Vojtěch Jarník

Sur les solutions approchées de l'equation $x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + x_0 = 0$ en nombres entiers x_1, x_2, x_0

Věstník Král. čes. spol. nauk 1938, No. 7, 26 p.

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/500765`

VII.

Sur les solutions approchées de l'équation $x_1\Theta_1 + x_2\Theta_2 + x_0 = 0$ en nombres entiers x_1, x_2, x_0.

Par **VOJTĚCH JARNÍK**, Praha.

Dédié à la Mémoire d'Edmund Landau.

(Présenté le 11 mai 1938.)

§ 1. Introduction.

Tous les nombres de cette note sont réels. Les caractères latins minuscules signifient toujours des nombres entiers. Par le symbole $\Rightarrow$, nous allons désigner l'implication logique, c'est-à-dire $A \Rightarrow B$ signifie que A entraîne B. Soient donnés n nombres $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ $(n > 0)$; alors $\alpha(\Theta_1, \ldots, \Theta_n)$ signifie la borne supérieure de tous les nombres β, pour lesquels le système de $n + 1$ inégalités

$$\left| \Theta_i - \frac{p_i}{q} \right| < \frac{1}{q^\beta} \ (i = 1, \ldots, n), \ \ q > 0$$

possède une infinité de solutions en nombres entiers $p_1, \ldots, p_n, q$. D'une manière analogue, soit $\gamma(\Theta_1, \ldots, \Theta_n)$ la borne supérieure de tous les nombres β, pour lesquels les inégalités

$$| x_1\Theta_1 + \ldots + x_n\Theta_n + x_0 | < x^{-\beta}, \ x > 0$$

(où l'on a posé $x = \operatorname{Max}(|x_1|, \ldots, |x_n|)$) possèdent une infinité de solutions en nombres entiers $x_0, x_1, \ldots, x_n$. On sait que $1 + 1/n \leqq \alpha(\Theta_1, \ldots, \Theta_n) \leqq \infty$, $n \leqq \gamma(\Theta_1, \ldots, \Theta_n) \leqq \infty$ et l'on a évidemment $\gamma(\Theta) = \alpha(\Theta) - 1$.

$\alpha(\Theta_1)$, $\alpha(\Theta_2)$ étant donnés, on peut déterminer les bornes suivantes pour $\alpha(\Theta_1, \Theta_2)$[1]):

$$\operatorname{Max}\left(\frac{3}{2}, \frac{2\alpha(\Theta_1)}{\alpha(\Theta_1) + 1}, \frac{2\alpha(\Theta_2)}{\alpha(\Theta_2) + 1}\right) \leqq \alpha(\Theta_1, \Theta_2) \leqq \operatorname{Min}(\alpha(\Theta_1), \alpha(\Theta_2)).$$

Et ces bornes ne peuvent pas être remplacées par des bornes plus précises, comme le montre le théorème suivant:

Théorème 1.[1]) *Soit* $2 \leqq \alpha_1 \leqq \infty$, $2 \leqq \alpha_2 \leqq \infty$; *alors il existe deux nombres indépendants*[2]) Θ_1, Θ_2 *et deux nombres indépendants* η_1, η_2 *tels que*

$$\alpha(\Theta_1) = \alpha_1, \ \alpha(\Theta_2) = \alpha_2, \ \alpha(\Theta_1, \Theta_2) = \operatorname{Max}\left(\frac{3}{2}, \frac{2\alpha_1}{\alpha_1+1}, \frac{2\alpha_2}{\alpha_2+1}\right); \qquad (1)$$

$$\alpha(\eta_1) = \alpha_1, \ \alpha(\eta_2) = \alpha_2, \ \alpha(\eta_1, \eta_2) = \operatorname{Min}(\alpha_1, \alpha_2). \qquad (2)$$

Ici, nous nous posons le problème analogue pour $\gamma(\Theta_1, \Theta_2)$, le seul cas intéressant étant celui des nombres indépendants. On a évidemment

$$\operatorname{Max}(\alpha(\Theta_1) - 1, \ \alpha(\Theta_2) - 1, 2) \leqq \gamma(\Theta_1, \Theta_2) \leqq \infty \qquad (3)$$

et nous allons démontrer le théorème suivant qui montre que les bornes données par (3) sont précises:

Théorème 2. *Soit* $2 \leqq \alpha_1 < \infty$, $2 \leqq \alpha_2 < \infty$;[3]) *alors il existe deux nombres indépendants* Θ_1, Θ_2 *et deux nombres indépendants* η_1, η_2 *tels que*

$$\alpha(\Theta_1) = \alpha_1, \ \alpha(\Theta_2) = \alpha_2, \ \gamma(\Theta_1, \Theta_2) = \operatorname{Max}(\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, 2); \qquad (4)$$

$$\alpha(\eta_1) = \alpha_1, \ \alpha(\eta_2) = \alpha_2, \ \gamma(\eta_1, \eta_2) = \infty. \qquad (5)$$

Mais la question, résolue par le théorème 2, peut être posée d'une autre manière qui me paraît plus naturelle. $\alpha(\Theta_1)$, $\alpha(\Theta_2)$ étant donnés, on connaît d'une manière assez précise l'allure de la forme $x_1\Theta_1 + x_2\Theta_2 + x_0$ pour $x_1 = 0$ et pour $x_2 = 0$; il est donc naturel d'étudier cette forme sous la condition supplémentaire $x_1x_2 \neq 0$. Définissons donc: $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ $(n > 0)$ étant donnés, soit $\gamma'(\Theta_1, \ldots, \Theta_n)$ la borne supérieure de tous les nombres β, pour lesquels les inégalités

$$| x_1\Theta_1 + \ldots + x_n\Theta_n + x_0 | < x^{-\beta}, \ x_1x_2 \ldots x_n \neq 0$$

(où l'on a posé $x = \operatorname{Max}(|x_1|, \ldots, |x_n|)$) possèdent une infinité de solutions en nombres entiers $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Si Θ_1, Θ_2 sont deux nombres indépendants, on sait que

$$2 \leqq \gamma'(\Theta_1, \Theta_2) \leqq \infty. \ ^4) \qquad (6)$$

[1]) V. Jarník, Zur Theorie der diophantischen Approximationen, Monatshefte für Mathematik und Physik **39** (1932), p. 403—438.

[2]) Deux nombres Θ_1, Θ_2 sont appelés indépendants, si $x_1\Theta_1 + x_2\Theta_2 + x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_0 = 0$.

[3]) Pour éviter des complications purement techniques, nous ne considérons que le cas $\alpha_j < \infty$ $(j = 1, 2)$.

[4]) C'est un cas particulier du théorème 3 de mon article Über die angenäherte Lösung der Gleichung $x_1\Theta_1 + \ldots + x_n\Theta_n + x_0 = 0$ in ganzen Zahlen. Časopis **66** (1937), p. 192—205. Mais la démonstration de ce cas particulier étant très simple, je vais la réproduire ici.

Pour démontrer (6), il suffit évidemment de montrer qu'à chaque $t > 3$ on peut faire correspondre quatre nombres τ, x_0, x_1, x_2 tels que

$$\tau \geqq t,\ x_1x_2 \neq 0,\ |\, x_1\Theta_1 + x_2\Theta_2 + x_0\,| < 2\tau^{-2} < 18x^{-2}\ ^{5})$$

(où l'on pose $x = \mathrm{Max}\,(|\,x_1\,|,\ |\,x_2\,|)$ et de même dans la suite $y = \mathrm{Max}\,(|\,y_1\,|,\ |\,y_2\,|)$, $z = \mathrm{Max}\,(|\,z_1\,|,\ |\,z_2\,|)$). Soit donc $t > 3$; il existe trois nombres y_i tels que[6])

$$\{y_0, y_1, y_2\} = 1,\ 0 < y \leqq t,\ |\, y_1\Theta_1 + y_2\Theta_2 + y_0\,| < t^{-2} \leqq y^{-2}. \qquad (7)$$

Si $y_1y_2 \neq 0$, il suffit de poser $\tau = t$, $x_i = y_i$. Soit donc p. ex. $y_2 = 0$ et posons $|\, y_1\Theta_1 + y_0\,| = \tau^{-2}$ (donc $\tau > t$). Il existe trois nombres z_i tels que

$$\begin{aligned} &\{z_0, z_1, z_2\} = 1,\ 0 < z \leqq [\tau] + 1 < 2\tau,\\ &|\, z_1\Theta_1 + z_2\Theta_2 + z_0\,| < ([\tau] + 1)^{-2} < \tau^{-2}. \end{aligned} \qquad (8)$$

Si l'on avait $z_2 = 0$, on aurait — d'après (7), (8) et d'après la définition de τ — d'une part $\dfrac{y_0}{y_1} \neq \dfrac{z_0}{z_1}$, d'autre part $|\, y_0z_1 - y_1z_0\,| < (|\,z_1\,| + |\,y_1\,|)\,\tau^{-2} < 3\tau^{-1} < 1$ — contradiction. Donc $z_2 \neq 0$; posons $x_1 = y_1 + \varepsilon z_1$, $x_2 = \varepsilon z_2$, $x_0 = y_0 + \varepsilon z_0$, où $\varepsilon = \pm 1$ est choisi de façon que $x_1 \neq 0$; alors on aura

$$\tau > t,\ x_1x_2 \neq 0,\ x < 3\tau,\ |\, x_1\Theta_1 + x_2\Theta_2 + x_0\,| < 2\tau^{-2} < 18x^{-2}.$$

Et nous allons montrer que l'on ne peut pas remplacer (6) par des inégalités plus précises, même en fixant d'avance les nombres $\alpha(\Theta_1)$, $\alpha(\Theta_2)$:

Théorème 3.[3]) *Soit* $2 \leqq \alpha_1 < \infty$, $2 \leqq \alpha_2 < \infty$; *alors il existe deux nombres indépendants* Θ_1, Θ_2 *et deux nombres indépendants* η_1, η_2 *tels que*

$$\alpha(\Theta_1) = \alpha(\eta_1) = \alpha_1,\ \ \alpha(\Theta_2) = \alpha(\eta_2) = \alpha_2,\ \ \gamma'(\Theta_1, \Theta_2) = 2,\ \ \gamma'(\eta_1, \eta_2) = \infty.$$

On a évidemment

$$\gamma(\Theta_1, \Theta_2) = \mathrm{Max}\,(\alpha(\Theta_1) - 1,\ \alpha(\Theta_2) - 1,\ \gamma'(\Theta_1, \Theta_2)),$$

donc le théorème 2 est une conséquence immédiate du théorème 3. Notre démonstration du théorème 3 (qui présente quelques analogies avec celle du théorème 1) sera tout-à-fait élémentaire, mais assez compliquée. La démonstration du théorème 2 serait beaucoup plus simple, mais j'ai déjà expliqué pourquoi le théorème 3 me paraît préférable au théorème 2. Remarquons que l'existence des nombres indépendants Θ_1, Θ_2 possédant les propriétés (4) est une conséquence immédiate du théorème 1 et d'un

---

[5]) On a alors $x \to \infty$ pour $t \to \infty$.

[6]) Par $\{a, b, \ldots, c\}$ je désigne le plus grand commun diviseur de $a, b, \ldots, c$.

théorème bien connu de M. KHINTCHINE[7]) („Übertragungssatz"), d'après lequel on a toujours

$$\alpha(\Theta_1, \Theta_2) \geqq \frac{2\gamma(\Theta_1, \Theta_2) + 2}{\gamma(\Theta_1, \Theta_2) + 2},$$

donc

$$\gamma(\Theta_1, \Theta_2) \leqq -2 + \frac{2}{2 - \alpha(\Theta_1, \Theta_2)}, \text{ si } \alpha(\Theta_1, \Theta_2) < 2.$$

Soient, en effet, Θ_1, Θ_2 deux nombres indépendants avec (1) et soit p. ex. $2 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_1 < \infty$, donc $\alpha(\Theta_1, \Theta_2) < 2$; on aura donc

$$\gamma(\Theta_1, \Theta_2) \leqq -2 + \frac{2}{2 - \operatorname{Max}\left(\frac{2\alpha_1}{\alpha_1 + 1}, \frac{3}{2}\right)} =$$
$$= -2 + \operatorname{Max}(\alpha_1 + 1, 4) = \operatorname{Max}(\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, 2);$$

mais cette inégalité, combinée avec (3), donne (4). Mais, pour démontrer le théorème 3, on ne peut tirer aucun profit du théorème 1.

