'équation du plan tangent (ce qui ne définit $\xi$ qu'à un facteur scalaire près) j'ai fixé le facteur de $\xi$ en posant la condition

$$\xi\,.\left(\xi\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)+\frac{\partial x}{\partial u}\times\frac{\partial x}{\partial v}=0, \tag{2}$$

---

[4] Pourtant, voir le § 8 du rapport cité (1).

[5] Voir la Note[4].

[6] et pour les hypersurfaces.

évidemment invariante pour affinités unimodulaires; ce qui détermine le facteur cherché à une racine quatrième de l'unité près[7]. Quant à la signification géometrique, j'ai énoncé deux propositions lesquelles ne caractérisent d'ailleurs le choix fait qu'à un facteur numérique près: $1^0$ la droite qui passe en $x$ dans la direction

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} \times \frac{\partial \xi}{\partial v}$$

est la *normale affine*, $2^0$ le plan polaire du point

$$x + a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial x}{\partial v}$$

par rapport à la quadrique de Lie passe en $x$ dans la direction

$$\xi + a\frac{\partial \xi}{\partial u} + b\frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

D'ailleurs, c'est M. Blaschke qui a le premier considéré le vecteur $\xi$[8] en définissant d'abord le vecteur $X$ de la normale affine à l'aide de la forme fondamentale quadratique $F_2$, et en déduisant ensuite $\xi$ en posant

$$X \,.\, \xi = 1.$$

Moi, au contraire, je commence à fixer $\xi$ à l'aide de l'équation (2); c'est le $\xi$ qui me permet de définir simplement les deux formes différentielles fondamentales $F_2$ et $F_3$:

$$F_2 = -dx \,.\, d\xi, \quad F_3 = \tfrac{1}{2}(dx \,.\, d^2\xi - d^2x \,.\, d\xi).$$

6. Mais ce n'est que tout récemment que j'ai réussi de trouver une définition géométrique plus profonde de $\xi$ en posant la condition que les directions asymptotiques doivent être

$$dx \pm \xi \times d\xi.^{9}$$

On en voit que la connaissance du vecteur de la seconde classe $\xi$ le long d'une courbe tracée sur une surface revient à celle de la *bande d'éléments de contact du second ordre* de la surface le long de la courbe envisagée; e parce que $\xi$ satisfait sur une surface donnée un système d'équations aux dérivées partielles tout analogue au système vérifié par $x$[10], on est amené à l'idée de considérer non pas une courbe, mais la bande d'élément de contact du second ordre comme forme fondamentale à une dimension de la géométrie affine. La différentielle de

---

[7] Dans le Mémoire »*I fondamenti di geometria proiettivo-differenziale secondo il metodo del Fubini*«, les Annali di Matematica vol. 31, fasc. 3–4, 1923. Un bref résumé en avait paru dans les Rendiconti Accad. Lincei sous le titre »*Sur les formes différentielles de M. Fubini*«.

[8] Affine Geometrie XII (Leipziger Berichte 1918); voir aussi Radon A. G. XVI.

[9] Voir ma Note »*Sur la géométrie d'une surface et sur le facteur arbitraire de coordonnées homogènes*«, Rendiconti dell' Acc. Lincei, novembre 1922.

[10] Voir le Mémoire de M. Radon déjà cité ([2] et [8]).

l'arc affine et les quatre invariants fondamentaux affines sont alors donnés par des expressions qui ne diffèrent guère des expressions de l'arc ordinaire et les deux invariants métriques d'une courbe gauche qu'en ce que $x$ vient parfois remplacé par $\xi$. Et comme dans la géométrie métrique on ne cherche pas directement les expressions des deux invariants d'une courbe tracée sur une surface, mais celles des trois invariants de la bande d'éléments du premier ordre, ici encore nous trouverons par un calcul direct les cinq invariants de la *bande d'élément de contact du troisième ordre.* Toutefois, ce n'est que la bande du second ordre qui sera étudiée directement; le passage au troisième ordre n'exige que fixer la position de la normale affine de la surface dans le plan qui sera défini comme plan normal affine de la bande du second ordre, analoguement comme on passe, dans la géométrie métrique, de la courbe à la bande du premier ordre en fixant la position de la normale ordinaire de la surface dans le plan normal de la courbe.

7. Dans la géométrie métrique, les courbes minima pour lesquelles $dx \,.\, dx = 0$ exigent des recherches spéciales; dans la géométrie affine, c'est le cas analogue où $dx \,.\, d\xi = 0$ qui échappe à la théorie générale: dans ce cas la courbe seule (qui est une courbe asymptotique de la surface) suffit à fixer le vecteur $\xi$. Dans ce cas, c'est la théorie ordinaire (affine) des courbes gauches qu'il faut employer; je pourrais donc renvoyer simplement aux mémoires cités dans le texte et dans la note[3]. Je ne l'ai pas fait ici, d'une part parce que je deduis les résultats connus d'une manière nouvelle, liée étroitement à la méthode ici généralement employée, d'autre part parce que, ici encore, je donne quelques résultats nouveaux; mais notamment parce que le procédé du texte paraît bien expliquer pourquoi ce sont les courbes asymptotiques seules auxquelles les formules de la géométrie affine des courbes s'appliquent avec simplicité.

8. J'ai divisé le mémoire en quatre chapitres. Le premier donne une base nouvelle de la géométrie affine de courbes gauches. En premier lieu, je définis le paramètre intrinsèque (l'arc affine) et les deux invariants fondamentaux d'une courbe gauche pour lesquels je donne aussi des expressions valables de quelle manière que l'on ait choisi la variable indépendante. Ensuite, j'attache à la courbe un trièdre mobile et je démontre des formules analogues aux celles de Frenet. Par rapport à ce trièdre, j'écris l'équation du complexe linéaire osculateur, du cône osculateur et de la conique osculatrice, ce qui permet de donner une définition géométrique du trièdre mobile. Le trièdre qui j'introduis ici diffère de celui dont M. Blaschke fait usage dans son livre: le trièdre de M. Blaschke étant du quatrième ordre dans le coordonnées des points de la courbe, mon trièdre y est du cinquième ordre. Je rappelle aussi le trièdre de M. Blaschke et un troisième trièdre qui est du quatrième ordre dans les coordonnées du plan osculateur. Le fait que le trièdre de M. Blaschke est de l'ordre moins élevé si l'on ne donne que les

*points* de la courbe, n'a aucune importance *du point de vue adopté ici*, parce que, pour une courbe asymptotique, on donne simultanément les points et les plans osculateurs de la courbe. Au choix du trièdre mobile correspond le choix des invariants fondamentaux; l'expression analytique de l'invariant $l$ étant particulièrement simple, je ne voulais pas y renoncer. Enfin, je donne quelques relations simples entre les invariants qui caractérisent des familles spéciales de courbes capables d'une définition géométrique simple.

Le second chapitre est le plus important; j'y expose la géométrie affine d'une bande d'éléments de contact du second ordre. Ici encore, je commence par définir un paramètre intrinsèque (l'arc affine) et quatre invariants fondamentaux dont je fournis des expressions valables pour un choix arbitraire de la variable indépendante. Ensuite, j'attache à la bande un trièdre mobile, dont les faces sont le plan tangent de la bande, le plan osculateur de la courbe de la bande et le plan normal affine de la bande dans lequel sont situées les normales affines de toutes les surfaces qui contiennent la bande. Puis je donne des formules analogues à celles de Frenet, et je les applique à l'étude des développables enveloppées par les plans tangents et les plans normaux affines de la bande. Encore, je donne la solution de la question suivante: par chaque point de la courbe de la bande, et dans le plan normal affine, on doit tracer une droite de manière à obtenir une surface développable ou une surface réglée sur laquelle la courbe de la bande soit une courbe flecnodale. Ensuite, je trouve l'équation de la quadrique qui j'avais nommé la quadrique de Moutard et qui est le lieu des coniques osculatrices des section planes touchant la courbe de la bande de toute surface contenant la bande. Puis j'étudie les deux surfaces réglées qu'on peut faire passer par la bande.

Dans le troisième chapitre je montre comme on peut rattacher la théorie des bandes d'éléments du premier et du troisième ordre à celle des bandes du second ordre. Je trouve le paramètre intrinsèque et les trois invariants de la bande du premier ordre contenue dans une bande donnée du second ordre; le calcul se simplifie faisant usage de certaines bandes du second ordre qui ont en commun avec la proposée la bande du premier ordre et en outre, jouissent de la propriété que l'invariant $P$ est nul. Ensuite je démontre la proposition déjà mentionnée d'après laquelle, pour passer d'une bande du second ordre à une bande du troisième ordre, il suffit de connaître la position de la normale affine dans le plan normal affine. Cela me conduit à une nouvelle démonstration (pas plus simple d'ailleurs de celle originale) du théorème qui j'avais démontré dans la Note citée sous [9] et qui dit que pour $P=0$, la courbe de la bande (du second ordre) est une courbe de Darboux sur toute surface passant par la bande. En outre, j'arrive à la proposition suivante: par une bande arbitraire du second ordre, on peut faire passer une et une seule bande du troisième ordre telle que la courbe de la bande devienne une courbe de Segre. Enfin, je remarque que la bande du troisième ordre est *en général* déterminée si l'on connait la courbe de la bande et, en chaque point de celle-ci, le vecteur de la normale affine.

Dans le quatrième chapitre, je fais une application importante des résultats précédants: une surface non développable $S$ étant définie intrinsèquement par les deux formes différentielles fondamentales, je trouve l'arc affine et les invariants fondamentaux $k$ et $l$ d'une courbe asymptotique, ainsi que l'arc affine et les invariants fondamentaux $P, Q, R, T, N$ de la bande d'éléments de contact du troisième ordre le long d'une courbe arbitraire (non asymptotique). Je trouve que, pour un point fixe de $S$, l'expression

$$[\varepsilon (T + \varepsilon S)^2 - P^2]^2$$

où $\varepsilon = 1$ où $\varepsilon = -1$ selon que le point considéré est hyperbolique ou elliptique, a une valeur invariable, tandis que les expressions

$$P,\ T + \varepsilon N,\ Q - NT,\ R - PN + \frac{dN}{d\lambda}$$

ne sont fixes que si l'on part du point fixe suivant une direction fixe.

Toute les formules se rapportent à l'espace réel; le système de coordonnées est supposé orienté de façon qu'un observateur regardant de la part positive du troisième axe voit le second axe à gauche du premier.

Les résultats essentiels de ce Mémoire ont été communiqués à l'Accademia R. dei Lincei sous le titre: »Nouvelles formules de la géométrie affine.«

## CHAPITRE I.

### *Courbes gauches.*

9. Une *courbe gauche* $C$ (nous excluons le cas d'une courbe plane) est donnée en exprimant en fonction d'un paramètre $t$ le point $x$ de $C$ et le vecteur de la seconde classe $\xi$ de direction du plan osculateur de $C$. Pour fixer le facteur scalaire de $\xi$, on remarque que et le vecteur $dx$ et le vecteur $\xi \times d\xi$ donne la direction de la tangente: on peut donc supposer $\xi$ choisi de manière a avoir

$$dx = \varepsilon \xi \times d\xi,\ \varepsilon = \pm 1 \tag{1}$$

ce qui définit $\xi$ au signe près.[11] Évidemment, on a aussi

$$dx \,.\, \xi = dx \,.\, d\xi = d^2x \,.\, \xi = 0. \tag{2}$$

En différentiant $dx \,.\, d\xi$, on obtient

$$dx \,.\, d^2\xi = - d^2x \,.\, d\xi.$$

[11] L'unité $\varepsilon$ est complètement déterminée si l'on veut que $\xi$ soit réel.

En différentiant (1), on obtient encore

$$d^2x = \xi \times d^2\xi, \tag{1bis}$$

et par suite

$$-d^2x \,.\, d\xi = -\varepsilon(\xi \times d^2\xi) \,.\, d\xi = \varepsilon(\xi,\, d\xi,\, d^2\xi).$$

On peut donc définir un paramètre intrinsèque (*l'arc affine*) $\lambda$ au signe et à une constante additive près en posant

$$dx \,.\, d^2\xi = -d^2x \,.\, d\xi = \varepsilon(\xi,\, d\xi,\, d^2\xi) = d\lambda^3. \tag{3}$$

Or supposons la courbe $C$ *orientée* et soit $dt > 0$ et $d\lambda > 0$ si l'on se déplace sur la courbe en sens positif; le signe de $\xi$ et de $d\lambda$ est ainsi complètement déterminé.

Des équations (2) on déduit

$$\xi = \varrho\,(dx \times d^2x),$$
$$d\xi = \varrho\,(dx \times d^3x) + d\varrho\,(dx \times d^2x);$$

pour calculer $\varrho$, nous substituons dans l'équation (1), ce qui donne

$$dx = \varepsilon\varrho^2\,[(dx \times d^2x) \times (dx \times d^3x)] = \varepsilon\varrho^2\,(dx,\, d^2x,\, d^3x)\,dx.$$

De là

$$\varrho^{-2} = \varepsilon\,(dx,\, d^2x,\, d^3x).$$

Or si l'on substitue l'expression précedente de $d\xi$ dans l'équation $d^2x \,.\, d\xi$, on obtient

$$d\lambda^3 = -[\varrho\,(dx \times d^3x) + d\varrho\,(dx \times d^2x)] \,.\, d^2x = \varrho\,(dx,\, d^2x,\, d^3x);$$

si l'on compare les deux résultats, on voit tout de suite que

$$(dx,\, d^2x,\, d^3x) = \varepsilon d\lambda^6. \tag{4}$$

Supposons dorénavant $\lambda$ choisi comme variable indépendante et indiquons par des accents les dérivées par rapport à $\lambda$. On écrit alors les relations (1), (2), (3), (4) dans la forme équivalente

$$x' = \varepsilon\xi \times \xi',\ x'' = \varepsilon\xi \times \xi'', \tag{1'}$$
$$x' \,.\, \xi = x' \,.\, \xi' = x'' \,.\, \xi = 0, \tag{2'}$$
$$x' \,.\, \xi'' = -x'' \,.\, \xi' = 1, \tag{3'}$$
$$(x'x''x''') = (\xi\xi'\xi'') = \varepsilon \tag{4'}$$

10. Posons maintenant

$$k = \tfrac{1}{2}\,(x''' \,.\, \xi'' - x'' \,.\, \xi'''),\ l = x''' \,.\, \xi'''. \tag{5}$$

En dérivant (2′) par rapport à $\lambda$, on obtient

$$x''' \,.\, \xi = 1; \tag{6}$$

d'après (1bis) on a

$$d^2x \,.\, d^2\xi = 0,\ x'' \,.\, \xi'' = 0. \tag{7}$$

En dérivant (3′), on obtient tenant compte de (7)

$$x' \,.\, \xi''' = x''' \,.\, \xi' = 0, \tag{8}$$

en dérivant (7) on obtient tenant compte de (5)

$$x''' \cdot \xi'' = - x'' \cdot \xi''' = k, \tag{9}$$

en dérivant (6) on a ayant égard à (8)

$$x'''' \cdot \xi = 0. \tag{8'}$$

Enfin en dérivant la première équation (9), on obtient de la seconde équation (5)

$$x'''' \cdot \xi'' = k' - l, \tag{10}$$

est en dérivant (4'), on a

$$(x' x'' x'''') = (\xi \xi' \xi''') = 0. \tag{11}$$

La seconde des équations (11) dit que

$$\xi''' = a_0 \xi + a_1 \xi'.$$

Multipliant par $x''$, on a d'après (2') et (3')

$$x'' \cdot \xi''' = a_0 x'' \cdot \xi + a_1 x'' \cdot \xi' = - a_1,$$

et donc d'après (9)

$$a_1 = k.$$

Si l'on multiplie par $x'''$, on obtient d'après (6) et (8)

$$x''' \cdot \xi''' = a_0 x''' \cdot \xi + a_1 x''' \cdot \xi' = a_0,$$

et donc d'après (5)

$$a_0 = l.$$

En résumé, on obtient

$$\xi''' = l \xi + k \xi'. \tag{12}$$

D'après la première équation (11), on a

$$x'''' = b_1 x' + b_2 x''.$$

Multipliant par $\xi'$, on a d'après (2') et (3')

$$x'''' \cdot \xi' = b_1 x' \cdot \xi' + b_2 x'' \cdot \xi' = - b_2,$$

et donc d'après (9')

$$b_2 = k.$$

Si l'on multiplie par $\xi''$, on obtient d'après (3') et (7)

$$x'''' \cdot \xi'' = b_1 x' \cdot \xi'' + b_2 x'' \cdot \xi'' = b_1,$$

et donc d'après (10)

$$b_1 = k' - q.$$

En résumé, on obtient

$$x'''' = (k' - q)\, x' + k x''. \tag{13}$$

Une quelconque des équations (12) et (13), avec les identités (4'), suffit à faire voir qu'*une courbe gauche orientée est déterminée à affinités unimodulaires près, si l'on donne les invariants* $\varepsilon = \pm 1$, $k$, $l$ *en fonction de l'arc affine* $\lambda$. J'omets la démonstration facile du théorème réciproque. Si l'on passe à l'orientation opposée, $\varepsilon$ e $k$ restent inaltérés, tandisque $\lambda$ e $l$ changent de signe.

