Vojtěch Jarník

Über die stetigen Abbildungen der Strecke

Monatshefte für Math. u. Phys. 41 (1934), pp. 408--423

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/500743

Über die stetigen Abbildungen der Strecke.

Von **Vojtěch Jarník** in Prag.

§ 1. Einleitung; Resultate.

Es sei k ganz, $k \geqq 1$. R^k sei der k-dimensionale cartesische Raum. Die Entfernung zweier Punkte $P=(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $Q=(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ aus R^k werde immer mit $\sigma(P, Q)$ bezeichnet, also $\sigma(P,Q)=(\sum_{i=1}^{k}(x_i-y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$. Mit C^k bezeichnen wir die Menge aller Funktionen f einer reellen Veränderlichen t, die folgende Eigenschaften besitzen:

1. $f(t)$ ist definiert im Intervall $[0, 1]$[1]).

2. Für jedes $t \in [0, 1]$ ist $f(t)$ ein Punkt von R^k, d.h. $f(t)=(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_k(t))$, wo die $f_i(t)$ reelle Funktionen von t (für $t \in [0, 1]$) sind.

3. f ist stetig (d.h. die reellen Funktionen $f_i(t)$ sind stetig in $[0, 1]$).

Definieren wir für $f \in C^k$, $g \in C^k$ die Entfernung $\rho(f, g)$ durch

$$\rho(f,g)=\operatorname*{Max}_{0 \leqq t \leqq 1} \sigma(f(t), g(t)),$$

so wird C^k offenbar zu einem vollständigen metrischen Raum[2]).

Wir werden einige Sätze beweisen, welche darüber berichten, welchen Bedingungen die „meisten“ Funktionen von C^k (genau gesagt: alle Funktionen von C^k, mit Ausnahme einer Funktionenmenge erster Kategorie) genügen.

---

[1]) $[a, b]$ bedeutet stets ein abgeschlossenes Intervall.

[2]) Also ist C^k in sich von zweiter Kategorie. Alle Relativbegriffe beziehen sich im folgenden auf den Raum C^k bzw. R^k. $M \subset C^k$ heißt eine Residualmenge, wenn $C^k - M$ von erster Kategorie ist. Ich benutze oft — ohne sie immer ausdrücklich zu erwähnen — die triviale Tatsache, daß der Durchschnitt von höchstens abzählbarvielen Residualmengen wieder eine Residualmenge ist. Mit dem Zeichen ρ bzw. σ bezeichne ich auch die Entfernung eines Punktes von einer Punktmenge in C^k bzw. R^k usw. $\delta(A)$ ist der Durchmesser der Punktmenge A. Für $f \in C^k$, $A \subset [0,1]$ ist $f(A)$ die Menge aller Punkte $f(t) \in R^k$ mit $t \in A$; statt $f([a,b])$ schreiben wir auch einfacher $f[a,b]$. Die Menge aller Punkte Q eines metrischen Raumes, deren Entfernung von einem Punkte P kleiner als eine positive Zahl r ist, heißt eine Kugel dieses Raumes (mit dem Mittelpunkt P und dem Radius r). Kugeln des Raumes R^2 heißen auch Kreise.

Satz 1. *Für jedes ganze* $k \geqq 1$ *gibt es in* C^k *eine Residualmenge* S^k, *so daß jede Funktion* $f \in S^k$ *folgende Eigenschaft besitzt:*

1. Für $k=1$: *Ist* $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$, *so ist* $\underset{\alpha \leqq t \leqq \beta}{\mathit{Min}} f(t) < \underset{\alpha \leqq t \leqq \beta}{\mathit{Max}} f(t)$ *und zu jedem* y *mit*

$$\underset{\alpha \leqq t \leqq \beta}{\mathit{Min}} f(t) < y < \underset{\alpha \leqq t \leqq \beta}{\mathit{Max}} f(t)$$

gibt es unendlichviele Werte von t, *welche den Bedingungen*

$$\alpha \leqq t \leqq \beta, \quad f(t)=y$$

genügen.

2. Für $k=2$: α) *Ist* $t_i \in [0,1]$ *für* $i=1,2,3$, $t_1 \neq t_2 \neq t_3 \neq t_1$, *so ist nicht* $f(t_1)=f(t_2)=f(t_3)$; β) *Ist* $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$, *so gibt es zwei Werte* t_1, t_2 *mit* $\alpha \leqq t_1 < t_2 \leqq \beta$, $f(t_1)=f(t_2)$.

3. Für $k>2$: *Aus* $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq 1$ *folgt* $f(t_1) \neq f(t_2)$ [3]).

Wir sehen, daß die für $k>2$ vorhandene Schlichtheit von f für $k=2$ und noch mehr für $k=1$ zerstört wird. Der Satz 1 handelt von den *Funktionen* f; die beiden folgenden Sätze berichten dagegen über die durch die Funktionen vermittelten *Bilder* f $[0,1]$.

Satz 2. *Für jedes ganze* $k \geqq 1$ *gibt es in* C^k *eine Residualmenge* V^k, *so daß für jedes* $f \in V^k$ *die Menge* f $[0,1]$ *eine Kurve ist* [4]).

Man weiß seit Peano, daß es für $k \geqq 2$ solche $f \in C^k$ gibt, für welche $f[0,1]$ eine k-dimensionale Menge ist; nach dem Satz 2 sind aber solche Funktionen als Ausnahmen zu betrachten. Wie die Kurve $f[0,1]$ für die „meisten" Funktionen $f \in C^k$ aussieht, darüber berichtet der folgende

Satz 3. *Für jedes ganze* $k \geqq 1$ *gibt es in* C^k *eine Residualmenge* W^k, *so daß jede Funktion* $f \in W^k$ *folgende Eigenschaft besitzt:*

1. Für $k \neq 2$: $f[0,1]$ *ist ein Bogen* [5]).

2. Für $k=2$: *Ist* $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$, *so ist jeder Punkt der Kurve* $f[\alpha,\beta]$ *ein irregulärer Punkt dieser Kurve* $f[\alpha,\beta]$ [6]).

Für $k \neq 2$ bekommt man also die topologisch einfachste Kurve, für $k=2$ dagegen recht komplizierte Kurven.

Wir bemerken gleich, daß die Sätze 2 und 3 für $k \neq 2$ aus dem Satz 1 folgen. Denn für $k=1$, $f \in S^1$ ist $f[0,1]$ mehrpunktig, also eine

---

[3]) Wenn aus $a \leqq t_1 < t_2 < b$ folgt $f(t_1) \neq f(t_2)$, sagen wir auch, daß f in $[a,b]$ schlicht ist.

[4]) Eine Kurve ist ein eindimensionales Kontinuum.

[5]) Ein Bogen ist ein topologisches Bild der Strecke.

[6]) Ein Punkt P heißt ein irregulärer Punkt der Kurve K, wenn es ein $\eta > 0$ gibt mit folgender Eigenschaft: Ist U eine Umgebung von P mit $\delta(U) < \eta$, so ist der Durchschnitt der Kurve K mit der Begrenzung von U eine unendliche Menge.

Strecke, also ein Bogen, also eine Kurve. Für $k > 2$, $f \epsilon S^k$ ist f schlicht in $[0,1]$, also ist $f[0,1]$ ein Bogen, also eine Kurve. Ebenso ist die Behauptung β des Satzes 1 für $k=2$ eine Folge des Satzes 3. Denn für $f \epsilon W^2$, $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$ ist nach dem Satz 3 die Menge $f[\alpha, \beta]$ kein Bogen, also ist f nicht schlicht in $[\alpha, \beta]$. Wir sollen also noch beweisen: den Satz 1 für $k=1$ und $k > 2$ und die Behauptung α) des Satzes 1 für $k=2$, endlich die Sätze 2 und 3 für $k=2$. Darunter ist nur der Beweis des Satzes 1 für $k=1$ und hauptächlich der Beweis des Satzes 3 für $k=2$ etwas schwieriger; die übrigen Beweise sind fast trivial.