Au lieu de démontrer le théorème 3, je vais démontrer un théorème plus général, mais dont la démonstration n'introduit aucune difficulté nouvelle. $\varphi(\xi)$ étant une fonction positive pour $\xi > 0$, nous allons dire qu'un nombre Θ „admet l'approximation $\varphi(\xi)$", si l'inégalité $| \Theta - p/q | < \varphi(q)$ possède une infinité de solutions en nombres entiers $q > 0$, p. Alors le théorème en question s'énonce comme il suit:

Théorème 4. *Soient $F_j(\xi)$ $(j = 1, 2)$ deux fonctions continues, positives et non croissantes pour $\xi > 0$ et supposons les séries $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} F_j(n)$ $(j = 1, 2)$ convergentes. Supposons enfin qu'il existe un nombre $k > 0$ tel que $\frac{F_j(\xi)}{F_j(2\xi)} < k$ pour $\xi > 0$, $j = 1, 2$.*

I. Soit $\psi(x) > 0$ pour $x > 0$. Alors il existe deux nombres indépendants Θ_1, Θ_2 tels que Θ_j $(j = 1, 2)$ admet l'approximation $F_j(\xi) \cdot \xi^{-2}$, mais n'admet pas l'approximation $\frac{1}{3}F_j(\xi) \cdot \xi^{-2}$ et que l'inégalité $| x_1(\Theta_1 - \Theta_2) + x_0 | < \psi(x_1)$ possède une infinité de solutions en nombres entiers $x_1 > 0$, x_0.

[7]) A. KHINTCHINE, Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen, Rendiconti Palermo **50** (1926), p. 170—195; voir aussi K. MAHLER, Neuer Beweis eines Satzes von A. KHINTCHINE, Matemat. Sbornik **48** (1937), p. 961—962. Les nombres β_1, β_2 de KHINTCHINE sont définis de la manière suivante:

$$n + \beta_1 = \gamma(\Theta_1, \ldots, \Theta_n), \quad 1 + \frac{1 + \beta_2}{n} = \alpha(\Theta_1, \ldots, \Theta_n).$$

II. Soit $G(\xi)$ une fonction positive, continue et non croissante pour $\xi > 0$ et supposons la série $\sum_{n=1}^{\infty} n\, G(n)$ convergente; alors il existe deux nombres indépendants Θ_1, Θ_2 tels que Θ_j $(j = 1, 2)$ admet l'approximation $F_j(\xi)\, .\, \xi^{-2}$, mais n'admet pas l'approximation $\frac{1}{3}F_j(\xi)\, .\, \xi^{-2}$ et que les inégalités

$$|x_1\Theta_1 + x_2\Theta_2 + x_0| < G(x), \quad x_1 x_2 \neq 0$$

(où l'on a posé $x =$ Max $(|x_1|, |x_2|)$) ne possèdent qu'un nombre fini $(\geqq 0)$ de solutions en nombres entiers x_0, x_1, x_2.

Le théorème 3 est évidemment une conséquence du théorème 4; il suffit de poser, dans le théorème 4, $\psi(x) = e^{-x}$, $F_j(\xi) = \xi^{2-\gamma_j}(\log \xi)^{-2}$, $G(\xi) = (\xi \log \xi)^{-2}$ pour $x > 0$, $j = 1, 2$ et pour des grandes valeurs de ξ et de compléter la définition de F_j, G d'une manière convenable.

§ 2. Notations; démonstration de la première partie du théorème 4.

Nous allons désigner par $\{a, b\}$ le plus grand commun diviseur des nombres a, b; par $[\alpha, \beta]$ le couple de deux nombres α, β; $[\alpha, \beta]$ va aussi souvent désigner le point du plan, dont la première coordonnée est égale à α et la deuxième à β. $\langle \alpha, \beta \rangle$ va désigner l'intervalle $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$. M, N étant deux ensembles quelconques, $M - N$ désigne l'ensemble de tous les éléments de M qui n'appartiennent pas à N. La relation $M \subset N$ signifie que M est un sousensemble de N; $\alpha \in M$ signifie que α est un élément de M; MN est l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à la fois à M et à N. Le symbole 0 signifie l'ensemble vide. Les ensembles $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sont „disjoints deux-à-deux", si $1 \leqq i < k \leqq n \Rightarrow M_i M_k = 0$. Si $MN \neq 0$, nous allons dire que l'ensemble M coupe l'ensemble N ou que M est coupé par N. A et B étant deux ensembles de nombres, nous allons désigner par $A \times B$ l'ensemble de tous les points $[\Theta_1, \Theta_2]$ tels que $\Theta_1 \in A$, $\Theta_2 \in B$. Pour $n > 0$, nous allons désigner par $\varphi(n)$ le nombre de classes mod n, premières avec n et par $\mu(n)$ la fonction de Möbius.

c_1 désigne une constante absolue et positive. D'une manière analogue, $c_{80}(q)$ va désigner un nombre entier et positif, ne dépendant que du nombre q; $c_{90}(q, F)$ (q étant un nombre et F une fonction) va désigner un nombre entier et positif, ne dépendant que du nombre q et de la fonction F etc.

Lemme 1. $\xi > c_1 \Rightarrow \sum_{\xi < w \leqq 2\xi} (\varphi(w) - \frac{1}{32}w - 3) > \frac{1}{2}\xi^2$.

Démonstration (bien connue).[8] $\varphi(w) = w \sum_{d | w} d^{-1} \mu(d)$; posons $[\xi] = x$; pour $\xi \to \infty$, on a

$$\sum_{0<w\leq\xi}\varphi(w)=\sum_{w=1}^{x}\sum_{d/w}wd^{-1}\mu(d)=\sum_{d=1}^{x}\mu(d)\sum_{k\leq\frac{x}{d}}k$$

$$=\sum_{d=1}^{x}\mu(d)\left(\frac{x^2}{2d^2}+O\left(\frac{x}{d}\right)\right)=\frac{1}{2}x^2\sum_{d=1}^{\infty}\mu(d)\,d^{-2}+$$

$$+O\left(x^2\sum_{d=x+1}^{\infty}d^{-2}\right)+O\left(x\sum_{d=1}^{x}d^{-1}\right)=\frac{3x^2}{\pi^2}+O(x\log x)\sim\frac{3\xi^2}{\pi^2};$$

$$\sum_{\xi\leq w<2\xi}\left(\varphi(w)-\frac{1}{32}w-3\right)\sim\frac{12-3}{\pi^2}\xi^2-\frac{4-1}{64}\xi^2;\quad\frac{9}{\pi^2}-\frac{3}{64}>\frac{1}{2}.$$

Lemme 2. Soient $F_j(\xi)$ $(j=1, 2)$ deux fonctions positives, non croissantes et continues pour $\xi>0$; supposons qu'il existe un nombre $k>0$ tel que $\frac{F_j(\xi)}{F_j(2\xi)}<k$ pour $\xi>0$, $j=1, 2$ (donc $k=c_2(F_1, F_2)$); supposons les séries $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}F_j(n)$ $(n=1, 2)$ convergentes. Pour $q>0$, $q_1>0$, $q_2>0$, $j=1, 2$ posons

$$J_j(p, q)=\left\langle\frac{p}{q}+\frac{F_j(q)}{2q^2},\ \frac{p}{q}+\frac{F_j(q)}{q^2}\right\rangle,$$

$$K_j(p, q)=\left\langle\frac{p}{q}-\frac{F_j(q)}{3q^2},\ \frac{p}{q}+\frac{F_j(q)}{3q^2}\right\rangle,$$

$$C(p_1, q_1, p_2, q_2)=J_1(p_1, q_1)\times J_2(p_2, q_2).$$

Soit enfin $\psi(x)>0$ pour $x>0$ et soit $\mathfrak{R}$ une droite dans le plan des points $[\Theta_1, \Theta_2]$.

Alors, si p_1, q_1, p_2, q_2 sont quatre nombres tels que

$$q_j>c_3(F_1, F_2)\text{ pour }j=1, 2,\qquad\frac{1}{4k}<\frac{F_1(q_1)}{q_1^2}\cdot\frac{q_2^2}{F_2(q_2)}<4k. \tag{9}$$

il existe six nombres entiers $P_1, Q_1, P_2, Q_2, x_1, x_0$ jouissants des propriétés suivantes:

1. $x_1>q_1$, $Q_1>q_1$, $Q_2>q_2$.
2. $\frac{1}{4k}<\frac{F_1(Q_1)}{Q_1^2}\cdot\frac{Q_2^2}{F_2(Q_2)}<4k$.
3. $C(P_1, Q_1, P_2, Q_2)\subset C(p_1, q_1, p_2, q_2)$.
4. a) r, s étant deux nombres tels que $q_1\leqq s<Q_1$, on a $J_1(P_1, Q_1)\,K_1(r, s)=\emptyset$.[9])

---

[8]) F. Mertens, Über einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie, Journal f. d. reine und angew. Math. 77 (1874), p. 289—338.

[9]) Remarquons: si $\frac{r}{s}=\frac{r'}{s'}$, $0<s'<s$, on a $K_1(r, s)\subset K_1(r', s')$, donc

b) r, s étant deux nombres tels que $q_2 \leqq s < Q_2$, on a $J_2(P_2, Q_2)\, K_2(r, s) = \emptyset$.

5. $C(P_1, Q_1, P_2, Q_2)\, \mathfrak{R} = \emptyset$.

6. $[\Theta_1, \Theta_2] \in C(P_1, Q_1, P_2, Q_2) \Rightarrow |\, x_1(\Theta_1 - \Theta_2) + x_0 \,| < \psi(x_1)$.

Démonstration. La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F_j(2^n)$ est évidemment convergente et l'on a $F_j(\xi) \to 0$ pour $\xi \to \infty$ $(j = 1, 2)$. Sans restreindre la généralité, supposons que $\psi(x) < 1$ pour $x > 0$. Choisissons $c_3(F_1, F_2) = d$ de manière que

$$F_j(d) < 1,\quad 2^{12} \sum_{2^t > \frac{d}{4F_j(d)}} F_j(2^t) < \frac{1}{2^{11}k} \quad (j = 1, 2). \tag{10}$$

Soient p_1, q_1, p_2, q_2 quatre nombres avec (9); posons

$$\zeta_j = \frac{p_j}{q_j} + \frac{3}{4}\,\frac{F_j(q_j)}{q_j^2} \quad (j = 1, 2);$$

choisissons deux nombres rationnels η_1, η_2 tels que

$$|\, \eta_j - \zeta_j \,| < \tfrac{1}{8}\, F_j(q_j)\, q_j^{-2} \quad (j = 1, 2)$$

et ensuite deux nombres x_1, x_0 tels que

$$x_1(\eta_1 - \eta_2) + x_0 = 0,\ \ x_1 > q_1,\ \ x_1 > 16,\ \ x_1 > \max_{j=1,2} \frac{8q_j^2}{F_j(q_j)}. \tag{10'}$$

Soit ensuite $\mathfrak{q}$ un nombre premier tel que

$$\frac{1}{4}\,\frac{\psi(x_1)}{x_1} < \frac{1}{\mathfrak{q}} < \frac{1}{2}\,\frac{\psi(x_1)}{x_1}, \quad \text{donc } \mathfrak{q} > 2x_1 > 32.$$

Posons

$$m = \min_{j=1,2} \left[\frac{\mathfrak{q} F_j(q_j)}{8q_j^2}\right], \quad \text{donc } m \geqq 2;$$

pour $0 \leqq n \leqq m$, $j = 1, 2$ soit $\alpha_{j,n} = \eta_j + n\mathfrak{q}^{-1}$ et pour $0 \leqq n < m$ soit A_n l'ensemble de tous les points intérieurs du carré $\langle \alpha_{1,n}, \alpha_{1,n+1} \rangle \times \times \langle \alpha_{2,n}, \alpha_{2,n+1} \rangle$.

