Vojtěch Jarník

Sur les fonctions de deux variables réelles

Fund. Math. 27 (1936), pp. 147--150

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500757

Sur les fonctions de deux variables réelles.

Par

Vojtěch Jarník (Praha).

Le but de cette note est de montrer que l'on peut, à l'aide d'un léger changement de la méthode de démonstration, remplacer quelques résultats de M. Blumberg[1]) et de Mlle Schmeiser[2]) par des résultats plus précis. Pour ne pas compliquer inutilement la note actuelle, nous n'envisagerons que le théorème 2^a de Mlle Schmeiser, auquel nous allons donner une forme plus précise que voici:

Théorème. *Soit π le plan euclidien; soit s une droite de ce plan; soit $f(x,y)=f(P)$ une fonction réelle*[3]) *définie dans π. P étant un point quelconque de s et d étant une direction quelconque de P, désignons par $\overrightarrow{Pd}$ la demidroite issue du point P dans la direction d (le point P étant regardé comme n'appartenant pas à $\overrightarrow{Pd}$).*

Enfin, désignons par $E(P,d)$ l'ensemble de tous les nombres ξ jouissant de la propriété suivante: il existe une suite de points $P_1, P_2, \ldots$ telle que

$$P_n \epsilon \overrightarrow{Pd}, \qquad P_n \to P, \qquad f(P_n) \to \xi \qquad \text{pour} \quad n \to \infty \text{ [4])}.$$

Alors il existe un ensemble dénombrable $D \epsilon s$ jouissant de la propriété suivante: d_1, d_2 étant deux directions quelconques, situées d'un même côté de la droite s, on a

$$(1) \qquad E(P, d_1) \cdot E(P, d_2) \neq 0$$

pour chaque $P \epsilon s - D$.

---

1) Fund. Math. 16 (1930), p. 17—24.

2) Fund. Math. 22 (1934), p. 70—76.

3) La démonstration s'applique d'ailleurs aussi dans le cas d'une fonction *complexe* de deux variables *réelles*.

4) On admet aussi les valeurs $\xi = \pm\infty$.

Remarque. Désignons par $I(P, d)$ le plus petit intervalle fermé qui contient l'ensemble $E(P, d)$. En remplaçant la relation (1) par la relation moins précise

$$I(P, d_1) \cdot I(P, d_2) \neq 0,$$

on obtient précisément le théorème 2^a de Mlle Schmeiser.

Démonstration. Supposons, ce qui est évidemment permis, que $0 \leqslant f(x, y) \leqslant 1$, que la droite s est la droite $y=0$ et que toutes les directions considérées dans la suite sont situées dans le demiplan $y > 0$.

n (entier et positif) étant donné, considérons tous les intervalles fermés (en nombre n)

$$(2) \qquad \langle k n^{-1}, (k+1) n^{-1} \rangle \qquad (k=0, 1, \dots, n-1).$$

Chaque ensemble non vide qui est la somme d'un certain nombre d'intervalles (2), soit appelé un *ensemble normal d'ordre n*. En particulier, $E \neq 0$ étant un ensemble quelconque tel que $E \subset \langle 0,1 \rangle$, désignons par $[E]_n$ la somme de tous les intervalles (2) pour lesquels on a $\langle (k-1) n^{-1}, (k+2) n^{-1} \rangle \cdot E \neq 0$. Soient maintenant $\varkappa$, λ, δ trois directions différentes telles que λ soit située entre $\varkappa$ et δ. Soient: n un nombre donné et E un ensemble normal donné d'ordre n. Soit $A = A(\varkappa, \lambda, \delta, E, n)$ l'ensemble de tous les points $P \in s$ qui jouissent de la propriété suivante: il existe au moins une direction d_P située entre $\varkappa$ et λ et telle que $[E(P, d_P)]_n = E$. Choisissons une telle direction d_P pour chaque $P \in A$. Choisissons encore un intervalle ouvert $I_P \subset \overrightarrow{P d_P}$ de longueur $< 1/n$, dont P est un point extrême et tel que l'on ait $f(R) \in E$ pour chaque point $R \in I_P$. La projection de I_P sur s, suivant la direction δ, est un intervalle ouvert I'_P dont P est un point extrême. Posons

$$(3) \qquad A' = A'(\varkappa, \lambda, \delta, E, n) = \sum_{P \in A} I'_P, \qquad A'' = A''(\varkappa, \lambda, \delta, E, n) = A - A';$$

donc A'' est un ensemble dénombrable [5]).

Ajoutons la remarque suivante: soit d une direction quelconque mais telle que δ soit située une λ et d; soit $P \in A'(\varkappa, \lambda, \delta, E, n)$, donc $P \in I'_q$ pour un certain $Q \in A(\varkappa, \lambda, \delta, E, n)$. La demidroite $\overrightarrow{Pd}$ ren-

[5]) En effet, pour $P \neq Q$, $P \in A''$ et $Q \in A''$, on a $I'_P I'_Q = 0$.

contre évidemment la demidroite $\overrightarrow{Qd_2}$ dans un point $R \epsilon I_Q$, d'où $f(R) \epsilon E$. Evidemment, P, d, $\varkappa$, λ, δ étant donnés, on a $R \to P$ pour $n \to \infty$ uniformément par rapport à E.