§ 2. Beweis des Satzes 1 für $k=1$.

Hilfssatz 1. *Es sei k ganz, $k \geqq 1$. Es sei H^k die Menge derjenigen $f \epsilon C^k$, welche in mindestens einem Teilintervalle des Intervalls $[0,1]$ konstant sind. Behauptung: H^k ist von erster Kategorie.*

Beweis. Es sei $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_2, \beta_2]$, ... die Folge aller Teilintervalle des Intervalls $[0, 1]$ mit rationalen Endpunkten. Es sei H^k_n die Menge aller in $[\alpha_n, \beta_n]$ konstanten Funktionen $f \epsilon C^k$. Wegen $H^k = \sum_{n=1}^{\infty} H^k_n$ genügt es zu zeigen, daß die H^k_n nirgendsdicht sind. Es sei also K eine Kugel des Raumes C^k mit dem Mittelpunkt f und dem Radius r; wir sollen die Existenz einer Kugel $K' \subset K \,.\, (C^k - H^k_n)$ nachweisen. Es gibt offenbar eine in $[\alpha_n, \beta_n]$ nicht konstante Funktion $g \epsilon C^k$ mit $\rho\,(f, g) < \frac{r}{2}$; also ist $\delta_0 = \delta\,(g\,[\alpha_n, \beta_n]) > 0$. Es sei K' die Kugel des Raumes C^k mit dem Mittelpunkt g und dem Radius Min $\left(\frac{r}{2}, \frac{\delta_0}{2}\right)$. Aus $\varphi \epsilon K'$ folgt also erstens $\varphi \epsilon K$, zweitens

$$\delta\,(\varphi\,[\alpha_n, \beta_n]) \geqq \delta\,(g\,[\alpha_n, \beta_n]) - 2\,\rho\,(g, \varphi) > 0,$$

also $\varphi \epsilon C^k - H^k_n$; also ist $K' \subset K \,.\, (C^k - H^k_n)$, w. z. b. w.

Wir zeigen nun, daß der Satz 1 für $k=1$ aus folgendem Hilfssatz folgt:

Hilfssatz 2. *Es sei $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$; $A\,(\alpha, \beta)$ sei die Menge derjenigen $f \epsilon C^1$, welche folgende Eigenschaften haben: Ist*

$$\mathop{Min}_{\alpha \leqq t \leqq \beta} f(t) < y < \mathop{Max}_{\alpha \leqq t \leqq \beta} f(t),$$

so gibt es unendlichviele Werte $t \epsilon [\alpha, \beta]$, für welche $f(t) = y$ ist. Behauptung: $A\,(\alpha, \beta)$ ist eine Residualmenge.

Gesetzt, der Hilfssatz 2 sei wahr. Es sei $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_2, \beta_2]$, ... die Folge aller Teilintervalle des Intervalls $[0, 1]$ mit rationalen Endpunkten. Wir setzen

$$S^1 = (C^1 - H^1) . \prod_{n=1}^{\infty} A(\alpha_n, \beta_n);$$

dann ist S^1 eine Residualmenge. Es sei $f \in S^1$, $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$. Wegen $f \in C^1 - H^1$ ist $\operatorname*{Min}_{\alpha \leqq t \leqq \beta} f(t) < \operatorname*{Max}_{\alpha \leqq t \leqq \beta} f(t)$. Ist weiter

$$\operatorname*{Min}_{\alpha \leqq t \leqq \beta} f(t) < y < \operatorname*{Max}_{\alpha \leqq t \leqq \beta} f(t),$$

so kann man ein n so finden, daß

$$\alpha < \alpha_n < \beta_n < \beta, \ \operatorname*{Min}_{\alpha_n \leqq t \leqq \beta_n} f(t) < y < \operatorname*{Max}_{\alpha_n \leqq t \leqq \beta_n} f(t);$$

wegen $f \in A(\alpha_n, \beta_n)$ gibt es unendlichviele Werte $t \in [\alpha_n, \beta_n] \subset [\alpha, \beta]$ mit $f(t) = y$. Also: jedes $f \in S^1$ besitzt die im Satz 1 für $k = 1$ geforderten Eigenschaften, w. z. b. w.

Beweis des Hilfssatzes 2. Es sei $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$, n ganz, $n > 1$. Es sei E_n die Menge derjenigen $f \in C^1$, die folgende Eigenschaft haben: es gibt mindestens einen Wert y mit

$$\operatorname*{Min}_{\alpha \leqq t \leqq \beta} f(t) + \frac{1}{n} < y < \operatorname*{Max}_{\alpha \leqq t \leqq \beta} f(t) - \frac{1}{n},$$

welchen die Funktion f im Intervall $[\alpha, \beta]$ weniger als n-mal annimmt. Offenbar ist $\sum_{n=2}^{\infty} E_n = C^1 - A(\alpha, \beta)$; es genügt also zu zeigen, daß die E_n nirgendsdicht sind. Es sei also n ganz, $n > 1$; es sei K eine Kugel des Raumes C^1; wir sollen die Existenz einer Kugel $K' \subset K . (C^1 - E_n)$ nachweisen. Es sei f der Mittelpunkt und r der Radius von K. Es gibt offenbar eine stückweise lineare Funktion $g \in C^1$ mit $\rho(g, f) < \frac{r}{2}$; dann gibt es ein $p > 0$, so daß aus $0 \leqq t < t' \leqq 1$ folgt

$$\left| \frac{g(t') - g(t)}{t' - t} \right| < p.$$

Es sei $\lambda = \operatorname{Min}\left(\frac{1}{2n}, \frac{r}{4}\right)$; es sei $m > 0$ eine gerade Zahl, die so groß ist, daß

$$\frac{n+2}{m} < \beta - \alpha, \ \frac{n+2}{m} p < \frac{\lambda}{4} \tag{1}$$

ist. Wir definieren eine Funktion $h \in C^1$ folgendermaßen: für $\frac{s}{m} \leqq t \leqq \frac{s+1}{m}$ sei $h(t)$ linear (für $0 \leqq s \leqq m-1$); für gerades s sei $h\left(\frac{s}{m}\right) = 0$, für ungerades s sei $h\left(\frac{s}{m}\right) = \lambda$ $(0 \leqq s \leqq m)$.

