Eduard Čech

Sur la géométrie d'une surface et sur le facteur arbitraire des coordonnées homogenes

Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (5) 31_1 (1922), 475-478

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500868

Geometria. — *Sur la géométrie d'une surface et sur le facteur arbitraire des coordonnées homogènes.* — Nota di EDUARD ČECH, presentata dal Corrispondente GUIDO FUBINI (1).

1. Une surface S non développable soit définie par les équations

$$x_1 = x_1(u, v) \ , \ x_2 = x_2(u, v) \ , \ x_3 = x_3(u, v) \ , \ x_4 = x_4(u, v) \ ,$$

ainsi que le facteur arbitraire de coordonnées x est donné, d'ailleurs arbitrairement. On peut fixer (2) le facteur arbitraire des coordonnées homogènes $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ intrinsèquement par la supposition que le rapport des ξ_i au mineurs des X_i dans le déterminant

$$\left| x \ \frac{\partial x}{\partial u} \ \frac{\partial x}{\partial v} \ X \right|$$

soit égal au rapport des x_i au mineurs des Ξ_i dans le déterminant

$$\left| \xi \ \frac{\partial \xi}{\partial u} \ \frac{\partial \xi}{\partial v} \ \Xi \right| . \text{(3)}$$

L'équation

$$F_2 \equiv - S dx\, d\xi \equiv \varDelta_{11}\, du^2 + 2\varDelta_{12}\, du\, dv + \varDelta_{22}\, dv^2 = 0$$

définit les courbes asymptotiques, et l'équation

$$\frac{1}{2} F_3 \equiv \frac{1}{2} S(dx d^2\xi - d\xi d^2 x) \equiv \varDelta_{111}\, du^3 + \\ + 3\varDelta_{112}\, du^2 dv + 3\varDelta_{122}\, du dv^2 + \varDelta_{222}\, dv^3 = 0$$

définit les courbes de Darboux de S. On pose encore

$$X_i = \frac{1}{2} \varDelta_2 x_i \ , \ \Xi_i = \frac{1}{2} \varDelta_2 \xi_i \ ,$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1922.

(2) À une racine quatrième de l'unité près.

(3) Voir ma Note *Sur les formes différentielles de M. Fubini,* ces Rendiconti, séance du 7 mai 1922.

Δ_2 étant le paramètre différentiel second par rapport à F_2. On démontre facilement les identités

$$\xi_3 \frac{\partial \xi_4}{\partial u} - \xi_4 \frac{\partial \xi_3}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{12}^2 - \Delta_{11}\Delta_{22}}} \left[\Delta_{12} \left(x_1 \frac{\partial x_2}{\partial u} - x_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} \right) - \right.$$
$$\left. - \Delta_{11} \left(x_1 \frac{\partial x_2}{\partial v} - x_2 \frac{\partial x_1}{\partial v} \right) \right],$$
$$\xi_3 \frac{\partial \xi_4}{\partial v} - \xi_4 \frac{\partial \xi_3}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{12}^2 - \Delta_{11}\Delta_{22}}} \left[\Delta_{22} \left(x_1 \frac{\partial x_2}{\partial u} - x_2 \frac{\partial x_1}{du} \right) - \right.$$
$$\left. - \Delta_{12} \left(x_1 \frac{\partial x_2}{\partial v} - x_2 \frac{\partial x_1}{\partial v} \right) \right],$$

etc. (1). On a donc, les accroissements du et dv étant quelconques,

$$x_1 dx_2 - x_2 dx_1 \pm (\xi_3 d\xi_4 - \xi_4 d\xi_3) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta_{12}^2 - \Delta_{11}\Delta_{22}}} \left[x_1 \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} \delta u + \frac{\partial x_2}{\partial v} \delta v \right) - x_2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial u} \delta u + \frac{\partial x_1}{\partial v} \delta v \right) \right],$$

etc., où j'ai posé

$$\delta u = \pm (\Delta_{12} du + \Delta_{22} dv) + \sqrt{\Delta_{12}^2 - \Delta_{11}\Delta_{22}} \,.\, du \,,$$
$$\delta v = \mp (\Delta_{11} du + \Delta_{12} dv) + \sqrt{\Delta_{12}^2 - \Delta_{11}\Delta_{22}} \,.\, dv \,,$$

ainsi que

$$\Delta_{11} \delta u + \Delta_{12} \delta v = \mp \sqrt{\Delta_{12}^2 - \Delta_{11}\Delta_{22}} \,.\, \delta v \,,$$
$$\Delta_{12} \delta u + \Delta_{22} \delta v = \pm \sqrt{\Delta_{12}^2 - \Delta_{11}\Delta_{22}} \,.\, \delta u \,,$$

et

$$\Delta_{11} \delta u^2 + 2\Delta_{12} \delta u \, \delta v + \Delta_{22} \delta v_2 \equiv 0 \,.$$

2. Nous sommes ainsi arrivés au théorème suivant dont nous allons développer quelques conséquences: *Les cordonnées des tangentes asymptotiques de* S *sont*

(1) $$x_1 dx_2 - x_2 dx_1 \pm (\xi_3 d\xi_4 - \xi_4 d\xi_3) \text{, etc.}$$

Supposons qu'une autre surface S′ touche S suivant une courbe C. On choisit le facteur arbitraire des coordonnées y_1, y_2, y_3, y_4 des points de S′ de façon que l'on ait, en chaque point de C, $x_i = y_i$. Soient $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ les coordonnées homogènes des plans tangents de S déduites des y précisément comme nous avons déduites les ξ des x. Suivant la courbe C, on a

$$y_i = x_i \,,\, \eta_i = \sigma \xi_i \,.$$

(1) Voir G. Fubini, *Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 43, 1918-19, § 4.