Soit maintenant

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots \tag{4}$$

une suite de directions qui est dense dans le demiplan $y>0$; posons

$$D = \sum A''(\varkappa, \lambda, \delta, E, n), \tag{5}$$

où la sommation porte 1) sur tous les systèmes $\varkappa$, λ, δ de directions choisies dans (4) et telles que λ est située entre $\varkappa$ et δ, 2) sur toutes les valeurs $n=1, 2, 3, \dots$, 3) n étant donné, sur tous les ensembles normaux E d'ordre n. Donc D est dénombrable.

Soient maintenant $P \epsilon s - D$ et d_1, d_2 deux directions différentes. Choisissons, dans (4), trois directions $\varkappa$, λ, δ telles que d_1 soit située entre $\varkappa$ et λ, λ entre d_1 et δ, δ entre λ et d_2. Soit $n>0$ un nombre entier; on a évidemment

$$P \epsilon A(\varkappa, \lambda, \delta, [E(P, d_1)]_n, n),$$

donc (d'après (3) et (5))

$$P \epsilon A'(\varkappa, \lambda, \delta, [E(P, d_1)]_n, n).$$

D'après la remarque, il existe un point $R_n \epsilon \overrightarrow{Pd_2}$ tel que

$$f(R_n) \epsilon [E(P, d_1)]_n \tag{6}$$

et l'on a $R_n \to P$ pour $n \to \infty$. La suite $f(R_n)$ $(n=1, 2, \dots)$ possède au moins une valeur limite $\xi \epsilon E(P, d_2)$ et, d'après (6), on a aussi $\xi \epsilon E(P, d_1)$, d'où la relation (1).

Remarque I [6]. Montrons encore que l'on ne peut pas remplacer la relation (1) par la relation

$$E(P, d_1) \cdot E(P, d_2) \cdot E(P, d_3) \neq 0, \tag{7}$$

même s'il s'agit de trois directions d_1, d_2, d_3 fixées d'avance. En effet, soient R l'ensemble de tous les nombres réels et M_1 un ensemble *non dénombrable* de nombres réels jouissant des propriétés suivantes: 1) si $a \epsilon M_1$, $b \epsilon M_1$ et $a \neq b$, on a $\frac{1}{2}(a+b) \epsilon R - M_1$; on

[6]) L'idée principale des remarques I, II est empruntée à la note citée de M. Blumberg.

voit que l'ensemble $M_2 = R - M_1$ est alors dense dans R. 2) Chaque point de M_1 est point limite de M_1 du côté gauche et du côté droit [7]). Posons ensuite: $f(x, y) = 0$ pour $x \epsilon M_2$; $f(x, y) = -1$ pour $x \epsilon M_1$, $x - y \epsilon M_1$; $f(x, y) = -1$ pour $x \epsilon M_1$, $x - y \epsilon M_2$. Désignons par s la droite $y = 0$ et par d_1, d_2, d_3 les directions des demidroites suivantes: $y > 0$, $x = 0$; $y > 0$, $y = x$; $y > 0$, $y = -x$. Soit $x \epsilon M_1$, $P = (x, 0)$; on voit aisément que chacun des trois ensembles $E(P, d_1)$, $E(P, d_2)$, $E(P, d_3)$ est composé de deux nombres, à savoir de $-1, 1$, de $0, 1$ et de $0, -1$ respectivement. Donc la relation (7) est en défaut pour chaque point P d'un ensemble *non dénombrable* (à savoir pour $P = (x, 0)$, $x \epsilon M_1$).

Remarque II. Pour donner une application de notre théorème, soit $F(x)$ une fonction réelle et finie d'une variable réelle. Posons

$$f(x, x) = 0, \qquad f(x, y) = \frac{F(y) - F(x)}{y - x} \qquad \text{pour} \qquad y \neq x.$$

Soit s la droite $y = x$; soient d_1 et d_2 les directions des demidroites $y > 0, x = 0$ et $x < 0, y = 0$ respectivement. Pour $P = (x, x)$, les valeurs de $f(\xi, \eta)$ sur les demidroites $\overrightarrow{Pd_1}$ et $\overrightarrow{Pd_2}$ sont données respectivement par $\frac{1}{h}(F(x+h) - F(x))$ et par $\frac{1}{h}(F(x) - F(x-h))$ (pour $h > 0$). Donc: il existe un ensemble dénombrable D tel que l'on peut, à chaque $x \epsilon R - D$ [8]), faire correspondre deux suites $h_1, h_2, \ldots$; $k_1, k_2, \ldots$ telles que

$$h_n > 0,\ h_n \to 0; \quad k_n < 0,\ k_n \to 0; \quad \lim_{n=\infty} \frac{F(x+h_n) - F(x)}{h_n} = \lim_{n=\infty} \frac{F(x+k_n) - F(x)}{k_n}.$$

C'est un théorème un peu plus précis que le théorème bien connu d'après lequel on a pour $x \epsilon R - D$:

$$\limsup_{h=0+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \geqq \liminf_{h-0-} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

---

[7]) On peut prendre pour M_1 p. ex. l'ensemble de tous les nombres irrationnels de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 3^{-n}$, chaque a_n étant égal à 0 ou à 2.

[8]) R désigne l'ensemble de tous les nombres réels.