Es sei K' die Kugel des Raumes C^1 mit dem Mittelpunkt $g + h$ und dem Radius $\frac{\lambda}{4}$; dann ist offenbar $K' \subset K$. Wir sollen noch

$K' \subset C_1 - E_n$ nachweisen. Es sei also $\varphi \in K'$, also

(2) $$\varphi(t) = g(t) + h(t) + \xi(t), \text{ wo } \xi \in C^1, \max_{0 \leqq t \leqq 1} |\xi(t)| < \frac{\lambda}{4}.$$

Wir sollen zeigen, daß $\varphi \in C_1 - E_n$. Mit anderen Worten: es sei

(3) $$\min_{\alpha \leqq t \leqq \beta} \varphi(t) + \frac{1}{n} < y < \max_{\alpha \leqq t \leqq \beta} \varphi(t) - \frac{1}{n};$$

wir sollen zeigen, daß dann die Funktion $\varphi(t)$ den Wert y im Intervall $[\alpha, \beta]$ mindestens n-mal annimmt. Aus (2), (3) folgt

$$\min_{\alpha \leqq t \leqq \beta} g(t) - \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{n} - \frac{\lambda}{2} < y - \frac{\lambda}{2} < \max_{\alpha \leqq t \leqq \beta} g(t) + \lambda + \frac{\lambda}{4} - \frac{1}{n} - \frac{\lambda}{2},$$

also (wegen $\lambda \leqq \frac{1}{2n}$)

$$\min_{\alpha \leqq t \leqq \beta} g(t) < y - \frac{\lambda}{2} < \max_{\alpha \leqq t \leqq \beta} g(t).$$

Es gibt also ein t_0, so daß

(4) $$\alpha \leqq t_0 \leqq \beta, \; g(t_0) = y - \frac{\lambda}{2}.$$

Wegen (1) gibt es ein Intervall $[\tau_1, \tau_2]$, so daß

$$\tau_2 - \tau_1 = \frac{n+2}{m}, \; \alpha \leqq \tau_1 \leqq t_0 \leqq \tau_2 \leqq \beta.$$

Es gibt dann ein gerades s, so daß die $n+1$ Punkte $\frac{s}{m}, \frac{s+1}{m}, \ldots, \frac{s+n}{m}$ in $[\tau_1, \tau_2]$ liegen. Wird $\frac{s+i}{m} = u_i$ gesetzt $(i = 0, 1, \ldots, n)$, so gilt nach der Definition von h: für gerades i ist nach (2), (1), (4)

$$\varphi(u_i) = g(u_i) + \xi(u_i) < g(t_0) + p \cdot |u_i - t_0| + \frac{\lambda}{4} \leqq g(t_0) +$$
$$+ \frac{n+2}{m} p + \frac{\lambda}{4} < g(t_0) + \frac{\lambda}{2} = y;$$

für ungerades i ist dagegen nach (2), (1), (4)

$$\varphi(u_i) = g(u_i) + \lambda + \xi(u_i) > g(t_0) - p \cdot |u_i - t_0| + \lambda - \frac{\lambda}{4} \geqq$$
$$\geqq g(t_0) - \frac{n+2}{m} p + \frac{3\lambda}{4} > g(t_0) + \frac{\lambda}{2} = y.$$

Also: In jedem der n offenen Intervalle (u_i, u_{i+1}) $(0 \leqq i \leqq n-1)$ nimmt die Funktion $\varphi(t)$ den Wert y mindestens einmal an, w. z. b. w.

Zusatz. Der Satz 1 für $k=1$ besagt insbesondere (für $\alpha = 0, \beta = 1$) daß jede Funktion f der Residualmenge S^1 im Intervall $[0, 1]$ jeden ihren Wert, den maximalen und den minimalen Wert ausgenommen, unendlich oft annimmt. Für diese beiden extremen Werte gilt im Gegenteil folgender

Satz 4. *Es sei U die Menge derjenigen Funktionen $f \in C^1$, welche den Wert $\underset{0 \leqq t \leqq 1}{\mathrm{Max}} f(t)$ mehr als einmal im Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ annehmen. Behauptung: U ist von erster Kategorie.* (Derselbe Satz gilt freilich auch mit Min statt Max.)

Beweis. Für ganzes $n > 1$ sei U_n die Menge derjenigen $f \in C^1$, welche folgende Eigenschaft besitzen: Es gibt zwei Werte t_1, t_2 mit $0 \leqq t_1 \leqq 1$, $0 \leqq t_2 \leqq 1$, $|t_2 - t_1| > \frac{1}{n}$, $f(t_1) = f(t_2) = \underset{0 \leqq t \leqq 1}{\mathrm{Max}} f(t)$.

Wegen $U = \sum\limits_{n=2}^{\infty} U_n$ genügt es zu zeigen, daß die U_n nirgendsdicht sind. Es sei also n ganz, $n > 1$; K sei eine Kugel des Raumes C^1 mit dem Mittelpunkt f und dem Radius r. Wir sollen die Existenz einer Kugel $K' \subset K \cdot (C^1 - U_n)$ nachweisen. Es gibt ein t_0 mit $0 \leqq t_0 \leqq 1$, $f(t_0) = \underset{0 \leqq t \leqq 1}{\mathrm{Max}} f(t)$. Wir definieren $h \in C^1$ folgendermaßen: für $|t - t_0| \geqq \frac{1}{2n}$ sei $h(t) = 0$; für $t = t_0$ sei $h(t_0) = \frac{r}{2}$; für $t_0 - \frac{1}{2n} \leqq t \leqq t_0$ und für $t_0 \leqq t \leqq t_0 + \frac{1}{2n}$ sei $h(t)$ linear [7]). Es sei K' die Kugel mit dem Mittelpunkt $f + h$ und dem Radius $\frac{r}{4}$; also $K' \subset K$. Wir sollen noch $K' \subset C^1 - U_n$ nachweisen. Es sei also $\varphi \in K'$, also

$$\varphi(t) = f(t) + h(t) + \xi(t), \text{ wo } \xi \in C^1, \underset{0 \leqq t \leqq 1}{\mathrm{Max}} |\xi(t)| < \frac{r}{4}.$$

Es ist $\varphi(t_0) = f(t_0) + \frac{r}{2} + \xi(t_0) > f(t_0) + \frac{r}{4}$; für $|t - t_0| \geqq \frac{1}{2n}$, $0 \leqq t \leqq 1$ ist dagegen $\varphi(t) = f(t) + \xi(t) < f(t_0) + \frac{r}{4} < \varphi(t_0)$; ist also $0 \leqq \tau \leqq 1$, $\varphi(\tau) = \underset{0 \leqq t \leqq 1}{\mathrm{Max}} \varphi(t)$, so muß $t_0 - \frac{1}{2n} < \tau < t_0 + \frac{1}{2n}$ sein; also ist $\varphi \in C^1 - U_n$, w. z. b. w.

§ 3. Beweis des Satzes 1 für $k > 2$.

Es sei k ganz, $k > 2$. Für ganzes $n > 1$ sei C_n^k die Menge derjenigen $f \in C^k$, die folgende Eigenschaft haben: Ist $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq 1$, $t_2 - t_1 \geqq n^{-1}$, so ist $f(t_1) \neq f(t_2)$. Wir setzen $S^k = \prod\limits_{n=2}^{\infty} C_n^k$; offenbar ist

[7]) Dadurch ist freilich $h(t)$ für alle reellen t definiert; wir betrachten aber weiter die Funktion h als eine Funktion in $[0, 1]$.