11. Calculons $k$ et $l$ si l'on donne $x$ et $\xi$ en fonction d'un paramètre arbitraire $t$. On a

$$x''=\frac{d^2x d\lambda - dx d^2\lambda}{d\lambda^3},\quad x'''=\frac{d^3x d\lambda^2 - 3\,d^2x d\lambda d^2\lambda - dx d\lambda d^3\lambda + 3\,dx\,(d^2\lambda)^2}{d\lambda^5}.$$

Or

$$d\,(d\lambda^3)=3\,d^2\lambda d\lambda^2,\quad d^2\,(d\lambda^3)=3\,d^3\lambda d\lambda^2+6\,(d^2\lambda)^2\,d\lambda,$$

ou

$$d^2\lambda=\frac{d\,(d\lambda^3)}{3\,d\lambda^2},\quad d^3\lambda=\frac{d^2\,(d\lambda^3)}{3\,d\lambda^2}-\frac{2}{9}\,\frac{[d\,(d\lambda^3)]^2}{d\lambda^5},$$

et par suite

$$x''=\frac{3\,d^2x d\lambda^3 - dx d\,(d\lambda^3)}{3\,d\lambda^5},$$

$$x'''=\frac{1}{d\lambda^9}[d^3x d\lambda^6 - d^2x d\lambda^3 d\,(d\lambda^3) - \tfrac{1}{3}\,dx d\lambda^3 d^2\,(d\lambda^3)+\tfrac{5}{9}\,dx\,(d\,(d\lambda^3))^2].$$

Pareillement pour $\xi$. On substitue ces expressions dans les équations (5). D'abord

$$k=\frac{1}{6\,d\lambda^{14}}[3\,(d^3x\,.\,d^2\xi - d^2x\,.\,d^3\xi)\,d\lambda^9-(dx\,.\,d^2\xi - d^2x\,.\,d\xi)d\lambda^6 d^2\,(d\lambda^3)+$$
$$+\tfrac{5}{3}\,(dx\,.\,d^2\xi - d^2x\,.\,d\xi)\,d\lambda^3\,(d(d\lambda^3))^2-[d^3x\,.\,d\xi - dx\,.\,d^3\xi)\,d\lambda^6 d\,(d\lambda^3)+$$
$$+(d^2x\,.\,d\xi - dx\,.\,d^2\xi)\,d\lambda^3\,(d\,(d\lambda^3))^2].$$

Or

$$dx\,.\,d^2\xi - d^2x\,.\,d\xi=2\,d\lambda^3,\quad dx\,.\,d^3\xi - d^3x\,.\,d\xi=2\,d\,(d\lambda^3),$$

ainsi que

$$k=\frac{1}{2}\,\frac{d^3x\,.\,d^2\xi - d^2x\,.\,d^3\xi}{d\lambda^5}-\frac{1}{3}\,\frac{d^2\,(d\lambda^3)}{d\lambda^5}+\frac{5}{9}\left(\frac{d\,(d\lambda^3)}{d\lambda^4}\right)^2. \tag{14}$$

D'ailleurs, en différentiant (7) on voit que le premier terme du second membre peut aussi s'écrire

$$\frac{d^3x\,.\,d^2\xi}{d\lambda^5}=-\frac{d^2x\,.\,d^3\xi}{d\lambda^5},$$

où encore, d'après ($1^{\text{bis}}$),

$$-\,\varepsilon\,\frac{(\xi,\,d^2\xi,\,d^3\xi)}{d\lambda^5}.$$

L'expression de $l$ est beaucoup plus simple; si l'on remarque que d'après (7)

$$d^2x\,.\,d^3\xi + d^3x\,.\,d^2\xi=0,$$
$$dx\,.\,d^3\xi + d^3x\,.\,d\xi=d^2\,(dx\,.\,d\xi)-2\,d^2x\,.\,d^2\xi=0,$$

on a tout de suite

$$l=\frac{d^3x\,.\,d^3\xi}{d\lambda^6}. \tag{15}$$

En différentiant ($1^{\text{bis}}$) on veut que l'on peut aussi écrire

$$l=\varepsilon\,\frac{(d\xi,\,d^2\xi,\,d^3\xi)}{d\lambda^6}. \tag{15'}$$

12. Attachons à la courbe $C$ un trièdre mobile $(x\alpha\beta\gamma)$ en posant

$$A=\xi'', \quad B=-\xi', \quad C=\varepsilon\xi, \tag{16}$$

et

$$\alpha=B\times C, \quad \beta=C\times A, \quad \gamma=A\times B. \tag{17}$$

D'après (4')

$$(ABC)=(\alpha\beta\gamma)=1 \tag{18}$$

et par suite

$$A=\beta\times\gamma, \quad B=\gamma\times\alpha, \quad C=\alpha\times\beta \tag{17'}$$

et

$$\begin{gathered} \alpha\,.\,A=\beta\,.\,B=\gamma\,.\,C=1, \\ \alpha\,.\,B=\alpha\,.\,C=\beta\,.\,A=\beta\,.\,C=\gamma\,.\,A=\gamma\,.\,B=0. \end{gathered} \tag{19}$$

D'après (16), (17) et (1') on a $\alpha=x'$, $\beta=x''$. De plus après (1) et (12)

$$\varepsilon x'''=\xi'\times\xi''+\xi\times\xi'''=\xi'\times\xi''+k\xi\times\xi',$$

et donc

$$\alpha=x', \quad \beta=x'', \quad \gamma=\varepsilon\,(x'''-kx'). \tag{20}$$

L'équation (13) donne maintenant le *premier système d'équations fondamentales*

$$\alpha'=\beta, \quad \beta'=k\alpha+\varepsilon\gamma, \quad \gamma'=-\varepsilon l\alpha, \tag{I}$$

et l'équation (12) donne le *second système d'équations fondamentales*

$$A'=-kB+\varepsilon lC, \quad B'=-A, \quad C'=-\varepsilon B. \tag{II}$$

Les systèmes (I) et (II) sont adjoints. Soit encore $z$ un point arbitraire et posons

$$\mathfrak{A}(z)=(z-x)\,.\,A, \; \mathfrak{B}(z)=(z-x)\,.\,B, \; \mathfrak{C}(z)=(z-x)\,.\,C. \tag{21}$$

Les équations (II) donnent

$$\mathfrak{A}'=-k\mathfrak{B}+\varepsilon l\mathfrak{C}+z'\,.\,A-1, \; \mathfrak{B}'=-\mathfrak{A}+z'\,.\,B, \; \mathfrak{C}'=-\varepsilon\mathfrak{B}+z'\,.\,C. \tag{22}$$

Si le point $z$ est fixe, on a plus simplement

$$\mathfrak{A}'=-k\mathfrak{B}+\varepsilon l\mathfrak{C}-1, \quad \mathfrak{B}'=-\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{C}'=-\varepsilon\mathfrak{B}. \tag{22'}$$

13. En dérivant, on déduit de (I)

$$\begin{aligned}
x'&=\alpha,\\
x''&=\beta,\\
x'''&=k\alpha+\varepsilon\gamma,\\
x^{\mathrm{IV}}&=(k'-l)\,\alpha+k\beta,\\
x^{\mathrm{V}}&=(k''-l'+k^2)\,\alpha+(2k'-l)\,\beta+\varepsilon k\gamma,\\
x^{\mathrm{VI}}&=(k'''-l''+4kk'-2kl)\,\alpha+(3k''-2l'+k^2)\,\beta+\\
&\quad+\varepsilon\,(3k'-l)\,\gamma,\\
x^{\mathrm{VII}}&=(k''''-l'''+7kk''+4k'^2-5k'l-4kl'+k^3+l^2)\,\alpha+\\
&\quad+(4k'''-3l''+6kk'-2kl)\,\beta+\varepsilon\,(6k''-3l'+k^2)\,\gamma,
\end{aligned}$$

etc. Si l'on désigne par $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$, $\overline{\mathfrak{C}}$ (ce que deviennent $\mathfrak{A}(z)$, $\mathfrak{B}(z)$ $\mathfrak{C}(z)$) en posant

$$z=x+x'h+x''\frac{h^2}{2}+x'''\frac{h^3}{6}+\cdots,$$

on obtient donc

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{A}} &= h + k\frac{h^3}{3\,!} + (k' - l)\frac{h^4}{4\,!} + (k'' - l' + k^2)\frac{h^5}{5\,!} + \\
&+ (k''' - l'' + 4kk' - 2kl)\frac{h^6}{6\,!} + (k'''' - l''' + 7kk'' + \\
&+ 4k'^2 - 5k'l - 4kl' + k^3 + l^2)\frac{h^7}{7\,!} + \dots, \\
\overline{\mathfrak{B}} &= \frac{h^2}{2\,!} + k\frac{h^4}{4\,!} + (2k' - l)\frac{h^5}{5\,!} + (3k'' - 2l' + k^2)\frac{h^6}{6\,!} + \\
&+ (4k''' - 3l'' + 6kk' - 2kl)\frac{h^7}{7\,!} + \dots, \\
\overline{\mathfrak{C}} &= \frac{h^3}{3\,!} + k\frac{h^5}{5\,!} + (3k' - l)\frac{h^6}{6\,!} + (6k'' - 3l' + k^2)\frac{h^7}{7\,!} + \dots
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Désignons encore par $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ce que deviennent $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, si l'on y remplace $z - x$ par

$$\alpha + \alpha' h + \alpha''\frac{h^2}{2\,!} + \alpha'''\frac{h^3}{3\,!} + \dots;$$

on a évidemment

$$\mathfrak{a} = \frac{d\overline{\mathfrak{A}}}{dh}, \quad \mathfrak{b} = \frac{d\overline{\mathfrak{B}}}{dh}, \quad \mathfrak{c} = \frac{d\overline{\mathfrak{C}}}{dh}. \tag{23'}$$

Les coordonnées homogènes de la tangente de $C$ appartenant à la valeurs $\lambda + h$ de l'arc affine par rapport au trièdre $(x\alpha\beta\gamma)$ appartenant à la valeur $\lambda$ sont évidemment

$$\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c}\ \begin{vmatrix} \overline{\mathfrak{B}}, & \overline{\mathfrak{C}} \\ \mathfrak{b}, & \mathfrak{c} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \overline{\mathfrak{C}}, & \overline{\mathfrak{A}} \\ \mathfrak{c}, & \mathfrak{a} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \overline{\mathfrak{A}}, & \overline{\mathfrak{B}} \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b} \end{vmatrix}.$$

Or d'après (23) et (23'),

$$\mathfrak{c} = \varepsilon\frac{h^2}{2\,!} + \varepsilon k\frac{h^4}{4\,!} + \varepsilon(3k' - l)\frac{h^5}{5\,!} + \dots,$$

$$\begin{vmatrix} \overline{\mathfrak{A}}, & \overline{\mathfrak{B}} \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b} \end{vmatrix} = \frac{h^2}{2\,!} + k\frac{h^4}{4\,!} + (3k' + l)\frac{h^5}{5\,!} + \dots,$$

ainsi que

$$\mathfrak{c} - \varepsilon\begin{vmatrix} \overline{\mathfrak{A}}, & \overline{\mathfrak{B}} \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{b} \end{vmatrix} = -2\varepsilon l\frac{h^5}{5\,!} + \dots$$

De là on trouve que si, pour une valeur donnée $\lambda$, on a $l = 0$, alors le complexe linéaire osculateur contient six tangentes successives de la courbe; en général, on voit que la droite qui joint les points $y$ et $z$ appartient au *complexe linéaire osculateur* si

$$\mathfrak{C}(z) - \mathfrak{C}(y) = \varepsilon\begin{vmatrix} \mathfrak{A}(y), & \mathfrak{A}(z) \\ \mathfrak{B}(y), & \mathfrak{B}(z) \end{vmatrix}. \tag{24}$$

Le plan $(xB)$ de notre trièdre mobile c'est-à-dire le plan $\mathfrak{B} = 0$, est donc le plan polaire du point à l'infini de la tangente de $C$ par rapport au complexe linéaire osculateur; la direction de l'axe du complexe est $\gamma$.

Des équations (23), on trouve encore

$$\frac{1}{h}\overline{\mathfrak{A}}\cdot\frac{1}{h}\overline{\mathfrak{C}}=\frac{\varepsilon}{3}\frac{h^2}{2!}+\frac{13\varepsilon k}{15}\frac{h^4}{4!}+\frac{\varepsilon(4k'-3l)}{3}\frac{h^5}{5!}+\cdots,$$

$$\left(\frac{1}{h}\overline{\mathfrak{B}}\right)^2=\frac{1}{2}\frac{h^2}{2!}+k\frac{h^4}{4!}+(2k'-l)\frac{h^5}{5!}+\cdots,$$

$$\left(\frac{1}{h}\overline{\mathfrak{C}}\right)^2=\frac{2}{3}\frac{h^4}{4!}+\theta\cdot\frac{h^5}{5!}+\cdots,$$

et par suite

$$3\varepsilon\cdot\frac{1}{h}\overline{\mathfrak{A}}\cdot\frac{1}{h}\overline{\mathfrak{C}}-2\left(\frac{1}{h}\overline{\mathfrak{B}}\right)^2-\frac{9k}{10}\left(\frac{1}{h}\overline{\mathfrak{C}}\right)^2=-l\frac{h^5}{5!}+\cdots.$$

On voit donc que le *cône osculateur* de $C$, c'est-à-dire le cône quadratique osculateur du cône projetant $C$ du point de vue $x$, a l'équation

$$3\varepsilon\mathfrak{A}(z)\,\mathfrak{C}(z)-2\,[\mathfrak{B}(z)]^2-\frac{9k}{10}[\mathfrak{C}(z)]^2=0. \tag{25}$$

La *conique osculatrice* de $C$, c'est-à-dire la conique osculatrice en $x$ de l'intersection de la dévéloppable des tangentes $C$ avec le plan osculateur de $C$ en $x$, est polaire au cône osculateur par rapport au complexe linéaire osculateur; ses équations sont donc

$$\mathfrak{C}(z)=2\mathfrak{B}(z)-3\,[\mathfrak{A}(z)]^2+\frac{3k}{20}[\mathfrak{B}(z)]^2=0. \tag{26}$$

Le diamètre de la conique osculatrice a donc pour direction $\beta$. Si $k=0$, le conique osculatrice est une parabole. Dans le $n^0$ suivant, je donnerai d'autres interprétations de l'équation $k=0$.

Nous pouvons maintenant énoncer la signification géométrique du trièdre mobile. La droite $(x\alpha)$ est la tangente de $C$ et la direction positive correspond à $\lambda$ croissant; la droite $(x\beta)$ est le diamètre de la conique osculatrice et de sa direction positive, $C$ apparaît concave. La droite $(x\gamma)$ est parallèle à l'axe du complexe linéaire osculateur; on observateur placé à sa part positive, voit $(x\beta)$ à gauche de $(x\alpha)$. Si l'on change l'orientation de la courbe, les vecteurs $\alpha$ et $\gamma$ changent de signe et $\beta$ reste invariable. La troisième équation montre que si $\varepsilon>0$, la courbe $C$ pour $d\lambda>0$ sort du plan osculateur pour entrer dans la part de l'espace où est située la partie positive de $(x\gamma)$.