Pour $[\Theta_1, \Theta_2] \in A_n$, on a

$$|\, \Theta_j - \zeta_j \,| < \tfrac{1}{8}\, F_j(q_j)\, q_j^{-2} + m\mathfrak{q}^{-1} < \tfrac{1}{4}\, F_j(q_j)\, q_j^{-2},$$

$J_1(P_1, Q_1)\, K_1(r, s) \neq \emptyset \Rightarrow J_1(P_1, Q_1)\, K_1(r', s') \neq \emptyset$. On peut donc formuler la condition 4a) comme il suit: r, s étant deux nombres tels que $q_1 \leqq s < Q_1$ et qu'il n'existe aucun couple $[r', s']$ avec $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$, $q_1 \leqq s' < s$, on a $J_1(P_1, Q_1)\, K_1(r, s) = = \emptyset$; une remarque analogue s'applique à la condition 4b.

donc

$$A_n \subset C(p_1, q_1, p_2, q_2). \tag{11}$$

D'autre part,

$$[\Theta_1, \Theta_2] \in A_n \Rightarrow | x_1(\Theta_1 - \Theta_2) + x_0 | \leqq \frac{2x_1}{\mathfrak{q}} < \psi(x_1). \tag{12}$$

Choisissons maintenant deux nombres τ_1, τ_2 de manière que

$$\tau_j > c_1\mathfrak{q}, \ \tau_j > q_j, \ \mathfrak{q}^2 < \frac{1}{2^{10}} \tau_j^2 \ (j = 1, 2), \quad \frac{\tau_1^2}{F_1(\tau_1)} = \frac{\tau_2^2}{F_2(\tau_2)} \ ^{10)} \tag{13}$$

et que, ϱ_j étant défini par

$$\frac{\varrho_j}{F_j(\varrho_j)} = 8\tau_j \ ^{11)} \ (j = 1, 2), \tag{14}$$

on ait

$$F_j(\varrho_j) < \tfrac{1}{4}\mathfrak{q}^{-1} \ (j = 1, 2). \tag{15}$$

Pour $0 \leqq n < m$, $j = 1, 2$ soit $\mathfrak{S}_{j,n}$ l'ensemble de tous les couples $[v_j, w_j \mathfrak{q}]$ avec

$$\{v_j, w_j\mathfrak{q}\} = 1, \ \tau_j \leqq w_j\mathfrak{q} < 2\tau_j, \ x_{j,n} + \frac{1}{w_j\mathfrak{q}} \leqq \frac{v_j}{w_j\mathfrak{q}} \leqq x_{j,n+1} - \frac{1}{w_j\mathfrak{q}}. \tag{16}$$

Soit $S_{j,n}$ le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_{j,n}$; alors on a (voir le Lemme 1)

$$S_{j,n} \geqq \sum_{\frac{\tau_j}{\mathfrak{q}} \leqq w_j < \frac{2\tau_j}{\mathfrak{q}}} \left(\varphi(w_j) - \frac{1}{32} w_j - 3\right) > \frac{1}{2} \frac{\tau_j^2}{\mathfrak{q}^2} \ ^{12)}$$

et évidemment $S_{j,n} \leqq 4\tau_j^2\mathfrak{q}^{-2}$.

Soit $\mathfrak{C}_n$ l'ensemble de tous les rectangles $C(v_1, w_1\mathfrak{q}, v_2, w_2\mathfrak{q})$, où $[v_1, w_1\mathfrak{q}] \in \mathfrak{S}_{1,n}$, $[v_2, w_2\mathfrak{q}] \in \mathfrak{S}_{2,n}$; soit $\mathfrak{C} = \sum_{n=0}^{m-1} \mathfrak{C}_n$. Soit M_n le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathfrak{C}_n$; alors on a $M_n > \tfrac{1}{4}\tau_1^2\tau_2^2\mathfrak{q}^{-4}$.

Soit $C'(v_1, w_1\mathfrak{q}, v_2, w_2\mathfrak{q})$ le rectangle concentrique avec $C(v_1, w_1\mathfrak{q}, v_2, w_2\mathfrak{q}) \in \mathfrak{C}$, dont les côtés (parallèles aux axes des coordonnées) sont $\tfrac{1}{16}\mathfrak{q}\tau_1^{-2}$, $\tfrac{1}{16}\mathfrak{q}\tau_2^{-2}$.

Soit $j = 1$ ou $j = 2$, $0 \leqq n < m$, $[v_j, w_j\mathfrak{q}] \in \mathfrak{S}_{j,n}$. Alors on a

---

10) Observons que $\tau_j^2(F_j(\tau_j))^{-1} \to \infty$ pour $\tau_j \to \infty$.

11) ϱ_j peut être défini si τ_j est assez grand et l'on a $\varrho_j \to \infty$ pour $\tau_j \to \infty$.

12) En effet, w_j étant donné, v_j doit parcourir tous les nombres entiers d'un intervalle de longueur $w_j - 2$, premiers avec w_j et non divisibles par $\mathfrak{q} > 32$.

$$\tfrac{1}{2}F_j(w_j\mathfrak{q}) \cdot (w_j\mathfrak{q})^{-2} \leqq \tfrac{1}{2}F_j(\tau_j)\,\tau_j^{-2} < \tfrac{1}{16}\mathfrak{q}\tau_j^{-2};$$

$$\frac{v_j}{w_j\mathfrak{q}} - \alpha_{j,n} \geqq \frac{1}{w_j\mathfrak{q}} > \frac{1}{2\tau_j} > \frac{\mathfrak{q}}{16\tau_j^2};$$

$$\alpha_{j,n+1} - \frac{v_j}{w_j\mathfrak{q}} - \frac{F_j(w_j\mathfrak{q})}{(w_j\mathfrak{q})^2} \geqq \frac{1}{w_j\mathfrak{q}} - \frac{1}{(w_j\mathfrak{q})^2} > \frac{1}{4\tau_j} > \frac{\mathfrak{q}}{16\tau_j^2};$$

et si l'on a aussi $[v'_j, w'_j\mathfrak{q}] \in \mathfrak{S}_{j,n}$, $\dfrac{v'_j}{w'_j\mathfrak{q}} > \dfrac{v_j}{w_j\mathfrak{q}}$,

on a

$$\frac{v'_j}{w'_j\mathfrak{q}} - \frac{v_j}{w_j\mathfrak{q}} - \frac{F_j(w_j\mathfrak{q})}{(w_j\mathfrak{q})^2} > \frac{\mathfrak{q}}{4\tau_j^2} - \frac{1}{\tau_j^2} > \frac{\mathfrak{q}}{8\tau_j^2}.$$

Donc, pour $C(v_1, w_1\mathfrak{q}, v_2, w_2\mathfrak{q}) \in \mathfrak{C}_n$, on a

$$C(v_1, w_1\mathfrak{q}, v_2, w_2\mathfrak{q}) \subset C'(v_1, w_1\mathfrak{q}, v_2, w_2\mathfrak{q}) \subset A_n \tag{17}$$

et les ensembles $C'(v_1, w_1\mathfrak{q}, v_2, w_2\mathfrak{q})$ sont disjoints deux-à-deux.

Soit R_n le nombre de tous les éléments de $\mathfrak{C}_n$ qui sont coupés par la droite $\mathfrak{R}$; soit

$$\lambda_1\Theta_1 + \lambda_2\Theta_2 + \lambda_0 = 0 \quad (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0)$$

l'équation de $\mathfrak{R}$. Choisissons a ($a = 1$ ou $a = 2$) de sorte que

$$|\lambda_a| = \mathrm{Max}\,(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$$

et posons $b \neq a$ ($b = 1$ ou $b = 2$). Soit $\mathfrak{K}_n$ l'ensemble de tous les points $[\Theta_1, \Theta_2] \in A_n$ tels que

$$|\lambda_1\Theta_1 + \lambda_2\Theta_2 + \lambda_0| \leqq \frac{\mathfrak{q}}{16}\left(\frac{|\lambda_1|}{\tau_1^2} + \frac{|\lambda_2|}{\tau_2^2}\right);$$

l'aire de $\mathfrak{K}_n$ est au plus égale à

$$\frac{1}{\mathfrak{q}} \cdot \frac{2\mathfrak{q}}{16|\lambda_a|}\left(\frac{|\lambda_1|}{\tau_1^2} + \frac{|\lambda_2|}{\tau_2^2}\right) < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\tau_1^2} + \frac{1}{\tau_2^2}\right)$$

(en effet, Θ_b ne peut pas quitter un certain intervalle de longueur $\mathfrak{q}^{-1}$ et, Θ_b étant donné, Θ_a est restreint à un intervalle de longueur

$$\frac{2\mathfrak{q}}{16|\lambda_a|}\left(\frac{|\lambda_1|}{\tau_1^2} + \frac{|\lambda_2|}{\tau_2^2}\right)).$$

Si $C(v_1, w_1\mathfrak{q}, v_2, w_2\mathfrak{q}) \in \mathfrak{C}_n$ est coupé par $\mathfrak{R}$, on a $C'(v_1, w_1\mathfrak{q}, v_2, w_2\mathfrak{q}) \subset \subset \mathfrak{K}_n$ (en effet, si $\lambda_1\delta_1 + \lambda_2\delta_2 + \lambda_0 = 0$, $|\delta_j - \Theta_j| \leqq \frac{1}{16}\mathfrak{q}\tau_j^{-2}$, on a $|\lambda_1\Theta_1 + \lambda_2\Theta_2 + \lambda_0| \leqq \dfrac{\mathfrak{q}|\lambda_1|}{16\tau_1^2} + \dfrac{\mathfrak{q}|\lambda_2|}{16\tau_2^2}$); l'aire de $C'(v_1, w_1\mathfrak{q}, v_2, w_2\mathfrak{q})$ étant $\dfrac{\mathfrak{q}^2}{2^8\tau_1^2\tau_2^2}$, on a (voir (13))

$$R_n \leqq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\tau_1^2} + \frac{1}{\tau_2^2}\right) \cdot \frac{2^8 \tau_1^2 \tau_2^2}{\mathfrak{q}^2} < \frac{1}{8} \frac{\tau_1^2 \tau_2^2}{\mathfrak{q}^4}.$$

Soit $\mathfrak{C}'_n$ l'ensemble de tous les éléments de $\mathfrak{C}_n$ qui ne sont pas coupés par $\mathfrak{R}$; soit $\mathfrak{C}' = \sum_{n=0}^{m-1} \mathfrak{C}'_n$; soit M'_n et M' le nombre d'éléments de $\mathfrak{C}'_n$ resp. de $\mathfrak{C}'$; alors on a

$$M_n' = M_n - R_n > \tfrac{1}{8}\, \tau_1^2 \tau_2^2 \mathfrak{q}^{-4},$$

$$M' > \frac{1}{8} m \frac{\tau_1^2 \tau_2^2}{\mathfrak{q}^4} > \frac{\tau_1^2 \tau_2^2}{2^7 \mathfrak{q}^3} \operatorname*{Min}_{j=1,2} \frac{F_j(q_j)}{q_j^2}.$$