S^k genau die Menge aller in $[0,1]$ schlichten Funktionen $f \in C^k$. Wir sollen zeigen, daß S^k eine Residualmenge ist; dazu genügt es zu zeigen, daß $C^k - C^k_n$ nirgendsdicht ist. Es sei also K eine Kugel des Raumes C^k; wir sollen die Existenz einer Kugel $K' \subset K\, C^k_n$ nachweisen. Es sei f der Mittelpunkt und r der Radius von K. Wir wählen eine ganze Zahl $m > 0$ so, daß aus $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq 1$, $t_2 - t_1 \leqq m^{-1}$ folgt $\sigma\,(f(t_1), f(t_2)) < \frac{r}{10}$. Wir konstruieren dann eine Funktion $g = g(t) = (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_k(t))$ folgendermaßen: wir setzen $g(0) = f(0)$ und konstruieren dann $g(t)$ sukzessive in den Intervallen $\left[\frac{s}{m}, \frac{s+1}{m}\right]$ $(s = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$ so, daß folgendes gilt: 1. $g_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ ist linear und nicht konstant in $\left[\frac{s}{m}, \frac{s+1}{m}\right]$; 2. $\sigma\left(f\left(\frac{s+1}{m}\right), g\left(\frac{s+1}{m}\right)\right) < \frac{r}{10}$; 3. die Menge $g\left[\frac{s}{m}, \frac{s+1}{m}\right]$ hat mit dem Streckenzug $g\left[0, \frac{s}{m}\right]$ außer dem Punkte $g\left(\frac{s}{m}\right)$ keinen gemeinsamen Punkt (wegen $k > 2$ ist dies offenbar möglich). Dann ist $g \in C^k$, g schlicht in $[0,1]$. Es sei $0 \leqq t \leqq 1$, also $\frac{s}{m} \leqq t \leqq \frac{s+1}{m}$ für ein geeignetes ganzes s $(0 \leqq s \leqq m-1)$. Wegen der Linearität von $g_i(t)$ ist

$$\sigma\left(g\left(\frac{s}{m}\right), g(t)\right) \leqq \sigma\left(g\left(\frac{s}{m}\right), g\left(\frac{s+1}{m}\right)\right) \leqq \sigma\left(g\left(\frac{s}{m}\right), f\left(\frac{s}{m}\right)\right) + \\ + \sigma\left(f\left(\frac{s}{m}\right), f\left(\frac{s+1}{m}\right)\right) + \sigma\left(f\left(\frac{s+1}{m}\right), g\left(\frac{s+1}{m}\right)\right) < \frac{3r}{10},$$

also

$$\sigma(g(t), f(t)) \leqq \sigma\left(g(t), g\left(\frac{s}{m}\right)\right) + \sigma\left(g\left(\frac{s}{m}\right), f\left(\frac{s}{m}\right)\right) + \\ + \sigma\left(f\left(\frac{s}{m}\right), f(t)\right) < \frac{5r}{10},$$

also

$$\rho\,(f, g) < \frac{r}{2}.$$

Da g schlicht ist, so ist

$$z = \operatorname{Min} \sigma\,(g(t_1), g(t_2)) > 0,$$

wo sich das Zeichen Min auf den Bereich $0 \leqq t_1 \leqq 1$, $0 \leqq t_2 \leqq 1$, $|t_2 - t_1| \geqq \frac{1}{n}$ bezieht. Es sei K' die Kugel mit dem Mittelpunkt g und dem Radius $\frac{1}{2}$ Min (r, z), also $K' \subset K$. Für $h \in K'$, $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq 1$, $t_2 - t_1 \geqq n^{-1}$ ist dann nach der Dreiecksungleichung $\sigma\,(h(t_1), h(t_2)) > > z - 2\frac{z}{2} = 0$, also $h(t_1) \neq h(t_2)$; also ist $K' \subset K\, C^k_n$, w. z. b. w.

§ 4. Beweis der Behauptung α des Satzes 1 für $k=2$.

Eine Funktion $g \in C^2$ (wo $g(t)=(g_1(t),\ g_2(t))$ ist) heiße eine *Streckenfunktion,* wenn folgendes gilt:

1. Es gibt endlichviele Werte $0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_r=1$, so daß die beiden Funktionen $g_1(t)$, $g_2(t)$ in jedem Intervall $[t_i,\ t_{i+1}]$ $(i=0, 1, \ldots, r-1)$ linear und nichtkonstant sind.

2. Je zwei Strecken $g[t_i,\ t_{i+1}]$, $g[t_k,\ t_{k+1}]$ $(0\leqq i<k\leqq r-1)$ haben höchstens einen gemeinsamen Punkt.

3. Wenn $0\leqq\tau_1<\tau_2<\tau_3\leqq 1$ ist, so ist *nicht* $g(\tau_1)=g(\tau_2)=g(\tau_3)$.

Hilfssatz 3. *Ist $f \in C^2$, $\eta>0$, so gibt es eine Streckenfunktion g mit $\rho(f, g)<\eta$.*

Beweis. Wir wählen ein ganzes $m>0$ so, daß aus $0\leqq t<t'\leqq 1$, $t'-t\leqq\frac{1}{m}$ folgt $\sigma(f(t),\ f(t'))<\frac{\eta}{5}$. Dann wählen wir die Funktion $g=g(t)=(g_1(t),\ g_2(t))$ sukzessive in den Intervallen $\left[\frac{s}{m},\ \frac{s+1}{m}\right]$ $(s=0, 1, \ldots, m-1)$ so, daß folgendes gilt:

1. $g_1(t)$, $g_2(t)$ sind linear und nichtkonstant in $\left[\frac{s}{m},\ \frac{s+1}{m}\right]$ $(s=0, 1, \ldots, m-1)$.

2. $\sigma\left(g\left(\frac{s}{m}\right),\ f\left(\frac{s}{m}\right)\right)<\frac{\eta}{5}$ für $s=0, 1, \ldots, m$.

3. Der Punkt $g\left(\frac{s+1}{m}\right)$ liegt nicht in der Menge $g\left[0,\ \frac{s}{m}\right]$ $(s=1, 2, \ldots, m-1)$.

4. Die Strecke $g\left[\frac{s}{m},\ \frac{s+1}{m}\right]$ hat nur endlichviele Punkte mit dem Streckenzug $g\left[0,\ \frac{s}{m}\right]$ gemein $(s=1, 2, \ldots, m-1)$.

5. Die Strecke $g\left[\frac{s}{m},\ \frac{s+1}{m}\right]$ enthält keinen der endlichvielen „Doppelpunkte" des Streckenzuges $g\left[0,\ \frac{s}{m}\right]$ $(s=1,\ 2, \ldots,\ m-1)$.

Dann ist offenbar g eine Streckenfunktion und wie bei dem Beweis des Satzes 1 für $k>2$ zeigt man, daß $\rho(f, g)<\eta$ ist, w. z. b. w.

Wir beweisen nun die Behauptung α des Satzes 1 für $k=2$. Für ganzes $n>1$ sei D_n die Menge derjenigen $f \in C^2$, die folgende Eigenschaft haben: Es gibt drei Werte t_1, t_2, t_3 mit

$$(5)\qquad |t_1-t_2|\geqq\frac{1}{n},\ |t_1-t_3|\geqq\frac{1}{n},\ |t_2-t_3|\geqq\frac{1}{n},\ 0\leqq t_i\leqq 1 \quad (i=1, 2, 3),$$

so daß $f(t_1)=f(t_2)=f(t_3)$ ist. Ist X^2 die Menge derjenigen $f \in C^2$, welche nicht für drei voneinander verschiedene Werte $t \in [0, 1]$ denselben Wert annehmen können, so ist offenbar $X^2 = C^2 - \sum_{n=2}^{\infty} D_n$; es genügt uns also nachzuweisen, daß D_n nirgendsdicht ist. Es sei also K eine Kugel des Raumes C^2 mit dem Mittelpunkt f und dem Radius r; wir sollen die Existenz einer Kugel $K' \subset K \cdot (C^2 - D_n)$ nachweisen. Es gibt (Hilfssatz 3) eine Streckenfunktion g mit $\rho(f, g) < \frac{r}{2}$; nach der Definition der Streckenfunktionen ist

$$z = \operatorname{Min} \left(\sigma(g(t_1), g(t_2)) + \sigma(g(t_1), g(t_3))\right) > 0, \tag{6}$$

wo sich das Zeichen Min auf den Bereich (5) bezieht. Es sei K' die Kugel mit dem Mittelpunkt g und dem Radius $\operatorname{Min}\left(\frac{r}{2}, \frac{z}{4}\right)$; also $K' \subset K$. Es sei $h \in K'$; aus (5) folgt dann wegen (6) und wegen $\rho(g, h) < \frac{z}{4}$ die Ungleichung

$$\sigma(h(t_1), h(t_2)) + \sigma(h(t_1), h(t_3)) > 0;$$

also ist $h \in C^2 - D_n$. Also ist in der Tat $K' \subset K(C^2 - D_n)$, w. z. b. w.