14.[12] Notre trièdre $(x\alpha\beta\gamma)$, on s'en assure aisément, est du quatrième ordre dans les coordonnées des *tangentes* de $C$; au contraire, dans les coordonnées des *points* ou des *plans osculateurs*, le vecteur $\gamma$ est du cinquième ordre. Si on le remplace par un autre vecteur $\gamma_1$ $(\gamma_2)$ on arrive à un trièdre du quatrième ordre dans les coordonnées de points (de plans). Posons

$$\gamma_1=\gamma+a\alpha,$$

[12] C'est la lecture du chapitre cité sous [3] qui m'a conduit aux propositions de ce numéro.

où $a$ sera déterminé plus tard, et cherchons les coordonnées $\overline{\mathfrak{A}}_a$, $\overline{\mathfrak{B}}_a$ de points de la projection de $C$ dans le plan osculateur, les rayons projetants ayant la direction $\gamma_1$. On voit tout de suite des équations (23) que

$$\overline{\mathfrak{A}}_a = \overline{\mathfrak{A}} - a\overline{\mathfrak{C}}, \quad \overline{\mathfrak{B}}_a = \overline{\mathfrak{B}},$$

d'où

$$2\overline{\mathfrak{B}}_a^2 - \overline{\mathfrak{A}}_a^2 + \left(k - \frac{4\varepsilon}{3} a\right)\overline{\mathfrak{B}}_a^2 = 2(4l - 3k')\frac{h^5}{5!} + \dots .$$

La conique osculatrice de la courbe projetée est donc

$$\mathfrak{C}(z) = 2\mathfrak{B}(z) - [\mathfrak{A}(z)]^2 + \left(k - \frac{4\varepsilon}{3} a\right)[\mathfrak{B}(z)]^2 = 0;$$

ce sera une parabole si $a = \frac{3\varepsilon}{4} k$.

Posons donc

$$\gamma_1 = \gamma + \frac{3\varepsilon k}{4}\alpha = \varepsilon\left(x''' - \frac{k}{4} x'\right). \tag{27}$$

Le vecteur $\gamma_1$ est du quatrième ordre en coordonnées ponctuelles; la droite $(x\gamma_1)$ peut être définie par les deux propriétés suivantes: 1° c'est une droite passant par $x$ dont la polaire réciproque par rapport au complexe linéaire osculateur est parallèle à la tangente de $C$; 2° le cylindre quadratique osculateur du cylindre contenant $C$ dont elle est une droite génératrice est une cylindre parabolique. Posons encore

$$A_1 = \beta \times \gamma_1 = A - \frac{3\varepsilon k}{4} C = \xi'' - \frac{3k}{4}\xi; \tag{27'}$$

le système fondamental (I) et (II) peut être remplacé par le système suivant

$$\alpha' = \beta, \quad \beta' = \frac{k}{4}\alpha + \varepsilon\gamma_1, \quad \gamma'_1 = \varepsilon\left(\frac{3k'}{4} - l\right)\alpha + \frac{3\varepsilon k}{4}\beta, \tag{I$^1$}$$

$$A'_1 = -\frac{k}{4}B - \varepsilon\left(\frac{3k'}{4} - l\right)C, \; B' = -A_1 - \frac{3\varepsilon k}{4}C, \; C' = -\varepsilon B. \tag{II$^1$}$$

Les équations (I$^1$), à notations près, sont celles dont M. Blaschke fait usage dans son livre. Il se borne d'ailleurs au cas $\varepsilon = 1$; c'est M. Sannia qui a introduit le signe $\varepsilon$ dans la géométrie affine de courbes gauches. Les invariants $k$ et $\frac{3k'}{4} - l$ sont du cinquième ordre dans les coordonnées ponctuelles, tandis que $l$ y est du sixième ordre.

Pour arriver par une méthode géometrique au vecteur $\gamma_2$, remarquons que, d'après (23),

$$2\varepsilon\mathfrak{a}\mathfrak{c} - \mathfrak{b}^2 - k\mathfrak{c}^2 = 6(k' - 2l)\frac{h^5}{5!} + \dots,$$

d'où on voit que

$$2\varepsilon(z \cdot A)(z \cdot C) - (z \cdot B)^2 - k(z \cdot C)^2 = 0 \tag{28}$$

est l'équation de la courbe à l'infini de la surface engendrée par les tangentes de $C$. On voit en outre que

$$k' - 2l = 0 \tag{29}$$

est la condition pour que le cône directeur de la surface engendrée par les tangentes de $C$ soit quadratique. C'est ce qu'on peut aussi vérifier comme il suit: $E$ étant le premier membre de l'équation (28), on a d'après (II) si le point $z$ est fixe

$$\frac{dE}{d\lambda} = (2l - k')\,(z\,.\,C)^2.$$

Si la condition (29) est satisfaite, on voit que les coefficients de $E$ sont numériques, ce qui démontre la proposition énoncée.

Le cône qui projète la conique à l'infini (28) du point de une $x$ coupe le plan $(x\alpha\gamma)$ suivant les droites $(x\alpha)$ et $(x\gamma_2)$ où

$$\gamma_2 = \gamma + \frac{\varepsilon k}{2}\alpha = \varepsilon\left(x''' - \frac{k}{2}x'\right). \tag{30}$$

Le vecteur $\gamma_2$ est du quatrième ordre en coordonnées des plans osculateurs de $C$ tandisque $\gamma$ y est du cinquième ordre; la droite $(x\gamma_2)$ peut être définie par les deux propriétés suivantes: $1^0$ c'est une droite qui passe en $x$ et dont la polaire réciproque par rapport au complexe linéaire osculateur est parallèle à la tangente de $C$; $2^0$ elle est située sur le cône quadratique osculateur du cône directeur de la surface engendrée par les tangentes de $C$. Posons encore

$$A_2 = \beta \times \gamma_2 = A - \frac{\varepsilon k}{2} C = \xi'' - \frac{k}{2}\xi; \tag{30'}$$

les équations (I) et (II) peuvent être remplacées par les suivantes

$$\alpha' = \beta,\ \ \beta' = \frac{k}{2}\alpha + \gamma_2,\ \ \gamma'_2 = \varepsilon\left(\frac{k'}{2} - l\right)\alpha + \frac{\varepsilon k}{2}\beta, \tag{I$^2$}$$

$$A'_2 = -\frac{k}{2}B - \varepsilon\left(\frac{k'}{2} - l\right)C, B' = -A_2 - \frac{\varepsilon k}{2}C, C' = -\varepsilon B. \tag{II$^2$}$$

Les invariants $k$ et $\dfrac{k'}{2} - l$ sont du cinquième ordre en coordonnées des plans osculateurs, tandis que $l$ y est du sixième ordre.

En coordonnées des tangentes de $C$, $k$ est du quatrième et $l$ du cinquième ordre.

Maintenant, nous pouvons interpréter géométriquement l'équation $k = 0$ en remarquant que c'est la condition pour que les trois droites $(x\gamma)$, $(x\gamma_1)$, $(x\gamma_2)$, dont nous avons reconnu la signification géometrique, coïncident. Si $k \gtrless 0$, le rapport anharmonique de la tangente de $C$ et des trois droites précédentes est égal à $\frac{2}{3}$.

15. La deuxième équation (II) montre que la droite $(x\gamma)$ est la génératrice de l'enveloppe des plans $(x\alpha\gamma)$. Pour trouver le point de rebroussement remarquons que, d'après (I),

$$(x + a\gamma)' = (1 - \varepsilon a l)\,\alpha + a'\gamma. \tag{31}$$

Si donc

$$l = 0, \tag{32}$$

la droite $(x\gamma)$ engendre (et le plan $(x\alpha\gamma)$ enveloppe) un cylindre, ce qui d'ailleurs la troisième équation (I) montre directement. Il est clair par géométrie que ceci a lieu si $C$ appartient à un complexe linéaire. L'équation (24) démontre la réciproque. En effet, on obtient de (22′), $y$ et $z$ étant fixes,

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\mathfrak{C}(z) - \mathfrak{C}(y) - \varepsilon \begin{vmatrix} \mathfrak{A}(y) & \mathfrak{A}(z) \\ \mathfrak{B}(y) & \mathfrak{B}(z) \end{vmatrix}\right] = l \begin{vmatrix} \mathfrak{B}(y) & \mathfrak{B}(z) \\ \mathfrak{C}(y) & \mathfrak{C}(z) \end{vmatrix}.$$

Si $l \gtrless 0$ (31), montre que le point de rebroussement est

$$x + \frac{\varepsilon}{l}\gamma, \tag{33}$$

et (31) donne

$$\left(x + \frac{\varepsilon}{l}\gamma\right)' = \varepsilon\left(\frac{1}{l}\right)' \cdot \gamma. \tag{33'}$$

L'équation

$$l = \text{constante} \tag{34}$$

caractérise donc les courbes pour lesquelles le plan $(x\alpha\gamma)$ enveloppe un cône. Ces courbes ont été étudiées par M. Tzitzéica en 1911 dans les Annales de l'École Normale.

D'après (I), on a

$$\beta' = k\alpha + \varepsilon\gamma, \quad \beta'' = (k' - l)\,\alpha + k\beta,$$

d'où

$$(\beta\beta'\beta'') = \varepsilon\,(k' - l).$$

Condition pour que la surface réglée engendrée par la droite $(x\beta)$ ait un plan directeur est donc

$$k' - l = 0. \tag{35}$$

## CHAPITRE II.

### *Bandes d'éléments de contact du second ordre.*

16. Soit donnée une *bande d'éléments de contact du second ordre* d'une surface $S$ non développable le long d'une courbe $C$ non asymptotique. Supposons que l'on connaisse, en fonction d'un paramètre $t$, le point $x$ de la *courbe de la bande* $C$ et le vecteur de la seconde classe $\xi$ qui détermine la direction du *plan tangent de la bande* lequel enveloppe la *développable de la bande*. On a

$$\xi \,.\, dx = 0, \quad -dx \,.\, d\xi = d^2x \,.\, \xi \neq 0. \tag{1}$$

La tangente de la courbe de la bande a la direction $dx$, la tangente conjuguée on la génératrice de la développable de la bande a la direction $\xi \times d\xi$. Pour connaître les éléments du seconde ordre de $S$, il faut et il suffit connaître, en chaque point de $C$, l'involution de tangentes conjuguées de $S$. Posons

$$\varepsilon = +1 \text{ ou } \varepsilon = -1 \tag{2}$$

selon que cette involution est hyperbolique ou elliptique. Dans le premier cas, fixons le facteur scalaire de $\xi$ de telle manière que les *tangentes asymptotiques de la bande* aient la direction

$$dx \pm \xi \times d\xi; \tag{3}$$

la tangente asymptotique pour la quelle a lieu le signe supérieur (inférieur) sera nommée la première (la seconde). Dans le second cas, nous appelons *tangentes harmoniques de la bande* le couple de tangentes conjuguées de $S$ qui sépare harmoniquement la tangente de $S$ de la tangente conjuguée, fixons $\xi$ de telle manière que (3) soient les directions des tangentes harmoniques et appelons la première (seconde) tangente harmonique celle pour la quelle a lieu le signe supérieur (inférieur). Ces conventions ne fixent $\xi$ qu'au signe près: celui sera fixé en supposant

$$dx \,.\, d\xi < 0.$$

Si l'on connait $x$, $\xi$ et $\varepsilon = \pm 1$ en fonction de $t$, la bande du seconde ordre est parfaitement déterminée et elle existe si les conditions (1) sont satisfaites.

Définissons le paramètre intrinsèque ou *l'arc affine* $\lambda$ de la bande en posant

$$d\lambda^2 = d^2x \,.\, \xi = - dx \,.\, d\xi. \tag{4}$$

Supposons la bande *orientée* c'est-à-dire fixons le sens positif et soit $dt > 0$ et $d\lambda > 0$ si l'on parcourt la bande en sens positif. L'arc affine $\lambda$ et ainsi défini à une constante additive près. Nous prenons $\lambda$ pour variable indépéndante et nous désignerons par des accents les dérivées par rapport à $\lambda$.

17. Nous introduirons quatre expressions qui sont manifestement des invariants de la bande par rapport au groupe des affinités unimodulaires:

$$P = \tfrac{1}{2}(x' \,.\, \xi'' - x'' \,.\, \xi'), \tag{5}$$

$$Q = P^2 - x'' \,.\, \xi'', \tag{6}$$

$$R = (x'x''x'''), \tag{7}$$

$$T = (\xi\xi'\xi''). \tag{8}$$

Si l'on change l'orientation, $\lambda$, $P$, $T$ changent de signe et $Q$, $R$ restent inaltérés.

Donnons nous des expressions de $P$, $Q$, $R$, $T$ valables quelle que soit la variable indépendante. On a tout de suite

$$Pd\lambda^3 = \tfrac{1}{2}(dx \,.\, d^2\xi - d^2x \,.\, d\xi), \tag{5'}$$

$$R d\lambda^6 = (dx,\ d^2x,\ d^3x), \tag{7'}$$
$$T d\lambda^3 = (\xi,\ d\xi,\ d^2\xi). \tag{8'}$$

Pour donner l'expression de $Q$, remarquons que

$$x'' d\lambda^3 = d^2x d\lambda - dx d^2\lambda,\quad \xi'' d\lambda^3 = d^2\xi d\lambda - d\xi d^2\lambda,$$

ainsi que

$$x''\ .\ \xi'' d\lambda^6 = d^2x\ .\ d^2\xi d\lambda^2 - (dx\ .\ d^2\xi + d^2x\ .\ d\xi)\, d\lambda\, d^2\lambda + dx\ .\ d\xi\,(d^2\lambda)^2;$$

mais, d'après (4),

$$dx\ .\ d\xi = - d\lambda^2,\quad dx\ .\ d^2\xi + d^2x\ .\ d\xi = -2 d\lambda\, d^2\lambda,$$

et par suite

$$x''\ .\ \xi'' d\lambda^6 = d^2x\ .\ d^2\xi d\lambda^2 + (d\lambda d^2\lambda)^2 = -(dx\ .\ d\xi)\,(d^2x\ .\ d^2\xi) + \\ + \tfrac{1}{4}(dx\ .\ d^2\xi + d^2x\ .\ d\xi)^2.$$

D'après (6) et (5') on a donc

$$Q d\lambda^6 = \tfrac{1}{4}(dx\ .\ d^2\xi - d^2x\ .\ d\xi)^2 - \tfrac{1}{4}(dx\ .\ d^2\xi + d^2x\ .\ d\xi)^2 + \\ + (dx\ .\ d\xi)\,(d^2x\ .\ d^2\xi) = (dx\ .\ d\xi)\,(d^2x\ .\ d^2\xi) - (dx\ .\ d^2\xi)\,(d^2x\ .\ d\xi)$$

ou, d'après l'identité de Lagrange,

$$Q d\lambda^6 = (dx \times d^2x)\ .\ (d\xi \times d^2\xi). \tag{6'}$$

La signification géometrique des conditions $T=0$, $R=0$ est évidente: pour $T=0$ la développable de la bande est un cylindre, pour $R=0$ la courbe de la bande est plane. Si $P=0$, nous dirons que la bande est *flecnodale*; les tangentes asymptotiques ou harmoniques engendrent alors des surfaces réglées sur chacune de quelles $C$ est une courbe flecnodale, c'est-à-dire, en chaque point de $C$, la surface réglée a un contact du troisième ordre (au moins) avec l'hyperboloïde osculateur; sur chaque surface non réglée contenant la bande $C$ est une courbe de Darboux[13].

Le plan passant en $x$ et ayant la direction $\xi'$ sera nommé le *plan normal affine* de la bande; il contient les normales affines de toutes les surfaces qui passant par la bande (du second ordre)[14]. L'équation (6') donne une interprétion simple de l'équation $Q=0$: la génératrice de l'enveloppe des plans normaux de la bande est alors, en chaque point de $C$, parallèle au plan osculateur de $C$.

18. Les invariants $\varepsilon = \pm 1$, $P$, $Q$, $R$, $T$ étant donnés en fonction de l'arc affine $\lambda$, la bande du second ordre existe toujours et est bien déterminée à affinités unimodulaires près. C'est ce qu'on vérifie par la voie ordinaire des équations fondamentales (III) et (IV) qui nous allons déduire maintenant. D'abord, nous attachons à la bande un trièdre

---

[13] Pour la démonstration, voir la Note citée sous [9]; d'ailleurs, nous le vérifierons plus tard.

