Vojtěch Jarník

Sur les approximations diophantiques simultannées

Bull. internat. de l'Académie des sciences de Bohême 1935, 8 p.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500750

Sur les approximations diophantiques simultanées.

Par

VOJTĚCH JARNÍK.

Présenté le 18 octobre 1935.

§ 1. Introduction; résultats.

Tous les nombres de cette note sont réels; s sera toujours un nombre entier et positif; $x_0, x_1, \ldots, x_s, q, p_1, p_2, \ldots, p_s$ seront toujours des nombres entiers tels que

$$q > 0, \quad \max_{i=1,2,\ldots,s} |x_i| > 0.$$

Au lieu de

$$\max_{i=1,2,\ldots,s} |x_i|$$

nous allons écrire plus brièvement $\operatorname{Max} |x_i|$.

Définition. *$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s$ étant donnés, désignons par $\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ la borne supérieure de tous les nombres α pour lesquels les inégalités*

$$|x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i \theta_i| < \frac{1}{\operatorname{Max} |x_i|^{s+\alpha}} \tag{1}$$

possèdent une infinité de solutions en $x_0, x_1, \ldots, x_s$; d'autre part, soit $\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ la borne supérieure de tous les nombres α pour lesquels les inégalités

$$\left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{1}{q^{1+\frac{1+\alpha}{s}}}$$

possèdent une infinité de solutions en $q, p_1, p_2, \ldots, p_s$.

On a $0 \leq \beta_i(\theta_1, \ldots, \theta_s) \leq \infty$ pour $i = 1, 2$ et évidemment $\beta_1(\theta_1) = \beta_2(\theta_1)$. Pour $s > 1$, on a — d'après M. Khintchine[1])

[1]) Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen, Palermo Rendiconti 50 (1926), p. 170—195, en particulier p. 189—195. Dans notre note, nous allons poser $a + \infty = \infty$, $\frac{a\infty + b}{c\infty + d} = \frac{a}{c}$ pour $c \neq 0$.

$$\beta_1(\theta_1, \ldots, \theta_s) \geqq \beta_2(\theta_1, \ldots, \theta_s) \geqq \frac{\beta_1(\theta_1, \ldots, \theta_s)}{(s-1)\,\beta_1(\theta_1, \ldots, \theta_s) + s^2}. \quad (2)$$

De (2), on tire aussitôt le

Théorème 1. *Soit $s > 1$; alors on a*

$$\beta_1(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) \leqq \frac{s^2\,\beta_2(\theta_1, \ldots, \theta_s)}{1-(s-1)\,\beta_2(\theta_1, \ldots, \theta_s)}$$

pour
$$0 \leqq \beta_2(\theta_1, \ldots, \theta_s) < \frac{1}{s-1}.$$

D'autre part, on a le

Théorème 2. *Soit* $0 \leqq \beta_2 \leqq \infty$, $s > 1$. *Alors il existe s nombres $\theta_1, \ldots, \theta_s$ tels que*

$$\beta_2(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \beta_2,$$

$$\beta_1(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \frac{s^2\,\beta_2}{1-(s-1)\,\beta_2} \qquad \textit{pour} \quad 0 \leqq \beta_2 < \frac{1}{s-1},$$

$$\beta_1(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \infty \qquad \textit{pour} \quad \frac{1}{s-1} \leqq \beta_2 \leqq \infty.$$

Démonstration. 1. Soit $0 \leqq \beta_2 < \frac{1}{s-1}$; posons $\beta_1 = \frac{s^2\,\beta_2}{1-(s-1)\,\beta_2}$. J'ai démontré[2]) qu'il existe s nombres $\theta_1, \ldots, \theta_s$ tels que

$$\beta_1(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \beta_1 = \frac{s^2\,\beta_2}{1-(s-1)\,\beta_2},$$

$$\beta_2(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \frac{\beta_1}{(s-1)\,\beta_1 + s^2} = \beta_2.$$

2. Soit $\frac{1}{s-1} \leqq \beta_2 < \infty$. J'ai démontré:[3]) il existe $s-1$ nombres $\theta_1, \ldots, \theta_{s-1}$ tels que les inégalités

$$\left|\theta_i - \frac{p_i}{q}\right| < \frac{1}{q^a} \quad (i = 1, 2, \ldots, s-1)$$

possèdent une infinité de solutions pour $a < 1 + \frac{1+\beta_2}{s}$ et n'en possèdent qu'un nombre fini pour $a > 1 + \frac{1+\beta_2}{s}$. En posant $\theta_s = \theta_{s-1}$, on a évidemment $\beta_2(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \beta_2$, $\beta_1(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \infty$.