§ 5. Beweis des Satzes 2 für $k = 2$.

Ist $f \in C^2$, so ist die Menge $f[0, 1]$ eine zusammenhängende kompakte nichtleere Menge des Raumes R^2. Es sind also nur folgende drei Fälle möglich:

1. $f[0, 1]$ ist einpunktig.
2. $f[0, 1]$ ist ein nirgendsdichtes Kontinuum, also eine Kurve[8]).
3. $f[0, 1]$ enthält ein Quadrat, also auch ein rationales Quadrat[9]) der Ebene R^2.

Wir wissen bereits, daß die $f \in C^2$ mit einpunktigen $f[0, 1]$ eine Menge erster Kategorie bilden (Hilfssatz 1). Da es nur abzählbarviele rationale Quadrate $Q \subset R^2$ gibt, genügt es, wenn wir noch zeigen: Ist Q ein Quadrat des Raumes R^2 und ist $C(Q)$ die Menge derjenigen $f \in C^2$, für welche $Q \subset f[0, 1]$ ist, so ist $C(Q)$ nirgendsdicht. Es sei also K eine Kugel des Raumes C^2 mit dem Mittelpunkt f und dem Radius r Wir sollen die Existenz einer Kugel $K' \subset K(C^2 - C(Q))$ nachweisen.

Es gibt (Hilfssatz 3) eine Streckenfunktion g mit $\rho(f, g) < \frac{r}{2}$. Da $g[0, 1]$ ein Streckenzug ist, gibt es einen Punkt $P \in Q$ und eine Zahl

[8]) In R^2 sind bekanntlich die nirgendsdichten Kontinua mit den Kurven identisch.

[9]) Ein rationales Quadrat der Ebene R^2 ist die Menge aller Punkte (x_1, x_2), welche den Ungleichungen $a \leq x_1 \leq a + d$, $b \leq x_2 \leq b + d$ mit rationalen a, b, d $(d > 0)$ genügen.

$\mu > 0$ so, daß kein Punkt $P' \in R^2$ mit $\sigma(P, P') < \mu$ zu $g[0,1]$ gehört. Ist $h \in C^2$, $\rho(h, g) < \text{Min}\left(\frac{r}{2}, \mu\right)$, so ist $h \in K$ und der Punkt $P \in Q$ gehört nicht zu $h[0,1]$. Ist also K' die Kugel mit dem Mittelpunkt g und dem Radius $\text{Min}\left(\frac{r}{2}, \mu\right)$, so gehört jedes $h \in K'$ zur Menge $K \cdot (C^2 - C(Q))$, w. z. b. w.

§ 6. Beweis des Satzes 3 für $k = 2$.

Wir zeigen zunächst, daß dieser Satz aus folgendem Hilfssatz folgt:

Hilfssatz 4. *Es sei* $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$, $\alpha \leqq \gamma \leqq \beta$, *$n$ ganz,* $n > 1$. *Wir bezeichnen mit* $A(\alpha, \beta, \gamma, n)$ *die Menge derjenigen* $f \in C^2$, *die folgende Eigenschaften haben:*

1. $f[\alpha, \beta]$ *besteht aus mehr als einem Punkte (also* $\delta(f[\alpha, \beta]) > 0$).

2. Es gibt n Kontinua $K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

a) $K_i \subset f[\alpha, \beta]$ *für* $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

b) $K_i K_j = 0$ *für* $0 \leqq i < j \leqq n-1$.

c) $\delta(K_i) \geqq \frac{1}{5}\, \delta(f[\alpha, \beta])$ *für* $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

d) $\sigma(f(\gamma), K_i) < \frac{1}{n}$ *für* $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Behauptung: $C^2 - A(\alpha, \beta, \gamma, n)$ *ist nirgendsdicht.*

Gesetzt, der Hilfssatz 4 sei wahr. Es sei $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), \ldots$ die Folge aller Systeme rationaler Zahlen $\alpha_l, \beta_l, \gamma_l$ mit $0 \leqq \alpha_l < \beta_l \leqq 1$, $\alpha_l \leqq \gamma_l \leqq \beta_l$. Wir setzen

$$W^2 = V^2 \cdot \prod_{n=2}^{\infty} \prod_{l=1}^{\infty} A(\alpha_l, \beta_l, \gamma_l, n)$$

(V^2 ist die Residualmenge des Satzes 2); nach dem Hilfssatz 4 ist W^2 eine Residualmenge. Es sei $f \in W^2$, $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$, $\alpha \leqq \gamma \leqq \beta$; wir sollen zeigen, daß $f(\gamma)$ ein irregulärer Punkt der Kurve $f[\alpha, \beta]$ ist.

Es gibt erstens ein m, so daß $\alpha < \alpha_m < \beta_m < \beta$ ist; wegen $f \in A(\alpha_m, \beta_m, \gamma_m, 2)$ besteht $f[\alpha_m, \beta_m]$ aus mehr als einem Punkte, also ist $\delta_0 = \delta(f[\alpha_m, \beta_m]) > 0$. Wegen $\alpha < \alpha_m < \beta_m < \beta$ besteht auch $f[\alpha, \beta]$ aus mehr als einem Punkte und wegen $f \in V^2$ ist $f[\alpha, \beta] \subset f[0,1]$ nirgendsdicht; also ist $f[\alpha, \beta]$ tatsächlich eine Kurve. Es sei $U \subset R^2$ eine beliebige Umgebung des Punktes $f(\gamma)$ mit $\delta(U) < \frac{1}{5}\, \delta_0$; der Satz 3 wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, daß der Durchschnitt der Menge $f[\alpha, \beta]$ mit der Begrenzung von U unendlich ist, d. h. daß er für jedes n_0 mehr als n_0 Punkte enthält.

Es sei also $n_0 \geqq 2$, n_0 ganz. Es gibt ein $\delta_1 > 0$, so daß alle Punkte der Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt $f(\gamma)$ und dem Radius δ_1 zu U gehören. Wir wählen zwei ganze positive Zahlen n, l so, daß folgendes gilt:

$$\alpha < \alpha_l < \alpha_m < \beta_m < \beta_l < \beta, \ \sigma(f(\gamma), f(\gamma_l)) < \frac{1}{2}\delta_1, \ n > n_0,$$
$$\frac{1}{n} < \frac{1}{2}\delta_1.$$

Wegen $f \in A(\alpha_l, \beta_l, \gamma_l, n)$ gibt es n paarweise fremde Kontinua $K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $K_i \subset f[\alpha_l, \beta_l] \subset f[\alpha, \beta]$;
2. $\delta(K_i) \geqq \frac{1}{5}\delta(f[\alpha_l, \beta_l]) \geqq \frac{1}{5}\delta(f[\alpha_m, \beta_m]) = \frac{1}{5}\delta_0$;
3. $\sigma(f(\gamma), K_i) \leqq \sigma(f(\gamma), f(\gamma_l)) + \sigma(f(\gamma_l), K_i) < \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{n} < \delta_1$.

Wegen $\delta(K_i) \geqq \frac{1}{5}\delta_0 > \delta(U)$ enthält jedes K_i mindestens einen Punkt aus $R^2 - U$; wegen $\sigma(f(\gamma), K_i) < \delta_1$ enthält jedes K_i mindestens einen Punkt aus U. Also enthält die Begrenzung von U mindestens einen Punkt von K_i; also — da die K_i paarweise fremd sind — enthält der Durchschnitt der Menge $f[\alpha, \beta]$ mit der Begrenzung von U mindestens n, also mehr als n_0 Punkte, w. z. b. w.