Soit $j = 1$ ou $j = 2$; soit $i = 2$ pour $j = 1$, $i = 1$ pour $j = 2$; soit $\mathfrak{P}_j$ l'ensemble de tous les couples $[r, s]$ avec $q_j \leqq s < 2\tau_j$ et tels qu'il existe un couple $[v_j, w_j \mathfrak{q}] \in \sum_{n=0}^{m-1} \mathfrak{S}_{j,n}$ avec $s < w_j \mathfrak{q}$, $J_j(v_j, w_j \mathfrak{q})\ K_j(r, s) \neq \emptyset$, mais qu'il n'existe aucun couple $[r', s']$ avec $q_j \leqq s' < s$, $\frac{r'}{s'} = \frac{r}{s}$ (donc, $[r, s]$, $[r', s']$ étant deux couples différents de $\mathfrak{P}_j$, on a $\frac{r}{s} \neq \frac{r'}{s'}$). Soit $\mathfrak{D}_j$ l'ensemble de tous les $C(v_1, w_1 \mathfrak{q}, v_2, w_2 \mathfrak{q}) \in \mathfrak{C}$, pour lesquels il existe au moins un $[r, s] \in \mathfrak{P}_j$ avec

$$q_j \leqq s < w_j \mathfrak{q},\ J_j(v_j, w_j \mathfrak{q})\ K_j(r, s) \neq \emptyset. \tag{18}$$

Pour chaque t, soit $\mathfrak{P}_{j,t}$ l'ensemble de tous les couples $[r, s] \in \mathfrak{P}_j$ avec $2^t \leqq s < 2^{t+1}$ et soit $\mathfrak{D}_{j,t}$ l'ensemble de tous les $C(v_1, w_1 \mathfrak{q}, v_2, w_2 \mathfrak{q}) \in \mathfrak{C}$ pour lesquels il existe au moins un couple $[r, s] \in \mathfrak{P}_{j,t}$ avec (18). D_j resp. $D_{j,t}$ étant le nombre d'éléments de $\mathfrak{D}_j$ resp. de $\mathfrak{D}_{j,t}$, on a

$$D_j \leqq \sum_t D_{j,t}.$$

Les relations (18), où $[r, s] \in \mathfrak{P}_{j,t}$ entraînent $J_j(p_j, q_j)\ K_j(r, s) \neq \emptyset$ (voir (11), (17)); donc $\frac{r}{s} \neq \frac{p_j}{q_j}$ (car, dans le cas contaire, on aurait $r = p_j$, $s = q_j$ d'après la définition de $\mathfrak{P}_j$ et l'on a $J_j(p_j, q_j)\ K_j(p_j, q_j) = \emptyset$) et $\frac{r}{s} \neq \frac{v_j}{w_j \mathfrak{q}}$ (car $0 < s < w_j \mathfrak{q}$, $\{v_j, w_j \mathfrak{q}\} = 1$); donc

$$\frac{1}{2^{t+1} q_j} < \frac{1}{s q_j} \leqq \left| \frac{p_j}{q_j} - \frac{r}{s} \right| \leqq \frac{1}{3} \frac{F_j(s)}{s^2} + \frac{F_j(q_j)}{q_j^2} < 2 \frac{F_j(q_j)}{q_j^2}; \tag{19}$$

$$\frac{1}{4\tau_j 2^t} \leqq \frac{1}{w_j \mathfrak{q} s} \leqq \left| \frac{v_j}{w_j \mathfrak{q}} - \frac{r}{s} \right| \leqq \frac{1}{3} \frac{F_j(s)}{s^2} + \frac{F_j(w_j \mathfrak{q})}{(w_j \mathfrak{q})^2} < 2 \frac{F_j(2^t)}{2^{2t}}. \tag{20}$$

Si $\mathfrak{P}_{j,t} \neq \emptyset$, on aura donc

$$2^t > \frac{q_j}{4F_j(q_j)}, \quad \frac{2^t}{F_j(2^t)} < 8\tau_j, \text{ d'où } 2^t < \varrho_j. \tag{21}$$

Les inégalités (19) admettent au plus

$$\frac{4F_j(q_j)}{q_j^2}\, 2^{2t+2} + 1$$

solutions en $\frac{r}{s}$ avec $2^t \leqq s < 2^{t+1}$ et, r, s étant donnés, (20) admet au plus

$$4\frac{F_j(2^t)}{2^{2t}} \cdot \frac{4\tau_j^2}{\mathfrak{q}} + 1$$

solutions en $\frac{v_j}{w_j\mathfrak{q}}$ avec $\tau_j \leqq w_j\mathfrak{q} < 2\tau_j$. Enfin, v_j, w_j étant donné, l'indice n, pour lequel $[v_j, w_j\mathfrak{q}] \in \mathfrak{S}_{j,n}$ est déterminé d'une manière uniforme et $\mathfrak{S}_{i,n}$ contient au plus $4\tau_i^2\mathfrak{q}^{-2}$ éléments. On a donc

$$D_{j,t} \leqq \left(\frac{4F_j(q_j)}{q_j^2}\, 2^{2t+2} + 1\right)\left(\frac{4F_j(2^t)}{2^{2t}} \cdot \frac{4\tau_j^2}{\mathfrak{q}} + 1\right)\frac{4\tau_i^2}{\mathfrak{q}^2}.$$

Mais, pour nos valeurs de t, on a

$$\frac{4F_j(q_j)}{q_j^2}\, 2^{2t+2} > \frac{1}{F_j(q_j)} > 1 \text{ (voir (21), (10))},$$

$$\frac{4F_j(2^t)}{2^{2t}} \cdot \frac{4\tau_j^2}{\mathfrak{q}} > \frac{4F_j(\varrho_j)}{\varrho_j^2}\,\frac{4}{64}\,\frac{\varrho_j^2}{F_j^2(\varrho_j)} \cdot \frac{1}{\mathfrak{q}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\mathfrak{q}F_j(\varrho_j)} > 1$$

(voir (21), (14), (15)), de sorte que

$$D_j \leqq 2^{12}\frac{F_j(q_j)}{q_j^2\mathfrak{q}^3}\,\tau_1^2\tau_2^2 \sum_{2^t > \frac{q_j}{4F_j(q_j)}} F_j(2^t) < \frac{1}{2^{11}k}\,\frac{F_j(q_j)}{q_j^2\mathfrak{q}^3}\,\tau_1^2\tau_2^2 < \frac{\tau_1^2\tau_2^2}{2^9\mathfrak{q}^3}\operatorname*{Min}_{j=1,2}\frac{F_j(q_j)}{q_j^2}$$

(voir (10), (9)).

L'ensemble $\mathfrak{C}' - (\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2)$ a donc au moins

$$M' - (D_1 + D_2) > \frac{\tau_1^2\tau_2^2}{2^8\mathfrak{q}^3}\operatorname*{Min}_{j=1,2}\frac{F_j(q_j)}{q_j^2} > 0$$

éléments. Il existe donc un n et quatre nombres v_1, w_1, v_2, w_2 tels que

$$\begin{gathered} 0 \leqq n < m, \ [v_j, w_j\mathfrak{q}] \in \mathfrak{S}_{j,n} \ (j = 1, 2), \\ C(v_1, w_1\mathfrak{q}, v_2, w_2\mathfrak{q}) \in \mathfrak{C}' - (\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2). \end{gathered} \tag{22}$$

En posant $P_j = v_j$, $Q_j = w_j\mathfrak{q}$ $(j = 1, 2)$, on voit que les conditions 1, 3, 6 du Lemme 2 sont satisfaites (voir (10'), (13), (16), (17), (11), (12)); de même les condition 4, 5 (voir (22), la définition de $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}_j$, $\mathfrak{P}_j$ et la remarque[9]). Enfin, on a

$$\frac{\tau_1^2}{F_1(\tau_1)} = \frac{\tau_2^2}{F_2(\tau_2)}, \quad \tau_j \leqq Q_j < 2\tau_j,$$

donc (pour $j = 1, 2$; $i = 1, 2$; $i \neq j$)

$$\frac{F_j(Q_j)}{Q_j^2} \leqq \frac{F_i(\tau_i)}{\tau_i^2} \leqq 4k \frac{F_i(Q_i)}{Q_i^2}.$$

d'où la condition 2. Le Lemme 2 est donc démontré.

* * *

En conservant les suppositions et les notations du Lemme 2 et en ordonnant toutes les droites $y_1\Theta_1 + y_2\Theta_2 + y_0 = 0$ $(y_1^2 + y_2^2 > 0)$ dans une suite $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots$, on peut définir (à l'aide du Lemme 2) six suites

$$p_{1,n}, q_{1,n}, p_{2,n}, q_{2,n}, x_{1,n}, x_{0,n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

jouissantes des propriétés suivantes:

1. $0 < q_{j,1} < q_{j,2} < \ldots$ $(j = 1, 2)$; $x_{1,n} \to \infty$ pour $n \to \infty$.
2. $C(p_{1,n+1}, q_{1,n+1}, p_{2,n+1}, q_{2,n+1}) \subset C(p_{1,n}, q_{1,n}, p_{2,n}, q_{2,n})$.
3. $q_{1,n} \leqq s < q_{1,n+1} \Rightarrow J_1(p_{1,n+1}, q_{1,n+1})\, K_1(r, s) = \emptyset$;
   $q_{2,n} \leqq s < q_{2,n+1} \Rightarrow J_2(p_{2,n+1}, q_{2,n+1})\, K_2(r, s) = \emptyset$.
4. $C(p_{1,n+1}, q_{1,n+1}, p_{2,n+1}, q_{2,n+1})\, \mathfrak{R}_n = \emptyset$.
5. $[\Theta_1, \Theta_2] \in C(p_{1,n+1}, q_{1,n+1}, p_{2,n+1}, q_{2,n+1}) \Rightarrow$
   $| x_{1,n}(\Theta_1 - \Theta_2) + x_{0,n} | < \psi(x_{1,n})$.

Il existe précisément un point $[\Theta_1, \Theta_2]$ qui est contenu dans tous les rectangles $C(p_{1,n}, q_{1,n}, p_{2,n}, q_{2,n})$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Donc

$$\Theta_j - \frac{p_{j,n}}{q_{j,n}} \leqq \frac{F_j(q_{j,n})}{q_{j,n}^2};$$

d'autre part, si $s \geqq q_{j,1}$, il existe un n tel que $q_{j,n} \leqq s < q_{j,n+1}$, d'où (voir 3) $\left|\Theta_j - \frac{r}{s}\right| > \frac{1}{3} F_j(s)\, s^{-2}$ pour chaque r.

Ensuite, les nombres Θ_1, Θ_2 sont indépendents d'après 4) et, d'après 5), l'inégalité $|x_1(\Theta_1 - \Theta_2) + x_0| < \psi(x_1)$ possède une infinité de solutions avec $x_1 > 0$; la première partie du théorème 4 est donc démontrée.

§ 3. Démonstration de la deuxième partie du théorème 4.

Lemme 3. Soit $F(\xi)$ une fonction continue, non croissante et positive pour $\xi > 0$; soit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1} F(n)$ une série convergente. Pour $q > 0$, posons

$$J(p, q) = \left\langle \frac{p}{q} + \frac{1}{2}\,\frac{F(q)}{q^2},\ \frac{p}{q} + \frac{F(q)}{q^2} \right\rangle,$$

$$K(p, q) = \left\langle \frac{p}{q} - \frac{1}{3}\,\frac{F(q)}{q^2},\ \frac{p}{q} + \frac{1}{3}\,\frac{F(q)}{q^2} \right\rangle.$$

Alors, p, q étant deux nombres tels que $\{p, q\} = 1$, $q > c_4(F)$ et t étant un nombre quelconque plus grand que $c_5(F, q)$, il existe un ensemble fini $\mathfrak{M}$, jouissant des propriétés suivantes:

1. Chaque élément de l'ensemble $\mathfrak{M}$ est un couple de nombres entiers $[P, Q]$, où $\{P, Q\} = 1$, $t \leq Q < 2t$.