[14] Voir le mémoire cité sous [7].

mobile $(x\alpha\beta\gamma)$ de manière suivante. Posons

$$\alpha = x', \quad \gamma = \xi \times \xi'.$$

D'après (4),

$$(\alpha, x'', \gamma) = (x' x'' \gamma) = (x' \times x'') \cdot (\xi' \times \xi'') = \begin{vmatrix} x' \cdot \xi & x'' \cdot \xi \\ x' \cdot \xi' & x'' \cdot \xi' \end{vmatrix} = 1.$$

Donc, si l'on pose

$$\beta = x'' + a x',$$

on aura certainement

$$(\alpha\beta\gamma) = 1. \tag{9}$$

Nous fixerons le scalaire $a$ de telle manière que la droite $(x\beta)$ soit située dans le plan normal affine, donc d'après la condition

$$\beta \cdot \xi' = x'' \cdot \xi' + a x' \cdot \xi' = 1,$$

d'où, d'après (4) et (5), $a = -P$. En définitive, nous posons

$$\alpha = x', \quad \beta = x'' - P x', \quad \gamma = \xi \times \xi'. \tag{10}$$

D'après (9), on a des équations de la forme

$$\begin{aligned} \alpha' &= a_1 \alpha + a_2 \beta + a_3 \gamma, \\ \beta' &= b_1 \alpha + b_2 \beta + b_3 \gamma, \\ \gamma' &= c_1 \alpha + c_2 \beta + c_3 \gamma. \end{aligned} \tag{11}$$

Des équations (1) et (4) on tire

$$x' \cdot \xi = 0, \quad x'' \cdot \xi = 1, \quad x' \cdot \xi' = -1; \tag{12}$$

(5) donne ensuite

$$x' \cdot \xi'' = - x'' \cdot \xi' = x''' \cdot \xi = P. \tag{13}$$

Les deux premières équations (10) donnent tout de suite

$$a_1 = P, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 0.$$

D'après la définition de $\beta$, on tire de (12), (13) et (6)

$$\beta \cdot \xi = 1, \quad \beta \cdot \xi' = 0, \quad \beta \cdot \xi'' = -Q$$

et donc

$$\beta' \cdot \xi = 0, \quad \beta' \cdot \xi' = Q.$$

En multipliant la seconde équation (11) par $\xi$, on obtient donc

$$0 = b_1 \alpha \cdot \xi + b_2 \beta \cdot \xi + b_3 \gamma \cdot \xi = b_2;$$

au contraire, si l'on multiplie par $\xi'$, on obtient

$$Q = b_1 \alpha \cdot \xi' + b_3 \gamma \cdot \xi' = -b_1.$$

De plus, d'après (10) on a

$$\beta' = x''' - P x'' - P' x',$$

et donc d'après (7)

$$R = (x', x'', \beta') = (x', x'', b_3 \gamma) = b_3.$$

D'après (10)

$$\gamma' = \xi \times \xi''$$

et donc d'après (8)

$$\gamma' \cdot \xi = 0, \ \gamma' \cdot \xi' = \xi' \cdot (\xi \times \xi'') = -(\xi \xi' \xi'') = -T.$$

En multipliant la troisième équation (11) par $\xi$, on aura par suite

$$0 = c_1 \alpha \cdot \xi + c_2 \beta \cdot \xi + c_3 \gamma \cdot \xi = c_2;$$

et si l'on multiplie par $\xi'$,

$$-T = c_1 \alpha \cdot \xi' + c_3 \gamma \cdot \xi' = -c_1.$$

Enfin, en dérivant (9) et substituant en (11), on a

$$a_1 + b_2 + c_3 = 0, \ c_3 = -P.$$

Ainsi nous sommes arrivés au *premier système d'équations de la géométrie affine des bandes d'éléments de contact du second ordre*:

$$\alpha' = P\alpha + \beta, \ \beta' = -Q\alpha + R\gamma, \ \gamma' = T\alpha - P\gamma. \tag{III}$$

La droite $(x\alpha)$ est la tangente à la courbe de la bande; sa direction positive correspond à $\lambda$ croissant. La droite $(x\beta)$ est l'intersection du plan osculateur de la courbe de la bande et du plan normal affine de la bande; de sa part positive on voit la courbe de la bande concave. La droite $(x\gamma)$ est la génératrice de la développable de la bande; de sa part positive, on voit $\beta$ à gauche de $\alpha$. En changent l'orientation, $\alpha$ et $\gamma$ changent de signe et $\beta$ reste inaltéré.

Nous introduirons encore trois vecteurs de la seconde classe $A, B, C$ en posant

$$A = \beta \times \gamma, \ B = \gamma \times \alpha, \ C = \alpha \times \beta, \tag{14}$$

ainsi que d'après (9)

$$(ABC) = 1, \tag{9'}$$

$$\alpha = B \times C, \ \beta = C \times A, \ \gamma = A \times B \tag{14'}$$

et

$$\begin{gathered} \alpha \cdot A = \beta \cdot B = \gamma \cdot C = 1, \\ \alpha \cdot B = \alpha \cdot C = \beta \cdot A = \beta \cdot C = \gamma \cdot A = \gamma \cdot B = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

$A, B, C$ vérifient le système différentiel adjoint à (III), le *second système d'équations fondamentales*

$$A' = -PA + QB - TC, \ B' = -A, \ C' = -RB + PC. \tag{IV}$$

On trouve tout de suite

$$A = -\xi', \ B = \xi, \ C = x' \times x''. \tag{16}$$

19. Des équations (III), on trouve

$$(x + a\gamma)' = (1 + aT)\,\alpha + (a' - aP)\,\gamma. \tag{17}$$

Ceci confirme d'abord le résultat connu que, pour $T = 0$, la développable de la bande est un cylindre. Soit $T \gtrless 0$. Alors, d'après (17), le point de rebroussement est

$$x - \frac{1}{T}\gamma \tag{18}$$

et on a

$$\left(x-\frac{1}{T}\gamma\right)'=\frac{T'+PT}{T^2}\gamma. \tag{17'}$$

Condition pour que la développable de la bande soit un cône est donc

$$T'+PT=0. \tag{19}$$

Si

$$y=x+a_1\beta+a_2\gamma \tag{20}$$

est le point de rebroussement de l'enveloppe des plans affines normaux, on a $y'\,.\,A=y''\,.\,A=0$. Or d'après (III)

$$y'=(1-a_1Q+a_2T)\,\alpha+a'_1\beta+(a'_2+a_1R-a_2P)\,\gamma, \tag{21}$$

et par suite

$$y'\,.\,A=1-a_1Q+a_2T.$$

Les points (54) où $a_1$ et $a_2$ vérifient la condition

$$a_1Q-a_2T=1 \tag{22}$$

donne la génératrice de l'enveloppe des plans affines normaux. Si

$$Q=T=0, \tag{23}$$

tous les plans affines normaux sont parallèles entre eux, ce qui on voit d'ailleurs aussi de la première équation (IV). La génératrice dite s'éloigne alors à l'infini. En général, la génératrice en question contient le point (18), ce qui est évident par géométrie; en particulier si $T=0$, elle est parallèle à $\gamma$. Au contraire si $Q=0$ elle est parallèle à $\beta$ ce qui nous avons déjà constaté plus haut. Sous la condition (22), on tire de (21)

$$y'=a'_1\beta+(a'_2+a_1R-a_2P)\,\gamma, \tag{21'}$$

d'où

$$y''=[-a'_1Q+T\,(a'_2+a_1R-a_2P)]\,\alpha+a_3\beta+a_4\gamma$$

et donc

$$y''\,.\,A=-a'_1Q+T\,(a'_2+a_1R-a_2P).$$

Au point de rebroussement de la développable étudiée, on a donc (22) et

$$-(a_1Q-a_2T)'+a_1(Q'+RT)-a_2(T'+TP)=0.$$

Si l'on n'a pas (23), mais si

$$Q'+RT=T'+TP=0, \tag{24}$$

tous les plans affines normaux contiennent une droite fixe. Si l'on n'a pas (24) mais seulement

$$\varDelta=\begin{vmatrix} Q & Q'+RT \\ T & T'+TP \end{vmatrix}=0, \tag{25}$$

l'enveloppe des plans affines normaux est un cylindre. Si $\varDelta\gtrless 0$, le point de rebroussement est à distance finie et il est donné par l'expression

$$x+\frac{1}{\varDelta}[(T'+TP)\,\beta+(Q'+TR)\,\gamma]. \tag{26}$$

Conditions pour que les plans affines normaux passent par un point fixe sont donc, d'après (21'),

$$\frac{1}{\Delta}(T'+TP)=\text{const.}, \left(\frac{Q'+RT}{\Delta}\right)'+\frac{(T'+TP)R-(Q'+RT)P}{\Delta}=0. \quad (27)$$

Dans le plan normal affine, menons par le point $x$ une droite telle qu'elle engendre une développable. Si maintenant (20) est le point de rebroussement d'une telle développable, le coefficient de $\alpha$ au second membre de (21) doit s'évanouir, c'est-à-dire (22) est satisfaite. De plus,

$$\begin{vmatrix} a'_1 & a_1 \\ a'_2+a_1R-a_2P & a_2 \end{vmatrix}=0$$

ou (en négligeant le cas trivial $a_1=0$)

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)'=\frac{a_2}{a_1}P-R, \quad (28)$$

d'où

$$\frac{a_2}{a_1}=\left[\text{constante}-\int Re^{-\int Pd\lambda}\,d\lambda\right]e^{\int Pd\lambda}. \quad (28')$$

20. En dérivant deux fois le vecteur de la seconde classe

$$E=aB+bC,$$

on a

$$E'=-aA+(a'-bR)B+bPC,$$
$$E''=(-2a'+aP+bR)A+[a''-b'R-aQ-b(R'+PR)]\,.$$
$$.B+[b'P+aT+b(P'+P^2)]\,C,$$

d'où

$$x'\,.\,E''-x''\,.\,E'=-3a'+2aP+2bR.$$

D'après (3), les tangentes asymptotiques de la bande du second ordre $(x, E)$ ont la direction

$$\pm x'+E\times E'=[\pm 1+b(-a'+aP+bR)]\,\alpha-ab\beta+a^2\gamma. \quad (29)$$

Pour que, sur les surfaces réglées qui elles engendrent, $C$ soit une courbe flecnodale on doit avoir

$$dx\,.\,d^2E-d^2x\,.\,dE=0$$

ou

$$3a'=2aP+2bR. \quad (30)$$

Or cherchons de faire passer en $x$, dans le plan normal affine de la bande donnée, une droite telle qu'elle engendre une surface réglée sur laquelle $C$ soit une courbe flecnodale. On voit que l'on doit prendre $a$ et $b$ de manière que soit satisfaite (30) et

$$\pm 1+b(-a'+aP+bR)=0; \quad (31)$$

la droite cherchée aura alors le direction

$$-b\beta+a\gamma.$$

Il s'agit de résoudre le système (30) et (31). En éliminant $a'$, on obtient

$$b(aP+bR)=\mp 3. \tag{32}$$

Si $P=R=0$, c'est-à-dire si la courbe d'une bande *flecnode* est *plane*, le problème n'admet pas de solutions. En cas contraire, posons

$$c=-\frac{a}{b},$$

ainsi que la génératrice cherchée a la direction

$$\beta+c\gamma. \tag{33}$$

De (32) on calcule

$$a^2=\mp\frac{3c^2}{R+cP},\quad a(aP+bR)=\mp 3c.$$

Si l'on substitue en (64), après l'avoir multipliée par $\mp\frac{2a}{3}$, on obtient la condition cherchée

$$3\left(\frac{c^2}{R+cP}\right)'=4c. \tag{34}$$

Si l'on n'est pas dans le cas exceptionnel $P=R=0$, la question que nous nous sommes proposés admet $\infty^1$ solutions.

21. Des équations (III), on calcule

$$\begin{aligned}
x' &= \alpha,\\
x'' &= P\alpha+\beta,\\
x''' &= (P'+P^2-Q)\,\alpha+P\beta+R\gamma,\\
x^{\mathrm{IV}} &= (P''+3PP'-Q'+P^3-2PQ+RT)\,\alpha+(2P'+P^2-Q)\,\beta+\\
&\quad+(R'-PR)\,\gamma.
\end{aligned}$$

En employant les mêmes notations comme au N° 13 (page 15) nous avons donc ici

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{A}} &= h+P\frac{h^2}{2\,!}+(P'+P^2-Q)\frac{h^3}{3\,!}+\\
&\quad+(P''+3PP'-Q'+P^3-2PQ+RT)\frac{h^4}{4\,!}+\ldots,\\
\overline{\mathfrak{B}} &= \frac{h^2}{2\,!}+P\frac{h^3}{3\,!}+(2P'+P^2-Q)\frac{h^4}{4\,!}+\ldots,\\
\overline{\mathfrak{C}} &= R\frac{h^2}{3\,!}+(R'-PR)\frac{h^4}{4\,!}+\ldots
\end{aligned}$$

Les points de la projection de $C$ dans la direction $\gamma$, le plan de projection étant le plan osculateur de $C$, ont, par rapport au trièdre $(x\alpha\beta\gamma)$, les coordonnées $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$, 0. L'expression

$$2\overline{\mathfrak{B}}-\overline{\mathfrak{A}}^2+\tfrac{4}{3}P\overline{\mathfrak{A}}\overline{\mathfrak{B}}+(\tfrac{2}{3}P'-\tfrac{2}{9}P^2-Q)\,\overline{\mathfrak{B}}^2$$

commence par des termes du cinquième ordre en $h$. En posant, comme dans le N° 12 (pag. 14, éq. (21)),

$$\mathfrak{A}(z)=(z-x)\,.\,A,\quad \mathfrak{B}(z)=(Z-x)\,.\,B,\quad \mathfrak{C}(z)=(z-x)\,.\,C, \tag{35}$$

les équations de la conique osculatrice de la courbe projetée seront

$$\mathfrak{C}(z) = 2\mathfrak{B}(z) - [\mathfrak{A}(z)]^2 + \tfrac{4}{3}P\mathfrak{A}(z)\mathfrak{C}(z) + \\ + (\tfrac{2}{3}P' - \tfrac{2}{9}P^2 - Q)[\mathfrak{B}(z)]^2 = 0, \tag{36}$$

et l'équation du cône qui la projète du point de vue (18) sera

$$2\mathfrak{B}(z) + 2T\mathfrak{B}(z)\mathfrak{C}(z) - [\mathfrak{A}(z)]^2 + \tfrac{4}{3}P\mathfrak{A}(z)\mathfrak{B}(z) + \\ + (\tfrac{2}{3}P' - \tfrac{2}{9}P^2 - Q)[\mathfrak{B}(z)]^2 = 0. \tag{36'}$$

Si nous entendons par la *quadrique de Moutard de la bande* pour une valeur donnée de $\lambda$ celle qui contient les coniques osculatrices des sections plans touchant $C$ d'une surface quelconque qui passe par la bande, les propriétés de cette quadrique[15] montrent qu'elle touche le cône (36') suivant la conique (36) et que ses tangentes asymptotiques ou harmoniques en $x$ ont la direction (3). L'équation de la quadrique de Moutard de la bande est donc

$$2\mathfrak{B}(z) - [\mathfrak{A}(z)]^2 + \varepsilon[\mathfrak{C}(z)]^2 + 2T\mathfrak{B}(z)\mathfrak{C}(z) + \tfrac{4}{3}P\mathfrak{A}(z)\mathfrak{B}(z) + \\ + (\tfrac{2}{3}P' - \tfrac{2}{9}P^2 - Q)[\mathfrak{B}(z)]^2 = 0. \tag{37}$$

La quadrique de Moutard est un paraboloïde si

$$6P' + 2P^2 - 9Q - 9\varepsilon T^2 = 0. \tag{38}$$

Le diamètre de la quadrique de Moutard au point $x$ a la direction

$$\tfrac{2}{3}P\alpha + \beta - \varepsilon T\gamma. \tag{39}$$

D'après (III), on a

$$[x + a(\tfrac{2}{3}P\alpha + \beta - \varepsilon T\gamma)]' - a'(\tfrac{2}{3}P\alpha + \beta - \varepsilon T\gamma) = \\ = [1 + a(\tfrac{2}{3}P' + \tfrac{2}{3}P^2 - Q - \varepsilon T^2)]\,\alpha + \tfrac{2}{3}aP\beta + a(R + \varepsilon PT - \varepsilon T')\,\gamma.$$

Condition pour que ce diamètre engendre une développable est donc

$$\varepsilon R + \tfrac{5}{3}PT - T' = 0. \tag{40}$$

22. Si $\varepsilon = 1$, deux surfaces réglées existent contenant la bande du second ordre; elles sont engendrées par les tangentes asymptotiques de la bande, dont la direction est (3). Plus généralment, que soit $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$, menons par le point $x$ une droite suivant la direction

$$\alpha + c\gamma,$$

$c$ étant numérique. Posons

$$y = x + u(\alpha + c\gamma) \tag{41}$$

et cherchons les plans tangents de la surface réglée engendrée par le point $y$ si $\lambda$ et $u$ sont deux variables indépendantes. La direction de ce plan tangent pour $\lambda$ et $u$ données est de la forme

$$cA + aB - C,$$

[15] Voir mon Mémoire «Moutardovy kvadriky (Les quadriques de Moutard)», ces publications, année 1921, N° 3.

où $a$ s'obtient de l'équation

$$y' \cdot (cA + aB - C) = 0.$$

Mais d'après (III) on a

$$y' = [1 + u(P + cT)]\alpha + u\beta - cuP\gamma \tag{42}$$

et donc la condition précédente donne

$$c[1 + u(2P + cT)] + au = 0.$$

Par suite, on peut poser

$$\eta = cuA - c[1 + u(2P + cT)]B - uC. \tag{43}$$

Cherchons maintenant de déterminer $l$ de manière à avoir [16]

$$y' \times \frac{\partial y}{\partial u} \pm l^4 \eta \left(\eta \eta' \frac{\partial \eta}{\partial u}\right) = 0. \tag{44}$$

Puisque

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \alpha + c\gamma,$$

on a, d'après (42),

$$y' \times \frac{\partial y}{\partial u} = -\eta.$$

De plus,

$$\eta = u\frac{\partial \eta}{\partial u} - cB$$

et donc

$$\left(\eta \eta' \frac{\partial \eta}{\partial u}\right) = -c(B, \eta', cA - C).$$

De (43) on tire, faisant usage de (IV),

$$\eta' = c[1 + u(P + cT)]A + u[R + c(Q + 2P' + cT')]B - u(P + cT)C,$$

d'où

$$\left(\eta \eta' \frac{\partial \eta}{\partial u}\right) = -c^2.$$

En substituant dans (44), on obtient

$$c^2 l^4 = 1.$$

Pour notre but, il suffit de savoir que $l$ est numérique; de la on tire [17] que le plan polaire du point

$$y + ay' + b\frac{\partial y}{\partial u} \tag{45}$$

par rapport à l'hyperboloïde osculateur de la surface réglée en question a l'équation ($z$ étant le point courant)

$$(z - y) \cdot \left(\eta + a\eta' + b\frac{\partial \eta}{\partial u}\right) = 0 \tag{46}$$

[16] Voir l'équation (2) de la page (5).
[17] Voir le mémoire cité sous [7] et [9].

et que l'équation

$$y' \cdot \eta'' - y'' \cdot \eta' = 0 \tag{47}$$

donne les lignes flecnodales.