Dem Beweis des Hilfssatzes 4 schicken wir noch folgenden einfachen Hilfssatz voraus:

Hilfssatz 5. *Es seien* $[\alpha_i, \beta_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ *paarweise fremde Teilintervalle des Intervalls* $[0, 1]$. *Es sei* $h \in C^2$; *für jedes* i $(1 \leqq i \leqq l)$ *sei* $h[\alpha_i, \beta_i]$ *eine Strecke, wobei der Durchschnitt* $h[\alpha_i, \beta_i] \,.\, h[\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}]$ *für jedes* i $(1 \leqq i \leqq l-1)$ *aus genau einem Punkt besteht, welcher innerer Punkt dieser beiden Strecken* $h[\alpha_i, \beta_i]$, $h[\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}]$ *ist.*

Behauptung: Es gibt ein $\eta > 0$, *so daß für* $\varphi \in C^2$, $\rho(\varphi, h) < \eta$ *die Menge* $\sum_{i=1}^{l} \varphi[\alpha_i, \beta_i]$ *ein Kontinuum ist.*

Beweis. Es gibt offenbar eine Zahl $\eta > 0$ mit folgender Eigenschaft: Ist A_i die Menge derjenigen Punkte $P \in R^2$, für welche $\sigma(P, h[\alpha_i, \beta_i]) < \eta$ ist und sind B_i, D_i zwei Kreise des Raumes R^2 vom Radius η, deren Mittelpunkte die beiden Endpunkte der Strecke $h[\alpha_i, \beta_i]$ sind, so ist $B_i A_{i+1} = D_i A_{i+1} = B_{i+1} A_i = D_{i+1} A_i = 0$ für $1 \leqq i \leqq l-1$ (vgl. die Fig. 1). Ist nun $\varphi \in C^2$, $\rho(h, \varphi) < \eta$, so ist $\varphi[\alpha_i, \beta_i] \subset A_i$, $\varphi[\alpha_i, \beta_i]\, B_i \neq 0$, $\varphi[\alpha_i, \beta_i]\, D_i \neq 0$ für $i = 1, 2, \ldots, l$.

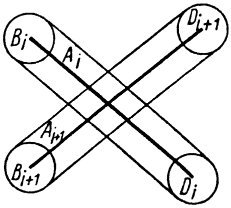

Fig. 1.

Daraus folgt aber sofort, daß die beiden Kontinua $\varphi[\alpha_i, \beta_i]$, $\varphi[\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}]$

$(1 \leqq i \leqq l-1)$ einen nichtleeren Durchschnitt haben[10]); also ist $\sum_{i=1}^{l} \varphi[\alpha_i, \beta_i]$ zusammenhängend, w. z. b. w.

Unsere letzte Aufgabe besteht nun in dem

Beweis des Hilfssatzes 4. Es sei also $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1, \alpha \leqq \gamma \leqq \beta$, n ganz, $n > 1$. Wir sollen beweisen, daß $C^2 - A(\alpha, \beta, \gamma, n)$ nirgendsdicht ist, oder: wir sollen beweisen, daß es zu jeder Kugel K des Raumes C^2 eine Kugel $K' \subset K \cdot A(\alpha, \beta, \gamma, n)$ gibt.

Es sei also K eine Kugel des Raumes C^2 mit dem Mittelpunkt f und dem Radius $r > 0$. Nach dem Hilfssatz 3 gibt es eine Streckenfunktion g mit $\rho(f,g) < \frac{r}{3}$. Das Bild $g[\alpha,\beta]$ ist nicht einpunktig, also ist $\delta_2 = \delta(g[\alpha,\beta]) > 0$. Es gibt einen Punkt $P \epsilon g[\alpha,\beta]$ mit $\sigma(g(\gamma),P) \geqq \frac{\delta_2}{2}$. Es gibt dann offenbar eine nichtleere Menge von Intervallen $[T_1, T'_1]$, $[T_2, T'_2], \ldots, [T_s, T'_s]$[11]) $(s \geqq 1)$, welche folgende Eigenschaften besitzen:

E 1. $[T_i, T'_i] \subset [\alpha, \beta]$ $(1 \leqq i \leqq s)$.

E 2. $g(T_1) = g(\gamma)$, $g(T'_s) = P$.

E 3. $g_1(t)$, $g_2(t)$ sind linear (und offenbar nicht konstant) in $[T_i, T'_i]$ $(1 \leqq i \leqq s)$.

E 4. $g[T_i, T'_i] \cdot g[T_k, T'_k] = g(T'_i) = g(T_k)$ für $k = i+1$ $(1 \leqq i \leqq s-1)$; $g[T_i, T'_i] \cdot g[T_k, T'_k] = 0$ für $k > i+1$ $(1 \leqq i \leqq s-2)$.

Aus E 3, E 4 folgt offenbar

E 5. $[T_i, T'_i] \cdot [T_k, T'_k] = 0$ für $k > i+1$ $(1 \leqq i \leqq s-2)$; für $1 \leqq i \leqq s-1$ ist dagegen entweder $[T_i, T'_i] \cdot [T_{i+1}, T'_{i+1}] = T'_i = T_{i+1}$ oder $[T_i, T'_i] \cdot [T_{i+1}, T'_{i+1}] = 0$.

E 6. Wird $\Delta = \sum_{i=1}^{s} [T_i, T'_i]$ gesetzt, so ist $g(\Delta)$ offenbar ein sich nicht durchsetzender Streckenzug, dessen Endpunkte die Punkte $g(T_1) = g(\gamma)$ und $g(T'_s) = P$ sind.

Aus E 3, E 4 folgt weiter: Ist $t \epsilon \Delta$, $g(t) = g(T_1)$, so ist $t = T_1$; wegen E 2 folgt daraus

---

[10]) Sonst könnte man nämlich zwei offene zusammenhängende Mengen L_i, L_{i+1} konstruieren, so daß $\varphi[\alpha_i, \beta_i] \subset L_i \subset A_i$, $\varphi[\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}] \subset L_{i+1} \subset A_{i+1}$, $L_i L_{i+1} = 0$. Dann könnte man aber zwei einfache Streckenzüge S_i, S_{i+1} konstruieren, so daß $S_i \subset L_i$, $S_{i+1} \subset L_{i+1}$, $S_i B_i \neq 0 \neq S_i D_i$, $S_{i+1} B_{i+1} \neq 0 \neq S_{i+1} D_{i+1}$ wäre. Nach dem Jordanschen Satze sieht man aber leicht ein, daß $S_i S_{i+1} \neq 0$ sein müßte, im Widerspruch gegen $S_i S_{i+1} \subset L_i L_{i+1} = 0$.

[11]) Hier und im folgenden darf in der Bezeichnung $[a, b]$ die Zahl a eventuell auch den rechten, die Zahl b den linken Endpunkt des Intervalls $[a, b]$ bedeuten. Wir setzen im folgenden $g(t) = (g_1(t), g_2(t))$; $h(t) = (h_1(t), h_2(t))$.

E 7. Es ist entweder $\gamma = T_1$ oder $\gamma \in [\alpha, \beta] - \Delta$.

Wir definieren nun eine Funktion $h \in C^2$ folgendermaßen: für $t \in [0, 1] - \Delta$ setzen wir $h(t) = g(t)$; für $t \in [T_i, T'_i]$ $(1 \leqq i \leqq s)$ definieren wir $h(t) = (h_1(t), h_2(t))$ wie folgt.