2. Le nombre d'éléments de $\mathfrak{M}$ est plus grand que

$$\frac{1}{200}\,\frac{F^2(q)}{q^4}\,t^2.$$

3. $[P, Q]$ étant un élément quelconque de $\mathfrak{M}$ et r, s étant deux nombres entiers tels que $q \leq s < Q$, on a $J(P, Q)\,K(r, s) = \emptyset$.[13])

4. Pour $[P, Q] \in \mathfrak{M}$ soit $J'(P, Q)$ l'intervalle fermé de longueur $\frac{q^2}{2t^2\,F(q)}$, concentrique à $J(P, Q)$; alors on a $J(P, Q) \subset J'(P, Q) \subset J(p, q)$ pour chaque $[P, Q] \in \mathfrak{M}$ et les intervalles $J'(P, Q)$ (pour tous les couples $[P, Q] \in \mathfrak{M}$) sont disjoints deux-à-deux.

Démonstration.[14]) La série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} F(2^n)$ est une série convergente, $F(\xi) \to 0$ pour $\xi \to \infty$. Définissons $c_4(F) = d$ de sorte que

$$F(d) < \frac{1}{8}, \quad \frac{4d^2}{F(d)} > 32, \quad 2^8 \sum_{2^u > \frac{d}{4F(d)}} F(2^u) < \frac{1}{128} \cdot \frac{1}{200}. \tag{23}$$

Soient donnés deux nombres p, q tels que $q > c_4(F)$, $\{p, q\} = 1$. Choisissons un nombre premier $\mathfrak{q} = c_6(F, q)$ tel que

---

[13]) Il suffit d'exiger la dernière équation pour les nombres r, s tels que $q \leq s < Q$ et qu'il n'existe aucun couple $[r', s']$ avec $q \leq s' < s$, $\frac{r'}{s'} = \frac{r}{s}$; comparez la considération analogue dans la remarque [9]).

[14]) Analogue à celle du Lemme 2, mais un peu plus simple.

$$\frac{1}{8} F(q)\, q^{-2} < \mathfrak{q}^{-1} < \frac{1}{4} F(q)\, q^{-2}, \tag{24}$$

donc $\mathfrak{q} > 32$. Soit $t > \mathfrak{q}$; soit $\mathfrak{N}$ l'ensemble de tous les couples $[v, \mathfrak{q}w]$ tels que

$$\{v, \mathfrak{q}w\} = 1,\ t \leqq \mathfrak{q}w < 2t,\ \frac{p}{q} + \frac{5}{8}\frac{F(q)}{q^2} \leqq \frac{v}{\mathfrak{q}w} < \frac{p}{q} + \frac{5}{8}\frac{F(q)}{q^2} + \frac{1}{\mathfrak{q}} \tag{25}$$

$\left(\text{la dernière expression est} < \frac{p}{q} + \frac{7}{8}\frac{F(q)}{q^2}\right)$.

$\mathfrak{N}$ est un ensemble fini; soit N le nombre de ses éléments; alors on a, d'après le Lemme 1,

$$N \geqq \sum_{\frac{t}{\mathfrak{q}} \leqq w < \frac{2t}{\mathfrak{q}}} \left(\varphi(w) - \frac{1}{32} w - 3\right) > \frac{1}{2} t^2 \mathfrak{q}^{-2} \tag{26}$$

pour $t > c_7(F, q)$.

Pour $[v, \mathfrak{q}w] \in \mathfrak{N}$, $t > c_8(F, q) > c_7(F, q)$, on a

$$\frac{v}{\mathfrak{q}w} - \frac{p}{q} - \frac{1}{2}\frac{F(q)}{q^2} \geqq \frac{1}{8}\frac{F(q)}{q^2} > \frac{q^2}{4t^2 F(q)} > \frac{F(t)}{t^2} > \frac{F(\mathfrak{q}w)}{4(\mathfrak{q}w)^2}. \tag{27}$$

$$\frac{p}{q} + \frac{F(q)}{q^2} - \frac{v}{\mathfrak{q}w} - \frac{F(\mathfrak{q}w)}{(\mathfrak{q}w)^2} \geqq \frac{1}{8}\frac{F(q)}{q^2} - \frac{1}{t^2} > \frac{q^2}{4t^2 F(q)} \tag{28}$$

et, si l'on a encore $[v', \mathfrak{q}w'] \in \mathfrak{N}$, $\frac{v}{\mathfrak{q}w} < \frac{v'}{\mathfrak{q}w'}$, on a (voir (24))

$$\frac{v'}{\mathfrak{q}w'} - \frac{v}{\mathfrak{q}w} - \frac{F(\mathfrak{q}w)}{(\mathfrak{q}w)^2} > \frac{1}{ww'\mathfrak{q}} - \frac{1}{t^2} > \frac{\mathfrak{q}}{4t^2} - \frac{1}{t^2} > \frac{\mathfrak{q}}{8t^2} > \frac{q^2}{2t^2 F(q)}. \tag{29}$$

Jusqu'à la fin de la démonstration soit $t > c_8(F, q)$. D'après (25), (27), (28), (29), (23) on voit que les conditions 1 et 4 du Lemme 3 sont satisfaites, si l'on y remplace $\mathfrak{M}$ par $\mathfrak{N}$ (ou par un sousensemble de $\mathfrak{N}$).

Soit maintenant $\mathfrak{P}$ l'ensemble de tous les couples $[r, s]$ avec $q \leqq s < 2t$ et tels qu'il existe au moins un couple $[P, Q] \in \mathfrak{N}$ avec $s < Q$, $J(P, Q)\ K(r, s) \neq \emptyset$, mais qu'il n'existe aucun couple $[r', s']$ avec $q \leqq s' < s$, $\frac{r'}{s'} = \frac{r}{s}$. [Soit $\mathfrak{R}$ l'ensemble de tous les couples $[P, Q] \in \mathfrak{N}$ tels qu'il existe un $[r, s] \in \mathfrak{P}$ avec $s < Q$, $J(P, Q)\ K(r, s) \neq 0$. Posons $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} - \mathfrak{R}$; soit R resp. M le nombre d'éléments de $\mathfrak{R}$ resp. de $\mathfrak{M}$, donc $M = N - R$. Evidemment, $\mathfrak{M}$ satisfait aux conditions 1, 3, 4 du Lemme 3[15]); d'autre part, d'après (26), (24), on a $N > \frac{1}{128} t^2 F^2(q)\, q^{-4}$; il suffit donc de démontrer l'inégalité

[15]) Comparez la remarque [13]). Remarquons encore: si l'on a $[r, s] \in \mathfrak{P}$, $[r', s'] \in \mathfrak{P}$, $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$, on a $r = r'$, $s = s'$.

$$R < \left(\frac{1}{128} - \frac{1}{200}\right) t^2 F^2(q)\, q^{-4}. \tag{30}$$

Pour chaque u, soit $\mathfrak{P}_u$ l'ensemble de tous les $[r, s] \in \mathfrak{P}$ avec $2^u \leqq s < 2^{u+1}$; soit R_u le nombre de tous les couples $[v, w\mathfrak{q}] \in \mathfrak{N}$ tels qu'il existe un $[r, s] \in \mathfrak{P}_u$ avec

$$q \leqq s < w\mathfrak{q},\ J(v, w\mathfrak{q})\, K(r, s) \neq \emptyset; \tag{31}$$

donc $R \leqq \sum\limits_u R_u$. Mais (31) avec $[r, s] \in \mathfrak{P}_u$ entraîne les conséquences suivantes:

A) $J(p, q)\, K(r, s) \neq \emptyset$;

B) $\dfrac{p}{q} \neq \dfrac{r}{s}$ (autrement, on aurait $p = q$, $r = s$, mais $J(p, q) \,.\, K(p, q) = \emptyset$);

C) $\dfrac{v}{w\mathfrak{q}} \neq \dfrac{r}{s}$ (car $0 < s < w\mathfrak{q}$, $\{v, w\mathfrak{q}\} = 1$);

donc

$$\frac{1}{2^{u+1} q} < \frac{1}{sq} \leqq \left|\frac{p}{q} - \frac{r}{s}\right| \leqq \frac{1}{3}\left(\frac{F(s)}{s^2} + \frac{F(q)}{q^2}\right) < \frac{2F(q)}{q^2}, \tag{32}$$

$$\frac{1}{4t2^u} < \frac{1}{w\mathfrak{q}s} \leqq \left|\frac{v}{w\mathfrak{q}} - \frac{r}{s}\right| \leqq \frac{1}{3}\left(\frac{F(s)}{s^2} + \frac{F(w\mathfrak{q})}{(w\mathfrak{q})^2}\right) < \frac{2F(2^u)}{2^{2u}}. \tag{33}$$

Si $\mathfrak{P}_u \neq \emptyset$, on aura donc

$$2^u > \frac{q}{4F(q)},\ \frac{F(2^u)}{2^u} > \frac{1}{8t}. \tag{34}$$

L'inégalité (32) admet au plus $\dfrac{4F(q)}{q^2}\, 2^{2u+2} + 1$ solutions en $\dfrac{r}{s}$ et, $\dfrac{r}{s}$ étant donné, l'inégalité (33) admet au plus

$$\frac{4F(2^u)}{2^{2u}} \cdot \frac{4t^2}{\mathfrak{q}} + 1 < \frac{4F(2^u)\, F(q)\, t^2}{2^{2u}\, q^2} + 1$$

(voir (24)) solutions en v, w avec $t \leqq w\mathfrak{q} < 2t$, $\{v, w\mathfrak{q}\} = 1$. Donc

$$R_u \leqq \left(\frac{16F(q)}{q^2}\, 2^{2u} + 1\right)\left(\frac{4F(2^u)\, F(q)\, t^2}{2^{2u}\, q^2} + 1\right).$$

Mais, pour nos valeurs de u (voir (34)), on a d'une part (voir (23))

$$\frac{16F(q)}{q^2}\, 2^{2u} > \frac{1}{F(q)} > 1;$$

d'autre part, en définissant ζ par

$$\frac{F(2^\zeta)}{2^\zeta} = \frac{1}{8t}$$

(ce qui est possible pour $t > c_9(F, q) > c_8(F, q)$), on a (voir (34)) $u < \zeta$, donc

$$\frac{4F(2^u)\,F(q)\,t^2}{2^{2u}\,q^2} > 4\,\frac{F(2^\zeta)}{2^{2\zeta}}\cdot\frac{2^{2\zeta}}{64F^2(2^\zeta)}\cdot\frac{F(q)}{q^2} = \frac{F(q)}{16q^2}\cdot\frac{1}{F(2^\zeta)} > 1$$

pour $t > c_5(F, q) > c_9(F, q)$ (car $\zeta \to \infty$ pour $t \to \infty$). En supposant $t > c_5(F, q)$, on a donc

$$R_u \leqq 2^8 t^2\,\frac{F^2(q)}{q^4}\,F(2^u).$$

$$R \leqq 2^8 t^2\,\frac{F^2(q)}{q^4}\sum_{2^u > \frac{q}{4F(q)}} F(2^u)$$

(voir (34)), d'où — d'après (23) — l'inégalité (30).

* * *

Soient $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$, $G(\xi)$ trois fonctions continues, positives et non croissantes pour $\xi > 0$; supposons les séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1} F_j(n)$ $(j = 1, 2)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, G(n)$ convergentes; supposons enfin qu'il existe un nombre $k > 0$ tel que l'on ait $\dfrac{F_j(\xi)}{F_j(2\xi)} < k$ pour $\xi > 0$, $j = 1, 2$[16]) (donc $k = c_{10}(F_1, F_2)$). Pour $q > 0$, $j = 1, 2$ posons

$$J_j(p, q) = \left\langle \frac{p}{q} + \frac{F_j(q)}{2q^2},\ \frac{p}{q} + \frac{F_j(q)}{q^2} \right\rangle,$$

$$K_j(p, q) = \left\langle \frac{p}{q} - \frac{F_j(q)}{3q^2},\ \frac{p}{q} + \frac{F_j(q)}{3q^2} \right\rangle.$$

Pour simplifier les notations, nous posons

$$F_n(\xi) = F_1(\xi),\quad J_n(p, q) = J_1(p, q),\quad K_n(p, q) = K_1(p, q),$$

si $n > 0$ est un nombre impair et

$$F_n(\xi) = F_2(\xi),\quad J_n(p, q) = J_2(p, q),\quad K_n(p, q) = K_2(p, q),$$

si $n > 0$ est un nombre pair.

