Jarník, Vojtěch: Scholarly works

Vojtěch Jarník

Quelques remarques sur les points in coordonnées entiéres à l'intérieur d'un cercle

Bull. internat. de l'Académie des sciences de Bohême 1925, 3 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500770

Terms of use:

© The Academy of Sciences of the Czech Republic, 1925

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Quelques remarques sur les points à coordonnées entières à l'intérieur d'un cercle.

Par

VOJTĚCH JARNÍK.

Présenté le 6me Octobre 1925.

Soit, pour $x > 0$, $A(x)$ le nombre des points à coordonnées entières („Gitterpunkte"), situés à l'intérieur du cercle $u^2 + v^2 = x$ et sur sa circonférence. Posons

$$P(x) = A(x) - \pi x,$$

$$\Phi(y) = \frac{1}{3\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^2(n)}{n^{3/2}} \cos(2\pi \sqrt{n}\, y) \qquad (y \text{ réel}),$$

$U(n)$ étant le nombre des points à coordonnées entières situés *sur* la circonférence $u^2 + v^2 = n$. On doit à M. M. Hardy, Cramér et Landau[1]) des résultats fort intéressants concernant la valeur asymptotique de l'intègrale $\int_0^y P^2(x)\, dx$ pour grandes valeurs de y. Le résultat le plus précis, dans cet ordre d'idées, est dû à M. Landau:

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_0^y P^2(x)\, dx = \Phi(0)\, y^{3/2} + O(y^{1+\varepsilon}).$$

En suivant la voie indiquée par M. Landau, on peut démontrer le théorème un peu plus général suivant:

Pour chaque $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ *et pour chaque* $\varepsilon > 0$, *on a*

$$(1) \qquad \int_0^y P((\sqrt{x} + \alpha)^2)\, P((\sqrt{x} + \beta)^2)\, dx = \Phi(\alpha - \beta)\, y^{3/2} + O(y^{1+\varepsilon}).$$

La méthode de la démonstration est la même que celle de M. Landau, mais elle exige quelques calculs complémentaires; on en trouve une exposition détaillée dans le § 1 de mon Mémoire original.[2])

[1]) Hardy, The average ordre of the arithmetical functions $P(x)$ and $\Delta(x)$, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 15 (1916), p. 192—213; Cramér, Über zwei Sätze des Herrn G. H. Hardy, Mathem. Zeitschrift 15 (1922), p. 201—210; Landau, Über die Gitterpunkte in einem Kreise IV, Göttinger Nachr. 1924, p. 58—65.

[2]) Několik poznámek o mřížových bodech v kruhu, Rozpravy Č. Ak., t. 34., (1925), no 27.

Posons $Q(x) = \frac{P(x^2)}{x^{1/4}}$; on tire facilement de (1) l'équation

$$\int_1^y Q(x+\alpha)\, Q(x+\beta)\, d\,x = \tfrac{3}{2}\, \Phi(\alpha-\beta)\, y + O(y^\varepsilon);$$

il s'ensuit immédiatement que

$$(2) \qquad \int_1^y (Q(x) \pm Q(x+\alpha))^2\, d\,x = 3\,(\Phi(0) \pm \Phi(\alpha))\, y + O(y^\varepsilon).$$

On doit à M. Landau[3]) le théorème suivant:

Il existe deux nombres $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ *tels que, pour tout* $\tau > 1$, *chacune des deux inégalités* $Q(x) > K_1$, $Q(x) < -K_1$ *peut être satisfaite par une certaine valeur de* x, *située dans l'intervalle* $\tau < x < \tau + K_2$; alors: On peut trouver dans chaque intervalle $\tau < x < \tau + K_2$ $(\tau > 1)$ deux nombres x_1, x_2 tels que

$$(3) \qquad Q(x_1) - Q(x_2) > 2\,K_1.$$

On peut tirer de l'équation (2) quelques conséquences presque immédiates qui nous fournissent un pendant de la formule (3).

Théorème 1er: *La relation*

$$\int_1^y (Q(x) - Q(x-\alpha))^2\, d\,x = o(y)$$

n'est satisfaite pour aucun $\alpha > 0$.