Les coordonnées des tangentes asymptotiques de S′ sont

$$y_1\,dy_2 - y_2\,dy_1 \pm (\eta_3\,d\eta_4 - \eta_4\,d\eta_3)\,,\ \text{etc.},$$

ce qui devient sur la courbe C

(2) $$x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1 \pm \sigma^2(\xi_3\,d\xi_4 - \xi_4\,d\xi_3)\,,\ \text{etc.}$$

Condition nécessaire et suffisante pour que le contact soit du second ordre (au moins) suivant toute la courbe C, est évidemment

$$\sigma^4 = 1\,.$$

En chaque point de C, *le couple des tangentes asymptotiques de* S, *et également celui des tangentes asymptotiques de* S′, *appartient à l'involution dont les éléments doubles sont la tangente de* C *et la tangente conjuguée. Le rapport anharmonique des deux couples des tangentes asymptotiques et des deux éléments doubles est* σ^{-4}.

3. Supposons maintenant que C soit une *courbe de Darboux* de S; alors, le long de C, est vérifiée l'équation

(3) $$\mathrm{S}(dx\,d^2\xi - d\xi\,d^2x) = 0\,.$$

L'équation différentielle des courbes de Darboux de S′ est

$$\mathrm{S}(dy\,d^2\eta - d\eta\,d^2y) = 0\,.$$

Le long de C, le prémier membre en est

$$\mathrm{S}[dx\,d^2(\sigma\xi) - d(\sigma\xi)\,d^2x] =$$
$$= \sigma\,\mathrm{S}(dx\,d^2\xi - d\xi\,d^2x) + d\sigma\,\mathrm{S}(2dx\,d\xi - \xi d^2x) = 3d\sigma\,.\,\mathrm{S}dx\,d\xi\,.$$

Si l'on exclut le cas trivial que C soit une droite, $\mathrm{S}dx\,d\xi$ ne peut s'annuler; si l'on se rappelle la signification géométrique de σ, on peut donc énoncer le théorème suivant: *Si la courbe de contact C (non droite) de deux surfaces* S *et* S′ *est une courbe de Darboux sur* S, *pour qu'elle soit aussi une courbe de Darboux sur* S′, *il faut et il suffit que le rapport anharmonique des tangentes asymptotiques des deux surfaces soit constant le long de* C.

4. En chaque point de S, l'équation (2) définit les trois tangentes à l'intersection de S et de *la quadrique de Lie* du point considéré; si S est une surface *réglée*, ces trois tangentes coïncident dans la génératrice, ou bien *deviennent indéterminées*; cette dernière circonstance a lieu, si S n'est pas une quadrique, le long de deux *courbes flecnodales*, aux points desquelles S a un contact du troisième ordre avec l'hyperboloïde osculateur. Si l'on applique la proposition du numéro précédent, on obtient le théorème suivant: *Si une courbe* C *tracée sur la surface* S *est une courbe de Darboux sur* S, C *est une courbe flecnodale de la surface engendrée par les tangentes asympto-*

tiques (¹) *de* S *le long de* C, *et réciproquement.* Cette nouvelle définition des courbes de Darboux me semble très remarquable.

5. Maintenant, soit C une courbe *quelconque* de la surface S. L'identité

$$S[dx\, d^2(\sigma\xi) - d^2x d(\sigma\xi)] = \sigma F_3 + 3d\sigma\, F_2\,,$$

jointe au propositions qui précèdent, conduit évidemment au théorème suivant:

Soit C *une courbe quelconque tracée sur une surface* S; *on peut distribuer les tangentes de* S *le long de* C *en une famille simplement infinie de surfaces réglées*; *sur toutes ces surfaces*, C *est une ligne flecnodale. En chaque point de* C, *considérons l'involution ordinaire des tangentes de* S, *dont les éléments doubles sont la tangente de* C *et la tangente conjuguée. Soit* φ *le rapport anharmonique de quatre couples suivants de cette involution: les deux éléments doubles, le couple des tangentes asymptotiques de* S, *et celui qui contient la génératrice d'une surface réglée choisie dans la famille mentionnée. L'accroissement de* log φ *le long de* C *est donné par l'intégrale*

$$\frac{4}{3}\int\frac{F_3}{F_2} = \frac{8}{3}\int\frac{\varDelta_{111}\,du^3 + 3\varDelta_{112}\,du^2\,dv + 3\varDelta_{122}\,du\,dv^2 + \varDelta_{222}\,dv^3}{\varDelta_{11}\,du^2 + 2\varDelta_{12}\,du\,dv + \varDelta_{22}\,dv^2}\,,$$

et cela de quelle manière que l'on choisisse la surface réglee de la famille.

On a ainsí une interprétation géométrique simple de l'*élément linéaire projectif.*

Fisica. — *Cariche delle lastre coibenti strofinate.* Nota del dott. Angelo Prati, presentata dal Corrisp. P. Cardani.

La disposizione adottata dal Cardani in suoi recenti lavori (²) per studiare le cariche elettriche, svolte per strofinamento, per mezzo dei fenomeni di ionizzazione e, reciprocamente, per istudiare questi fenomeni per mezzo di dette cariche, mi ha suggerito le esperienze riassunte nella presente Nota, cioè lo studio qualitativo e quantitativo, fatto col galvanometro balistico, delle cariche che si ottengono sopra le lastre coibenti battendone una faccia p. e. con lana e tenendone l'altra a contatto o no con un'armatura in comunicazione col suolo. Il Cardani con una sorgente di ionizzazione costante (disco di ossido di torio) ha mostrato come varia la durata di scarica delle

(¹) D'un système ou de l'autre.

(²) P. Cardani, Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, serie V, 2° sem., 1921; N. Cimento, serie VI, 1922.