[2]) Über einen Satz von A. Khintchine, à paraître dans „Prace matematyczno fizyczne", théorème 1.

[3]) Ein Existenzsatz aus der Theorie der diophantischen Approximationen, Prace matematyczno-fizyczne *39* (1932), p. 135—144; voir surtout „Satz 1", où l'on doit poser $s-1$ au lieu de s et

$$\alpha = 1 + \frac{1+\beta_2}{s}\left(\geqq \frac{s}{s-1}\right).$$

3. Le dernier cas $\beta_2 = \infty$ est banal; il suffit de poser $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_s = 1$.

Considérons les inégalités (2); si $\beta_2(\theta_1, \ldots, \theta_s) = 0$ (resp. $= \infty$), on a aussi $\beta_1(\theta_1, \ldots, \theta_s) = 0$ (resp. $= \infty$); dans cette note, nous nous proposons de démontrer que ces deux cas sont (pour $s > 1$) les seuls cas où la connaissance de $\beta_2(\theta_1, \ldots, \theta_s)$ suffit pour déterminer $\beta_1(\theta_1, \ldots, \theta_s)$; c'est-à-dire, nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème 3. *Soit* $s > 1$, $0 < \beta_2 < \infty$. *Alors il existe* $2s$ *nombres* $\theta_1, \ldots, \theta_s, \eta_1, \ldots, \eta_s$ *tels que*

$$\beta_2(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \beta_2(\eta_1, \ldots, \eta_s) = \beta_2,$$

$$\beta_1(\theta_1, \ldots, \theta_s) \neq \beta_1(\eta_1, \ldots, \eta_s).$$

Le théorème 3. est une conséquence immédiate du théorème 2. et de deux théorèmes suivants:

Théorème 4. *Soit* $s > 1$, $0 < \beta_2 < \frac{s+1}{s-1}$; *alors il existe* s *nombres* $\theta_1, \ldots, \theta_s$ *tels que*

$$\beta_2(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \beta_2, \ \beta_1(\theta_1, \ldots, \theta_s) \leq \frac{s(s+1)\beta_2}{s+1-(s-1)\beta_2}.$$

Théorème 5. *Soit* $s \geq 1$, $0 \leq \beta_2 < \infty$; *alors il existe* s *nombres* $\theta_1, \ldots, \theta_s$ *tels que*

$$\beta_2(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \beta_2, \ \beta_1(\theta_1, \ldots, \theta_s) < \infty.$$

Le théorème 3 est une conséquence immédiate des théorèmes 2, 4, 5; pour le voir, il suffit de remarquer que, pour

$$0 < \beta_2 < \frac{1}{s-1}, \quad \text{on a} \quad \frac{s^2\beta_2}{1-(s-1)\beta_2} > \frac{s(s+1)\beta_2}{s+1-(s-1)\beta_2}.$$

§ 2. Démonstration du théorème 4.

Considérons l'espace cartésien R_s à s (≥ 1) dimensions. Soit W l'ensemble de tous les points $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ tels que $0 \leq \theta_i < 1$ ($i = 1, 2, \ldots, s$). Soit $M \subset R_s$, $\alpha > 0$. Définissons le nombre $L(M; x^\alpha)$ comme il suit.[4] Soit $\rho > 0$ et soit $\mathfrak{S}$ une suite (finie ou infinie) de cubes[5] $W_1, W_2, \ldots$ dont les arêtes $d_1, d_2, \ldots,$ satisfont à l'inégalité $d_i < \rho$. Posons

$$\Lambda(\mathfrak{S}) = \sum_i d_i^\alpha;$$

la borne inférieure de tous les nombres $\Lambda(\mathfrak{S})$, correspondants à tous les

---

[4]) Cette définition revient à M. Hausdorff, Dimension und äusseres Mass, Mathem. Annalen 79 (1919), p. 157—179.