La démonstration est immédiate: elle est fournie par ce fait presque évident que l'on a $\Phi(\alpha) < \Phi(0)$ pour tout $\alpha > 0$.

Corollaire (conséquence immédiate du théorème 1er): *La relation* $Q(x) - Q(x+\alpha) = o(1)$ *n'est satisfaite pour aucun* $\alpha > 0$.

Théorème 2e: *A tout nombre* $\delta > 0$ *on peut faire correspondre un nombre* $l = l(\delta) > 0$ *jouissant de la propriété suivante: soit* a *un nombre positif quelconque; on peut trouver un nombre* α *avec* $a < \alpha < a + l(\delta)$ *tel que*

$$\int_1^y (Q(x) - Q(x+\alpha))^2\, d\,x < \delta\, y$$

pour tout $y > y(\alpha, \delta)$.

Démonstration: $\Phi(y)$ étant défini par une série des fonctions périodiques absolument et uniformément convergente, on voit d'après un théorème de M. H. Bohr[4]) que la fonction $\Phi(y)$ est une fonction quasi-

---

[3]) Über die Gitterpunkte in einem Kreise V, Göttinger Nachrichten 1924, p. 135—136. M. Landau a énoncé ce théorème sous une forme un peu différente, mais complètement équivalente à celle donnée par nous.

[4]) Zur Theorie der fast periodischen Funktionen I, Acta mathematica 45, p. 30—127; comparez surtout le corollaire à la page 41. On pourrait démontrer le théorème 2e aussi sans avoir recours à la théorie des fonctions quasipériodiques, à l'aide d'un théorème bien connu de Kronecker.

périodique („fast periodisch“) de y; alors, à chaque $\delta > 0$ on peut trouver un nombre $l = l(\delta) > 0$ tel que, a étant un nombre positif quelconque, il existe un nombre α avec

$$a < \alpha < a + l(\delta), \qquad |\Phi(0) - \Phi(\alpha)| < \frac{\delta}{6};$$

d'où, d'après (2),

$$\int_1^y (Q(x) - Q(x+\alpha))^2\, dx < \frac{\delta}{2} y + O(y^{\epsilon}) < \delta y$$

pour $y > y(\alpha, \delta)$; q. e. d.

Corollaire. *Pour la valeur choisie de α et pour $y > y(\alpha, \delta)$ on a pour $1 \leqq x \leqq y$: $|Q(x) - Q(x+\alpha)| < \delta^{1/3}$, excepté peut-être un ensemble des valeurs x, dont la mesure ne surpasse pas $\delta^{1/3} y$.*

Démonstration: Autrement, on aurait

$$\int_1^y (Q(x) - Q(x+\alpha))^2\, dx > \delta y,$$

ce qui implique une contradiction.

Théorème 3°: *La relation*

$$\int_1^y (Q(x) + Q(x+\alpha))^2\, dx < \frac{2}{\pi^2} y + o(y) \tag{4}$$

n'est satisfaite pour aucune valeur de $\alpha \geqq 0$.[5]

Démonstration: De (4), on déduirait (en conséquence de (2))

$$\frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U^2(n)}{n^{3/2}} (1 + \cos(2\pi\sqrt{n}\,\alpha)) = 3(\Phi(0) + \Phi(\alpha)) \leqq \frac{2}{\pi^2};$$

la série à gauche étant à termes non négatifs, on aurait a fortiori

$$\frac{U^2(1)}{1^{3/2}} (1 + \cos 2\pi\alpha) \leqq 2,$$

$$\frac{U^2(4)}{4^{3/2}} (1 + \cos 4\pi\alpha) \leqq 2,$$

c'est-à dire

$$\cos 2\pi\alpha \leqq -\tfrac{7}{8} \tag{5}$$

$$\cos 4\pi\alpha \leqq 0; \tag{6}$$

de (5), on déduirait

$$\cos 4\pi\alpha = 2\cos^2 2\pi\alpha - 1 \geqq 2\left(\tfrac{7}{8}\right)^2 - 1 > 0,$$

ce qui contredit à (6).

---

[5]) On pourrait remplacer, dans (4), le nombre $\frac{2}{\pi^2}$ par un nombre plus grand; mais cela est sans intérêt pour nous.