Cherchons d'abord l'hyperboloïde osculateur. Le plan polaire du point (dans l'expression (45), on pose $u = 0$)

$$x + (a + b)\,\alpha + bc\gamma$$

a l'équation

$$c\,(a + b)\,\mathfrak{A}(z) - c\,(1 + 2bP + bcT)\,\mathfrak{B}(z) - b\mathfrak{C}(z) = 0.$$

Il s'ensuit que l'équation de l'hyperboloïde osculateur est

$$2c^2\mathfrak{B} - c^2\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2 + 2c\,(2P + cT)\,\mathfrak{B}\mathfrak{C} + h\mathfrak{B}^2 = 0,$$

$h$ restant à déterminer. Le plan diamétral conjugué a la direction (dans l'expression (45), on pose $b = 0$, $u \rightarrow \infty$)

$$(P + cT)\,\alpha + \beta - cP\gamma$$

a la direction

$$c\,(P + cT)\,A + (R + cQ - 2cP' - c^2T')\,B - (P + cT)\,C,$$

tandisque de l'équation écrite de l'hyperboloïde on tire

$$c\,(PcT) + A\left[cP(2P + cT) - \frac{h}{c}\right]B - (P + cT)\,C.$$

La comparaison donne l'équation définitive de l'hyperboloïde osculateur de la surface réglée étudiée

$$\begin{aligned} &2c^2\,[\mathfrak{B}(z)]^2 - c^2\,[\mathfrak{A}(z)]^2 + [\mathfrak{C}(z)]^2 + 2c\,(2P + cT)\,\mathfrak{B}(z)\,\mathfrak{C}(z) + \\ &+ c\,[-R - cQ + 2c\,(P' + P^2) + c^2\,(T' + PT)]\,[\mathfrak{B}(z)]^2 = 0. \end{aligned} \tag{48}$$

En particulier, on a un paraboloïde si

$$R + c\,(Q + 2P^2 - 2P') + c^2\,(3PT - T') + c^3T^2 = 0. \tag{49}$$

Le diamètre de l'hyperboloïde qui passe en $x$ a la direction

$$\beta - c\,(2P + cT)\,\gamma; \tag{50}$$

il décrit une développable, d'après (28), si

$$R - 2c\,(P' - P^2) - c^2\,(T' - PT) = 0. \tag{51}$$

En particulier, les normales affines des surfaces réglées engendrées par les tangentes asymptotiques (si $\varepsilon = 1$) on harmoniques (si $\varepsilon = -1$) de la bande ont les directions

$$\beta - (T \pm 2P)\,\gamma. \tag{52}$$

La conjuguée harmonique de la génératrice de la développable de la bande par rapport au couple précédent a la direction

$$\beta - T\gamma. \tag{53}$$

L'équation (39) montre que l'intersection du plan normal affine et du plan qui joint le diamètre de la quadrique de Moutard à la tangente de la courbe de la bande a la direction

$$\beta - \varepsilon T\gamma. \tag{54}$$

Si $\varepsilon = 1$ c'est la droite (53); si $\varepsilon = -1$ le deux droites sont divisées harmoniquement par la génératrice de la développable de la bande et le plan osculateur de la courbe de la bande. La droite (54) engendre une développable si

$$R - \varepsilon(T' - PT) = 0. \tag{55}$$

Plus tard, nous trouverons une autre signification de la droite (54) et de la droite

$$\beta + \varepsilon T\gamma. \tag{56}$$

Cherchons encore les lignes flecnodales des surfaces réglées de la famille envisagée. On a

$$\begin{aligned}
y' &= (1 + uP + cuT)\,\alpha + u\beta - cuP\gamma,\\
y'' &= [P + u(P' + P^2 + cT' - Q)]\,\alpha + (1 + uP + cuT)\,\beta +\\
&\quad + u(R - cP' + cP^2)\,\gamma,\\
\eta' &= c(1 + uP + cuT)\,A + u(R + cQ - 2cP' - c^2T')\,B - u(P + cT)\,C,\\
\eta'' &= [-cP + u(-R - cQ - cP^2 - c^2PT + 3cP' + 2c^2T')]\,A +\\
&\quad + [cQ + u(cPQ + c^2QT + R' + cQ' - 2cP'' - c^2T'' + PR +\\
&\quad + cRT)]\,B + [-cT + u(-P^2 - 2cPT - c^2T^2 - P' - cT')]\,C,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
y' \,.\, \eta'' &= -cP + u[-cP(2P + cT) - R + c(3P' + 2cT')] +\\
&\quad + u^2[R + cQ + c(2P + cT)(P + cT) - c(2P' + cT')]',\\
y'' \,.\, \eta' &= cP + u[cP(2P + cT) + R - cP'].
\end{aligned}$$

D'après (47), on obtient donc les flecnodes des surfaces réglées considérées en substituant pour $u$ les racines de l'équation quadratique

$$\begin{aligned}
&2cP + 2u[cP(2P + cT) - c(2P + cT)' + R] -\\
&- u^2[R + cQ + c(2P + cT)(P + cT) - c(2P' + cT')]'.
\end{aligned} \tag{57}$$

Le conjugué harmonique de $x$ par rapport aux deux flecnodes s'obtient en remplaçant $u$ par la valeur tirée de

$$\frac{cP}{u} = c(2P + cT)' - cP(2P + cT) - R. \tag{58}$$

Si $P = 0$, un des deux flecnodes est en $x$, et ceci a lieu pour toutes les valeurs de $c$. Si

$$P = c^2T' - R = 0, \tag{59}$$

tous les deux flecnodes sont en $x$. Si

$$P = c^2T' - R = (c^2T^2 + Q)' = 0 \tag{60}$$

la surface réglée correspondante est une quadrique. Pour que ceci ait lieu pour *toutes* les valeurs de $c$, il faut et il suffit que la courbe de la bande flecnodale soit une conique et la développable de la bande un cône.

Soit $P \gtrless 0$; si alors $R = 0$ le point (58) engendre, $c$ seul étant varié, une droite, si $R \gtrless 0$, une conique. Cette conique touche $C$ en $x$ et coupe la génératrice de la développable de la bande la seconde fois au point

$$x + \frac{P}{T' - PT}\gamma. \tag{61}$$

En particulier, fixons notre attention aux conjugués harmoniques de $x$ par rapport au flecnodes des deux surfaces réglées passant par la bande du second ordre. On les obtient pour $\varepsilon = 1$ si l'on pose, en (58), $c^2 = 1$; pour $\varepsilon = -1$ ils sont imaginaires et on les obtient pour $c^2 = -1$. La droite qui les joint est toujours réelle; de (58) on tire qu'elle est parallèle à la tangente de $C$ si

$$\left(\frac{1}{P}\right)' = 0; \tag{62}$$

au contraire, condition pour qu'elle soit parallèle à la tangente conjuguée est

$$R - \varepsilon(T' - PT) = 0. \tag{63}$$

Or c'est l'équation (55) dont on a ainsi une interprétation nouvelle. Enfin, portons sur les tangentes asymptotiques du point $x$, dans tous les deux sens, la moyenne géométrique des distances des deux flecnodes; on obtient un parallèlogramme dont deux côtés seront parallèles a la tangente de $C$ si

$$R - \varepsilon(T' - 3PT) = \text{constante}. \tag{64}$$

Les calculs faits dans ce numéro peuvent être beaucoup abrégés si l'on fait usage de formules nouvelles de la géometrie projective de surfaces réglées qui je publierai ailleurs.

## CHAPITRE III.

### *Bandes d'éléments de contact du premier et du troisième ordre.*

23. Jusqu'ici, nous avons étudié la bande d'éléments du second ordre; fixons maintenant notre attention à la bande d'éléments du premier ordre y contenu. A ce but, observons l'effet de la multiplication du vecteur $\xi$ par un scalaire $\varrho^2$ sur les expressions

$$d\lambda,\ P,\ Q,\ R,\ T. \tag{1}$$

Des équations (1) et (4) du chap. II on tire d'après l'identité de Lagrange

$$(dx \times d^2x) \cdot (\xi \times d\xi) = d\lambda^4,$$
$$(dx \times d^2x) \cdot (\xi \times d^2\xi) = -P d\lambda^5 + d\lambda^3 d^2\lambda.$$

Indiquons par l'indice *1* ce qu'on obtient après avoir effectué la multiplication; nous obtenons aisément des équations (5′), (6′), (7′) e (8′) du chap. II:

$$\begin{aligned} d\lambda_1 &= \varrho d\lambda, \\ P_1 &= \frac{1}{\varrho} P - \frac{3}{\varrho^2} P', \\ Q_1 &= \frac{1}{\varrho^2} Q - \frac{2\varrho'}{\varrho^3} P + \frac{6\varrho'^2}{\varrho^4} - \frac{2\varrho''}{\varrho^3}, \\ R_1 &= \frac{1}{\varrho^6} R, \\ T_1 &= \varrho^3 T. \end{aligned} \tag{2}$$

Au lieu de rechercher directement les combinaisons invariables des expressions (1), choisissons $\varrho$ ainsi qu'il en résulte $P_1 = 0$; autrement dit considérons une bande *flecnodale* du second ordre ayant en commun avec la proposée la bande du premier ordre. La deuxième équation (2) donne alors

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{1}{3} P, \quad \varrho = e^{\frac{1}{3}\int P d\lambda},$$

et les équations restantes donnent

$$\begin{aligned} d\lambda_1 &= e^{\frac{1}{3}\int P d\lambda}\, d\lambda, \\ Q_1 &= e^{-\frac{2}{3}\int P d\lambda} \left(Q - \tfrac{2}{3} P' - \tfrac{2}{9} P^2\right), \\ R_1 &= e^{-2\int P d\lambda}\, R, \\ T_1 &= e^{\int P d\lambda}\, T. \end{aligned} \tag{3}$$

Les expressions (3) ne sont pas encore des invariants *différentiels*; si l'on change la constante additive de l'intégrale $\int P d\lambda$ elles se trouvent remplacés par

$$c\,d\lambda_1, \quad c^{-2} Q_1, \quad c^{-6} R_1, \quad c^3 T_1, \tag{4}$$

$c$ étant une constante arbitraire. Cependant, on en déduit tout de suite des invariants différentiels de la bande du premier ordre. Seulement on doit distinguer plusieurs cas.

Soit d'abord $T \gtrless 0$; on peut définir un paramètre intrinsèque de la bande du premier ordre en posant

$$d\mu_1^3 = \frac{d\lambda_1^3}{|T_1|} = \frac{d\lambda^3}{|T|}. \tag{5}$$

On a les invariants fondamentaux

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \operatorname{sgn} T = \pm 1, \\ t_1 &= \frac{d \log |T_1|}{d\mu_1} = |T|^{1/3} \left(\frac{T'}{T} + P\right), \\ q_1 &= Q_1 |T_1|^{2/3} = |T|^{2/3} \left(Q - \tfrac{2}{3} P' - \tfrac{2}{9} P^2\right), \\ r_1 &= R_1 T_1^2 = R T^2, \end{aligned} \tag{6}$$

où l'accent continue à indiquer la dérivation par rapport à $\lambda$. Les équations (2) permettent de vérifier que les expressions à droite sont indépendantes de $\varrho$. Si l'on donne $\varepsilon_1 = \pm 1$, $t_1$, $q_1$, $r_1$ en fonction de $\mu_1$, la bande du premier ordre correspondante existe et est déterminée à affinités unimodulaires près.

Si $R \gtrless 0$, peu importe si $T = 0$ ou $T \gtrless 0$, on peut définir un paramètre intrinsèque $\mu_2$ en posant

$$d\mu_2{}^6 = |R_1|\, d\lambda_1{}^6 = |R|\, d\lambda^6 \tag{7}$$

et la bande du premier ordre est donnée (à affinités unimodulaires près) si l'on donne en fonction de $\mu_2$ les invariants

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{d \log |R_1|}{d\mu_2} = |R|^{-\frac{1}{6}} \left(\frac{R'}{R} - 2P\right), \\ t_2 &= T_1{}^2 R_1 = T^2 R, \\ q_2 &= Q_1 R_1{}^{-\frac{1}{3}} = R^{-\frac{1}{3}} \left(Q - \tfrac{2}{3}P' - \tfrac{2}{9}P^2\right); \end{aligned} \tag{8}$$

il y a une petite exception si $T = 0$, où il faut donner encore

$$\varepsilon_2 = \operatorname{sgn} R; \tag{9}$$

si $T \gtrless 0$, on a $\varepsilon_2 = \operatorname{sgn} t_2$.

Si $R = T = 0$, mais $Q - \frac{2}{3}P' - \frac{2}{9}P^2 \gtrless 0$,

on peut définir un paramètre intrinsèque $\mu_3$ en posant

$$d\mu_3{}^2 = |Q_1|\, d\lambda_1{}^2 = |Q - \tfrac{2}{3}P' - \tfrac{2}{9}P^2|\, d\lambda^2, \tag{10}$$

et la bande orientée d'élements de premier ordre est donnée a affinités unimodulaires près si l'on connaît en fonction de $\mu_3$ les invariants

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 &= \operatorname{sgn}\left(Q - \tfrac{2}{3}P' - \tfrac{2}{9}P^2\right) = \pm 1, \\ q_3 &= \frac{d \log |Q_1|}{d\mu_3} = Q' - \tfrac{2}{3}P'' - \tfrac{2}{3}PQ + \tfrac{4}{27}P^3. \end{aligned} \tag{10 bis}$$

Enfin, si $T = R = Q - \frac{2}{3}P' - \frac{2}{9}P^2 = 0$, aucun paramètre intrinsèque n'existe pas; la courbe de la bande est une parabole, la développable de la bande est un cylindre.

24. Si $R = 0$, on trouverait aisément que les expressions $d\lambda_1$, $Q_1$ en (3) sont respectivement l'arc affine et la courbure affine de la courbe plane de la bande. Soit $R \gtrless 0$. On voit facilement que $\mu_2$ est l'arc affine de la courbe de la bande et que l'invariant $\varepsilon$ de la courbe de la bande est égal à $\varepsilon_2$[18]. Désignons par $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$, $\xi_2$ ce que nous avons désigné par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\xi$ dans le chapitre I et laissons aux lettres $k$, $l$ leur signification. Des équations (20) du chap. I on tire

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{dx}{d\mu_2} = |R|^{-\frac{1}{6}} \alpha, \\ \beta_2 &= \frac{d\alpha_2}{d\mu_2} = |R|^{-\frac{4}{3}} \left[\left(-\tfrac{1}{6}R' + PR\right)\alpha + R\beta\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

---

[18] Voir l'équation (4) du chap. I.