[5]) Par le mot „cube“ nous allons entendre toujours un cube ouvert dans R_s, dont les arêtes sont parallèles aux axes des coordonnées.

systèmes $\mathfrak{S}$ (de l'espèce décrite plus haut) qui *recouvrent l'ensemble M* sera désignée par $L_\varrho(M;\ x^\alpha)$; nous posons

$$L(M;\ x^\alpha) = \lim_{\varrho = 0+} L_\varrho(M;\ x^\alpha)\quad (0 \leqq L(M;\ x^\alpha) \leqq \infty).$$

Lemme. Soit $s > 1$, $0 < \lambda < \infty$, $\infty > \tau > s - \frac{\lambda}{s+\lambda+1}$; pour $\alpha > 0$ soit E_α l'ensemble de tous les points $(\theta_1, \ldots, \theta_s)$ de l'ensemble W, pour lesquelles les inégalités (1) possèdent une infinité de solutions. Alors on a $L(E_\lambda;\ x^\tau) = 0$.

Démonstration. Soit $E_\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_s)$ l'ensemble de tous les points $(\theta_1, \ldots, \theta_s)$, pour lesquels

$$0 \leqq \theta_i < 1\ (i = 1, 2, \ldots, s),\ \left| x_0 + \sum_{i=1}^{s} \theta_i x_i \right| < \frac{1}{\operatorname{Max} | x_i |^{s+\lambda}}. \tag{3}$$

E_λ est l'ensemble de tous les points qui sont contenus dans une infinité des ensembles $E_\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_s)$. Remarquons que, $x_1, \ldots, x_s$ étant donnés, il existe au plus $(2s+3) \operatorname{Max} | x_i |$ valeurs de x_0 telles que $E_\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_s) \neq 0$; car les relations (3) entraînent $| x_0 | < s \sum_{i=1}^{s} | x_i | + 1$.

$x_0, x_1, \ldots, x_s$ étant donnés, choisissons $r > 0$ de façon que $| x_r | = \operatorname{Max} | x_i |$ et considérons tous les points $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s)$ tels que $\eta_i = \frac{k_i}{| x_r |^{s+\lambda+1}}$ (k_i entier, $0 \leqq \eta_i \leqq 1$) pour $i \neq r$,

$$x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i \eta_i = 0; \tag{4}$$

le nombre de ces points est égal à

$$[1 + (| x_r |^{s+\lambda+1})]^{s-1} \leqq 2^{s-1} \operatorname{Max} | x_i |^{(s+\lambda+1)(s-1)})$$

$(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ étant un point quelconque de $E_\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_s)$, il existe évidemment parmi les points $(\eta_1, \ldots, \eta_s)$ considérés un point tel que

$$| \theta_i - \eta_i | < \frac{1}{| x_r |^{s+\lambda+1}} \quad \text{pour } i \neq r; \tag{5}$$

d'après (3), (4), (5) on trouve aussitôt

$$| \theta_r - \eta_r | < \frac{s}{| x_r |^{s+\lambda+1}}.$$

Donc: si l'on construit, autour de chaque point considéré $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s)$, un cube d'arête $2s\, | x_r |^{-s-\lambda-1}$, l'ensemble $E_\lambda(x_0, x_1, \ldots, x_s)$ sera recouvert par ces cubes (dont le nombre est $\leqq 2^{s-1} \operatorname{Max} | x_i |^{(s+\lambda+1)(s-1)}$).