---

[16]) On a donc $\limsup\limits_{\xi\to\infty} \dfrac{\log F_j^{-1}(\xi)}{\log \xi} \leqq \dfrac{\log k}{\log 2} < \infty$.

Nous allons maintenant choisir deux suites $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$; $z_4, z_5, \ldots, z_n, \ldots$ de manière que les conditions suivantes soient satisfaites:

Conditions A.[17])

$$t_1 > c_4(F_1),\ t_2 > c_4(F_2),\ t_2 > t_1,\ F_1(t_1) < 1,\ F_2(t_2) < 1. \tag{A1}$$

$$t_{n+1} > t_n, \quad t_{n+2} > \underset{1 \le r \le 2t_n}{\mathrm{Max}}\, c_5(F_n, r) \quad (n > 0). \tag{A2}$$

$$T_{n+1} > T_n = \frac{2t_n^2\, F_{n-2}(t_{n-2})}{t_{n-2}^2} \quad (n > 2). \tag{A3}$$

$$\frac{1}{4} F_n(t_n) < \frac{1}{20} \frac{t_{n-2}^2}{F_{n-2}(t_{n-2})} \quad (n > 2). \tag{A4}$$

$$\frac{1}{8k} T_{n+2} \frac{F_{n+1}(t_{n+1})}{t_{n+1}^2} > 2 \quad (n > 0). \tag{A5}$$

$$\frac{80}{t_{n+1}^2} < \frac{1}{150 t_n}, \quad \frac{80 t_n^2}{t_{n+1}} < \frac{F_n(t_n)}{150 t_n} \quad (n > 0). \tag{A6}$$

$$\frac{4}{t_n} < \frac{(F_1(t_1) \ldots F_{n-1}(t_{n-1}))^2}{2^{n-3}(3200k^2)^{n+1} t_1^2 t_2^2 (t_1 \ldots t_{n-1})^2} \quad (n \geqq 4). \tag{A7}$$

$$\sum_{x\frac{F_{n+1}(t_{n+1})}{t_{n+1}^2} \le r \le x} \frac{1}{r} < t_{n+1} \text{ pour } x \geqq 1,\ n > 0.^{18)} \tag{A8}$$

$$z_{n+1} > z_n,\ G(z_n) < 1,\ G(z_n) < \frac{1}{10 T_n},\ \frac{G(z_n)}{z_n} > \frac{4}{T_{n+1}}, \tag{A 9}$$

$$\sum_{x \ge z_n} x\, G(x) < \frac{F_n(t_n)}{12000 t_n} \quad (n \geqq 4).$$

Un tel choix est évidemment possible; car les ,,conditions A" sont évidemment satisfaites, si t_1 est ,,assez grand" et si la suite

$$t_1, t_2, t_3, t_4, z_4, t_5, z_5, t_6, z_6, t_7, \ldots$$

croît ,,assez vite". Nous allons maintenant définir, pour chaque $n > 0$, les ,,couples" et les ,,intervalles" d'ordre n et, pour $n > 2$, aussi les ,,intervalles élargis" d'ordre n. Pour chaque $n > 0$, chaque couple d'ordre

[17]) c_4, c_5 sont définis dans le Lemme 3.

[18]) (A8) est vrai pour $t_{n+1} > c_{11}(F_1, F_2)$; car $\sum \frac{1}{r} \leqq 1 + \int\limits_{x\frac{F_{n+1}(t_{n+1})}{t_{n+1}^2}}^{x} \frac{d\eta}{\eta} = 1 + \log \frac{t_{n+1}^2}{F_{n+1}(t_{n+1})} = O(\log t_{n+1})$ (voir la remarque[16])).

n sera un couple $[p, q]$ avec $\{p, q\} = 1$, $t_n \leqq q < 2t_n$. Si les couples d'ordre n sont définis pour un certain $n > 0$, on appelle „intervalles d'ordre n“ tous les intervalles $J_n(p, q)$, où $[p, q]$ parcourt tous les couples d'ordre n; si $n > 2$, on appelle „intervalle élargi d'ordre n“ chaque intervalle de longueur

$$\frac{1}{2} \frac{t_{n-2}^2}{t_n^2 F_{n-2}(t_{n-2})} = \frac{1}{T_n}, \tag{35}$$

qui est concentrique avec un intervalle d'ordre n. Remarquons que la longueur de $J_n(p, q)$ (si $[p, q]$ est un couple d'ordre n) est égale à $\frac{1}{2}F_n(q)\, q^{-2}$ et que

$$\frac{1}{8k} \frac{F_n(t_n)}{t_n^2} < \frac{1}{2} \frac{F_n(q)}{q^2} \leqq \frac{1}{2} \frac{F_n(t_n)}{t_n^2} < \frac{1}{T_n} \quad (n > 0) \tag{36}$$

(dans la dernière inégalité, on suppose $n > 2$).

Pour $n = 1, 2$ on ne définit qu'un seul couple d'ordre n: ce sera le couple $[1, t_n]$. Evidemment, $J_n(1, t_n)$ $(n = 1, 2)$ est contenu à l'intérieur de l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$.

Pour $n > 2$, nous procédons par induction. Supposons que les couples d'ordre m (et, par suite, aussi les intervalles d'ordre m $(m > 0)$ et les intervalles élargis d'ordre m $(m > 2)$) sont définis pour $1 \leqq m < n$[19]) et que les intervalles élargis du même ordre m $(2 < m < n)$ sont disjoints deux-à-deux.

Soient $I^1, I^2, \ldots, I^l$ tous les intervalles d'ordre $n - 2$; soit $1 \leqq d \leqq l$, $I^d = J_{n-2}(p, q)$. Désignons par $\mathfrak{M}_d$ l'ensemble $\mathfrak{M}$ du Lemme 3, où l'on pose t_n au lieu de t, F_n au lieu de F (on peut appliquer le Lemme 3, car $c_4(F_n) < t_{n-2} \leqq q < 2t_{n-2}$, $t_n > c_5(F_n, q)$ d'après (A1), (A2)). Les éléments de l'ensemble $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots + \mathfrak{M}_l$ seront appelés les couples d'ordre n; par là sont définis aussi les intervalles et les intervalles élargis d'ordre n. Observons (voir la condition 2 du Lemme 3) que chaque intervalle $I^d = J_{n-2}(p, q)$ d'ordre $n - 2$ contient au moins

$$\frac{1}{200} \frac{F_{n-2}^2(q)}{q^4} t_n^2 > \frac{1}{3200k^2} \frac{F_{n-2}^2(t_{n-2})}{t_{n-2}^4} t_n^2 \tag{37}$$

intervalles d'ordre n; ensuite que

$$\frac{1}{T_n} = \frac{1}{2} \frac{t_{n-2}^2}{t_n^2 F_{n-2}(t_{n-2})} \leqq \frac{1}{2} \frac{q^2}{t_n^2 F_{n-2}(q)}.$$

Donc (voir la condition 4 du Lemme 3) les intervalles élargis d'ordre n sont disjoints deux-à-deux et chacun d'eux est contenu dans un intervalle d'ordre $n - 2$. De plus, chaque intervalle élargi d'ordre n contient préci-

[19]) Chaque couple $[p, q]$ d'ordre m satisfaisant aux conditions $\{p, q\} = 1$, $t_m \leqq q < 2t_m$.

sément un intervalle d'ordre n et, inversement, chaque intervalle d'ordre n est contenu dans un intervalle élargi d'ordre n.

Ayant défini ainsi, pour chaque $n > 0$, les couples, intervalles et (pour $n > 2$) intervalles élargis d'ordre n, considérons le plan euclidien, dont les points seront désignés par $[\Theta_1, \Theta_2]$. Posons $(j) = 1$ pour $j = 1, 3, 5, 7, \ldots$ et $(j) = 2$ pour $j = 2, 4, 6, 8, \ldots$ A étant un intervalle d'ordre n $(n > 0)$ et B un intervalle d'ordre $n + 1$, nous allons appeler ,,rectangle d'ordre n" l'ensemble de tous les points $[\Theta_1, \Theta_2]$ tels que

$$\Theta_{(n)} \in A, \quad \Theta_{(n+1)} \in B.^{20)} \tag{38}$$

De même, A étant un intervalle d'ordre n $(n > 1)$ et B un intervalle élargi d'ordre $n + 1$, l'ensemble de tous les $[\Theta_1, \Theta_2]$ avec (38) sera appelé un ,,rectangle moyen d'ordre n". Enfin, A étant un intervalle élargi d'ordre n $(n > 2)$ et B un intervalle élargi d'ordre $n + 1$, l'ensemble de tous les $[\Theta_1, \Theta_2]$ avec (38) sera appelé un ,,rectangle élargi d'ordre n". Nous avons ainsi défini les rectangles, rectangles moyens et rectangles élargis d'ordre n pour chaque $n > 0$ resp. $n > 1$ resp. $n > 2$. On voit que chaque rectangle élargi d'ordre n contient précisément un rectangle moyen d'ordre n et que chaque rectangle moyen d'ordre n contient précisément un rectangle d'ordre n. Inversement, chaque rectangle d'ordre n $(n > 1)$ est contenu dans un rectangle moyen d'ordre n qui, à son tour, est (pour $n > 2$) contenu dans un rectangle élargi d'ordre n. Les rectangles élargis du même ordre n sont disjoints deux-à-deux $(n > 2)$; la même remarque s'applique aux rectangles moyens d'ordre n $(n > 1)$ et aux rectangles d'ordre n $(n > 0)$. Enfin, chaque rectangle moyen d'ordre n $(n > 1)$ est contenu précisément dans un rectangle d'ordre $n - 1$.

Il existe précisément un rectangle d'ordre 1; chaque rectangle d'ordre n contient au moins

$$\frac{1}{3200k^2} \frac{F_n^2(t_n)}{t_n^4} t_{n+2}^2 \tag{39}$$

rectangles d'ordre $n + 1$.

Soit V_n la somme de tous les rectangles d'ordre n $(n = 1, 2, \ldots)$; donc $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots$ et les ensembles V_n sont fermés, non vides et contenus dans le carré $0 < \Theta_1 < 1$, $0 < \Theta_2 < 1$. Posons, dans tout ce qui suit,

$$V = V_1 V_2 V_3 \ldots$$

[20]) Donc: si n est un nombre impair, Θ_1 parcourt un intervalle d'ordre n et Θ_2 un intervalle d'ordre $n + 1$; au contraire, si n est un nombre pair, Θ_2 parcourt un intervalle d'ordre n et Θ_1 un intervalle d'ordre $n + 1$.

Remarquons que chaque rectangle d'ordre n ($n > 0$) contient au moins un point de l'ensemble V.

Lemme 4. Si $[\Theta_1, \Theta_2] \in V$, alors Θ_j ($j = 1, 2$) admet l'approximation $F_j(\xi)\, \xi^{-2}$, mais n'admet pas l'approximation $\frac{1}{3} F_j(\xi)\xi^{-2}$.