Wir wählen eine ganze Zahl $m > 1$ (die wir erst nachher festlegen werden) und zeichnen $s \cdot m$ kurze Strecken S^0_{il} $(i = 1, 2, \ldots, s;$ $l = 0, 1, \ldots, m-1)$ in R^2 so, daß ein Endpunkt der Strecke S^0_{il} mit dem Punkte $g\left(T_i + \frac{l}{m}(T'_i - T_i)\right)$ zusammenfällt. Dann zeichnen wir noch $s \cdot m$ kurze Strecken Z^0_{il} $(i = 1, 2, \ldots, s;$ $l = 0, 1, \ldots, m-1)$ so, daß erstens die Strecke Z^0_{il} mit S^0_{il} genau einen Punkt gemein hat, der innerer Punkt dieser beiden Strecken ist und daß zweitens die Strecke Z^0_{il} mit der Strecke $S^0_{i\,l+1}$ auch genau einen Punkt gemein hat, der innerer Punkt dieser beiden Strecken ist [wobei für $1 \leqq i \leqq s-1$, $l = m-1$ die (nicht definierte) Strecke $S^0_{i\,l+1}$ durch $S^0_{i+1\,0}$ zu ersetzen ist und für $i = s$, $l = m-1$ die zweite Bedingung wegfällt[12])]. So bekommen wir ein Kontinuum $\mathfrak{K}_0$, welches aus den $2\,sm$ Strecken S^0_{il}, Z^0_{il} besteht. Wir konstruieren dann noch $n-1$ weitere Kontinua $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_{n-1}$, wobei das Kontinuum $\mathfrak{K}_x$ $(1 \leqq x \leqq n-1)$ wieder aus $2\,sm$ Strecken S^x_{il}, Z^x_{il} $(i = 1, 2, \ldots, s;$ $l = 0, 1, \ldots, m-1)$ besteht, wobei die Durchschnitte der S^x_{il}, $Z^x_{i'l'}$ denselben Bedingungen genügen, die wir oben für die S^0_{il}, $Z^0_{i'l'}$ aufgestellt haben. Dabei wollen wir die S^x_{il}, Z^x_{il} so wählen, daß

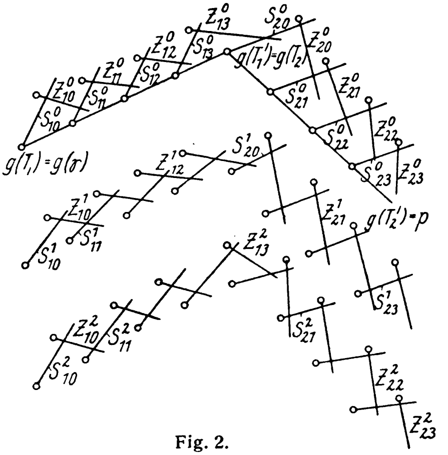

Fig. 2.

$$\mathfrak{K}_x \mathfrak{K}_y = 0 \quad (0 \leqq x < y \leqq n-1)\text{[13]}. \tag{7}$$

Wir setzen

$$\lambda = \operatorname{Min}\left(\frac{r}{3}, \frac{\delta_2}{16}, \frac{1}{2n}\right). \tag{8}$$

---

[12]) Vgl. die Fig. 2, wo $m = 4$, $s = 2$ ist.

[13]) Die Möglichkeit einer solchen Konstruktion ist klar (man beachte, daß $g(\Delta)$ ein *einfacher* Streckenzug ist); vgl. die Fig. 2, wo der Fall $s = 2$, $m = 4$, $n = 3$ dargestellt ist.

Wenn m hinreichend groß ist, können wir offenbar die Strecken S_{il}^x, Z_{il}^x so wählen, daß für jedes i $(1 \leqq i \leqq s)$ und jedes l $(0 \leqq l \leqq m-1)$ die Ungleichung

$$(9) \qquad \delta\left(g\left[T_i + \frac{l}{m}(T_i' - T_i),\; T_i + \frac{l+1}{m}(T_i' - T_i)\right] + \sum_{x=0}^{n-1}(S_{il}^x + Z_{il}^x)\right) < \lambda$$

gilt; das wollen wir tun.

Auf jeder Strecke S_{il}^x, Z_{il}^x wählen wir einen von ihren Endpunkten für ihren „ersten", den anderen für ihren „zweiten" Endpunkt[14]). Dabei wählen wir insbesondere den Punkt $g\left(T_i + \frac{l}{m}(T_i' - T_i)\right)$ für den ersten Endpunkt der Strecke S_{il}^0 $(1 \leqq i \leqq s,\; 0 \leqq l \leqq m-1)$; sonst ist die Wahl beliebig.

Wir wählen nun die Funktion $h(t) = (h_1(t), h_2(t))$ für $T_i \leqq t \leqq T_i'$ $(1 \leqq i \leqq s)$ folgendermaßen:

1. Für $T_i + \frac{z}{4nm}(T_i' - T_i) \leqq t \leqq T_i + \frac{z+1}{4nm}(T_i' - T_i)$ $(z = 0, 1, \ldots, 4nm-1)$ sei $h_1(t)$ und $h_2(t)$ linear.

2. Für $x = 0, 1, \ldots, n-1$; $l = 0, 1, \ldots, m-1$ sei

$$h\left(T_i + \frac{4nl + 2x}{4nm}(T_i' - T_i)\right) \text{ der erste Endpunkt und}$$

$$h\left(T_i + \frac{4nl + 2x + 1}{4nm}(T_i' - T_i)\right) \text{ der zweite Endpunkt}$$

der Strecke S_{il}^x. Ebenso sei $h\left(T_i + \frac{4nl + 2n + 2x}{4nm}(T_i' - T_i)\right)$ der erste Endpunkt und $h\left(T_i + \frac{4nl + 2n + 2x + 1}{4nm}(T_i' - T_i)\right)$ der zweite Endpunkt der Strecke Z_{il}^x.

3. Endlich sei $h(T_i') = g(T_i')$ [15]).

Dadurch ist h vollständig definiert. Für $t = T_i$ oder $t = T_i'$ ist $h(t) = g(t)$ [16]); da diese Gleichung auch für $t \in [0,1] - \Delta$ besteht, so ist h stetig, also $h \in C^2$.

Aus (9) folgt, daß jeder Punkt des Streckenzuges

$$h\left[T_i + \frac{l}{m}(T_i' - T_i),\; T_i + \frac{l+1}{m}(T_i' - T_i)\right]$$

von jedem Punkte der Strecke

---

[14]) Auf der Fig. 2 sind die „ersten" Endpunkte durch kleine Kreise markiert.

[15]) Ist $T_i' = T_{i+1}$, so ist zwar $h(T_i')$ zweimal definiert: erstens $h(T_i') = g(T_i')$, zweitens soll $h(T_{i+1})$ der erste Endpunkt der Strecke $S_{i+1\,0}^0$ sein; dieser Endpunkt ist aber genau der Punkt $g(T_{i+1}) = g(T_i')$, so daß beide Definitionen im Einklang sind.