De la signification de $\beta_2$ on conclut: Condition pour que le diamètre passant en $x$ de la conique osculatrice de la courbe de la bande (non plane) soit situé dans le plan normal affine de la bande (du second ordre) est

$$R' - 6PR = 0. \tag{12}$$

On a

$$\xi_2 = \varepsilon_2 \alpha_2 \times \beta_2 = |R|^{-\frac{1}{2}} C.$$

Si l'on dérive cette équation par rapport à $\mu'_2$, on obtient

$$\frac{d\xi_2}{d\mu_2} = |R|^{-\frac{5}{3}} [-R^2B + (PR - \tfrac{1}{2}R')\,C].$$

D'après la signification du premier membre, on a le résultat suivant: Condition pour que le plan tangent de la bande soit le plan polaire du point à l'infini de la tangente à la courbe de la bande par rapport au complexe linéaire osculateur de cette courbe est

$$R' - 2PR = 0.$$

Enfin, énonçons sans démonstration que les invariants affines de la courbe de la bande sont

$$\begin{aligned} k &= |R|^{-\frac{7}{3}} (-\tfrac{2}{3}RR'' + \tfrac{35}{36}R'^2 - PRR' + 2P'R^2 + P^2R^2 - QR^2), \\ l &= \varepsilon_2\,|R|^{-\frac{7}{2}} (-\tfrac{1}{2}R^2R''' + \tfrac{9}{4}RR'R'' - PR^2R'' + P''R^3 - \tfrac{15}{4}R'^3 + \\ &+ \tfrac{3}{2}PRR'^2 - P'R^2R' - \tfrac{1}{2}P^2R^2R' - \tfrac{1}{2}QR^2R' + PP'R^3 + PQR^3 - R^4T). \end{aligned} \tag{14}$$

25. Considérons une *bande d'éléments de contact de troisième ordre* d'une surface $S$ non développable contenant la bande du second ordre pour laquelle nous continuous à garder les notations habituelles. Le vecteur $X$ de la normale affine de $S$ est déterminé par la bande du troisième ordre[19] ainsi qu'on peut le nommer le *vecteur de la normale affine de la bande.* On a

$$X \,.\, \xi = 1, \; X \,.\, d\xi = 0,$$

et donc

$$X = \beta + N\gamma. \tag{15}$$

La bande d'éléments de contact du troisième ordre existe et est définie à affinités unimodulaires près si l'on donne en fonction de $\lambda$ les invariants

$$\varepsilon, P, Q, R, T, N.$$

Pour la démonstration je ferai usage de propositions qui j'ai données dans mon Mémoire „*O křivkovém a plošném elementu třetího řádu projektivního prostoru*"[20]. Cherchons d'abord le plan polaire du point

$$x + a\gamma, \tag{16}$$

[19] au signe près. Le vecteur de la normale affine de la bande du troisième ordre défini par (15) peu avoir le signe contraire à celui de $S$. Si $S$ est à points hyperboliques les deux vecteurs ne peuvent pas concorder pour toutes les bandes de $S$.

[20] Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, *t.* 50, 1921. Voir aussi le résumé français du mémoire cité sous [15].

$a$ étant quelconque, par rapport à la quadrique de Lie de $S$. Pour $a=0$ c'est évidemment le plan $\mathfrak{B}=0$, pour $a=\infty$ le plan passant en $x$ et contenant les directions $\alpha$ et $X$, donc le plan $N\mathfrak{B}-\mathfrak{C}=0$; pour $a$ arbitraire, c'est donc le plan

$$(aN+b)\mathfrak{B}-a\mathfrak{C}=0,$$

où il reste à déterminer la constante $b$. Mais la quadrique de Lie ayant un contact du second ordre avec la quadrique de Moutard, par exemple, a l'équation de la forme

$$2\mathfrak{B}-\mathfrak{A}^2+\varepsilon\mathfrak{C}^2+\mathfrak{B}(a_1\mathfrak{A}+a_2\mathfrak{B}+a_3\mathfrak{C})=0$$

et, par suite, le plan polaire du point (16) a l'équation de la forme

$$2a\varepsilon\mathfrak{C}+(2+aa_3)\mathfrak{B}=0.$$

On obtient en comparant

$$a(N\mathfrak{B}-\mathfrak{C})-\varepsilon\mathfrak{B}=0. \tag{17}$$

Pour démontrer que la bande du troisième ordre est déterminée par les invariants énumérés, il suffit de faire voir que l'on peut déterminer la normale affine de chaque section plane de $S$. Or les normales affines des sections planes passant par la tangente arbitraire

$$a_1\alpha-\varepsilon a_3\gamma$$

forment un plan qui contient la tangente conjuguée et est par suite de la forme

$$a_1\mathfrak{A}+a_2\mathfrak{B}+a_3\mathfrak{C}=0.$$

Ces plans enveloppent ($\lambda$ étant donnée) un cône de la troisième classe dont $\mathfrak{B}=0$ est un plan tangent double, les droites de contact étant les tangentes asymptotiques, c'est-à-dire les droites

$$\alpha+\sqrt{\varepsilon}\,\gamma,\quad \alpha-\sqrt{\varepsilon}\,\gamma;$$

de plus, les trois plan tangents passant par la normale affine de $S$ forment une terne apolaire aux tangentes asymptotiques. L'équation du cône en question en coordonnées $a_1\ a_2\ a_3$ a donc la forme

$$a_2+Na_3=\frac{c_1(a_1+\sqrt{\varepsilon}\,a_3)^3+c_2(a_1-\sqrt{\varepsilon}\,a_3)^3}{a_1^2-\varepsilon a_3^2}. \tag{18}$$

Tout se réduit à calculer $c_1$ et $c_2$ ce qui est facile. D'abord si $a_3=0$ on doit obtenir le plan polaire du point à l'infini de la tangente à la courbe de la bande par rapport à la quadrique de Moutard, ce qui donne, d'après l'équation (37) du chap. II,

$$c_1+c_2=-\tfrac{2}{3}P. \tag{19}$$

La correspondance entre le point à l'infini (16) et le plan (17) est une par de la transformation $\Sigma_0$ du mémoire cité. La part correspondante des transformations $\Sigma_1$ et $\Sigma_{-3}$ considérées au même endroit s'obtient si l'on remplace, dans l'équation (17), $a$ respectivement par

$$\frac{a}{1+ah}, \quad \frac{a}{1-3ah}$$

où $a$ reste à déterminer, ce qui donne

$$a(N\mathfrak{B}-\mathfrak{C})-\varepsilon(1+ah)\mathfrak{B}=0, \tag{17bis}$$

$$a(N\mathfrak{B}-\mathfrak{C})-\varepsilon(1-3ah)\mathfrak{B}=0. \tag{17ter}$$

De là on voit en observant la signification géométrique de $\Sigma_1$ que (18) est satisfaite pour

$$a_1=0,\ a_2=N-\varepsilon h,\ a_3=-1,$$

ce qui donne

$$c_1-c_2=-\varepsilon^{3/2}h. \tag{20}$$

Pour détérminer $h$, remarquons que, d'après l'équation (18) du chap. II (p. 27) et d'après la signification de $\Sigma_{-3}$, l'équation ($17^{\text{ter}}$) si l'on y pose $a=-\frac{1}{T}$, donne le plan osculateur $\mathfrak{C}=0$ de la courbe de la bande, d'où

$$-3h=T+\varepsilon N,$$

ainsi que

$$c_1-c_2=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{3}(N+\varepsilon T). \tag{20'}$$

Il résulte des équations (19) et (20′) que l'équation du cône envisagé est bien déterminée et s'écrit

$$\begin{aligned}3(a_2+Na_3)(a_1^2-\varepsilon a_3^2)+2Pa_1(a_1^2+3\varepsilon a_3^2)-\\-(N+\varepsilon T)\,a_3(3\varepsilon a_1^2+a_3^2).\end{aligned} \tag{21}$$

Cela confirme ce que nous avons affirmé plus haut; de plus, on voit de nouveau que si $P=0$ la courbe de la bande est une courbe de Darboux sur $S$; en outre, on voit que

$$N+\varepsilon T=0 \tag{22}$$

est la condition pour que la courbe de la bande soit une courbe de Segre sur $S$. Si l'on appelle *bande de Segre* la bande d'élément du troisième ordre d'une surface $S$ le long d'une courbe de Segre, on voit que *chaque bande du seconde ordre contient une et une seule bande de Segre du troisième ordre.* La normale affine correspondante

$$\beta-\varepsilon T\gamma \tag{23}$$

a été déjà caractérisée géométriquement[21].

Pour la bande du troisième ordre d'une surface réglée on a, d'après la formule (52) du chap. II (p. 28),

$$(N+\varepsilon T)^2-4\varepsilon P=0. \tag{24}$$

Pour une *bande de courbure affine,* c'est-à-dire si la normale affine

[21] Chap. II, éq. (54), p. 29.

engendre une développable, on tire de l'équation (28) du chap. II (p. 24) la condition

$$N' - NP + R = 0. \tag{25}$$

Ces conditions particulières seront retrouvées dans le chapitre suivant.

Faisons enfin la remarque suivante. La bande du troisième ordre est déterminée, comme nous l'avons vu, si on donne en fonction d'un paramètre $x$, $\xi$ et $X$. Si ce n'est pas une bande de courbure affine, il suffit de donner $x$ et $X$. En effet, $\xi$ se détermine des équations

$$\xi \,.\, dx = 0,\ \xi \,.\, X = 1,\ \xi \,.\, dX = 0.$$

## CHAPITRE IV.

### *Courbes tracées sur une surface.*

26. Notre but, dans ce chapitre, est de calculer

$$d\lambda,\ P,\ Q,\ R,\ T,\ N$$

pour une bande arbitraire du troisième ordre d'une surface donnée. Cependant, avant de faire les calculs, il est nécessaire de rappeler les expressions et formules fondamentales de la géométrie affine de surfaces, d'autant plus qu'il ne suffit point de citer un mémoire seul[22].

Une surface $S$ non développable soit déterminée en donnant son point mobile $x$ en fonction de deux variables indépendantes $u$ et $v$[23] et le vecteur $\xi$ de direction du plan tangent à $S$. Pour fixer le facteur scalaire de $\xi$, nous posons la condition

$$\xi\,(\xi\xi_1\xi_2) + \varepsilon x_1 \times x_2 = 0,\ \varepsilon = \pm 1, \tag{1}$$

l'indice 1 (2) signifiant la dérivée par rapport à $u$ ($v$). $\xi$ est ainsi déterminé au signe près; ceci sera fixé plus loin. Le vecteur $X$ de la normale affine sera défini par les équations

$$X \,.\, \xi = 1,\ X \,.\, \xi_1 = 0,\ X \,.\, \xi_2 = 0. \tag{2}$$

La forme différentielle quadratique fondamentale $F_2$ est définie par l'équation

$$F_2 = -\,dx \,.\, d\xi = \Delta_{11} du^2 + 2\Delta_{12} du\,dv + \Delta_{22} dv^2; \tag{3}$$

son discriminant sera indiqué par $\nabla$ ainsi que

$$\Delta_{ik} = -\,x_i\xi_k = -\,x_k\xi_i,\ \nabla = \Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}{}^2. \tag{4}$$

---

[22] Outre les travaux cités sous [7], [9], [10], voir encore *G. Sannia*, *Riavvicinamento di geometrie differenziali* etc., sous presse dans les Annali di Matematica, *L. Berwald*, *Die Grundgleichungen der Hyperflächen* etc., Mathematische Zeitschrift 1922, *E. Čech*, *Les conditions d'intégrabilité* etc., sous presse dans les Mémoires de la Société de Sciences de Prague. En outre le Mémoire fondamental *G. Fubini*, *Fondamenti di geometria projettivodifferenziale*, Rendiconti di Palermo, 1919.

[23] Pour la commodité d'écriture, je pose parfois $u = u_1$, $v = u_2$.

Si l'on multiplie (1) par $X$, on obtient

$$(\xi\xi_1\xi_2) = -\varepsilon\,(x_1x_2X)\,; \tag{5}$$

d'autre part, (2) et (4) donnent

$$(x_1x_2X)\,(\xi\xi_1\xi_2) = \begin{vmatrix} 0 & -\varDelta_{11} & -\varDelta_{12} \\ 0 & -\varDelta_{12} & -\varDelta_{22} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \nabla. \tag{6}$$

Fixons le signe de $\xi$ en posant la condition

$$(x_1x_2X) > 0,$$

qui signifie qu'un observateur qui regarde de la partie positive de $X$ voit la partie positive $(dv > 0)$ de la tangente à la courbe $u = \text{const.}$ à droite de la partie positive $(du > 0)$ de la tangente à la courbe $v = \text{const.}$ Les équations (5) et (6) donnent alors

$$\varepsilon = -\operatorname{sgn}\nabla, \tag{7}$$

ainsi que $\varepsilon = 1$ on $\varepsilon = -1$ selon que $S$ est à points hyperboliques on elliptiques et

$$(x_1x_2X) = \sqrt{|\nabla|}, \quad (\xi\xi_1\xi_2) = -\varepsilon\sqrt{|\nabla|}. \tag{8}$$

Nous poserons

$$\vartheta_{11} = \frac{\varDelta_{22}}{\nabla}, \quad -\vartheta_{12} = \frac{\varDelta_{12}}{\nabla}, \quad \vartheta_{22} = \frac{\varDelta_{11}}{\nabla}, \tag{9}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \vartheta_{11}\varDelta_{11} + \vartheta_{12}\varDelta_{12} = 1, \quad \vartheta_{12}\varDelta_{11} + \vartheta_{22}\varDelta_{12} = 0, \\ \vartheta_{11}\varDelta_{12} + \vartheta_{12}\varDelta_{22} = 0, \quad \vartheta_{12}\varDelta_{12} + \vartheta_{22}\varDelta_{22} = 1. \end{aligned} \tag{10}$$

Nous ferons usage de calcul absolu, $F_2$ étant la forme fondamentale, et nous indiquerons par $\varphi_i, \varphi_{ik}, \varphi_{ike} \ldots$ les dérivées covariantes successives $\varphi$ et

$$c_{i_1\ldots i_\alpha\,|\,j},\ c_{i_1\ldots i_\alpha\,|\,jk},\ \ldots$$

les systèmes covariants dérivés du système covariant $c_{i_1\ldots i_\alpha}$. *Si*

$$C = \sum_{i_1\ldots i_\alpha} c_{i_1\ldots i_\alpha}\, du_{i_1}\ldots du_{i_\alpha},$$

je pose

$$\delta C = \sum_{i_1\ldots i_\alpha j} c_{i_1\ldots i_\alpha\,|\,j}\, du_{i_1}\ldots du_{i_\alpha}\, du_j,$$
$$\delta^2 C = \sum_{i_1\ldots i_\alpha jk} c_{i_1\ldots i_\alpha\,|\,jk}\, du_{i_1}\ldots du_{i_\alpha}\, du_j\, du_k.$$

De plus, je fais usage des différentielles supérieures contravariantes de MM. Levi Cività e Fubini

$$\begin{aligned} \delta^2 u_i &= d^2 u_i + \sum_{rs} \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} du_r\, du_s, \\ \delta^3 u_i &= d(\delta^2 u_i) + \sum_{rs} \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} \delta^2 u_r\, du_s, \end{aligned} \tag{10 bis}$$

lesquelles, avec les dérivées covariantes, permettent d'effectuer la différentiation d'un produit suivant la règle du calcul différentiel ordinaire.