Soit maintenant $\rho > 0$, $\varepsilon > 0$. Choisissons un nombre T tel que

$$\frac{2s}{T^{s+\lambda+1}} < \rho,\quad 2^{\tau+s-1} s^\tau (2s+3) \sum_{\substack{x_1, x_2, \ldots, x_s \\ \operatorname{Max} | x_i | > T}} \frac{1}{\operatorname{Max} | x_i |^{(s+\lambda+1)(\tau-s+1)-1}} < \varepsilon$$

(ceci est possible, car la dernière série converge, comme on le voit aisément). On a

$$E_\lambda \subset \sum_{\substack{x_0, x_1, \ldots, x_s \\ \operatorname{Max} |x_i| > T}} E_\lambda (x_0, x_1, \ldots, x_s);$$

d'après ce que nous avons dit sur la possibilité de recouvrir $E_\lambda (x_0, x_1, \ldots, x_s)$ par des cubes, on a

$$L_\varrho (E_\lambda; x^\tau) \leqq \sum_{\substack{x_1, \ldots, x_s \\ \operatorname{Max} |x_i| > T}} (2s+3) \operatorname{Max} |x_i| \,.$$

$$. \, 2^{s-1} \operatorname{Max} |x_i|^{(s+\lambda+1)(s-1)} \,.\, 2^\tau s^\tau (\operatorname{Max} |x_i|)^{-(s+\lambda+1)\tau} < \varepsilon.$$

Donc $L_\varrho (E_\lambda; x^\tau) = 0$ pour chaque $\rho > 0$, d'où $L (E_\lambda; x^\tau) = 0$.

Démonstration du théorème 4. Soit $s > 1$, $0 < \beta_2 < \frac{s+1}{s-1}$; soit $\sigma = \frac{s(s+1)\beta_2}{s+1-(s-1)\beta_2}$. Soit H l'ensemble de tous les points $(\theta_1, \ldots, \theta_s)$ de W pour lesquels $\beta_1 (\theta_1, \ldots, \theta_s) > \sigma$; donc

$$H \subset \sum_{n=1}^{\infty} E_{\sigma + \frac{1}{n}}. \tag{6}$$

On a

$$\frac{(s+1)s}{s+1+\beta_2} = s - \frac{\sigma}{s+\sigma+1} > s - \frac{\sigma + \frac{1}{n}}{s+\sigma+\frac{1}{n}+1},$$

donc, d'après notre lemme et d'après (6),

$$L\left(H;\ x^{\frac{(s+1)s}{s+1+\beta_2}}\right) = 0.$$

Soit K l'ensemble de tous les points $(\theta_1, \ldots, \theta_s)$ de W, pour lesquels $\beta_2 (\theta_1, \ldots, \theta_s) = \beta_2$; pour $z > 0$ soit K_z l'ensemble de tous les points $(\theta_1, \ldots, \theta_s)$ de W, pour lesquels les inégalités

$$|\theta_i - p_i/q| < q^{-1-\frac{1+z}{s}} \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

possèdent une infinité de solutions.

On a

$$K_{\beta_2} \subset K + \sum_{n=1}^{\infty} K_{\beta_2 + \frac{1}{n}};$$

j'ai démontré[6]) que

$$L\left(K_{\beta_2};\ x^{\frac{(s+1)s}{s+1+\beta_2}}\right) = \infty,\quad L\left(K_{\beta_2+\frac{1}{n}};\ x^{\frac{(s+1)s}{s+1+\beta_2}}\right) = 0;$$

---

[6]) Über die simultanen diophantischen Approximationen, Math. Zeitschr. *33* (1931), p. 505—543; voir surtout „Satz 1". Dans la notation de cet article, on doit poser $K_z = M(x^{-\alpha}, s)$, où $\alpha = 1 + \frac{1+z}{s}$.

donc

$$L\left(K;\ x^{\frac{(s+1)s}{s+1+\beta_2}}\right) = \infty.$$

On a donc $K - H \neq 0$, ce qui achève la démonstration.

§ 3. Démonstration du théorème 5.