[16]) Für $t = T_i$ folgt es daraus, daß $h(T_i)$ der erste Endpunkt der Strecke S_{i0}^0 ist.

$$g\ \left[T_i + \frac{l}{m}(T'_i - T_i),\ T_i + \frac{l+1}{m}(T'_i - T_i)\right]$$

um weniger als λ entfernt ist $(1 \leqq i \leqq s,\ 0 \leqq l \leqq m-1)$. Nach (8) ist also

$$\rho(g, h) < \operatorname{Min}\left(\frac{r}{3}, \frac{\delta_2}{16}, \frac{1}{2n}\right). \tag{10}$$

Daraus folgt sofort $(\delta_2 = \delta\ (g\,[\alpha, \beta]))$:

$$\frac{9}{8}\delta_2 = \delta_2 + \frac{2}{16}\delta_2 \geqq \delta(h\,[\alpha, \beta]) \geqq \delta_2 - \frac{2}{16}\delta_2 = \frac{7}{8}\delta_2. \tag{11}$$

Nach E 7 ist entweder $\gamma = T_1$ oder $\gamma \epsilon [0, 1] - \Delta$, also jedenfalls $h(\gamma) = g(\gamma)$; da auch $h(T_1) = g(T_1)$ ist, so ist nach E 2

$$h(T'_1) = h(\gamma). \tag{12}$$

Der erste Endpunkt von S^x_{10} $(0 \leqq x \leqq n-1)$ (der zu $\mathfrak{K}_x$ gehört) ist nach (9), (8) von dem Punkt $h(\gamma) = h(T_1) = g(T_1)$ um weniger als $\operatorname{Min}\left(\frac{\delta_2}{16}, \frac{1}{2n}\right)$ entfernt. Ebenso ist der zweite Endpunkt von $Z^x_{s, m-1}$ (der auch zu $\mathfrak{K}_x$ gehört) nach (9), (8) vom Punkt $P = g(T'_s)$ um weniger als $\frac{\delta_2}{16}$ entfernt. Also ist erstens

$$\sigma\ (h(\gamma),\ \mathfrak{K}_x) < \frac{1}{2n} \quad (0 \leqq x \leqq n-1), \tag{13}$$

zweitens

$$\delta\ (\mathfrak{K}_x) \geqq \sigma\,(g(\gamma),\ P) - \frac{2\,\delta_2}{16} \geqq \frac{3}{8}\delta_2 \quad (0 \leqq x \leqq n-1). \tag{14}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$I^x_{il} = \left[T_i + \frac{4nl + 2x}{4nm}(T'_i - T_i),\ T_i + \frac{4nl + 2x + 1}{4nm}(T'_i - T_i)\right],$$

$$J^x_{il} = \left[T_i + \frac{4nl + 2n + 2x}{4nm}(T'_i - T_i),\ T_i + \frac{4nl + 2n + 2x + 1}{4nm}(T'_i - T_i)\right];$$

dann ist

$$S^x_{il} = h\,(I^x_{il}),\ Z^x_{il} = h\,(J^x_{il}),\ \mathfrak{K}_x = \sum_{i=1}^{s}\ \sum_{l=0}^{m-1}(h\,(I^x_{il}) + h\,(J^x_{il})).$$

Wegen der Durchschnittseigenschaften von S^x_{il}, $Z^x_{i'l'}$ können wir den Hilfssatz 5 anwenden; es gibt also eine Zahl $\eta > 0$, so daß für $\varphi \epsilon C^2$, $\rho\,(\varphi, h) < \eta$ die Menge

$$\mathfrak{K}^{\varphi}_x = \sum_{i=1}^{s}\ \sum_{l=0}^{m-1}(\varphi\,(I^x_{il}) + \varphi\,(J^x_{il})) \quad (0 \leqq x \leqq n-1)$$

ein Kontinuum ist (bei dieser Bezeichnung ist $\mathfrak{K}_x = \mathfrak{K}^h_x$). Wegen (7) gibt es eine Zahl $\xi > 0$, so daß

$$\sigma(\mathfrak{K}^h_x, \mathfrak{K}^h_y) > \xi \quad (0 \leqq x < y \leqq n-1);$$

für $\varphi \in C^2$, $\rho(\varphi, h) < \frac{\xi}{2}$ ist also

$$\mathfrak{K}^\varphi_x \, \mathfrak{K}^\varphi_y = 0 \quad \text{für } 0 \leqq x < y \leqq n-1.$$

Es sei nun K' die Kugel des Raumes C^2 mit dem Mittelpunkt h und dem Radius $R = \operatorname{Min}\left(\frac{r}{3}, \frac{\delta_2}{16}, \eta, \frac{1}{2}\xi, \frac{1}{4n}\right)$.

Es sei $\varphi \in K'$; dann ist erstens — wegen (10) — $\rho(f, \varphi) \leqq \rho(f, g) + \rho(g, h) + \rho(h, \varphi) < 3\frac{r}{3}$, also $\varphi \in K$. Zweitens ist wegen $\rho(h, \varphi) < \frac{\delta_2}{16}$ und nach (11)

$$(15) \quad \frac{5}{4}\delta_2 \geqq \delta(h[\alpha, \beta]) + \frac{2\delta_2}{16} \geqq \delta(\varphi[\alpha, \beta]) \geqq \delta(h[\alpha, \beta]) - \frac{2\delta_2}{16} \geqq \frac{3}{4}\delta_2,$$

also enthält $\varphi[\alpha, \beta]$ mehr als einen Punkt.

Wegen $\rho(h, \varphi) < \eta$ sind die n Mengen $\mathfrak{K}^\varphi_x$ $(0 \leqq x \leqq n-1)$ Kontinua, welche folgende Eigenschaften haben:

a) $\mathfrak{K}^\varphi_x \subset \varphi[\alpha, \beta]$ (denn $I^x_{il} + J^x_{il} \subset [\alpha, \beta]$).

b) $\mathfrak{K}^\varphi_x \, \mathfrak{K}^\varphi_y = 0$ für $0 \leqq x < y \leqq n-1$ (wegen $\rho(\varphi, h) < \frac{\xi}{2}$).

c) $\delta(\mathfrak{K}^\varphi_x) \geqq \frac{1}{5}\delta(\varphi[\alpha, \beta])$ für $0 \leqq x \leqq n-1$ (denn nach (14), (15) ist

$$\delta(\mathfrak{K}^\varphi_x) \geqq \delta(\mathfrak{K}^h_x) - 2\rho(\varphi, h) \geqq \frac{3}{8}\delta_2 - \frac{2}{16}\delta_2 = \frac{1}{4}\delta_2 \geqq \frac{1}{5}\delta(\varphi[\alpha, \beta])).$$

d) $\sigma(\varphi(\gamma), \mathfrak{K}^\varphi_x) < \frac{1}{n}$ für $0 \leqq x \leqq n-1$ (denn aus (13) folgt

$$\sigma(\varphi(\gamma), \mathfrak{K}^\varphi_x) \leqq \sigma(\varphi(\gamma), h(\gamma)) + \sigma(h(\gamma), \mathfrak{K}^h_x) + \rho(h, \varphi) < \frac{1}{4n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n} = \frac{1}{n}).$$

Nach der Definition der Menge $A(\alpha, \beta, \gamma, n)$ (vgl. den Wortlaut des Hilfssatzes 4) ist also $\varphi \in A(\alpha, \beta, \gamma, n)$. Aus $\varphi \in K'$ folgt also $\varphi \in K \cdot A(\alpha, \beta, \gamma, n)$; d. h. es ist $K' \subset K \cdot A(\alpha, \beta, \gamma, n)$, w. z. b. w.

Anmerkung bei der Korrektur. Leider kannte ich während der Abfassung dieser Arbeit noch nicht die wichtige Arbeit von W. Hurewicz, Über Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmengen Cartesischer Räume (S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1933, S. 754—768). Durch diese Arbeit sind die Betrachtungen des § 3, § 5 und die letzten 20 Zeilen des § 4 eigentlich überflüssig geworden, da die dort bewiesenen Resultate Spezialfälle des Satzes von Hurewicz sind.

(Eingegangen: 6. III. 1934.)