Démonstration. Pour chaque $l \geqq 0$, Θ_1 est contenu dans un intervalle $J_{2l+1}(p_{2l+1}, q_{2l+1})$ d'ordre $2l + 1$ et Θ_2 est contenu dans un intervalle $J_{2l+2}(p_{2l+2}, q_{2l+2})$ d'ordre $2l + 2$; donc

$$\left|\Theta_j - \frac{p_{2l+j}}{q_{2l+j}}\right| \leqq \frac{F_j(q_{2l+j})}{q_{2l+j}^2}$$

pour $j = 1, 2$; $l = 0, 1, 2, \ldots$ D'autre part, soit $s > q_2$; alors il existe deux nombres $l \geqq 0$, $m \geqq 0$ tels que $q_{2l+1} \leqq s < q_{2l+3}$, $q_{2m+2} \leqq s < q_{2m+4}$.

On a donc (voir la définition de $\mathfrak{M}_n$ et le Lemme 3)

$$J_{2l+3}(p_{2l+3}, q_{2l+3})\, K_1(r, s) = J_{2m+4}(p_{2m+4}, q_{2m+4})\, K_2(r, s) = \emptyset$$

pour chaque r, donc

$$\left|\Theta_j - \frac{r}{s}\right| > \frac{1}{3} F_j(s)\, s^{-2}$$

pour $j = 1, 2$ et pour chaque couple r, s avec $s > q_2$.

Dans tout ce qui suit, on va désigner par $M(x_1, x_2, x_0)$ l'ensemble de tous les points $[\Theta_1, \Theta_2]$ avec

$$0 < \Theta_1 < 1, \quad 0 < \Theta_2 < 1, \quad |\,\Theta_1 x_1 + \Theta_2 x_2 + x_0\,| < G(x),$$

où $x = \operatorname{Max}(|\,x_1\,|, |\,x_2\,|)$; on ne va considérer que des valeurs x_1, x_2, x_0 telles que $x_1 x_2 \neq 0$, $M(x_1, x_2, x_0) \neq \emptyset$ et l'on va toujours désigner par x le nombre $\operatorname{Max}(|\,x_1\,|, |\,x_2\,|)$.

Lemme 5. Soient x_1, x_2, x_0, n des nombres entiers tels que $x_1 x_2 \neq 0$, $n \geqq 4$, $z_n \leqq x < z_{n+1}$. Soit N le nombre des rectangles d'ordre n qui sont coupés par l'ensemble $M(x_1, x_2, x_0)$. Alors on a

$$N < \operatorname{Max}\left(6T_n, 6T_{n+1}\frac{|\,x_{(n)}\,|}{x}\right).$$

(T_n est défini dans (A3).)

Démonstration. Soit I un rectangle d'ordre n tel que $I \cdot M(x_1, x_2, x_0) \neq \emptyset$; soit $[\eta_1, \eta_2]$ le centre de I et soit K le rectangle élargi d'ordre n contenant I (donc concentrique avec I). Il existe un point $[\Theta_1, \Theta_2]$ tel que

$$|\,x_{(n)}\Theta_{(n)} + x_{(n+1)}\Theta_{(n+1)} + x_0\,| = |\,\Theta_1 x_1 + \Theta_2 x_2 + x_0\,| < G(x),$$
$$|\,\Theta_{(j)} - \eta_{(j)}\,| \leqq \tfrac{1}{2} F_j(t_j)\, t_j^{-2} \quad (j = n, n+1)$$

(voir (36)). Définissons le point $[\zeta_1, \zeta_2]$ par les équations

$$\zeta_{(n+1)} = \Theta_{(n+1)}, \quad x_{(n)}\zeta_{(n)} + x_{(n+1)}\zeta_{(n+1)} + x_0 = 0,$$

d'où

$$| \Theta_{(n)} - \zeta_{(n)} | < \frac{G(x)}{|x_{(n)}|};$$

$$|\zeta_{(n)} - \eta_{(n)}| < \frac{1}{4} F_n(t_n)t_n^{-2} + G(x)|x_{(n)}|^{-1} < \frac{1}{4} F_n(t_n)\, t_n^{-2} + \frac{1}{10T_n} < \frac{1}{5T_n} \tag{40}$$

(voir (A9), (A4), (A3)),

$$| \zeta_{(n+1)} - \eta_{(n+1)} | \leqq \frac{1}{4} F_{n+1}(t_{n+1})\, t_{n+1}{}^{-2} < \frac{1}{5T_{n+1}}. \tag{41}$$

Mais K est l'ensemble de tous les points $[\Theta_1, \Theta_2]$, où $\Theta_{(j)}$ parcourt l'intervalle $\left\langle \eta_{(j)} - \frac{1}{2T_j}, \eta_{(j)} + \frac{1}{2T_j} \right\rangle$ $(j = n, n+1)$, donc (voir (40), (41)) $[\zeta_1, \zeta_2] \in K$. Le segment composé de tous les points $[\Theta_1, \Theta_2]$ avec

$$x_1\Theta_1 + x_2\Theta_2 + x_0 = 0, \; [\Theta_1, \Theta_2] \in K \tag{42}$$

contient le point $[\zeta_1, \zeta_2]$. S'il contient un point de la droite $\Theta_{(n)} = \eta_{(n)} - \frac{1}{2T_n}$ ou de la droite $\Theta_{(n)} = \eta_{(n)} + \frac{1}{2T_n}$, sa longueur est $> \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) \frac{1}{T_n} > \frac{1}{4T_n}$; dans le cas contraire, le segment (42) contient un point de la droite $\Theta_{(n+1)} = \eta_{(n+1)} + \frac{1}{2T_{n+1}}$; le coefficient angulaire de la droite $x_1\Theta_1 + x_2\Theta_2 + x_0 = 0$ étant $-\frac{x_1}{x_2}$, la longueur du segment (42) est

$$> \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) \frac{1}{T_{n+1}} \sqrt{1 + \left(\frac{x_{(n+1)}}{x_{(n)}}\right)^2} > \frac{1}{4T_{n+1}} \frac{x}{| x_{(n)} |}.$$

Donc: la longueur du segment (42) est, dans tous les cas,

$$> \lambda = \mathrm{Min}\left(\frac{1}{4T_n}, \frac{x}{4T_{n+1}| x_{(n)} |}\right).$$

La longueur totale du segment

$$x_1\Theta_1 + x_2\Theta_2 + x_0 = 0, \; 0 < \Theta_1 < 1, \; 0 < \Theta_2 < 1$$

étant $\leqq \sqrt{2} < \frac{3}{2}$, on a évidemment

$$N \leqq \sqrt{2}\, \frac{1}{\lambda} < \mathrm{Max}\left(6T_n, 6T_{n+1} \frac{| x_{(n)} |}{x}\right).$$

Lemme 6. Soient x_1, x_2, x_0, n des nombres entiers tels que $x_1 x_2 \neq 0$,

$n \geqq 4$, $z_n \leqq x < z_{n+1}$. Soit R le nombre des rectangles d'ordre $n+2$ qui sont coupés par $M(x_1, x_2, x_0)$. Alors on a

$$R < 48 T_{n+2} T_{n+3} \operatorname{Max}\left(T_n, T_{n+1} \frac{|x_{(n)}|}{x}\right) \cdot \operatorname{Min}_{j=n, n+1} \frac{F_j(t_j)\, G(x)}{t_j^2 \,|x_{(j+1)}|}.$$

Démonstration. Soit I un rectangle d'ordre n qui est coupé par $M(x_1, x_2, x_0)$. Soit ϱ le nombre de tous les rectangles d'ordre $n+2$ qui sont contenus dans I et sont coupés par $M(x_1, x_2, x_0)$.

Le rectangle I est l'ensemble de tous les points $[\Theta_1, \Theta_2]$, où $\Theta_{(j)}$ $(j = n, n+1)$ parcourt un intervalle $\langle \alpha_j, \beta_j \rangle$ d'ordre j, dont la longueur (voir (36)) est $> \frac{1}{8k} \frac{F_j(t_j)}{t_j^2}$ et $\leqq \frac{1}{2} \frac{F_j(t_j)}{t_j^2}$. Désignons par $I^1, I^2, \ldots, I^l$ les rectangles moyens d'ordre $n+1$ qui sont contenus dans I. Chaque I^m est l'ensemble de tous les points $[\Theta_1, \Theta_2]$, où $\Theta_{(n+1)}$ parcourt l'intervalle $\langle \alpha_{n+1}, \beta_{n+1} \rangle$ et $\Theta_{(n+2)} = \Theta_{(n)}$ un intervalle élargi d'ordre $n+2$ $\langle \alpha_{n+2}^{(m)}, \beta_{n+2}^{(m)} \rangle$ de longueur $\frac{1}{T_{n+2}} = \frac{t_n^2}{2 t_{n+2}^2 F_n(t_n)}$ (voir (A3)). Enfin, chaque rectangle élargi d'ordre $n+2$, contenu dans I^m, est l'ensemble de tous les points $[\Theta_1, \Theta_2]$, où $\Theta_{(n+2)} = \Theta_{(n)}$ parcourt l'intervalle $\langle \alpha_{n+2}^{(m)}, \beta_{n+2}^{(m)} \rangle$ et $\Theta_{(n+3)} = \Theta_{(n+1)}$ un intervalle élargi d'ordre $n+3$ de longueur

$$\frac{1}{T_{n+3}} = \frac{t_{n+1}^2}{2 t_{n+3}^2 F_{n+1}(t_{n+1})}.$$

Posons $r = [(\beta_{n+1} - \alpha_{n+1})\, T_{n+2}]$; on a (voir (A5))

$$T_{n+2}(\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}) > \frac{1}{8k} \frac{F_{n+1}(t_{n+1})}{t_{n+1}^2} T_{n+2} > 2,$$

d'où

$$\frac{1}{T_{n+2}} \leqq \frac{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}}{r} < \frac{2}{T_{n+2}}.$$

Divisons ensuite chaque I^m en r rectangles, où chaque rectangle est l'ensemble de tous les points $[\Theta_1, \Theta_2]$ tels que $\Theta_{(n+1)}$ parcourt un intervalle de longueur $\frac{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}}{r}$ et $\Theta_{(n+2)} = \Theta_{(n)}$ l'intervalle $\langle \alpha_{n+2}^{(m)}, \beta_{n+2}^{(m)} \rangle$; désignons ces rectangles par $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{rl}$.

Si $M(x_1, x_2, x_0)\, Z_t \neq \emptyset$, alors il existe un point $[\Theta_1, \Theta_2] \in Z_t$ avec $|x_1 \Theta_1 + x_2 \Theta_2 + x_0| < G(x)$; on aura donc (les longueurs des côtés de Z_t étant $< 2 T_{n+2}^{-1}$) pour chaque $[\Theta_1, \Theta_2] \in Z_t$

$$|x_1 \Theta_1 + x_2 \Theta_2 + x_0| < G(x) + \frac{4x}{T_{n+2}},$$

donc

$$| x_1\Theta_1 + x_2\Theta_2 + x_0 | < 2G(x).^{21)} \tag{43}$$

C'est-à-dire: soit B l'ensemble de tous les points $[\Theta_1, \Theta_2] \in I$ avec (43); alors, si $Z_t\, M(x_1, x_2, x_0) \neq \emptyset$, on a $Z_t \subset B$. Mais l'aire de B est

$$\leq \operatorname*{Min}_{j = n, n+1} \frac{1}{2} \frac{F_j(t_j)}{t_j^2} \cdot \frac{4G(x)}{| x_{(j+1)} |}$$

(car, pour $j = n, n+1$, $[\Theta_1, \Theta_2] \in B$, le nombre $\Theta_{(j)}$ reste dans l'intervalle $\langle \alpha_j, \beta_j \rangle$ et, $\Theta_{(j)}$ étant donné, $\Theta_{(j+1)}$ est contenu, d'après (43), dans un intervalle de longueur $4G(x) \,.\, | x_{(j+1)} |^{-1}$). L'aire de Z_t étant $\geq T_{n+2}^{-2}$, le nombre des Z_t coupés par $M(x_1, x_2, x_0)$ est

$$\leq 2 \operatorname*{Min}_{j=n,n+1} \frac{F_j(t_j)}{t_j^2} \frac{G(x)}{| x_{(j+1)} |} T_{n+2}{}^2.$$

Ensuite, chaque Z_t coupe évidemment au plus

$$\frac{2T_{n+3}}{T_{n+2}} + 2 < \frac{4T_{n+3}}{T_{n+2}}$$

rectangles élargis d'ordre $n + 2$ (dont chacun contient précisément un rectangle d'ordre $n + 2$); donc

$$\varrho < 8 \operatorname*{Min}_{j=n,n+1} \frac{F_j(t_j)}{t_j^2} \frac{G(x)}{|x_{(j+1)}|} T_{n+2}\, T_{n+3}.$$

Enfin, d'après le Lemme 5, le nombre des rectangles d'ordre n qui sont coupés par $M(x_1, x_2, x_0)$, est

$$< \operatorname{Max}\left(6T_n,\ 6T_{n+1} \frac{| x_{(n)} |}{x}\right),$$

ce qui achève la démonstration.