Le théorème 5 est vrai pour $s = 1$; en effet, on peut aisément construir une fraction continue régulière définissant un nombre θ_1 tel que $\beta_2(\theta_1) = \beta_2$, d'où $\beta_1(\theta_1) = \beta_2 < \infty$. Supposons donc $s > 1$ et supposons que le théorème 5 soit vrai si l'on y pose $s - 1$ au lieu de s ; il faut montrer que le théorème 5 est vrai pour la valeur s. Ceci est banal, d'après le théorème 2, si $0 \leqq \beta_2 < \frac{1}{s-1}$; soit donc $\frac{1}{s-1} \leqq \beta_2 < \infty$. En posant

$$1 + \frac{1 + \beta_2'}{s - 1} = 1 + \frac{1 + \beta_2}{s} = \gamma_2, \tag{7}$$

on a $0 \leqq \beta_2' < \infty$, $\frac{s}{s-1} \leqq \gamma_2 < \infty$; il existe alors $s - 1$ nombres $\theta_1, \ldots, \theta_{s-1}$ tels que $\beta_2(\theta_1, \ldots, \theta_{s-1}) = \beta_2'$, $\beta_1(\theta_1, \ldots, \theta_{s-1}) = \delta < \infty$.

Soit $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots, \varepsilon_n \to 0$. Alors il existe une suite de systèmes de nombres entiers

$$q_n,\ p_{1,n},\ p_{2,n},\ \ldots,\ p_{s-1,n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

telle que $q_n \to \infty$,

$$q_n > 1, \quad \left| \theta_i - \frac{p_{i,n}}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^{\gamma_2 - \varepsilon_n}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s-1;\ n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Soit $\lambda = \gamma_2(s + 1) + 2$; $\zeta = \operatorname{Max}(|\theta_1|, \ldots, |\theta_{s-1}|, 1)$. Par $c_1, c_2, \ldots$ nous allons désigner des nombres positifs, ne dépendant que de $s, \beta_2, \theta_1, \ldots, \theta_{s-1}$. Pour $0 < a < b$ (a, b entiers) posons

$$Z = \sum \frac{2(2s+3)\zeta}{|x_s| \operatorname{Max} |x_i|^{s+\lambda-1}},$$

où la sommation porte sur toutes les valeurs $x_1, \ldots, x_s$ telles que $x_s \neq 0$, $a \leqq \operatorname{Max} |x_i| < b$. On constate aisément que

$$Z < c_2 \sum_{x=a}^{b-1} \frac{\log(x+1)}{x^{\lambda+1}} < c_3\, a^{-\lambda+\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Pour $a > 0$ (a entier), on a $(2s + 3)\, a\, \zeta\, (2a + 1)^s < c_4\, a^{s+1}$. Posons $c_5 = c_4 + 1$ et choisissons deux suites $0 < r_1 < r_2 < \ldots$, $0 < k_1 < k_2 < \ldots$ de nombres entiers, jouissantes des propriétés suivantes: les r_n sont choisis parmi les q_n,

$$k_1^{\frac{1}{2}} > c_3, \quad r_1 < k_1^{s+1+\frac{1}{\gamma_2}} \tag{10}$$

$$k_n > (4\, c_5\, r_{n-1}^{\gamma_s})^{2\gamma_s}, \quad k_n^{s+1+\frac{1}{2\gamma_s}} < r_n < k_n^{s+1+\frac{1}{\gamma_s}} \text{ pour } n = 2, 3, \ldots \tag{11}$$

$x_0, x_1, \ldots, x_s$ étant donnés ($x_s \neq 0$), désignons par $L(x_0, x_1, \ldots, x_s)$ l'ensemble de tous les nombres θ_s tels que

$$0 < \theta_s < 1, \quad \left| x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i\, \theta_i \right| < \frac{1}{\operatorname{Max} |x_i|^{s+\lambda}}.$$

$x_1, \ldots, x_s$ étant donnés, il existe au plus $(2s+3)\,\zeta \operatorname{Max} |x_i|$ nombres x_0 tels que $L(x_0, x_1, \ldots, x_s) \neq 0$. Posons

$$M_n = \sum_{\substack{x_0, x_1, \ldots, x_s \\ k_n \leqq \operatorname{Max} |x_i| < k_{n+1} \\ x_s \neq 0}} L(x_0, x_1, \ldots, x_s).$$