Outre la forme différentielle quadratique $F_2$ on a encore à considérer une forme différentielle fondamentale cubique $F_3$, définie par l'équation

$$F_3 = \tfrac{1}{2}(dx \,.\, d^2\xi - d^2x \,.\, d\xi) = \varDelta_{111}\, du^3 + 3\varDelta_{112}\, du^2\, dv + \\ + 3\varDelta_{122}\, du\, dv^2 + \varDelta_{222}\, dv^3. \tag{11}$$

Les deux formes sont liées par les relations d'apolarité

$$\vartheta_{11}\varDelta_{111} + 2\vartheta_{12}\varDelta_{112} + \vartheta_{22}\varDelta_{122} = \vartheta_{11}\varDelta_{112} + 2\vartheta_{12}\varDelta_{122} + \vartheta_{22}\varDelta_{222} = 0, \tag{12}$$

et possèdent donc un seul invariant absolu

$$J = \frac{1}{F^2}\begin{vmatrix} \varDelta_{111} & \varDelta_{112} & \varDelta_{122} \\ \varDelta_{112} & \varDelta_{122} & \varDelta_{222} \\ \varDelta_{11} & \varDelta_{12} & \varDelta_{22} \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Je désigne par $K$ la courbure de la forme $F_2$ et je pose

$$H = J + K. \tag{14}$$

De plus je pose

$$D_{11} = \frac{1}{\sqrt{|F|}}(\varDelta_{111\,|\,2} - \varDelta_{112\,|\,1}),\ D_{12} = \frac{1}{\sqrt{|F|}}(\varDelta_{112\,|\,2} - \varDelta_{122\,|\,1}), \\ D_{22} = \frac{1}{\sqrt{|F|}}(\varDelta_{122\,|\,2} - \varDelta_{222\,|\,1}), \tag{15}$$

ainsi que l'on tire de (12)

$$\vartheta_{11} D_{11} + 2\vartheta_{12} D_{12} + \vartheta_{22} D_{22} = 0, \tag{16}$$

puis

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{|F|}}(D_{11\,|\,2} - D_{12\,|\,1}),\ D_2 = \frac{1}{\sqrt{|F|}}(D_{12\,|\,2} - D_{22\,|\,1}), \tag{17}$$

et

$$D = \frac{1}{\sqrt{|F|}}(D_{1\,|\,2} - D_{2\,|\,1}). \tag{18}$$

J'introduis encore la forme différentielle quadratique $\mathfrak{D}$ en posant

$$\mathfrak{D} = d_{11}\, du^2 + 2d_{12}\, du\, dv + d_{22}\, dv^2 = \\ = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|F|}}\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{22} \\ \varDelta_{11} & \varDelta_{12} & \varDelta_{22} \\ dv^2 & -du\,dv & du^2 \end{vmatrix} = \\ = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|F|}}\begin{vmatrix} D_{11}\, du + D_{12}\, dv, & D_{12}\, du + D_{22}\, dv \\ \varDelta_{11}\, du + \varDelta_{12}\, dv, & \varDelta_{12}\, du + \varDelta_{22}\, dv \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Des équations (2), (4) et (8) on tire

$$x_1 \times x_2 = \sqrt{|F|}\,\xi,\ x_1 \times X = \sqrt{|F|}\,(\vartheta_{12}\xi_1 + \vartheta_{22}\xi_2), \\ x_2 \times X = -\sqrt{|F|}\,(\vartheta_{11}\xi_1 + \vartheta_{12}\xi_2), \tag{20}$$

$$\xi_1 \times \xi_2 = -\varepsilon\sqrt{|F|}\,X,\ \xi \times \xi_1 = \varepsilon\sqrt{|F|}\,(\vartheta_{12} x_1 + \vartheta_{22} x_2), \\ \xi \times \xi_2 = -\varepsilon\sqrt{|F|}\,(\vartheta_{11} x_1 + \vartheta_{12} x_2). \tag{21}$$

Encore, je ferai usage des abréviations

$$F_2^{(1)} = \varDelta_{11}\,du + \varDelta_{12}\,dv,\ \ F_2^{(2)} = \varDelta_{12}\,du + \varDelta_{22}\,dv, \tag{22}$$

$$\begin{aligned} F_3^{(1)} &= \varDelta_{111}\,du^2 + 2\varDelta_{112}\,du\,dv + \varDelta_{122}\,dv^2,\ \ F_3^{(2)} = \\ &= \varDelta_{112}\,du_2 + 2\varDelta_{122}\,du\,dv + \varDelta_{222}\,dv^2. \end{aligned} \tag{23}$$

Observons les identités

$$\tfrac{1}{2}dF = F_2^{(1)}\,\delta^2 u + F_2^{(2)}\,\delta^2 v \tag{24}$$

et

$$F_3^{\,2} + \tfrac{1}{2}JF_2^{\,3} + \frac{1}{V}\begin{vmatrix} F_3^{(1)} & F_3^{(2)} \\ F_2^{(1)} & F_2^{(2)} \end{vmatrix} = 0, \tag{25}$$

dont la deuxième découle de (12).

Les différentielles de $x$ et $\xi$ sont jointes aux dérivés covariantes par les relations

$$d^2x = x_1\,\delta^2 u + x_2\delta^2 v + \sum_{ik} x_{ik}\,du_i\,du_k, \tag{26}$$

$$d^2\xi = \xi_1\delta^2 u + \xi_2\delta^2 v + \sum_{ik} \xi_{ik}\,du_i\,du_k, \tag{26'}$$

$$d^3x = x_1\delta^3 u + x_2\delta^3 v + 3\sum_{ik} x_{ik}\,du_i\,\delta^2 u_k + \sum_{ikl} x_{ikl}\,du_i\,du_k\,du_l. \tag{27}$$

La surface $S$ est bien déterminée à affinités unimodulaires près si l'on connait les deux formes fondamentales $F_2$ et $F_3$; on l'obtient en intégrant les équations fondamentales

$$\sum_{ik} x_{ik}\,du_i\,du_k = \sum_{rs} \vartheta_{rs}\,F_3^{(r)}x_s + F_2X, \tag{28}$$

$$dX = -Hdx + \sum_{irs} \vartheta_{rs}\,d_{ir}\,du_i\,x_s, \tag{29}$$

$$\sum_{ik} \xi_{ik}\,du_i\,du_k = -\sum_{rs} \vartheta_{rs}F_3^{(2)}\xi_s + (\mathfrak{D} - HF_2)\,\xi, \tag{30}$$

ayant égard aux relations (8). Pourtant, pour que $S$ existe, il faut que les conditions d'intégrabilité des équations fondamentales soient verifiées. Ces conditions d'intégrabilité peuvent s'écrire.

$$H_i - \varepsilon D_i = \begin{vmatrix} \varDelta_{11i} & \varDelta_{12i} & \varDelta_{22i} \\ \varDelta_{11} & \varDelta_{12} & \varDelta_{22} \\ D_{11} & D_{12} & D_{22} \end{vmatrix}\ \ i = 1,\,2. \tag{31}$$

27. Les définitions et formules précédentes étant rappelées, étudions d'abord les courbes asymptotiques de $S$. En nous bornant, comme nous le faisons dans tout ce mémoire, aux courbes réelles, nous devons supposer, dans ce numéro $\varepsilon = 1$. Pour éviter toute ambiguïté, désignons par $\varepsilon'$ l'unité $\varepsilon$ du chap. I. Des équations (21) on tire

$$\xi \times d\xi = \varepsilon\sqrt{|V|}\begin{vmatrix} du & \vartheta_{11}x_1 + \vartheta_{12}x_2 \\ dv & \vartheta_{12}x_1 + \vartheta_{22}x_2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{|V|}}\begin{vmatrix} \varDelta_{11} & \varDelta_{12} \\ \varDelta_{12} & \varDelta_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} du & \vartheta_{11}x_1 + \vartheta_{12}x_2 \\ dv & \vartheta_{12}x_1 + \vartheta_{22}x_2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{|V|}}\begin{vmatrix} F_2^{(1)} & x_1 \\ F_2^{(2)} & x_2 \end{vmatrix},$$

donc

$$\xi \times d\xi = \frac{1}{\sqrt{|V|}} \begin{vmatrix} x_1 \, F_2^{(1)} \\ x_2 \, F_2^{(2)} \end{vmatrix}. \tag{32}$$

Ceci a lieu pour toutes les courbes de $S$; l'équation différentielle des courbes *asymptotiques* étant $F_2 = 0$ ou

$$F_2^{(1)} du + F_2^{(2)} dv = 0,$$

on peut poser

$$F_2^{(1)} = \varrho dv, \quad F_2^{(2)} = -\varrho du$$

ou

$$\begin{gathered} \Delta_{11} du + (\Delta_{12} - \varrho) \, dv = 0 \\ (\Delta_{12} + \varrho) \, du + \Delta_{22} dv = 0; \end{gathered}$$

pour $\varrho$, on a la condition

$$\begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} - \varrho \\ \Delta_{12} + \varrho & \Delta_{22} \end{vmatrix} = V + \varrho^2 = 0,$$

d'où, $\varepsilon$ étant ici égal à un,

$$F_2^{(1)} = -\varepsilon' \sqrt{|V|} \, dv, \; F_2^{(2)} = \varepsilon' \sqrt{|V|} \, du, \; \varepsilon'^2 = 1. \tag{33}$$

De plus, on a évidemment $\varepsilon' = +1$ pour les asymptotiques d'un système et $\varepsilon' = -1$ pour celles de l'autre. En substituant les valeurs (33) dans l'identité (32) on a pour les courbes asymptotiques

$$\xi \times d\xi = \varepsilon' x. \tag{34}$$

En comparant avec équation (1) du chap. I, on voit bien que l'$\varepsilon'$ est l'$\varepsilon$ du chap. I. De plus, au moins si l'on suppose la courbe asymptotique orientée convenablement, la signification de $\xi$ sera encore celle du chap. I. D'ailleurs, quelle que soit l'orientation de l'asymptotique considérée, si l'on pose

$$e = \operatorname{sgn} F_3 = \pm 1, \tag{35}$$

on voit que, dans les formules du chap. I, $\xi$ est à remplacer par $e\xi$, et que l'arc affine $\lambda$ une courbe asymptotique est donné par la formule

$$d\lambda^3 = eF_3. \tag{36}$$

28. Pour la discussion suivante il sera commode de supposer que les coordonnées curvilignes $u$, $v$ soient choisies de façon que l'on ait, le long de la courbe asymptotique considérée

$$dv = 0, \tag{37}$$

et que les asymptotiques soient les lignes coordonnées. On aura sous ces hypothèses

$$\Delta_{11} = \Delta_{22} = \vartheta_{11} = \vartheta_{22} = 0, \quad \vartheta_{12} = \frac{1}{\Delta_{12}}, \; \Delta_{112} = \Delta_{122} = 0, \tag{38}$$

et, d'après (33) et (35),

$$\varepsilon' = \operatorname{sgn} \Delta_{12}, \quad e = \operatorname{sgn} \Delta_{111} du. \tag{39}$$

Des équations (38) et ($10^{\text{bis}}$) on tire

$$\delta^2 v = \delta^2 v = 0. \tag{40}$$

Par dérivation covariante, on déduit de (28) en tenant compte de (29)

$$x_{ikl} = \sum_{rs} \vartheta_{rs} \left( \Delta_{ikr|l} + \sum_{ab} \vartheta_{ab} \Delta_{blr} \Delta_{ika} + \Delta_{ik} d_{ls} \right) x_s - H \Delta_{ik} x_l + \Delta_{ikl} X.$$

Pareillement, on obtient de (30)

$$\xi_{ikl} = \sum_{rs} \vartheta_{rs} \left( - \Delta_{ikr|l} + \sum_{ab} \vartheta_{ab} \Delta_{blr} \Delta_{ika} \right) \xi_s + (d_{ik} - H \Delta_{ik}) \xi_l +$$
$$+ \left( d_{ik|l} - H_l \Delta_{ik} + H \Delta_{ikl} - \sum_{rs} \vartheta_{rs} \Delta_{ikr} d_{ls} \right) \xi.$$

Sous les hypothèses présentes, on a donc

$$x_{11} = \frac{\Delta_{111}}{\Delta_{12}} x_2, \quad \xi_{11} = - \frac{\Delta_{111}}{\Delta_{12}} \xi_2 + d_{11} \xi,$$
$$x_{111} = \frac{\Delta_{111|1}}{\Delta_{12}} x_2 + \Delta_{111} X,$$
$$\xi_{111} = d_{11} \xi_1 - \frac{\Delta_{111|1}}{\Delta_{12}} \xi_2 + (d_{11|1} + H \Delta_{111}) \xi.$$

Or d'après (26), (26′) et (27) on a

$$\begin{aligned} d^2 x &= x_1 \delta^2 u + x_{11} du^2, \\ d^2 \xi &= \xi_1 \delta^2 u + \xi_{11} du^2, \\ d^3 x &= x_1 \delta^3 u + 3 x_{11} \delta^2 u \, du + x_{111} du^3, \\ d^3 \xi &= \xi_1 \delta^3 u + 3 \xi_{11} \delta^2 u \, du + \xi_{111} du^3 ; \end{aligned}$$

en y substituant les valeurs précédentes on a en définitive

$$\left. \begin{aligned} d^2 x &= \delta^2 u \,.\, x_1 + \frac{\Delta_{111}}{\Delta_{12}} du^2 \,.\, x_2, \\ d^2 \xi &= d_{11} du^2 \,.\, \xi + \delta^2 u \,.\, \xi_1 - \frac{\Delta_{111}}{\Delta_{12}} du^2 \,.\, \xi_2, \\ d^3 x &= \delta^3 u \,.\, x_1 + \left( \frac{3 \Delta_{111}}{\Delta_{12}} \delta^2 u \, du + \frac{\Delta_{111|1}}{\Delta_{12}} du^3 \right) x_2 + \Delta_{111} du^3 \,.\, X, \\ d^3 \xi &= [3 d_{11} \delta^2 u \, du + d_{11|1} du^3 + H \Delta_{111}] \xi + \\ &\quad + (\delta^3 u + d_{11} du^3) \xi_1 - \frac{1}{\Delta_{12}} (3 \Delta_{111} \delta^2 u \, du + \Delta_{111|1} du^3) \xi_2. \end{aligned} \right\} \tag{41}$$

De ces équations on tire, faisant usage de (2) e (4),

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} (d^3 x \,.\, d^2 \xi - d^2 x \,.\, d^3 \xi) &= \Delta_{111} [\delta^3 u \, du^2 - 3 (\delta^2 u)^2 du] - \\ &\quad - \Delta_{111|1} \delta^2 u \, du^3 + \Delta_{111} d_{11} du^5, \end{aligned} \tag{42}$$

$$d^3 x \,.\, d^3 \xi = \Delta_{111} (d_{11|1} + H \Delta_{111}) du^6. \tag{43}$$

Les équations (14) et (15) du chap. I deviennent maintenant

$$k = \frac{e}{2} \frac{d^3 x \,.\, d^2 \xi - d^2 x \,.\, d^3 \xi}{|F_3|^{5/3}} - \frac{e}{3} \frac{d^2 F_3}{|F_3|^{5/3}} + \frac{5}{9} \left( \frac{dF_3}{F_3{}^{4/3}} \right)^2, \tag{44}$$

$$l = e \frac{d^3 x \,.\, d^3 \xi}{F_3{}^2}. \tag{45}$$

En différentiant l'équation

$$F_3 = \sum_{ikl} \Delta_{ikl} du_i \, du_k \, du_l,$$

on a

$$dF_3 = \delta F_3 + 3 \sum_{ikl} \Delta_{ikl} \, du_i \, du_k \, \delta^2 u_l,$$

$$d^2 F_3 = \delta^2 F_3 + 6 \sum_{iklr} \Delta_{ikl|r} \delta^2 u_i \, du_k \, du_l \, du_r + \sum_{iklr} \Delta_{iklr} \, du_i \, du_k \, du_e \, \delta^2 u_r +$$
$$+ 6 \sum_{ikl} \Delta_{ikl} \delta^2 u_i \, \delta^2 u_k \, du_l + 3 \sum_{ikl} \delta^3 u_i \, du_k \, du_l;$$

sous les conditions (37) e (40), on a donc

$$F_3 = \Delta_{111} du^3, \quad dF_3 = \Delta_{111|1} du^4 + 3 \Delta_{111} \delta^2 u \, du^2,$$
$$d^2 F_3 = \Delta_{111|11} du^5 + 7 \Delta_{111|1} \delta^2 u \, du^3 + 6 \Delta_{111} (\delta^2 u)^2 \, du + 3 \Delta_{111} \delta^3 u \, du^2.$$

En substituant ces valeurs ainsi que les valeurs (42) e (43) dans les équations (44) et (45), on obtient

$$k = \frac{\Delta_{111} \cdot d_{11} du^5 + \frac{5}{9} \frac{\Delta_{111|1}^2}{\Delta_{111}} du^5 - \frac{1}{3} \Delta_{111|11} du^5}{F_3^{5/3}}, \tag{46}$$

$$l = e \frac{(d_{11|1} + H \Delta_{111}) \, du^3}{F_3}. \tag{47}$$

Déterminons encore le trièdre mobile attaché à la courbe asymptotique, par exemple les vecteurs de la seconde classe $A$, $B$, $C$. Les équations (16) du chapitre I s'écrivent maintenant

$$A = e \frac{3 F_3 d^2 \xi - dF_3 d\xi}{F_3^{5/3}}, \quad B = -e \frac{d\xi}{F_3^{1/3}}, \quad C = e\varepsilon' \xi.$$

En y substituant les valeurs (41), on obtient

$$\begin{aligned} eA &= \frac{3 d_{11} du^2}{F_3^{2/3}} \xi - \frac{\Delta_{111|1} du^5}{F_3^{5/3}} \xi_1 - \frac{3 \frac{\Delta_{111}}{\Delta_{12}} du^2}{F_3^{2/3}} \xi_2, \\ eB &= -\frac{du}{F_3^{1/3}} \xi_1, \quad eC = \varepsilon' \xi. \end{aligned} \tag{48}$$

29. Maintenant, nous pouvons nous affranchir des hypothèses spéciales (37) et (38) et envisager des coordonnées courvilignes quelconques. Pour le voir remarquons que l'on peut écrire les équations (46), (47) et (48) comme il suit

$$k = \frac{F_3^2 \mathfrak{D} + \frac{5}{9} (\delta F_3)^2 - \frac{1}{3} F_3 \delta^2 F_3}{F_3^{8/3}}, \tag{46'}$$

$$l = e \left( \frac{\delta \mathfrak{D}}{F_3} + H \right), \tag{47'}$$

$$\begin{aligned} eA &= \frac{3\mathfrak{D}}{F_3^{2/3}}\xi - \frac{\delta F_3}{F_3^{5/3}}\,d\xi - 3\,\frac{\sum_{rs}\vartheta_{rs}F_3^{(r)}\xi_s}{F_3^{2/3}}, \\ eB &= -\frac{d\xi}{F_3^{1/3}}, \quad eC = \varepsilon'\xi. \end{aligned} \tag{48'}$$

Nous avons déduit les formules précédentes sous les suppositions (37) et (38). Or les seconds membres ne dépendant pas évidemment du système de coordonnées courvilignes employé, ces formules sont correctes sans aucune restriction.