Jusqu'à la fin de cette note, soit (pour $n \geq 4$) M_n la somme de tous les ensembles $M(x_1, x_2, x_0)$ avec $x_1 x_2 \neq 0$, $z_n \leq x < z_{n+1}$.

Lemme 7. Soit $n \geq 4$; soit D_n le nombre de tous les rectangles d'ordre $n + 2$ qui sont coupés par M_n; alors on a

$$D_n < \frac{F_n(t_n)\, F_{n+1}(t_{n+1})}{t_n} T_{n+2}\, T_{n+3} = \frac{4F_n{}^2(t_n)\, F_{n+1}{}^2(t_{n+1})\, t_{n+2}{}^2 t_{n+3}{}^2}{t_n{}^3 t_{n+1}{}^2}.$$

Démonstration. D'après le Lemme 6, on a

$$\frac{D_n}{48\, T_{n+2}\, T_{n+3}} \leq \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3.$$

[21]) Car, pour $x < z_{n+1}$, on a $\dfrac{G(x)}{x} > \dfrac{G(z_{n+1})}{z_{n+1}} > \dfrac{4}{T_{n+2}}$ (voir (A9)).

où Σ_1, Σ_2, Σ_3 sont définis de la manière suivante:

$$\Sigma_1 = T_{n+1} \frac{F_{n+1}(t_{n+1})}{t_{n+1}^2} \Sigma \frac{G(x)}{x},$$

où la sommation porte sur toutes les valeurs admissibles de x_1, x_2, x_0 telles que $T_{n+1} \mid x_{(n)} \mid \geqq T_n x$;

$$\Sigma_2 = T_n \frac{F_n(t_n)}{t_n^2} \Sigma \frac{G(x)}{|x_{(n+1)}|},$$

où la sommation porte sur toutes les valeurs admissibles de x_1, x_2, x_0 telles que

$$T_{n+1} \mid x_{(n)} \mid < T_n x, \quad \frac{x_{(n)}}{x_{(n+1)}} \leqq \frac{F_{n+1}(t_{n+1})}{t_{n+1}^2}$$

(donc $\mid x_{(n)} \mid < \mid x_{(n+1)} \mid = x$);

$$\Sigma_3 = T_n \frac{F_{n+1}(t_{n+1})}{t_{n+1}^2} \Sigma \frac{G(x)}{\mid x_{(n)} \mid},$$

où la sommation porte sur toutes les valeurs admissibles de x_1, x_2, x_0 telles que

$$T_{n+1} \mid x_{(n)} \mid < T_n x, \quad \left| \frac{x_{(n)}}{x_{(n+1)}} \right| > \frac{F_{n+1}(t_{n+1})}{t_{n+1}^2}.$$

Remarquons: x étant donné, on a ou bien $x_1 = \pm x$, $0 < \mid x_2 \mid \leqq x$ (ce qui donne $2x$ valeurs possibles pour x_2), ou bien $x_2 = \pm x$, $0 < \mid x_1 \mid \leqq x$; d'autre part $\mid x_0 \mid < \mid x_1 \mid + \mid x_2 \mid + G(x) < 2x + 1$ (car $G(x) < 1$ d'après (A9)), ce qui donne au plus $4x + 1 < 5x$ valeurs possibles pour x_0. En tenant toujours compte des „conditions A", on peut calculer comme il suit:

$$\Sigma_1 \leqq 40 T_{n+1} \frac{F_{n+1}(t_{n+1})}{t_{n+1}^2} \sum_{z_n \leqq x < z_{n+1}} x\, G(x)$$
$$< \frac{40}{12000} \cdot 2 \frac{F_n(t_n)\, F_{n+1}(t_{n+1})}{t_n} \quad \left(\frac{80}{12000} = \frac{1}{150}\right);$$

$$\Sigma_2 \leqq T_n \frac{F_n(t_n)}{t_n^2} \sum_{z_n \leqq x < z_{n+1}} 2 \frac{G(x)}{x} \cdot 2 \frac{F_{n+1}(t_{n+1})}{t_{n+1}^2}\, x \cdot 5x$$
$$< 40\, F_n(t_n)\, F_{n+1}(t_{n+1}) \frac{1}{t_{n+1}^2} \sum_{z_n \leqq x < z_{n+1}} x\, G(x) < \frac{1}{150} \frac{F_n(t_n)\, F_{n+1}(t_{n+1})}{t_n}.$$

Enfin, on a (dans Σ_3, on a $T_{n+1} \mid x_{(n)} \mid < T_n x$, donc (voir (A 3)) $\mid x_{(n)} \mid < x$, d'où $\mid x_{(n+1)} \mid = x$)

$$\Sigma_3 \leqq T_n \frac{F_{n+1}(t_{n+1})}{t_{n+1}^{\,2}} \sum_{z_n \leqq x < z_{n+1}} 20\, x\, G(x) \sum_{\frac{xF_{n+1}(t_{n+1})}{t_{n+1}^{\,2}} < v < x} \frac{1}{v}$$

$$< 40 \frac{t_n^{\,2} F_{n+1}(t_{n+1})}{t_{n+1}^{\,2}}\, t_{n+1} < \frac{1}{150} \frac{F_n(t_n)\, F_{n+1}(t_{n+1})}{t_n},$$

ce qui achève la démonstration.

Pour $n \geqq 4$, posons $\mathfrak{M}_n = \sum_{m=4}^{n-1} M_m$ (donc $\mathfrak{M}_4 = \emptyset$).

Lemme 8. Soit $n \geqq 4$; soit Γ_n le nombre des rectangles d'ordre $n+1$ qui ne sont pas coupés par l'ensemble $\mathfrak{M}_n$; alors on a

$$\Gamma_n \geqq K_n, \tag{44}$$

où

$$K_n = \frac{(F_1(t_1) \ldots F_n(t_n))^2}{2^{n-4}(3200k^2)^n\, t_1^{\,2} t_2^{\,2}\, (t_1 \ldots t_n)^2}\, t_{n+1}^{\,2}\, t_{n+2}^{\,2},$$

donc $\Gamma_n > 0$.

Démonstration. Il existe précisément un rectangle du premier ordre et chaque rectangle d'ordre n contient au moins

$$\frac{1}{3200k^2} \frac{F_n^{\,2}(t_n)}{t_n^{\,4}}\, t_{n+2}^{\,2}$$

rectangles d'ordre $n+1$ (voir (39)); donc (44) est vrai pour $n = 4$. Supposons donc que (44) soit rempli pour un certain $n \geqq 4$ et remarquons que $\mathfrak{M}_{n+1} = \mathfrak{M}_n + M_n$. Le nombre des rectangles d'ordre $n+2$, non coupés par l'ensemble $\mathfrak{M}_n$, est au moins égal à

$$\Gamma_n \frac{1}{3200k^2} \frac{F_{n+1}^{\,2}(t_{n+1})}{t_{n+1}^{\,4}}\, t_{n+3}^{\,2} \geqq K_n \frac{1}{3200k^2} \frac{F_{n+1}^{\,2}(t_{n+1})}{t_{n+1}^{\,4}}\, t_{n+3}^{\,2} = 2K_{n+1};$$

parmi ces rectangles, il y en a (voir le Lemme 7) au plus D_n qui sont coupés par M_n; mais d'après le Lemme 7 et d'après (A7), on a

$$D_n < \frac{4F_n^{\,2}(t_n)\, F_{n+1}^{\,2}(t_{n+1})}{t_n^{\,3} t_{n+1}^{\,2}}\, t_{n+2}^{\,2} t_{n+3}^{\,2} < K_{n+1},$$

ce qui achève la démonstration.

Lemme 9. $V - \sum_{m=4}^{\infty} M_m \neq 0$.

Démonstration. Dans le cas contraire, on aurait $V \subset \sum_{m=4}^{\infty} M_m$; les M_m étant ouverts et V étant fermé et borné, on pourrait trouver (d'après le théorème de Borel) un $n > 4$ tel que $V \subset \sum_{m=4}^{n-1} M_m = \mathfrak{M}_n$. Chaque rectangle d'ordre $n + 1$ contenant au moins un point de V, l'ensemble $\mathfrak{M}_n$ couperait tous les rectangles d'ordre $n + 1$; on aurait donc $\Gamma_n = 0$, ce qui est impossible d'après le Lemme 8.

* * *

Pour achever la démonstration de la deuxième partie du théorème 4, choisissons un point $[\Theta_1, \Theta_2] \epsilon V - \sum_{m=4}^{\infty} M_m$ (il existe un tel point, d'après le Lemme 9). Pour chaque x_1, x_2, x_0 avec $x_1 x_2 \neq 0$, $\operatorname{Max}(|x_1|, |x_2|) = x \geqq z_4$, on a

$$| x_1\Theta_1 + x_2\Theta_2 + x_0 | \geqq G(x); \tag{45}$$

d'autre part, d'après le Lemme 4, le nombre Θ_j $(j = 1, 2)$ admet l'approximation $F_j(\xi)\, \xi^{-2}$, mais n'admet pas l'approximation $\frac{1}{3}F_j(\xi)\, \xi^{-2}$. Donc, les nombres Θ_1, Θ_2 sont irrationnels, d'où

$$y\Theta_1 + z = 0 \Rightarrow y = z = 0, \quad y\Theta_2 + z = 0 \Rightarrow y = z = 0;$$

d'autre part, d'après (45),

$$\begin{gathered} x_1 x_2 \neq 0,\ x_1\Theta_1 + x_2\Theta_2 + x_0 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 z_4 x_2 z_4 \neq 0,\ | x_1 z_4 \Theta_1 + x_2 z_4 \Theta_2 + x_0 z_4 | = 0 < G(x z_4) \\ \Rightarrow x_1 z_4 = x_2 z_4 = x_0 z_4 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_0 = 0; \end{gathered}$$

donc les nombres Θ_1, Θ_2 sont indépendants.

RÉSUMÉ.

Soit $\gamma(\Theta_1, \ldots, \Theta_n)$ la borne supérieure de tous les nombres β, pour lesquels l'inégalité

$$| x_1\Theta_1 + \ldots + x_n\Theta_n + x_0 | < x^{-\beta}$$

(où $0 < \operatorname{Max}(|x_1|, \ldots, |x_n|) = x$) admet une infinité de solutions en nombres entiers $x_1, \ldots, x_n, x_0$. En ajoutant la condition $x_1 x_2 \ldots x_n \neq 0$, on obtient la définition de $\gamma'(\Theta_1, \ldots, \Theta_n)$. Dans la note actuelle, on détermine les bornes précises de $\gamma(\Theta_1, \Theta_2)$ et de $\gamma'(\Theta_1, \Theta_2)$, les nombres $\gamma(\Theta_1)$, $\gamma(\Theta_2)$ étant fixés d'avance d'une manière arbitraire.