M_n peut être couvert évidemment par un nombre fini d'intervalles ouverts, dont le nombre ne surpasse pas le nombre

$$\sum_{\substack{x_1, \ldots, x_s \\ k_n \leqq \operatorname{Max} |x_i| < k_{n+1}}} (2s+3)\,\zeta \operatorname{Max} |x_i| \leqq \zeta\,(2s+3)\, k_{n+1}\,(2\,k_{n+1} + 1)^s < c_4\, k_{n+1}^{s+1}$$

et dont les longueurs ont une somme ne dépassant pas le nombre (voir (9), (10))

$$\sum_{\substack{x_1, \ldots, x_s \\ k_n \leqq \operatorname{Max} |x_i| < k_{n+1} \\ |x_s| \neq 0}} (2s+3)\,\zeta \operatorname{Max} |x_i| \cdot \frac{2}{|x_s| \operatorname{Max} |x_i|^{s+\lambda}} < \frac{c_3}{k_n^{\lambda - \frac{1}{2}}} < \frac{1}{k_n^{\lambda - 1}}.$$

Il existe maintenant une suite des nombres entiers $z_1, z_2, \ldots$ jouissante des propriétés suivantes: en posant $S_n = \left\langle \frac{z_n}{r_n} - \frac{1}{r_n^{\gamma_s}}, \frac{z_n}{r_n} + \frac{1}{r_n^{\gamma_s}} \right\rangle$[7], on a $(0, 1) \supset S_1 \supset S_2 \supset \ldots,\ S_n\, M_{n-1} = 0$ ($n = 2, 3, \ldots$).

En effet, posons $z_1 = 1$, d'où $S_1 \subset (0, 1)$. z_{m-1} étant choisi, considérons l'ensemble $G = S_{m-1} - M_{m-1}$. On a (d'après (11)) $r_{m-1}^{-\gamma_s} > k_{m-1}^{-\lambda+1}$; donc la mesure de G est au moins égale à $r_{m-1}^{-\gamma_s}$; l'ensemble G est une somme d'intervalles et (peut être) de points isolés, dont le nombre est $\leqq c_4\, k_m^{s+1} + 1 \leqq c_5\, k_m^{s+1}$; il existe donc un intervalle $H \subset G$ de longueur $r_{m-1}^{-\gamma_s}\, c_5^{-1}\, k_m^{-s-1} > 4\, r_m^{-1}$ (voir (11)); il existe donc un nombre entier z_m tel que $S_m \subset H$, d'où $S_m \subset S_{m-1}$, $S_m\, M_{m-1} = 0$; l'existence de la suite $z_1, z_2, \ldots,$ est démontrée.

Il existe un point θ_s qui est contenu dans tous les S_n ($n = 1, 2, \ldots$); on a donc $\left| \theta_s - \frac{z_n}{r_n} \right| \leqq \frac{1}{r_n^{\gamma_s}}$ pour $n = 1, 2, \ldots$; en remarquant que les r_n sont choisis parmi les q_n, on a donc [voir (7), (8)] $\beta_2(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s) = \beta_2$.

---

[7]) (a, b) est un intervalle ouvert, $\langle a, b \rangle$ un intervalle fermé.

Posons $\mu = \text{Max}\ (\lambda,\ \delta)$ et soit

$$| x_0 + \sum_{i=1}^{s} x_i\, \theta_i | < \frac{1}{\text{Max}\, | x_i |^{s+\mu}}\,; \tag{12}$$

si $x_s \neq 0$, on a nécessairement $\text{Max}\ | x_i | < k_1$ (θ_s n'appartenant à aucun $L\ (x_0, x_1, \ldots, x_s)$ avec $\text{Max}\ | x_i | \geqq k_1$) ; d'autre part, l'inégalité (12) n'a qu'un nombre fini de solutions avec $x_s = 0$, car $s + \mu > (s - 1) + \delta$. Donc $\beta_1\ (\theta_1,\ \theta_2, \ldots, \theta_s) \leqq \mu < \infty$.