30. Les calculs relatifs aux lignes asymptotiques étant ainsi achevés, il nous reste d'étudier la bande d'élément de contact de $S$ du troisième ordre le long d'une courbe non asymptotique quelconque $C$. Soit maintenant

$$e = \operatorname{sgn} F_2 = \pm 1. \tag{49}$$

On voit tout de suite que le signe $\varepsilon$ défini par (7) est identique à l' $\varepsilon$ du chap. II, tandisque $\xi$ e $X$ sont à remplacer par $e\xi$ et $eX$ dans les formules des chap. II et III. Si l'on laisse aux lettres

$$d\lambda,\ P,\ Q,\ R,\ T,\ N$$

leur signification, on a d'abord

$$d\lambda^2 = eF_2 \tag{50}$$

et, d'après l'équation (5') du chap. II,

$$P = e\frac{F_3}{|F_2|^{3/2}}. \tag{51}$$

On a

$$x' = \frac{dx}{d\lambda} = \frac{dx}{|F_2|^{1/2}}, \quad x'' = \frac{d^2x\,d\lambda - dx\,d^2\lambda}{d\lambda^3} = e\,\frac{F_2d^2x - \frac{1}{2}\,dF_2\,dx}{F_2^2},$$

$$\xi' = \frac{dx}{|F_2|^{1/2}}, \quad \xi'' = e\,\frac{F_2d^2\xi - \frac{1}{2}\,dF_2\,d\xi}{F_2^2}.$$

Or des équations (23) et (26) on tire

$$F_2d^2x - \tfrac{1}{2}\,dF_2dx = \begin{vmatrix} F_2^{(1)}du + F_2^{(2)}dv, & x_1du + x_2dv \\ F_2^{(1)}\delta^2u + F_2^{(2)}\delta^2v, & x_1\delta^2u + x_2\delta^2v \end{vmatrix} + F_2\sum_{ik}x_{ik}du_idu_k =$$

$$= (du\,\delta^2v - dv\,\delta^2u)\begin{vmatrix} F_2^{(1)} & x_1 \\ F_2^{(2)} & x_2 \end{vmatrix} + F_2\sum_{ik}x_{ik}\,du_i\,du_k$$

ou tenant compte de (28)

$$= (du\,\delta^2v - dv\,\delta^2u)\begin{vmatrix} F_2^{(1)} & x_1 \\ F_2^{(2)} & x_2 \end{vmatrix} + F_2\sum_{rs}\vartheta_{rs}F_3^{(r)}x_s + F_2^2X.$$

On tire de tout ceci

$$ex'' = \frac{du\,\delta^2v - dv\,\delta u}{F_2^2}\begin{vmatrix} F_2^{(1)} & x_1 \\ F_2^{(2)} & x_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{F_2}\sum_{rs}\vartheta_{rs}F_3^{(r)}x_s + X; \tag{52}$$

analoguement, on obtient l'équation

$$e\xi'' = \frac{du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u}{F_2^2}\begin{vmatrix} F_2^{(1)} & \xi_1 \\ F_2^{(2)} & \xi_2 \end{vmatrix} - \frac{1}{F_2}\sum_{rs}\vartheta_{rs}F_3^{(r)}\xi_s + \left(\frac{\mathfrak{D}}{F_2} - H\right)\xi. \quad (53)$$

Si l'on substitue cette valeur de $\xi''$ dans l'équation (8) du chap. II, on obtient tenant compte de (8)

$$T = -\varepsilon\sqrt{|V|}\begin{vmatrix} \dfrac{du}{|F_2|^{1/2}}, & -\dfrac{F_2^{(2)}}{F_2^2}(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u) - \dfrac{1}{F_2}(\vartheta_{11}F_3^{(1)} + \vartheta_{12}F_3^{(2)}) \\ \dfrac{dv}{|F_2|^{1/2}}, & +\dfrac{F_2^{(1)}}{F_2^2}(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u) - \dfrac{1}{F_2}(\vartheta_{12}F_3^{(1)} + \vartheta_{22}F_3^{(2)}) \end{vmatrix}$$

$$= -e\varepsilon\frac{\sqrt{|V|}}{|F_2|^{3/2}}(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u) + e\varepsilon\frac{\sqrt{|V|}}{|F_2|^{3/2}}\begin{vmatrix} du, & \vartheta_{11}F_3^{(1)} + \vartheta_{12}F_3^{(2)} \\ dv, & \vartheta_{12}F_3^{(1)} + \vartheta_{22}F_3^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Or d'après (10)

$$\begin{vmatrix} du, & \vartheta_{11}F_3^{(1)} + \vartheta_{12}F_3^{(2)} \\ dv, & \vartheta_{12}F_3^{(1)} + \vartheta_{22}F_3^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varDelta_{11} & \varDelta_{12} \\ \varDelta_{12} & \varDelta_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_2^{(1)} & F_3^{(1)} \\ F_2^{(2)} & F_3^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Posons donc

$$T_g = -\varepsilon\frac{\sqrt{|V|}}{|F_2|^{3/2}}(du\,\delta^2 v - dv\,\delta^2 u), \quad (54)$$

$$T_s = \frac{1}{\sqrt{|VF_2^3|}}\begin{vmatrix} F_3^{(1)} & F_2^{(1)} \\ F_3^{(2)} & F_2^{(2)} \end{vmatrix}; \quad (55)$$

on a manifestement

$$T = e\,(T_g + T_s). \quad (56)$$

L'expression $T_s$ s'annule le long des *courbes de Segre* c'est-à-dire des courbes conjuguées à celles de Darboux. Les courbes le long desquelles $T_g = 0$ pouvent être appelées les *géodésiques affines*, puisque ce sont les extrémales de l'intégrale $\int d\lambda = \int\sqrt{|F_2|}$. L'équation (56) dit par exemple qu'une courbe de Segre est une géodésique affine alors et alors seulement si elle est la courbe de contact d'un cylindre circonscrit. Ce résultat simple peut se déduire aisément par d'autres manières.

31. Cherchons maintenant le trièdre mobile attaché à la bande du second ordre. D'abord, on a tout de suite

$$\alpha = \frac{dx}{|F_2|^{1/2}}. \quad (57)$$

Puis on a

$$\gamma = \xi \times \xi'$$

et donc d'après (32)

$$\gamma = -\frac{1}{\sqrt{|VF_2|}}\begin{vmatrix} F_2^{(1)} & x_1 \\ F_2^{(2)} & x_2 \end{vmatrix}. \quad (58)$$

D'après l'équation (10) du chap. II, on a

$$\beta = x'' - Px' = x'' - e\frac{F_3}{F_2^2}(x_1 du + x_2 dv)$$

et donc, d'après (52), (54) et (58)

$$e\beta = \varepsilon T_g \gamma + \frac{1}{F_2} \sum_{rs} \vartheta_{rs} F_3^{(r)} x_s - \frac{F_3}{F_2^2}(x_1 du + x_2 dv) + X.$$

Or d'après (10) et (22)

$$x_1 du + x_2 dv = \sum_{rs} \vartheta_{rs} F_2^{(r)} x_s;$$

de plus

$$F_2 \sum_{rs} \vartheta_{rs} F_3^{(r)} x_s - F_3 \sum_{rs} \vartheta_{rs} F_2^{(r)} x_s =$$

$$= \begin{vmatrix} F_2^{(1)} du + F_2^{(2)} dv, & F_2^{(1)} \sum_s \vartheta_{1s} x_s + F_2^{(2)} \sum_s \vartheta_{2s} x_s \\ F_3^{(1)} du + F_3^{(2)} dv, & F_3^{(1)} \sum_s \vartheta_{1s} x_s + F_3^{(2)} \sum_s \vartheta_{2s} x_s \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} F_2^{(1)} & F_3^{(1)} \\ F_2^{(2)} & F_3^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} du & \vartheta_{11} x_1 + \vartheta_{12} x_2 \\ dv & \vartheta_{12} x_1 + \vartheta_{22} x_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{V} \begin{vmatrix} F_2^{(1)} & F_3^{(1)} \\ F_2^{(2)} & F_3^{(2)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_2^{(1)} & x_1 \\ F_2^{(2)} & x_2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\varepsilon F_2^2 T_s \gamma.$$

En résumé, on obtient

$$\alpha = \frac{dx}{|F_2|^{1/2}}, \quad \gamma = -\frac{1}{\sqrt{|VF_2|}} \begin{vmatrix} F_2^{(1)} & x_1 \\ F_2^{(2)} & x_2 \end{vmatrix}, \quad e\beta = \varepsilon (T_g - T_s)\gamma + X. \tag{59}$$

En comparant la dernière équation avec l'équation (15) du chap. III, on voit que

$$N = e\varepsilon (T_s - T_g). \tag{60}$$

Les équations (56) et (60) peuvent être écrites aussi

$$\frac{e}{2}(T - \varepsilon N) = T_g = -\varepsilon \frac{\sqrt{|V|}}{F_2^{3/2}} (du\, \delta^2 v - dv\, \delta^2 u), \tag{61}$$

$$\frac{e}{2}(T + \varepsilon N) = T_s = \frac{1}{\sqrt{|VF_2^3|}} \begin{vmatrix} F_3^{(1)} & F_2^{(1)} \\ F_3^{(2)} & F_2^{(2)} \end{vmatrix}. \tag{62}$$

L'équation (62) confirme que $T + \varepsilon N = 0$ est la condition pour une bande de Segre, ce que nous avons déjà trouvé par une autre voie dans le chap. III, N° 25 (p. 45, éq. (22)); l'équation (62) donne le résultat que $T - \varepsilon N = 0$ est la condition pour une bande géodésique (affine).

L'identité (25) donne maintenant

$$\tfrac{1}{2} J = e(\varepsilon T_s^2 - P^2) = e\left[\frac{\varepsilon}{4}(T + \varepsilon N)^2 - P^2\right]. \tag{63}$$

Le second membre possède donc, à un point donné de $S$, une valeur fixe indépendante de la bande considérée; en particulier cette valeur fixe est zéro si $S$ est une surface réglée, ce qui confirme l'équation (24) du chap. III.

32. Il nous reste à calculer les invariants $Q$ et $R$. Or en dérivant l'équation (15) du chap. III (dans laquelle nous devons $X$ rem-

placer par $eX$) on obtient tenant compte des formules fondamental es (III)

$$eX' = (NT - Q)\,\alpha + (R - NP + N')\,\gamma. \tag{64}$$

D'autre part, on tire de (29)

$$X' = -Ha + \frac{1}{|F_2|^{1/2}} \sum_{irs} \vartheta_{rs}\, d_{ir}\, du_i\, x_s. \tag{65}$$

Par un calcul facile on tire des deux premières équations (59)

$$ex_1 = \frac{F_2^{(1)}}{|F_2|^{1/2}}\alpha + \frac{\sqrt{|F|}\,dv}{|F_2|^{1/2}}\gamma, \quad ex_2 = \frac{F_2^{(2)}}{|F_2|^{1/2}}\alpha - \frac{\sqrt{|F|}\,du}{|F_2|^{1/2}}\gamma;$$

en substituant ces valeurs de $x_s$ dans l'équation (65) on obtient

$$X' = -H\alpha + \frac{1}{F_2} \sum_{irs} \vartheta_{rs}\, d_{ir}\, F_2^{(s)}\, du_i \,.\, \alpha + \frac{\sqrt{|F|}}{F_2} \sum_{ir} d_{ir}\, du_i\, (\vartheta_{r_1} dv - \vartheta_{r_2} du).$$

Si l'on compare à l'équation (64) on a

$$\begin{aligned} Q &= NT + eH - \frac{e}{F_2} \sum_{irs} d_{ir}\, \vartheta_{rs}\, du_i\, F_2^{(s)}, \\ R &= NP - N' + \frac{e\sqrt{|F|}}{F_2} \sum_{ir} d_{ir}\, du_i\, (\vartheta_{r_1} dv - \vartheta_{r_2} du). \end{aligned} \tag{66}$$

Or

$$\sum_{s} \vartheta_{rs} F_2^{(s)} = \sum_{st} \delta_{rs} \varDelta_{st}\, du_t = du_r,$$

ainsi que

$$Q = NT + e\left(H - \frac{\mathfrak{D}}{F_2}\right). \tag{67}$$

Cette équation nous donne l'occasion de dire quelques mots sur les courbes définies par l'équation différentielle

$$\mathfrak{D} + HF_2 = 0. \tag{68}$$

De l'équation (67) et de la signification géométrique des équations $Q = T = 0$ (voir chap. II, éq. (23) p. 28) on voit tout de suite[24] que la tangente $t$ d'une courbe qui vérifie l'équation différentielle (68) possède la propriété caractéristique suivante: Le plan passant par $t$ et par la normale affine de $S$ au point de contact est parallèle à la normale affine de $S$ au point successif de la tangente conjuguée à $t$. Si l'on y remplace la normale affine par la normale ordinaire on obtient évidemment une propriété caractéristique des courbes minima. Par analogie, on peut appeler les courbes définies par l'équation différentielle (68) *courbes minima affines* de la surface. Condition nécessaire et suffisante pour qu'elles forment un réseau conjugué est $H = 0$; or cette équation caractérise les *surface minima affines* de M. Blaschke qui présentent beaucoup d'autres analogies avec les surfaces minima ordinaires.

---

[24] D'ailleurs, l'équation (64) montre le même résultat.

Puisque

$$\vartheta_{11}dv - \vartheta_{12}du = \frac{1}{V}(\varDelta_{12}du + \varDelta_{22}dv),$$

$$\vartheta_{12}dv - \vartheta_{22}dv = -\frac{1}{V}(\varDelta_{11}du + \varDelta_{12}dv),$$

on a

$$\sqrt{|V|}\sum_{ir} d_{ir}du_i(\vartheta_{r_1}dv - \vartheta_{r_2}du) = \sqrt{|V|}\,[(d_{11}du + d_{12}dv)\,.$$
$$.\,(\vartheta_{11}dv - \vartheta_{12}du) + (d_{12}du + d_{22}dv)(\vartheta_{21}dv - \vartheta_{22}du)] =$$
$$= \frac{\varepsilon}{\sqrt{|V|}}\begin{vmatrix} d_{11}du + d_{12}dv, & d_{12}du + d_{22}dv \\ \varDelta_{11}du + \varDelta_{12}dv, & \varDelta_{12}du + \varDelta_{22}dv \end{vmatrix}.$$

On peut donc écrire l'équation (66)

$$R = NP - N' + \frac{\varepsilon}{\sqrt{|VF_2|}}\begin{vmatrix} d_{11}du + d_{12}dv, & d_{12}du + d_{22}dv \\ \varDelta_{11}du + \varDelta_{12}dv, & \varDelta_{12}du + \varDelta_{22}dv \end{vmatrix}.$$

Or des équations (16) et (19) on déduit sans peine

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{|V|}}\begin{vmatrix} d_{11}du + d_{12}dv, & d_{12}du + d_{22}dv \\ \varDelta_{11}du + \varDelta_{12}dv, & \varDelta_{12}du + \varDelta_{22}dv \end{vmatrix} = D_{11}du^2 + 2D_{12}dudv + D_{22}dv^2,$$

ainsi que l'on obtient, en définitive

$$R = NP' - N' + \frac{D_{11}du^2 + 2D_{12}dudv + D_{22}dv^2}{|F_2|}. \tag{69}$$

En comparant avec l'équation (25) du chap. III on parvient au résultat connu que l'équation différentielle des lignes de courbure affine est

$$D_{11}du^2 + 2D_{12}dudv + D_{22}dv^2. \tag{70}$$